



## RECUEILS D'EXERCICES CORRIGES

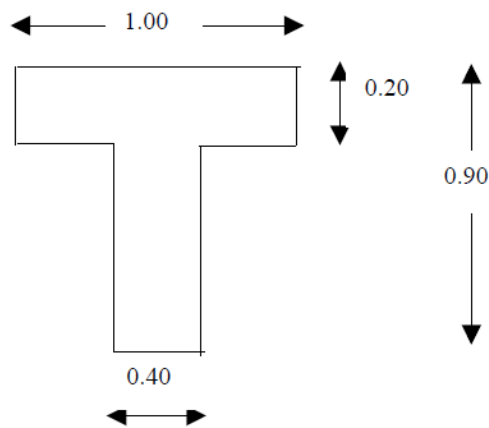
## EXEMPLES PORTANT SUR LES CHAPITRES 1 & 2

### 1. CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES SECTIONS

#### EXEMPLE 1 : ETUDE D'UNE SECTION EN T

Déterminer, pour la poutre en T ci-dessous, les caractéristiques géométriques suivantes :

L'aire de la section (B), le moment statique (S), la distance de la fibre supérieure (V) et la distance de la fibre inférieure (V'), le moment d'inertie (I), le module de résistance (I/V et I/V'), le rayon de giration (i) et le rendement de la section ( $\rho$ )



#### RESOLUTION

□ L'aire de la section

$$B = \sum B_i = 0.48 \text{ m}^2$$

□ Le moment statique

$$S = \sum B_i d_i = 0.174 \text{ m}^3$$

□ La distance de la fibre supérieure ( $V_s$ )

$$V_s = S/B = 0.363 \text{ m}$$

□ La distance de la fibre inférieure ( $V_i$ )

$$V_i = h - V_s = 0.537 \text{ m}$$

□ Le moment d'inertie (I)

$$I = \sum I_i + \sum B_i \Delta_i^2 = 0.03572 \text{ m}^4$$

□ *Le module de résistance (W)*

$$W_s = I/V_s = 0.0984 \text{ m}^3$$

$$W_i = I/V_i = 0.0665 \text{ m}^3$$

□ *Le rayon de giration (i)*

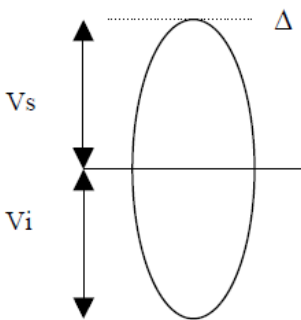
$$i = \sqrt{\frac{I}{B}} = 0.273 \text{ m}$$

□ *Le rendement de la section (ρ)*

$$\rho = \frac{I}{BV_s V_i} = 0.382$$

**EXEMPLE 2 : ETUDE D'UNE SECTION**

Soit une section avec les caractéristiques suivantes : h = 110 cm ; B = 0.3912 m<sup>2</sup>, moment statique S = 0.17315 m<sup>3</sup>, moment d'inertie I<sub>Δ</sub> = 0.131944 m<sup>4</sup>



1) Déterminer les caractéristiques de la section brute : la distance de la fibre supérieure Vs, la distance de la fibre inférieure Vi, le moment d'inertie par rapport au centre de gravité I<sub>G</sub> [m<sup>4</sup>], le rendement géométrique de la section ρ.

2) Cette section comporte 4 gaines de 70 mm de diamètre situées respectivement à 105 mm et 245 mm de la fibre inférieure. Le centre de gravité des gaines est à 0.925 m de la fibre supérieure. Déterminer les caractéristiques de la section nette:

l'aire de la section B<sub>n</sub> [m<sup>2</sup>], le moment statique S<sub>n</sub> [m<sup>3</sup>], la distance de la fibre supérieure Vs [m], la distance de la fibre inférieure Vi [m], le moment d'inertie par rapport à l'axe «Δ» I<sub>nΔ</sub> [m<sup>4</sup>], le moment d'inertie par rapport au centre de gravité I<sub>nG</sub> [m<sup>4</sup>], le rendement de la section ρ<sub>n</sub>

