



AUTOMATIQUE

SYSTÈMES LINÉAIRES CONTINUS

B. SANDOZ

29 FÉVRIER 2016

CE DOCUMENT EST MIS À DISPOSITION SELON LES TERMES DE LA

[LICENCE CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION](#)

- PAS D'UTILISATION COMMERCIALE -

[PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.](#)



De l'avis des étudiants, l'automatique est souvent considérée comme la “bête noire” des matières enseignées, car souvent jugée très abstraite.

De nombreux documents de cours existent sur internet et celui-ci ne prétend pas révolutionner l'enseignement de l'automatique. Il tentera d'être adapté aux cours dispensés aux étudiants des Arts et Métiers du CER de Paris en proposant des explications les plus concrètes possible. L'objectif est d'enrichir et d'améliorer ce document chaque année.

La toute première version de ce document a été initialement inspirée du support de cours que m'a laissé M. Vergé lors de mon arrivée, qui coïncidait avec son départ. Je le remercie ici très sincèrement pour ce passage de relai.

SOMMAIRE

Chapitre I Introduction à l'automatique	1
1 Objectifs	2
2 Repères historiques	5
3 Bibliographie	6
Chapitre II Transformée de Laplace	7
1 Définition	8
2 Propriétés	9
3 Résolution d'équations différentielles linéaires	11
4 Recherche d'originale	13
Chapitre III Modélisation schéma-blocs	15
1 Motivations	16
2 Systèmes mécaniques	17
3 Opérations sur les schémas blocs	18
Chapitre IV Analyse transitoire	23
1 Motivations	24
2 Système du premier ordre	25
3 Intégrateur	28
4 Système du second ordre	29
Chapitre V Performance des systèmes bouclés	35
1 Notations et relations	36
2 Étude de la stabilité	38
3 Étude de la précision	39
Chapitre VI Analyse fréquentielle	41
1 Introduction	42
2 Diagramme de Bode	44
3 Cas du second ordre sous amorti	50
4 Correspondance temps-fréquence	51
5 Performances	52
Chapitre VII Correction des systèmes	55
1 Généralités	56
Chapitre VIII Exercices	57

1	Exercices Chapitre Transformée de Laplace	57
2	Exercices Chapitre Modélisation	57
3	Exercices Chapitre Analyse Transitoire	60
4	Exercices Chapitre Performance des systèmes bouclés	61
5	Exercices Chapitre Analyse fréquentielle	61

Table des transformées de Laplace	63
--	-----------

Chapitre I

Introduction à l'automatique

Sommaire

1	Objectifs	2
1.1	Définitions	2
1.2	Notations	3
1.3	Cahier des charges	3
1.4	Démarche générale	4
1.4.1	Modélisation	4
1.4.2	Recalage ou identification	4
1.4.3	Définition du cahier des charges	4
1.4.4	Détermination du correcteur (régulateur)	5
1.4.5	Vérification	5
2	Repères historiques	5
3	Bibliographie	6

1 OBJECTIFS

1.1 Définitions

Dans le langage courant, automatiser un système c'est le rendre *indépendant* d'une intervention humaine dès qu'il a été initialisé. **L'automatique** est la science qui étudie les méthodes et les moyens de faire exécuter des tâches sans intervention humaine.

De nombreux exemples existent dans la vie courante :

- détection automatique d'incendie
- arrêt d'un ascenseur à l'étage désiré (c'est mieux), avec régulation de la vitesse de déplacement (pas d'accélération trop forte, pas de vitesse trop lente)
- lecture d'un DVD/Bluray
- régulateur de vitesse dans une voiture
- ...

L'automatique classe les systèmes selon 2 catégories : les systèmes dits **logiques** (ou discrets) et les systèmes dits **asservis** (ou continus). Les systèmes *logiques* fonctionnent avec des tâches effectuées dans un ordre précis (touches de téléphone, clavier, télécommande...) qui peuvent être représentées par Grafsets.

Un exemple de **système continu** est celui de la régulation du niveau d'une cuve présentée Figure 1 :

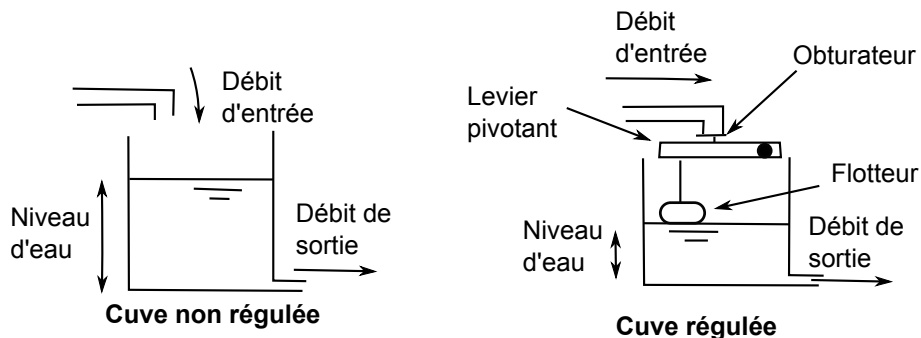


Figure 1 – Régulation d'une cuve

La Figure 1 montre que le niveau est "mesuré" par le flotteur qui déplace verticalement le levier pivotant. Ce levier porte un obturateur de débit d'entrée. Si le niveau baisse, alors le flotteur descend et le levier ouvre le passage d'arrivée d'eau, le niveau peut alors remonter. Le niveau d'eau dans la cuve est réglé par la longueur de la tige qui relie le flotteur au levier (tige filetée). Ce dispositif peut se schématiser sous la forme présentée Figure 2.

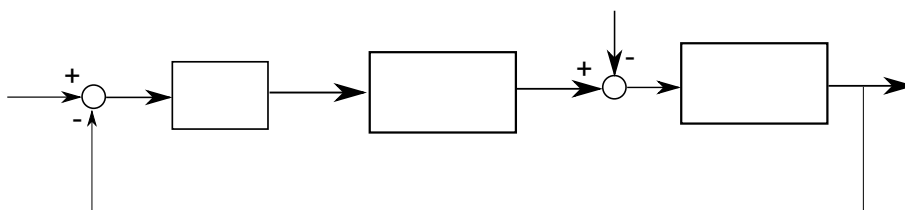


Figure 2 – Schéma bloc de régulation d'une cuve

Avec :

- Q_e le débit d'entrée
- Q_s le débit de sortie
- H_0 le niveau d'eau souhaité
- H le niveau d'eau actuel, "mesuré" par le flotteur

L'objectif de ce système asservi est donc de ramener le niveau d'eau actuel au niveau d'eau souhaité, ou bien dit autrement : de maintenir ou de réduire l'erreur $\Delta H = H_0 - H$ à une valeur très petite ou nulle.

1.2 Notations

Un système asservi est composé de 3 parties essentielles (Figure 3) :

- le **processus physique à réguler**, il comprend l'**actionneur** ou les moteurs
- le **capteur** chargé de mesurer le signal de sortie pour ensuite "vérifier" si il est conforme à la consigne,
- le **correcteur**, organe de décision chargé de commander le système en fonction d'un objectif.

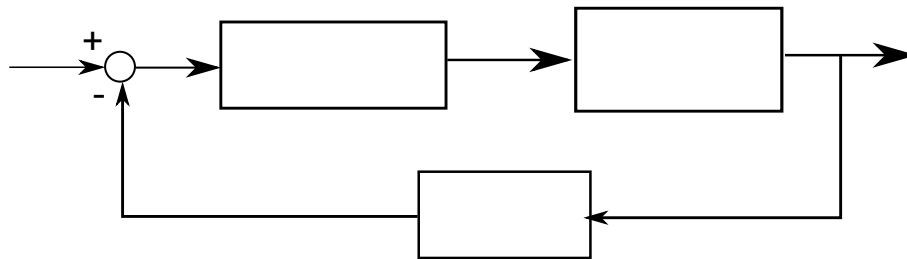


Figure 3 – Schéma bloc d'asservissement

Avec :

- r :
- y :
- s :
- u :
- e :

Capteur : dispositif qui transforme une grandeur physique (déplacement, vitesse, accélération, température, pression, ...) en tension électrique dans la plupart des cas.