3). Les gaines contiennent chacune un Câble 9T15 de section 1251 mm<sup>2</sup>. Le coefficient d'équivalence est pris égal à 5. Déterminer les caractéristiques de la section homogène : l'aire de la section B<sub>h</sub> [m<sup>2</sup>], le moment statique S<sub>h</sub> [m<sup>3</sup>], la distance de la fibre supérieure V<sub>hs</sub> [m], la distance de la fibre inférieure V<sub>hi</sub> [m], le moment d'inertie par rapport à l'axe «Δ» I<sub>hΔ</sub> [m<sup>4</sup>], le moment d'inertie par rapport au centre de gravité I<sub>hG</sub> [m<sup>4</sup>] et le rendement de la section ρ<sub>h</sub>

**RESOLUTION**

***Section brute***

□ *Distance de la fibre supérieure :*

$$V_{bs} = S_b/B_b = 0.4426 \text{ m}$$

□ *Distance de la fibre inférieure :*

$$V_{bi} = h - V_{bs} = 0.6574 \text{ m}$$

□ *Moment d'inertie par rapport au centre de gravité :*

$$I_{bG} = I_{\Delta} - B_b V_{bs}^2 = 0.055310 \text{ m}^4$$

□ Rendement de la section  $\rho$

$$\rho = I_{bG} / B_b V_{bs} V_{bi} = 0.486$$

### **Section nette**

□ Aire de la section

$$B_n = B_b - B_{gaines} = 0.37581 \text{ m}^2$$

□ Moment statique

$$S_n = S_b - B_{gaines} V = 0.15891 \text{ m}^3$$

□ Distance de la fibre supérieure

$$V_{ns} = S_n / B_n = 0.4228 \text{ m}$$

□ Distance de la fibre inférieure

$$V_{ni} = h - V_{ns} = 0.6772 \text{ m}$$

□ Moment d'inertie par rapport à l'axe «  $\Delta$  »

$$I_{n\Delta} = I_{\Delta} - B_{gaines} V^2 = 0.118776 \text{ m}^4$$

□ Moment d'inertie par rapport au centre de gravité

$$I_{nG} = I_{\Delta} - B_n V_{ns}^2 = 0.0516 \text{ m}^4$$

□ Rendement de la section  $\rho_n$

$$\rho = I_{nG} / B_n V_{ns} V_{ni} = 0.479$$

### **Section homogène**

□ Aire de la section

$$B_h = B_n + n B_p = 0.40083 \text{ m}^2$$

□ Moment statique  $S_h$  [ $\text{m}^3$ ]

$$S_h = S_n + n B_p V = 0.182053 \text{ m}^3$$

□ Distance de la fibre supérieure

$$V_{hs} = S_h / B_h = 0.45419 \text{ m}$$

□ Distance de la fibre inférieure

$$V_{hi} = h - V_{hs} = 0.64581 \text{ m}$$

□ Moment d'inertie par rapport à l'axe «  $\Delta$  »

$$I_{h\Delta} = I_{n\Delta} + n B_p V^2 = 0.140184 \text{ m}^4$$

□ Moment d'inertie par rapport au centre de gravité

$$I_{hG} = I_{h\Delta} + B_h V_{hs}^2 = 0.057497 \text{ m}^4$$

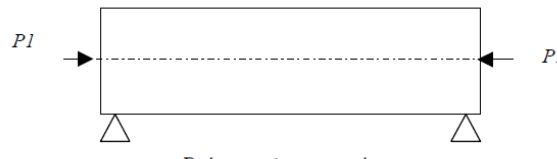
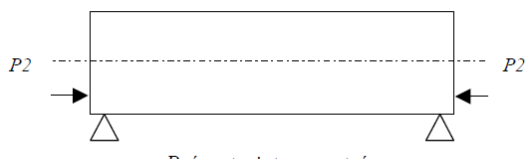
□ Rendement de la section  $\rho_h$