Correcteur (ou régulateur) : dispositif (électronique ou numérique) qui détermine l'entrée u de l'actionneur en fonction de l'erreur (présente et passée).

Dans ce cours, on se limite aux systèmes asservis dont toutes les parties sont linéaires.

1.3 Cahier des charges

Le but de ce cours est de concevoir une boucle de régulation. Cela nécessite de :

- définir un capteur et sa précision,
- définir un actionneur
- définir un régulateur (correcteur)

En général, les contraintes technologiques fixent le type d'actionneur et de capteur, de sorte que c'est essentiellement le calcul d'un régulateur qui constitue le travail de l'automaticien.

Le correcteur est l'élément qui va donner au système asservi les performances définies par le cahier des charges. Celui-ci définit les performances statiques et dynamiques du système asservi. Par exemple, on souhaite que la table d'une fraiseuse se déplace de 0,1m.

1. Le déplacement doit être de 0,1m exactement. À la précision des capteurs près, le déplacement réel sera mesuré à 0,10000m
2. ce déplacement doit se faire pendant une durée acceptable : par exemple en 2s.
3. ce déplacement ne doit pas osciller, il doit toujours être inférieur ou égal à 0,1m.

1.4 Démarche générale

Pour obtenir des performances acceptables, le travail de l'automaticien se situe à la croisée de plusieurs disciplines de la culture scientifique des ingénieurs. Donnons les étapes principales de ce travail.

1.4.1 Modélisation

C'est l'étape de recensement des variables d'entrées, de sorties et des relations qui lient ces variables. Cela conduit à séparer les entrées de commande et les entrées de perturbation. De plus, cela permet de définir la précision des capteurs, leur rapidité (temps de réponse des capteurs), leur emplacement.

Si l'on peut, on écrit les équations physiques qui relient les variables. Dans ce cours, nous nous limiterons aux phénomènes physiques simples. Cependant, il faut être conscient que dans de nombreux domaines des sciences de la vie, les modèles sont pauvres ou peu reproductibles.

1.4.2 Recalage ou identification

Les valeurs numériques des paramètres intervenant dans les équations du modèle ne sont pas toujours exactement connues. Par des moyens expérimentaux et par l'expérience ingénieur, on détermine les valeurs numériques de ces paramètres. Par exemple, le coefficient de frottement d'un chariot sur une glissière est particulièrement délicat à déterminer (qualité de surface, graissage, température ...). On peut soit utiliser les valeurs obtenues dans des tableaux de coefficients, au risque de faire des erreurs, soit faire des essais sur la machine.

1.4.3 Définition du cahier des charges

En fonction de la dynamique espérée, des moteurs et de leur puissance, on définit les temps de réponse désirés pour le système asservi. On définit également l'erreur acceptable lorsque la consigne présente une forme particulière. Par exemple, si la consigne en température d'un four est fixée à 150°C, le rôle du régulateur est d'apporter des calories afin que la température réelle soit de 150°C ± 5°C. D'autre part, si on introduit un gâteau au chocolat dans ce four (ou une tarte au pomme), on souhaite que la température atteigne sa valeur de consigne en moins de 15min, et sans dépassement de la température interne du four. Noter que le cahier des charges est toujours le fruit d'une longue discussion avec l'utilisateur du système à asservir.

1.4.4 Détermination du correcteur (régulateur)

Ce calcul repose sur les méthodes présentées dans ce cours. De nombreuses simulations permettront de réduire les expérimentations inutiles ou dangereuses.

1.4.5 Vérification

Lors des tests sur machine réelle, on vérifie que les exigences du cahier des charges sont atteintes. Dans le cas contraire, il faut revoir la stratégie de calcul du correcteur. Si les performances ne sont toujours pas atteintes, il faut revoir le modèle et opérer des essais complémentaires.

2 REPÈRES HISTORIQUES

Le principe d'asservissement d'un niveau d'eau à partir d'un levier obturant l'arrivée d'eau dans une cuve est connu depuis l'antiquité.

Un siècle avant JC, Héron d'Alexandrie a publié un ouvrage regroupant les connaissances de son époque sur les dispositifs hydrauliques assurant plusieurs types de régulation. En 1745, Jacques de Vaucanson réalisa le premier métier à tisser (visible au musée des Arts et Métiers) dont les séquences d'opérations à effectuer étaient inscrites sur des cartes perforées : ce fut le début de l'automatisation industrielle.

Le développement de la machine à vapeur fournit de l'énergie qu'il fallu domestiquer. C'est ainsi que le régulateur à boules de J. Watt (1788) eut un rôle historique important (Figure 4).

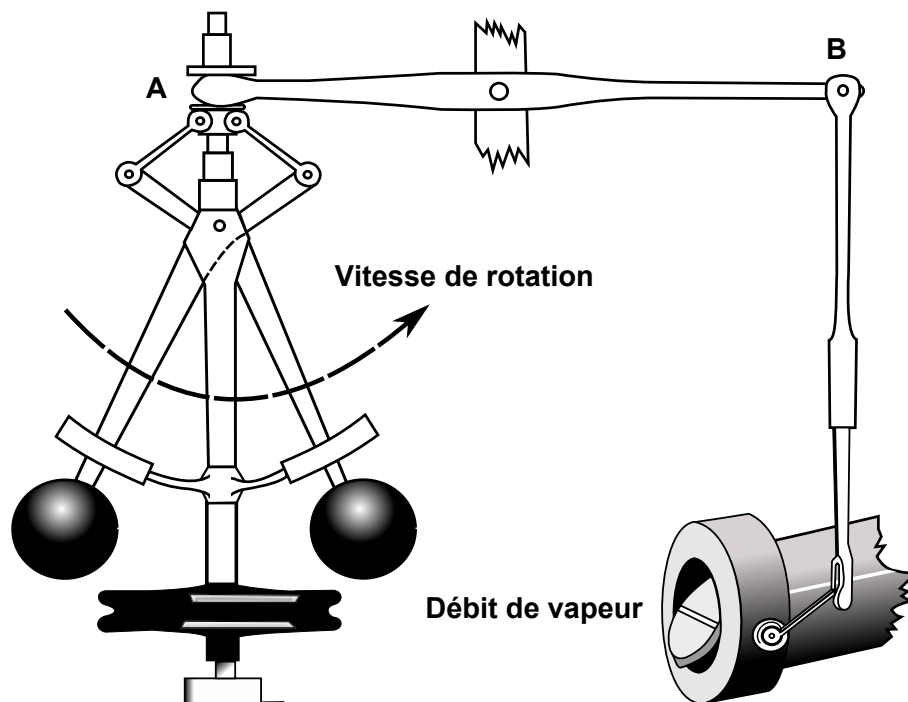


Figure 4 – Régulateur à boules de J. Watt (licence CCO)

Principe de fonctionnement : Si la vitesse de rotation augmente, les 2 masses s'écartent de leur position d'équilibre, le point A descend et le point B monte. Le robinet lié au point B ferme la section de passage de la vapeur alimentant le moteur. Dans ces conditions, la vitesse de rotation diminue et donc les masses se rapprochent de l'axe de rotation. Le réglage du débit se fait donc en ajustant les masses.

Entre 1900 et 1940, plusieurs régulateurs ont été construits, sans aucune théorie de l'automatique. En voici quelques exemples :

- Utilisation de l'énergie vapeur dans les trains à vapeur,
- début de l'électronique, (premiers tubes en 1904 par T. Edison), nécessité d'asservir la fréquence d'émission et de réception. En France, premières émissions en 1922, 4 millions de postes en 1937,
- premiers asservissements pour les avions (C. Ader a inventé le mot "avion" en 1912),
- début du télégraphe (1852, sans fil en 1899) et du téléphone (premières liaisons Bell 1876).

En 1938, Bode et Nyquist travaillent à la compagnie Bell Telephon Laboratories. Ils mettent au point des asservissements de radar pour l'aviation militaire. Bode fonde les premiers rudiments de la théorie de l'automatique (**les fameuses courbes de Bode**, marge de stabilité, relation gain phase). Nyquist définit précisément les notions de stabilité. À la fin des années 1950, l'utilisation de la **transformée de Laplace** devient courante et les liens entre domaines temporels et fréquentiels sont compris.

En 1960, les travaux de *Kalman* présentent la mise sous forme d'état et expliquent les difficultés rencontrées pour la mise au point des régulateurs multi-variables. Ces systèmes sont présents en production d'énergie sous forme thermique, hydraulique ou nucléaire. De même, l'aviation nécessite une vision multi-variable des régulateurs.

Depuis le début des années 1980, la *robustesse* des régulateurs est recherchée. Enfin, depuis 1995, l'introduction des calculateurs dans le monde grand public est devenue une évidence (voiture, lave-linge, lecteur Bluray ...).

3 BIBLIOGRAPHIE

Depuis que l'automatique est présente dans les classes préparatoires aux grandes écoles, il existe beaucoup d'ouvrages (et de sites internet) d'automatique concernant les systèmes asservis. Barre, Carron, Hautier, Legrand, "Systèmes automatiques Tome 1", Éditions Ellipse 1996
 Hautier, Caron, "Systèmes automatiques Tome 2", Éditions Ellipse 1997
 Borne, Dauphin-Tanguy, Richard, Rotella, Zambettakis, "Analyse et régulation des processus industriels", Editions technip 1993
 Cordon, Le Ballois, "Automatique des systèmes linéaires continus" Édition Dunod 1998
 Ferrier, Rivoire, "Cours d'automatique tomes 1, 2 et 3" Éditions Eyrolles 1996
 Sueur, Vanheege, Borne, "Automatique des systèmes continus" Éditions technip 1998

La littérature anglo-américaine présente plusieurs ouvrages, parmi lesquels :
 Kuo "Automatic control systems" Prentice Hall Editions 1995
 Nise "Control system engineering" Wiley Editions 2000
 Ogata "Modern control engineering" Prentice Hall Editions 1990

Chapitre II

Transformée de Laplace

Sommaire

1	Définition	8
2	Propriétés	9
2.1	Linéarité	9
2.2	Intégration	9
2.3	Dérivation	9
2.4	Théorème du retard (translation de la variable temporelle)	9
2.5	Translation sur la variable de Laplace	10
2.6	Théorèmes sur les limites	10
2.7	Théorème de la convolution	10
3	Résolution d'équations différentielles linéaires	11
3.1	Équation différentielle du premier ordre	11
3.2	Équation différentielle du second ordre	11
4	Recherche d'originale	13

1 DÉFINITION

Soit $f(t)$ un signal temporel, défini pour t positif ou nul, alors sa transformée s'obtient par :

(II.1)

Cette intégrale ne converge pas forcément ; p est l'opérateur de Laplace ^{1 2}.

Exemple 1

$$f(t) = e^{-at}$$

$$F(p) =$$

Noter que pour

Attention : dans toute la suite, il ne faudra pas confondre la transformée de Laplace d'un signal (un échelon par exemple) et celle d'un dispositif (un capteur par exemple).

Exemple 2

$$f(t) = t.u(t)(rampe)$$

$$F(p) =$$

Nous allons intégrer par partie. Rappelons que :

$$\int_0^{\infty} uv' =$$

avec $u =$ et $v' =$, donc :

$$F(p) =$$

En opérant ainsi et en utilisant les propriétés du paragraphe 2, les mathématiciens ont construit les tables de transformées de Laplace. C'est un outils indispensable pour l'automaticien.

1. Le Laplacien est noté \mathcal{L} en France et s à l'international
 2. Pierre Simon de Laplace (1749-1827) a été à la tête des mathématiciens de son époque. Il fut élu à l'académie royale à 20 ans. Ministre de l'intérieur de Napoléon Bonaparte, puis président du sénat, il fut nommé à la chambre des Pairs sous la restauration.

2 PROPRIÉTÉS

2.1 Linéarité

Si $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$ et $G(p) = \mathcal{L}[g(t)]$ alors

$$\mathcal{L}[a.f(t) + b.g(t)] = \qquad \qquad \qquad \forall a, b \in \mathfrak{R} \qquad \qquad \qquad \text{(II.2)}$$

2.2 Intégration

La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction temporelle s'écrit :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \qquad \qquad \qquad \text{(II.3)}$$

Par conséquent, intégrer dans le domaine temporel se traduit par dans le domaine de Laplace.
 L'opérateur $1/p$ est appelé .

2.3 Dérivation

Nous avons le théorème suivant :

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = \qquad \qquad \qquad \text{(II.4)}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = \qquad \qquad \qquad \text{(II.5)}$$

Ainsi, dériver dans le domaine temporel se traduit par dans le domaine de Laplace.
 L'opérateur p est appelé .

2.4 Théorème du retard (translation de la variable temporelle)

$$\mathcal{L}[f(t - \tau)] = \qquad \qquad \qquad \text{(II.6)}$$

Attention, théorème applicable uniquement si le décalage τ est positif (Figure 5).

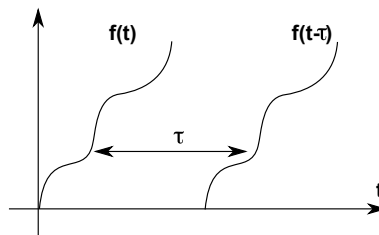


Figure 5 – Théorème du retard

2.5 Translation sur la variable de Laplace

$$\mathcal{L}[e^{-at} \cdot f(t)] = \quad (\text{II.7})$$

Exercice : quelle est l'originale de $\frac{1}{p+a}$?

2.6 Théorèmes sur les limites

Ces théorèmes sont applicables si les limites existent ; ils permettent de calculer les limites dans un espace et de les utiliser dans un autre espace.

Théorème de la valeur initiale

$$\lim f(t) = \quad (\text{II.8})$$

Théorème de la valeur finale

$$\lim f(t) = \quad (\text{II.9})$$

Exercice : calculer

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin(\omega \cdot t)$$

2.7 Théorème de la convolution

On appelle intégrale de convolution une intégrale de la forme :

$$\int_0^{\infty} f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (\text{II.10})$$

Dans cette intégrale, il y a 2 fonctions du temps. On note que dans la seconde fonction, la variable muette (ou d'intégration) apparaît avec le signe moins. Parmi les propriétés de cette intégrale, nous avons la *commutativité* :

$$\int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau = \quad (\text{II.11})$$

Le théorème de la convolution s'écrit :

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \right] = \quad (\text{II.12})$$

Ce théorème va permettre de travailler avec les fonctions de transferts. Voir Chapitre III - Modélisation.

3 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

En automatique comme en physique, on est souvent amené à résoudre des équations différentielles à coefficients constants. La méthode que l'on utilise est toujours basée sur l'utilisation de la transformée de Laplace.

3.1 Équation différentielle du premier ordre

$$\text{Elle sont de la forme : } \begin{cases} \frac{dy}{dt} = \\ y(0) = \end{cases}$$

Pour résoudre, utilisons les transformées de Laplace :

D'où :

$$Y(p) =$$

Selon la nature de l'entrée $r(t)$ (donc de $R(p)$), on en déduit $Y(p)$, puis à partir des tables on obtient $y(t)$.