$$\rho = I_{hg} / B_h V_{hs} V_{hi} = 0.489$$

**2. COMBINAISONS D’ACTIONS ET CALCUL DES SOLLICITATIONS**

**EXEMPLE 3 : IMPACT DE L’EXCENTRICITE DE L’EFFORT DE PRECONTRAINT**

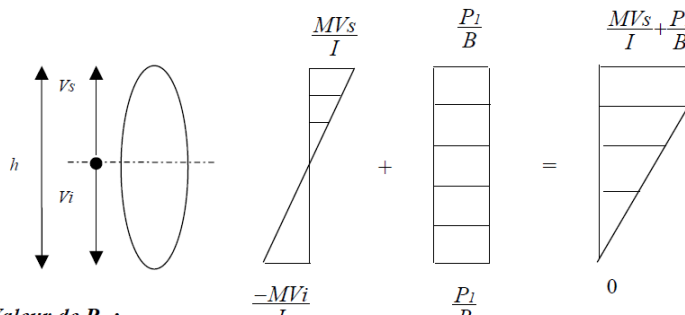
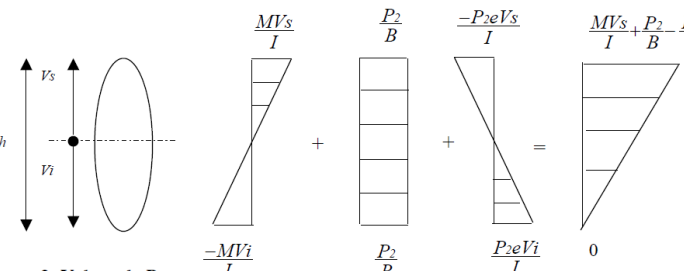
Soit une poutre de section rectangulaire (50, 120 cm) soumise à un moment fléchissant extérieur M et à un effort de précontrainte centrée P1 ou excentrée P2.

Cas 1 : l’effort de précontrainte est centré	Cas 2 : l’effort de précontrainte est excentré de $e_0$
 <p style="text-align: center;">Précontrainte centrée</p>	 <p style="text-align: center;">Précontrainte excentrée</p>

On demande de :

Déterminer la valeur de P1 et de P2 en précontrainte totale (pas de traction). Conclure.

**RESOLUTION**

Cas 1 : détermination de P1	Cas 2 : détermination de P2 ( $e_0 = - 0,45$ m)
<p>1. Diagramme des contraintes</p>  <p>2. Valeur de P1 :</p> $-\frac{MVi}{I} + \frac{P1}{B} = 0 \Rightarrow P1 = \frac{MVi}{I} B$ <p><b>A.N : P1 = 4 MN</b></p>	 <p>2. Valeur de P2 :</p> $-\frac{MVs}{I} + \frac{P2}{B} + \frac{P2eVi}{I} = 0 \Rightarrow P2 = \frac{MVs}{I \left( \frac{1}{B} + \frac{eVi}{I} \right)}$ <p><b>A.N : P2 = 1,231 MN</b></p>

**Conclusion :** grâce à l’excentrement de la précontrainte, on a diminué l’effort de précontrainte et la contrainte maximale dans le béton. D’où une économie substantielle d’acier et de béton.

## EXEMPLES PORTANT SUR LES CHAPITRES 3 & 4

### 1. DETERMINATION DE LA PRECONTRAINTE ET SON EXCENTRICITE

#### EXEMPLE 4 : SECTION SOUS – CRITIQUE OU SUR - CRITIQUE

Soit une poutre de section rectangulaire (50x120) cm soumise aux moments  $M_{\min}=1.2$  MNm et  $M_{\max}=3.2$  MNm avec une valeur de l'enrobage telle que  $d_i=0.15$ m.

- 1) Déterminer la valeur de la précontrainte (P1 et P2).
- 2) Donner une constatation sur la nature de la section.
- 3) Déterminer la valeur de l'excentricité  $e_0$

#### RESOLUTION

*En section sous critique, la valeur de la précontrainte est déterminée par l'équation :*

$$P_I = \frac{\Delta M}{\rho h}$$

avec :

$$\Delta M = 2 \text{ MNm}$$

$$\rho = 1/3$$

$$h = 1.20 \text{ m}$$

$$\text{d'où : } P_I = 5 \text{ MN}$$

*En section sur critique (moment positif), la valeur de la précontrainte est déterminée par l'équation :*

$$P_{II} = \frac{M_M}{V_i + \rho V_s - d_i}$$

$$M_{\max} = 3.2 \text{ MNm}$$

$$\rho = 1/3$$

$$V_s = V_i = 0.60 \text{ m}$$

$$d_i = 0.15 \text{ m}$$

$$\text{d'où : } P_2 = 4.92 \text{ MN}$$

*On constate que  $P_1 > P_2$  d'où la section est sous critique*

*La valeur de l'excentricité  $e_0$  est donnée par :*

$$-C_i - \frac{M_m}{P_I} = e_0 = C_s - \frac{M_M}{P_I}$$

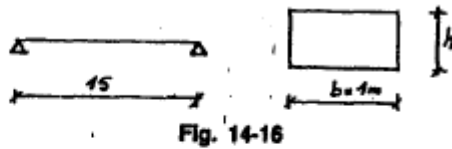
$$C_s = \rho V_s = 0.2 \text{ m}$$

$$P1 = 5 \text{ MN}$$

$$\text{d'où : } e_0 = -0.44 \text{ m}$$

**EXEMPLE 5 : SECTION MINIMALE DE BETON**

• *Exemple 1 :* Soit une dalle de 15 m de portée, soumise à une charge d'exploitation  $q = 0,05 \text{ MN/m}^2$  (fig. 14-16).



Nous utiliserons des gaines de 71 mm de diamètre extérieur, l'enrobage minimum par rapport à l'axe vaut (cf. chapitre 20):

$$1,5 \phi_g = 1,5 \times 7,1 = 10,65 \text{ cm} = 0,107 \text{ m}$$

Le béton utilisé a une résistance de 30 MPa.

Supposons que la contrainte admissible en compression soit:

$$0,5 f_{c28} = 15 \text{ MPa et en traction } \bar{\sigma}_{cs} = \bar{\sigma}_{ti} = 0.$$

Si la section était sous-critique, on aurait:  $\frac{I}{v} = \frac{\Delta M}{\Delta \sigma}$

$$\text{avec: } \Delta M = \frac{q \ell^2}{8} = \frac{0,05 \times 15^2}{8} = 1,406 \text{ MNm}$$

$$\bar{\Delta \sigma} = 15 \text{ MPa}$$

$$\frac{bh^2}{6} = \frac{I}{v} = 0,0938 \text{ m}^3$$

soit:  $h = 0,75 \text{ m}$  avec:  $b = 1 \text{ m}$  (largeur unité),

$$\text{la précontrainte vaut: } P = \frac{\Delta M}{\rho h} = \frac{1,406}{1/3 \times 0,75} = 5,624 \text{ MN}$$

$$\text{l'excentricité vaut: } e_o = -c' - \frac{M_{\min}}{P}$$

$$\text{avec: } c' = \rho v' = \frac{1}{3} \times 0,375 = 0,125 \text{ m}$$

$$M_{\min} = g \frac{\ell^2}{8} \text{ avec: } g = 2,5 \times 0,75 \times \frac{9,81}{1000} = 0,01839 \text{ MN/m}$$

$$M_{\min} = 0,517 \text{ MNm}$$

$$e_o = -0,125 - \frac{0,517}{5,624} = -0,217$$

$$\text{or: } 0,217 < \frac{0,75}{2} - 0,107 = 0,268 \text{ m}$$

La section est bien sous-critique.