Exemple :

$$Y(p) =$$

Les tables donnent la solution cherchée : $y(t) =$

3.2 Équation différentielle du second ordre

Généralement, ces équations sont classées selon le type des racines de l'équation caractéristique. Considérons l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + \\ y(0) = \text{ et } \dot{y}(0) = \end{cases}$$

Il y a ici 2 conditions initiales. Supposons que l'entrée est et calculons les
transformées de Laplace :

d'où :

$$Y(p) =$$

L'équation caractéristique s'écrit : . Elle admet 2 racines réelles. L'objectif est de trouver dans les tables une forme qui permet de passer du domaine de Laplace au domaine temporel. Existe-t-il une telle écriture dans les tables ?

Il est possible de procéder à une décomposition en éléments simples afin d'écrire l'équation comme une composition d'éléments "*plus simple*", et surtout, qui existent dans les tables. Cette décomposition d'écrit :

(II.13)

Il faut donc déterminer les valeurs de A , B et C . Pour les obtenir, on peut tout réduire au même dénominateur et écrire l'égalité des numérateurs. Cette méthode peut être lourde et mener à des erreurs d'écriture. Voici une autre méthode simple et efficace :

II.13

Cette égalité est vraie quelque soit . Il suffit donc

En opérant de même successivement pour les pôles de B et C , nous obtenons $B =$ et $C =$.

Finalement :

$$Y(p) =$$

Nous pouvons maintenant consulter les tables qui nous donnent la solution temporelle suivante, illustrée Figure 6 :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(p)] =$$

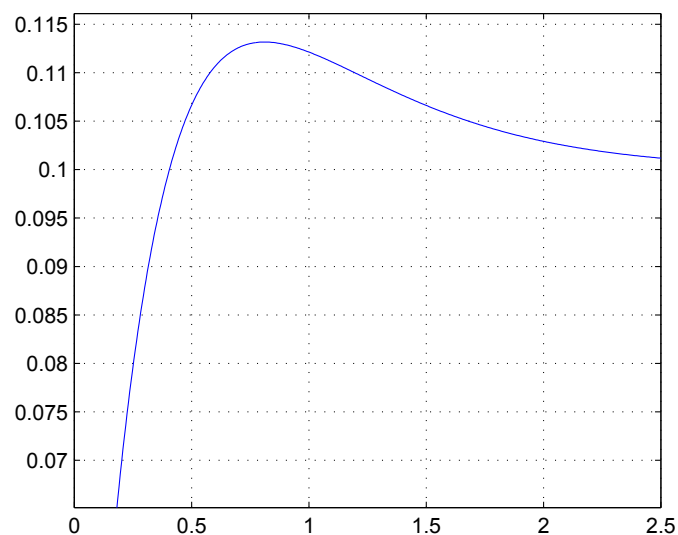


Figure 6 – Solution temporelle de l'équation du second ordre

4 RECHERCHE D'ORIGINALE

C'est l'opération qui consiste à rechercher la fonction $f(t)$ lorsque l'on connaît $F(p)$, ce qui vient d'être fait à la fin de l'exemple précédent. Pour mener à bien cette recherche, il faut se rapprocher des formes disponibles dans les tables ; une décomposition en éléments simple est souvent utile, mais doit être guidée par la connaissance des fonctions disponibles dans la table.

Considérons l'exemple suivant :

$$Y(p) =$$

La décomposition en éléments simple donne :

$$Y(p) =$$

L'identification des numérateurs fournit :

$$Y(p) =$$

Noter que les racines étant complexes, il est inutile de décomposer d'avantage. En revanche, en observant les tables, il paraît nécessaire d'écrire le dénominateur autrement :

Avec $z =$ et $\omega =$

Donc :

$$Y(p) =$$

Dans la table, nous avons :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p}{\frac{p^2}{\omega^2} + \frac{2zp}{\omega} + 1} \right] = -\frac{\omega^2}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega t} \sin(\omega \sqrt{1-z^2}.t - \phi)$$

Avec

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \right)$$

De plus :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\frac{p^2}{\omega^2} + \frac{2zp}{\omega} + 1} \right] = -\frac{\omega^2}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega t} \sin(\omega \sqrt{1-z^2}.t)$$

Avec $\omega =$ rad/s on obtient :

$$y(t) = 0,2 + 0,2025 e^{-0,5t} \sin(3,12.t - 1,412) + 0,576 e^{-0,5t} \sin(3,12.t)$$

que l'on peut écrire sous plusieurs formes équivalentes. En utilisant les relations trigonométriques classiques, on arrive à :

$$y(t) =$$

Dont la courbe est tracée à la Figure 7

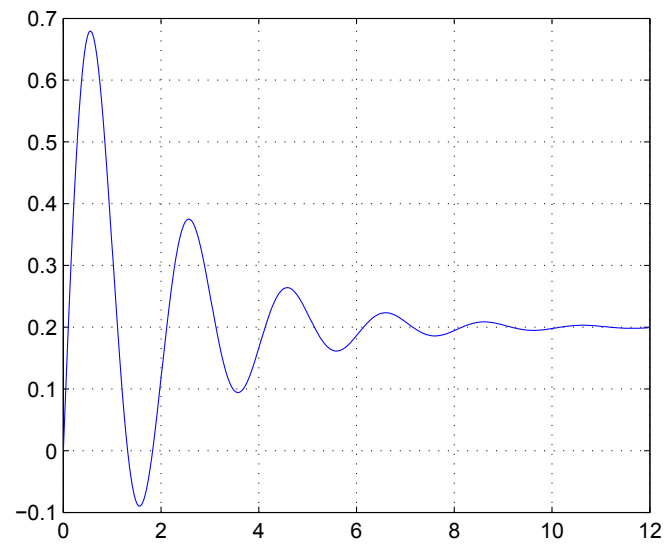


Figure 7 – Solution temporelle de la recherche d'originale

Faire les exercices de la partie 1 p.57.

Chapitre III

Modélisation schéma-blocs

Sommaire

1	Motivations	16
2	Systèmes mécaniques	17
2.1	Translation	17
2.1.1	Ressort	17
2.1.2	Amortisseur	17
2.1.3	Masse	18
2.2	Rotation	18
3	Opérations sur les schémas blocs	18
3.1	Règles	18
3.2	Système continu bouclé	20

1 MOTIVATIONS

Face à un dispositif technique existant, l'ingénieur doit utiliser son savoir-faire pour améliorer son comportement, que l'on traduit par exemple en terme de productivité, de précision, de qualité. . . Si un nouveau dispositif doit être construit, il doit être "meilleur", plus performant que l'existant. Dans tous les cas, les outils mathématiques pourront aider dans la mesure où l'ingénieur aura traduit le comportement d'une machine par un ensemble d'équations.

La modélisation concerne le passage de la description du dispositif physique par ces équations, que l'on nommera "modèle". Cependant, pour un même système, plusieurs points de vue vont conduire à des modèles différents. Par exemple, un pneu de voiture peut conduire aux modèles suivants :

- une inertie en rotation qu'il faut équilibrer lorsque ce pneu est monté sur la roue,
- un ensemble de caoutchouc et d'acier en couches superposées conduisant à une structure mécanique possédant des qualités d'écrasement et d'adhérence au sol,
- pour le fabriquant, une structure moléculaire qu'il faut réaliser et associer à de l'acier,
- pour le conducteur de la voiture, un dispositif qui amortit les irrégularités de la route,
- etc. . .

Par conséquent, dans tout ce cours nous allons rechercher des modèles de systèmes physiques en vue de la commande ou plus simplement en vue du comportement transitoire des variables de sorties lorsque les entrées sont modifiées. Ainsi, pour l'exemple du pneu monté sur véhicule, nous nous focaliserions sur la position verticale de l'axe roue lorsque la route est irrégulière ? On assimile alors le pneu à un ensemble masse-ressort.

L'étape de modélisation est toujours une étape importante, indispensable, mais délicate. Elle suppose une bonne connaissance de la physique, de l'imagination associées à de l'expérience.

La connaissance d'un modèle permet de :

- prévoir le comportement du système si on modifie ses entrées (analyse transitoire),
- prévoir l'influence d'un paramètre sur le comportement du système,
- comparer le comportement du système physique avec celui du modèle,
- mettre au point une politique de conduite du système (exploitation) plus performante,
- imaginer des structures d'automatisation,
- ...

Dans tout ce cours, nous nous limiterons aux *modèles de connaissances* qui reposent sur les lois de la physique. Par exemple $U = RI$, $F = m\gamma$ sont des modèles de connaissance de comportement de deux systèmes physiques différents. Cependant, tous les systèmes que l'on rencontre dans la nature ne sont pas décrits par un modèle de connaissance. On utilise alors un *modèle de comportement* ou de *représentation*. Par exemple, le calcul de la température à Paris le 1^{er} janvier est probablement très imprécis. De même, la plupart des modèles économiques sont plus ou moins incertains.

Dans un premier temps, quelques systèmes de base vont être étudiés, mais tous les systèmes électriques, hydrauliques, thermiques (. . .) peuvent être modélisés.

2 SYSTÈMES MÉCANIQUES

2.1 Translation

Attention : dans tous ces modèles, le déplacement x est compté à partir d'une position d'équilibre, car on ne s'intéresse qu'aux variations.

Convention :

2.1.1 Ressort

Hypothèses :

-
-
-

Paramètre :

Modèle Figure 8 : $f(t) =$

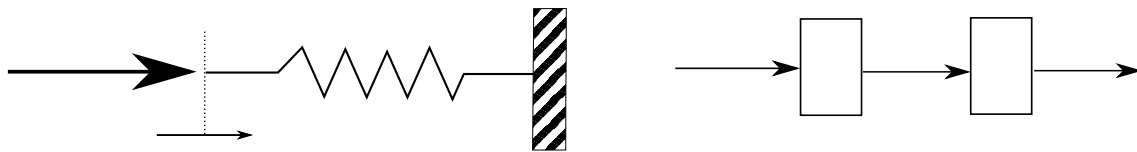


Figure 8 – Ressort et modèle

2.1.2 Amortisseur

Hypothèses :

-
-

Paramètre :

Modèle Figure 9 : $f(t) =$

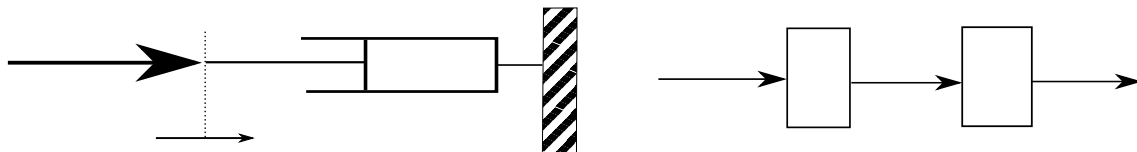


Figure 9 – Amortisseur et modèle

2.1.3 Masse

Hypothèses :

-
-
-

Paramètre :

Modèle Figure 10 : Le principe fondamental de la dynamique (PFD) donne

$f(t) =$

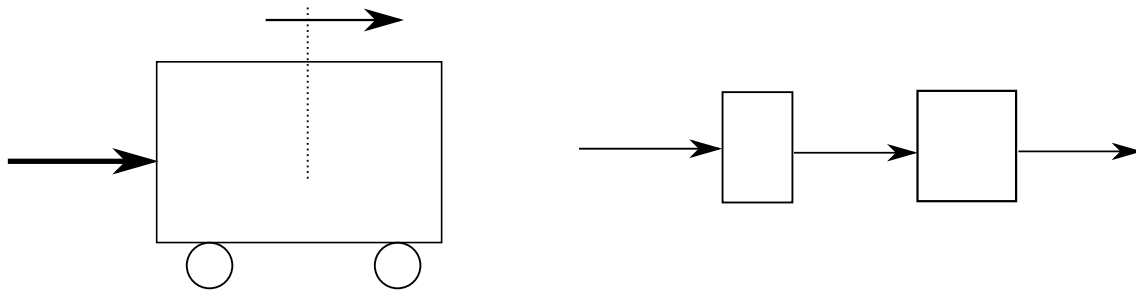


Figure 10 – Masse et modèle

2.2 Rotation

3 OPÉRATIONS SUR LES SCHÉMAS BLOCS

La modélisation de systèmes physiques reliés entre eux conduit à des équations dans le domaine de Laplace. Il est préférable de modéliser séparément chaque relation par un schéma bloc reliant la variable d'entrée à la variable de sortie. Cette méthode est souvent plus sûre et plus rapide que la manipulation algébrique des relations de départ.

3.1 Règles

On place dans chaque bloc la fonction de transfert ; c'est à dire le rapport entre les transformées de Laplace de la sortie $Y(p)$ à l'entrée $R(p)$ (Figure 11), quand les conditions initiales n'ont pas de facteur en commun.

$$H(p) =$$

Les Figures 12 à 16 donnent les règles de **Mise en série**, **Mise en parallèle**, **Déplacement avant sommateur**, **Déplacement après sommateur** et **Déplacements d'un signal**.