**2. PERTES DE PRECONTRAINTE**

**EXEMPLE 6 : PERTES DE PRECONTRAINTE**

Soit une poutre de 40 m de longueur, précontrainte par des câbles formés de torons de classe 1770 de résistance à très basse relaxation (TBR) avec une relaxation garantie à 1000 heures:  $\rho_{1000} = 2,5\%$ , de contrainte de rupture garantie  $f_{prg} = 1770 \text{ MPa}$  et de limite d'élasticité  $f_{peg} = 1583 \text{ MPa}$ .

La mise en tension a lieu à 12 jours sur un béton de résistance  $f_{c12} = 30 \text{ MPa}$  et  $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$ . Le chantier se trouve en région parisienne, le glissement à l'ancrage est de 5 mm, les coefficients de frottement valent:  $f = 0,17$ ,  $\varphi = 0,0016$ .

Le câble a une allure parabolique de 40 m de longueur et 1,10 m de flèche.

La contrainte au centre de gravité des armatures due à l'action des charges permanentes existantes à la mise en tension et à l'action de la précontrainte  $\sigma_{b1}$  vaut:

$$\sigma_{b12} = 7,5 \text{ MPa.}$$

La contrainte supplémentaire apportée par les actions permanentes, appliquées à 50 jours valent 1 MPa. La contrainte finale valant 7,2 MPa (fig. 11-16).

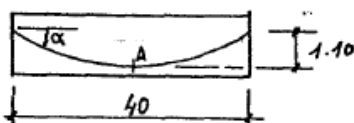


Fig. 11-16.

a) *Frottement*

Le calcul est effectué à mi-portée, point critique en flexion. L'angle  $\alpha$  est tel que:

$$\text{tg } \alpha = \frac{1,1 \times 2}{20} = 0,11 \quad \alpha = 6^{\circ},28 = 0,11 \text{ rd}$$

$$\Delta \sigma_f = \sigma_{po} [1 - e^{-f \alpha - \varphi x}]$$

$$\text{avec } \sigma_{po} = \text{Min} (0,80 f_{prg}; 0,90 f_{peg})$$

$$\sigma_{po} = \text{Min} (0,80 \times 1770; 0,90 \times 1583) = 1416 \text{ MPa}$$

$$\Delta \sigma_f = 1416 [1 - e^{-0,17 \times 0,11 - 0,0016 \times 20}] = 70,5 \text{ MPa (5\%)}$$

b) *Recul à l'ancrage*

$$\text{La perte moyenne de frottement par mètre vaut } \frac{70,5}{20} = 3,525 \text{ MPa/m;}$$

la longueur d'influence  $\lambda$  de l'action du recul à l'ancrage vaut:

$$\lambda = \sqrt{\frac{E_p}{3,525}} = \sqrt{\frac{190000 \times 0,005}{3,525}} = 16,42 \text{ m} < 20.$$

Le recul à l'ancrage n'a donc pas d'influence sur la contrainte de l'acier à mi-portée:  $\Delta \sigma_r = 0$ .

c) *Non-simultanéité de mise en tension*

$$\Delta \sigma_n = \Sigma k E_p \frac{\sigma_{bi}}{E_{ci}} \text{ avec: } \sigma_{b12} = 7,5 \text{ MPa.}$$

$$E_{i12} = 11000 \sqrt[3]{f_{ci}} = 11000 \sqrt[3]{30} = 34180 \text{ MPa}$$

$$E_{i28} = 11000 \sqrt[3]{f_{c28}} = 11000 \sqrt[3]{35} = 36000 \text{ MPa}$$

$$\Delta \sigma_n = \left( \frac{1}{2} \times \frac{7,5}{34180} + 1 \times \frac{1}{36000} \right) \times 190000 = 26,1 \text{ MPa (1,8\%)}$$