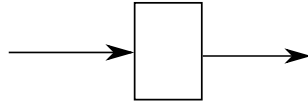


Figure 11 – Fonction de transfert $H(p) =$

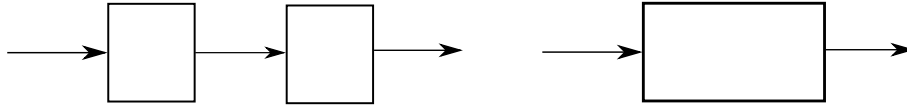


Figure 12 – Mise en série

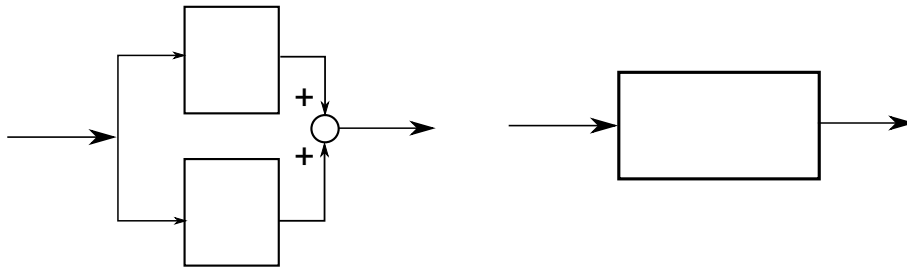


Figure 13 – Mise en parallèle

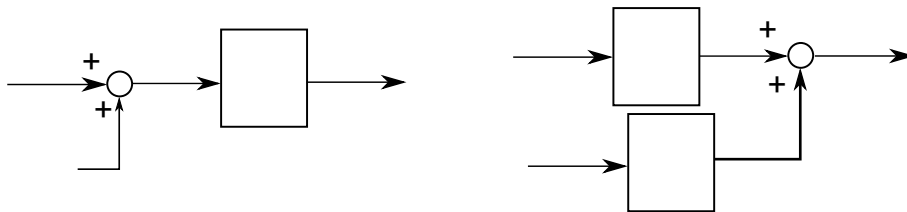


Figure 14 – Déplacement avant sommateur

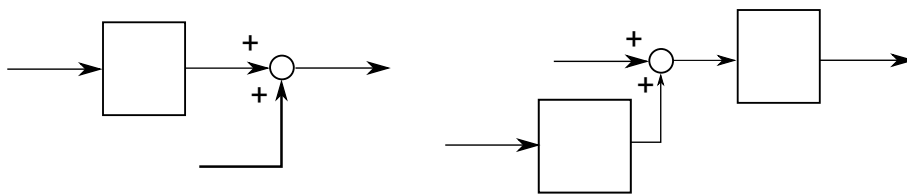


Figure 15 – Déplacement après sommateur

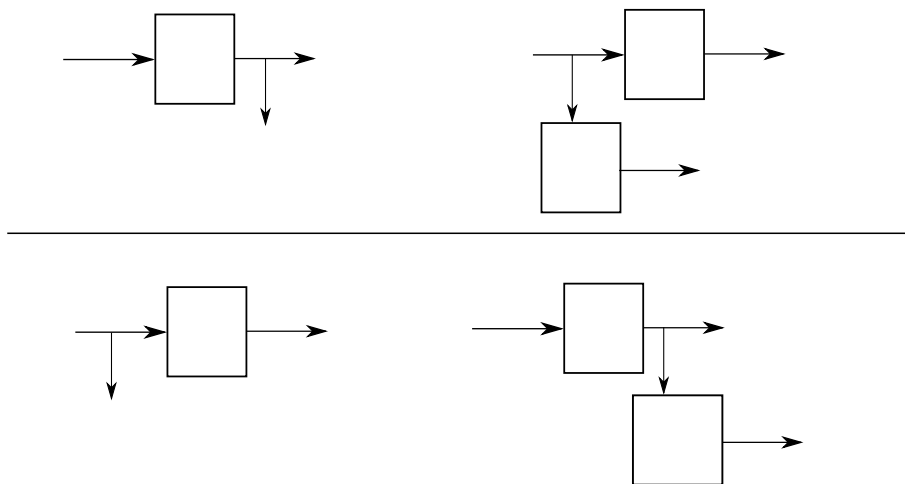


Figure 16 – Déplacements d'un signal

3.2 Système continu bouclé

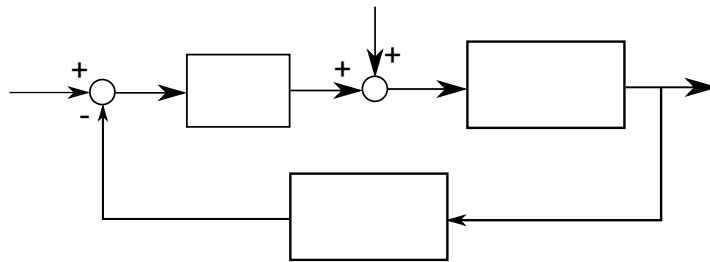


Figure 17 – Système continu bouclé

Aidé de ces règles, considérons le système continu bouclé de la Figure 17.

- $G(p)$ est la fonction de transfert
- $K(p)$ est la fonction de transfert
- $B(p)$ est la fonction de transfert
- $R(p)$ est
- $E(p)$ est

- $U(p)$ est
- $D(p)$ représente

Nous avons les relations suivantes :

Quelques manipulations fournissent la sortie $Y(p)$:

$$Y(p) = \tag{III.1}$$

et l'erreur $E(p)$:

$$E(p) = \tag{III.2}$$

Le cas $D(p) = 0$, lorsqu'il n'y a pas de perturbation du signal, est illustré Figure 18.

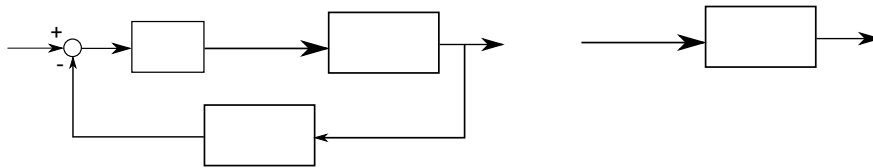


Figure 18 – Système continu bouclé à perturbation nulle

Le cas $R(p) = 0$, lorsque la consigne est nulle mais que le système subit une perturbation, est illustré Figure 19

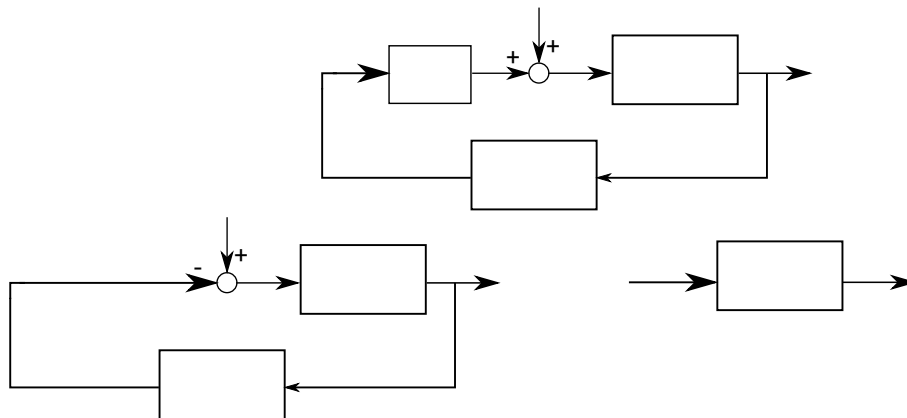


Figure 19 – Système continu bouclé à consigne nulle

Remarque Le dénominateur et III.2.

se retrouve dans toutes les fonctions de transfert III.1

Faire les exercices de la partie 2 p.57.

Chapitre IV

Analyse transitoire

Sommaire

1	Motivations	24
2	Système du premier ordre	25
2.1	Définitions	25
2.2	Réponse impulsionnelle	25
2.3	Réponse indicielle	26
2.4	Réponse à une rampe	27
2.5	Réponse à une entrée sinusoïdale	28
3	Intégrateur	28
3.1	Réponse impulsionnelle	28
3.2	Réponse indicielle	28
4	Système du second ordre	29
4.1	Réponse impulsionnelle	30
4.1.1	Système hyper-amorti	30
4.1.2	Système critique	30
4.1.3	Système sous amorti	31
4.2	Réponse indicielle	31
4.2.1	Système hyper-amorti	31
4.2.2	Système critique	32
4.2.3	Système sous amorti	32

1 MOTIVATIONS

Maintenant que nous avons le modèle d'un système physique, on cherche à prévoir le comportement de ce système lorsqu'il est soumis à des entrées particulières. Par exemple, peut-on prévoir la température à l'intérieur d'un four si on augmente la puissance de chauffe ? En pratique 4 entrées *standards* vont être étudiées.

Échelon

En pratique, le changement d'une entrée d'une valeur à une autre s'interprète comme un échelon d'amplitude connue. Attention, l'échelon n'est pas toujours unitaire.

Impulsion

En pratique, sur un système mécanique, un bref choc est assimilable à une impulsion dont l'énergie est inconnue. Sur un système hydraulique, l'apport instantané d'un débit supplémentaire constitue une impulsion d'amplitude égale au volume apporté.

Rampe

Attention, la rampe n'est pas toujours *unitaire*.

Sinusoïde

En pratique, ces signaux se rencontrent souvent. Par exemple une vibration sinusoïdale, en mécanique, peut être créée par une machine tournante présentant un balourd. En électricité, beaucoup de signaux sont sinusoïdaux (tension alternative). Ce signal est idéalisé, dans la mesure où il existe souvent des harmoniques de la fréquence fondamentale.

L'intérêt de ces signaux est que les transformées de Laplace sont connues (Tableau 1).

Nous allons appliquer ces différentes entrées aux différents systèmes de la suite de ce chapitre : système du premier ordre, intégrateur, système du second ordre.

Fonction du temps $x(t)$, $t > 0$	Transformée de Laplace $\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$
$\delta(t)$: Impulsion de Dirac	
$u(t)$: Échelon	
t : Rampe	
$\sin(\omega t)$	

Tableau 1 – Entrées standards

2 SYSTÈME DU PREMIER ORDRE

2.1 Définitions

Nous l'avons vu, l'équation est de la forme :
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \\ y(0) = \end{cases}$$

Les transformées de Laplace donnent :

$$Y(p) =$$

Si l'on considère la condition initiale nulle, on obtient :

$$\frac{Y(p)}{R(p)} =$$

Que l'on préfère écrire sous la forme :

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \quad (\text{IV.1})$$

— K est

— τ est

2.2 Réponse impulsionnelle

$R(p) =$ donc $Y(p) =$ Les tables donnent :

$$y(t) = \quad (\text{IV.2})$$

On en déduit $y(\infty) =$. Ceci signifie qu'en régime permanent,

Calculons la dérivée pour avoir la pente : $\dot{y}(t) =$. Pour $t = 0$, la pente à la courbe est $\dot{y}(0) =$. Le tracé pour $K = 1$ et $\tau = 1\text{s}$ est donné Figure 20.

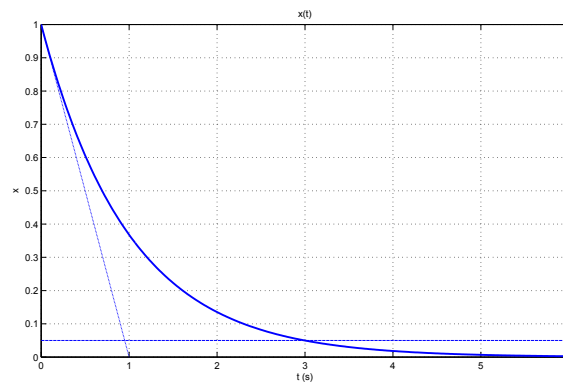


Figure 20 – Réponse impulsionnelle d'un système du 1^{er} ordre

Remarque Le temps de réponse à 5% est défini comme

. Ici, le temps de réponse vaut car .

2.3 Réponse indicielle

La condition initiale étant nulle, l'entrée est un échelon unitaire, donc $R(p) = \frac{1}{p}$. La sortie vaut : $Y(p) = \frac{K}{p(p + \frac{1}{\tau})}$. Les tables donnent :

$$y(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \tag{IV.3}$$

On en déduit la valeur finale $y(\infty) = K$, c'est la définition du gain statique.

Calculons la dérivée pour avoir la pente : $\dot{y}(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$. La pente à l'origine vaut donc : $\dot{y}(0) = \frac{K}{\tau}$.

Le tracé pour $K = 1$ et $\tau = 1s$ est donné Figure 21.

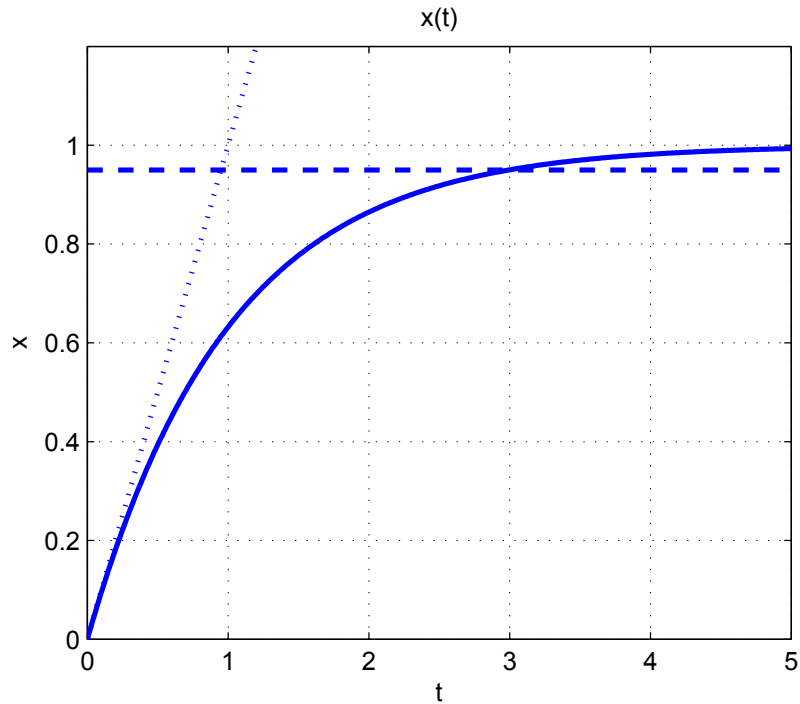


Figure 21 – Réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre

Remarque La Figure 21 montre que

- pour $t = \tau$, la sortie vaut 0.632 de sa valeur finale
- le temps de réponse à 5% vaut 3τ
- la réponse indicielle

2.4 Réponse à une rampe

La condition initiale étant nulle, l'entrée est un échelon unitaire, donc $R(p) = \frac{1}{p}$. La sortie vaut donc : $Y(p) = \frac{1}{p(p + \frac{1}{\tau})}$. Les tables donnent :

$$y(t) = \tau \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (IV.4)$$

Calculons la dérivée pour avoir la pente : $\dot{y}(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$.

Conclusion : valeur finale τ , pente à l'origine $\frac{1}{\tau}$. Asymptote de valeur τ . Le tracé pour $K = 1$ et $\tau = 1s$ est donné Figure 22.

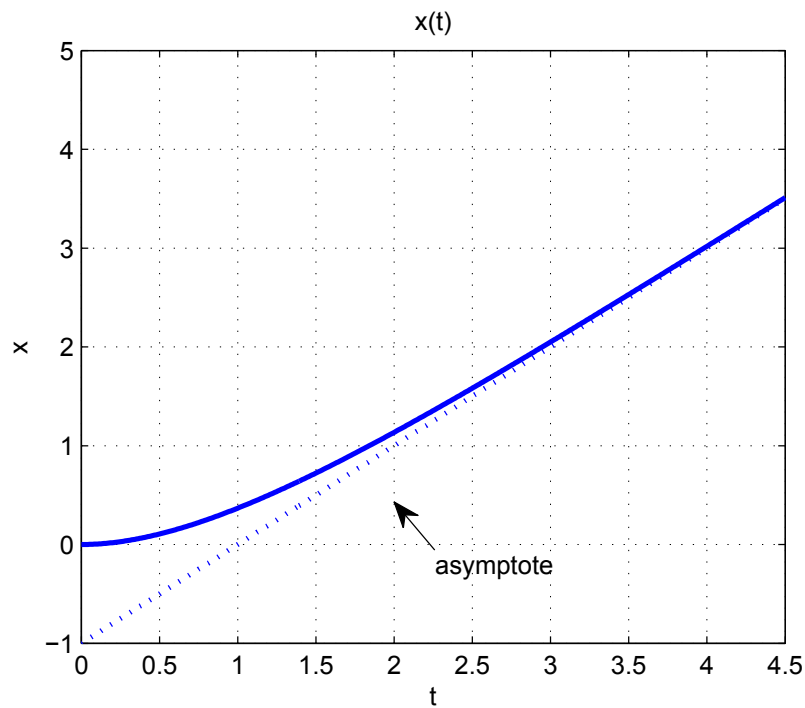


Figure 22 – Réponse rampe d'un système du 1^{er} ordre

Remarque La Figure 22 montre que

- entre l'entrée rampe et la sortie, il existe une erreur qui tend vers τ . Cette valeur n'est finie que pour $K = 1$: elle vaut alors τ et n'est jamais nulle. C'est la *définition* de *l'erreur permanente*, ou *l'erreur de régime permanent*.
- le temps de réponse est défini comme le temps au bout duquel la sortie est confondue avec sa valeur en régime permanent. Ici, *le temps de réponse* est τ .