**d) Retrait**

$$\varepsilon_r = 2,10^{-4}$$

$$\Delta\sigma_r = 2,10^{-4} \times 190\,000 = 38 \text{ MPa (2,7\%)}$$

**e) Fluage**

En supposant que dans le cas étudié, la contrainte finale du béton au niveau du centre de gravité des câbles correspond à la contrainte maximale :

$$\sigma_b = \sigma_M = 7,2 \text{ MPa}$$

ce qui signifie qu'il n'y a pas de phases provisoires plus défavorables pour le béton à ce niveau :

$$\Delta\sigma_n = (\sigma_b + \sigma_M) \frac{E_p}{E_{ij}}$$

avec :  $E_{ij} = E_{28} = 36\,000 \text{ MPa}$ ,

$$\Delta\sigma_n = (7,2 + 7,2) \frac{190\,000}{36\,000} = 76 \text{ MPa (5,4\%)}$$

**f) Relaxation**

Avec :

$$\sigma_{pi} = \sigma_{po} - \Delta\sigma_i$$

$$\Delta\sigma_i = \text{pertes instantanées} = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_n + \Delta\sigma_s = 96,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{pi} = 1\,416 - 96,6 = 1\,319,4 \text{ MPa}$$

$$\mu_b = 0,43 \text{ pour aciers TBR ;}$$

$$\Delta\sigma_p = \frac{6}{100} \left( \frac{1\,319,4}{1\,770} - 0,43 \right) 1\,319,4 \times 2,5 = 62,4 \text{ MPa (4,4\%)}$$

**g) Contrainte finale**

Pertes différées :

$$\Delta\sigma_d = 38 + 76 + \frac{5}{6} \times 62,4 = 166,0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_p = \sigma_{po} - \Delta\sigma_i - \Delta\sigma_d \text{ ou } \sigma_{pi} - \Delta\sigma_d = 1\,319,4 - 166 = 1\,153,4 \text{ MPa}$$

La perte totale valant 262,6 MPa soit 18,6 % de la tension initiale au vérin.

**EXEMPLE 7 : PERTES DE PRECONTRAINTE**

Soit une poutre de post-tension de longueur de 47.00 m soumise à la précontrainte par 4 câbles de 7T15 à  $j = 8$  jours. Pour la section à mi travée :

1) Déterminer : la tension à l'origine, la perte due au frottement, la perte due au recul d'ancrage, la perte due à la déformation instantanée du béton, la perte instantanée, la perte due au retrait du béton, la perte due au fluage du béton, la perte due à la relaxation des aciers, la perte différée

2) En déduire la valeur de la contrainte finale probable, la contrainte finale maximale, la contrainte finale minimale

**Données :**

$\alpha = 0.2984 \text{ rd}$ ,  $f = 0.18 \text{ rd}^{-1}$ ,  $\varphi = 0.002 \text{ m}^{-1}$ ,  $g = 6 \text{ mm}$ ,  $\sigma_{bc} = 12.4 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{bM} = 15.3 \text{ MPa}$ ,  $\sigma_{bfinale} = 11.1 \text{ MPa}$   
 $f_{c28} = 35 \text{ MPa}$ ,  $\varepsilon_r = 3.10^{-4}$

$f_{prg} = 1860 \text{ MPa}$ ,  $f_{peg} = 1660 \text{ MPa}$ ,  $\rho_{1000} = 2.5 \%$ ,  $\mu_0 = 0.43$ ,  $E_p = 190000 \text{ MPa}$

**RESOLUTION**

□ La tension à l'origine

$$\sigma_{po} = \text{Min}(0,80 f_{prg}, 0,90 f_{peg}) = 1488 \text{ MPa}$$

□ La perte due au frottement

$$\Delta\sigma_{frot}(x) = \sigma_{po} - \sigma_p(x) = \sigma_{po} (1 - e^{-(f\alpha + \varphi x)}) = 142.57 \text{ Mpa}$$



- *La perte due au recul d'ancrage*

$$d = \sqrt{\frac{gEx}{\Delta\sigma_{frot}}} = 13.71 \text{ m} < x = 23.5\text{m} \Rightarrow \Delta\sigma_{rec} = 0$$

- *La perte due à la déformation instantanée du béton*

$$\Delta\sigma_{racc}(x) = \frac{n-1}{2n} \frac{E_p}{E_{ij}} \sigma_b(x) = 27.47 \text{ MPa}$$

- *la perte instantanée*

$$\Delta\sigma_{pi}(x) = \Delta\sigma_{frot}(x) + \Delta\sigma_{rec}(x) + \Delta\sigma_{racc}(x) = 170.04 \text{ MPa}$$

- *La perte due au retrait du béton*

$$\Delta\sigma_r \approx E_p \varepsilon_r = 57 \text{ MPa}$$

- *La perte due au fluage du béton*

$$\Delta\sigma_{fl} = (\sigma_b^M + \sigma_b^F) E_p / E_{ij} = 139.41 \text{ MPa}$$

- *La perte due à la relaxation des aciers*

$$\Delta\sigma_{rel}(x) = \frac{6\rho_{1000}}{100} \left[ \frac{\sigma_{pi}(x)}{f_{prg}} - \mu_0 \right] \sigma_{pi}(x) = 55.07 \text{ MPa}$$

- *la perte différée*

$$\Delta\sigma_d = \Delta\sigma_r + \Delta\sigma_{fl} + \frac{5}{6} \Delta\sigma_{rel} = 242.37 \text{ MPa}$$

- *La contrainte finale probable*

$$\sigma_p(x) = \sigma_{po} - \Delta\sigma_p(x) = 1075.59 \text{ MPa}$$

- *La contrainte finale maximale*

$$\sigma_{p1}(x) = 1.02\sigma_{po} - 0.8\Delta\sigma_p(x) = 1187.8 \text{ MPa}$$

- *La contrainte finale minimale*

$$\sigma_{p2}(x) = 0.98\sigma_{po} - 1.2\Delta\sigma_p(x) = 963.35 \text{ MPa}$$

## EXEMPLES PORTANT SUR LES CHAPITRES 5 & 6

### 1. SOLLICITATIONS TANGENTES ET FERRAILAGE PASSIF

#### EXEMPLE 8 : ÉTUDE D'UNE SECTION EN TE

On considère une poutre isostatique de longueur 20 m, précontrainte par deux câbles

de diamètre 70 mm :

les données sont :

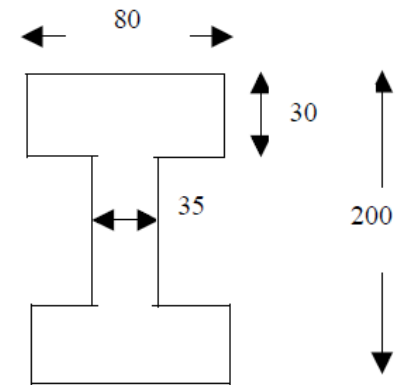
$G=51 \text{ kN/m}$ ,  $Q=148 \text{ kN/m}$ ,  $f_{cj}=30 \text{ MPa}$ ,  $P=7.45 \text{ MN}$ ,  $Z=1.484 \text{ m}$

1. Déterminer à une distance de 1m de l'appui ( $\alpha=7^\circ 69'$ ):

- 1.1. L'effort tranchant ELS VG
- 1.2. L'effort tranchant ELS VQ
- 1.3. L'effort tranchant réduit Vr1 en ELS
- 1.4. L'effort tranchant réduit Vr2 en ELS
- 1.5. Contrainte du cisaillement ELS
- 1.6. Contrainte de compression

2. Déterminer à une distance de 1m de l'appui ( $\alpha=7^\circ 69'$ ):

- 2.1. L'effort tranchant ultime Vru
- 2.2. L'effort tranchant ultime V'ru
- 2.3. Contrainte de cisaillement ultime
- 2.4. Angle d'inclinaison des bielles



---

---