2.5 Réponse à une entrée sinusoïdale

Considérons l'entrée $r(t) = \dots$. Nous avons donc $Y(p) = \dots$. La transformée de Laplace inverse n'est pas simple et peut être obtenue par calcul ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

$$y(t) = \left(\frac{K\omega}{1 + \tau^2\omega^2} \right) \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \tau \cos(\omega t) + \tau e^{-t/\tau} \right) \quad (\text{IV5})$$

Ce résultat montre qu'en régime permanent, la sortie $y(t)$ est une composition de *sinus* et *cosinus* :

$$y(t) = \left(\frac{K\omega}{1 + \tau^2\omega^2} \right) \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - \tau \cos(\omega t) \right) = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} (\sin(\omega t) - \tau\omega \cos(\omega t))$$

Posons $\phi = \arctan(-\tau\omega)$ soit $\tan(\phi) = -\tau\omega$:

$$y(t) = \frac{K}{1 + \tau^2\omega^2} \frac{1}{\cos \phi} \sin(\omega t + \phi)$$

$$\text{Or : } \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}$$

Donc : $y(t) = \dots$ avec $\phi = \dots$

Résumé : En régime permanent, la sortie est de la forme $y(t) = \dots$.

— $G(\omega)$ est le

— le déphasage est \dots , il est donné par

— pour une entrée sinusoïdale de fréquence donnée, la sortie est \dots .

3 INTÉGRATEUR

Le système admet pour fonction de transfert $\frac{Y(p)}{R(p)} = \dots$

3.1 Réponse impulsionnelle

Pour une entrée impulsion : $Y(p) = \dots$, donc $y(t) = \dots$. La sortie est

3.2 Réponse indicielle

Pour une entrée échelon : $Y(p) = \dots$, donc $y(t) = \dots$. La sortie est

Exemple : vous prenez un bain dans une baignoire qui ne fuit pas et dont l'évacuation est fermée. Que se passe-t-il si vous ouvrez le robinet dans une position fixe ?

4 SYSTÈME DU SECOND ORDRE

Un système du second ordre est un système dont la fonction de transfert possède un p à la puissance 2 au dénominateur de la fonction de transfert, de la forme présentée Figure 23



Figure 23 – Schéma bloc d'un système du 2nd ordre

On écrit cette fonction de transfert sous la forme suivante :

$$\frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi \frac{p}{\omega_n} + 1} = \quad (\text{IV.6})$$

Avec :

—
—
—

La comparaison des diverses formes donne : $K =$; $\omega_n =$; $\xi =$

Associé à la fonction de transfert, nous avons une équation différentielle du second ordre, et donc deux conditions initiales :

$$\begin{cases} b_0 + b_1 \dot{y}(t) + b_2 \ddot{y}(t) = a.r(t) \\ y(0) = \quad \text{et } \dot{y}(0) = \end{cases}$$

En mathématique, on classe cette équation différentielle en fonction des racines de

. De façon similaire, nous classons les systèmes du second ordre en fonction de la nature des pôles de la fonction de transfert IV.6.

Le système va "réagir" de manière différente en fonction de la valeur du facteur d'amortissement ξ . Trois cas vont se présenter :

Système hyper-amorti : $\xi >$

Dans ce cas, les pôles sont réels : $\begin{cases} p_1 = \omega_n (-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ p_2 = \omega_n (-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{cases}$ et l'on écrit la fonction de transfert sous la forme :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} = \quad (\text{IV.7})$$

Système critique : $\xi =$

Dans ce cas, les pôles sont doubles :

$$H(p) = \frac{K \omega_n^2}{p^2 + 2\xi \omega_n p + \omega_n^2} = \quad (\text{IV.8})$$

Système sous-amorti : $\xi < 1$

Dans ce cas, les pôles sont complexes conjugués :
$$\begin{cases} p_1 = \omega_n (-\xi + j\sqrt{1-\xi^2}) \\ p_2 = \omega_n (-\xi - j\sqrt{1-\xi^2}) \end{cases}$$

La fonction de transfert ne peut pas être factorisée.

Chacune de ces conditions d'amortissement va être étudiée en fonction du type d'entrée : impulsionnelle ou indicielle.

4.1 Réponse impulsionnelle

On suppose les conditions initiales nulles : $R(p) =$

4.1.1 Système hyper-amorti

Cas $\xi > 1$. La transformée de Laplace de la sortie est donnée par :

$$Y(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)} \text{ avec : } \begin{cases} p_1 = \omega_n (-\xi + \sqrt{\xi^2-1}) \\ p_2 = \omega_n (-\xi - \sqrt{\xi^2-1}) \end{cases}$$

Les tables de transformées de Laplace donnent :

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(p+a)(p+b)} \right] =$$

$$\text{avec : } \begin{cases} a = -p_1 = \omega_n (\xi - \sqrt{\xi^2-1}) \\ b = -p_2 = \omega_n (\xi + \sqrt{\xi^2-1}) \\ b - a = 2\omega_n \sqrt{\xi^2-1} \end{cases}$$

D'où :

$$y(t) = \frac{K\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}} \left(e^{-\omega_n(\xi-\sqrt{\xi^2-1})t} - e^{-\omega_n(\xi+\sqrt{\xi^2-1})t} \right) \quad (\text{IV.9})$$

4.1.2 Système critique

Cas $\xi = 1$.

$$Y(p) =$$

D'où :

$$y(t) = \quad (\text{IV.10})$$

4.1.3 Système sous amorti

Cas $\xi < 1$. Les tables donnent :

$$y(t) = \frac{K\omega_n e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t) \quad (\text{IV.11})$$

La Figure 24 présente le tracé des réponses impulsionnelles pour $K = 1$, $\omega = 1 \text{ rad/s}$ et pour différentes valeurs du facteur d'amortissement ξ .

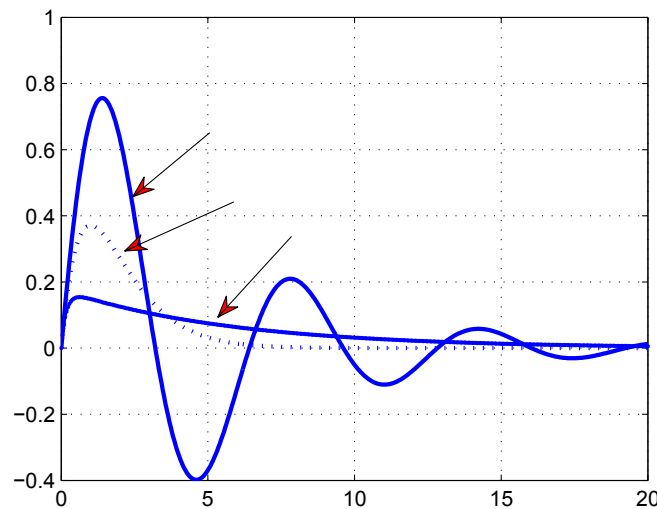


Figure 24 – Réponses impulsionnelles pour différentes valeurs de ξ

4.2 Réponse indicielle

On suppose les conditions initiales nulles. L'entrée est un échelon, donc $R(p) = \frac{1}{p}$.

4.2.1 Système hyper-amorti

$$Y(p) = \frac{K\omega_n^2}{p(p-p_1)(p-p_2)} \text{ avec : } \begin{cases} p_1 = \omega_n(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ p_2 = \omega_n(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \end{cases}$$

$$\text{Les tables donnent : } \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p(p+a)(p+b)} \right] = \frac{1}{ab} \left(1 - \frac{1}{b-a} (b e^{-at} - a e^{-bt}) \right)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} a = -p_1 = \omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ b = -p_2 = \omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \\ a \cdot b = \omega_n^2 \\ b - a = 2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \end{cases}$$

donc :

$$y(t) = \frac{1}{ab} \left(1 - \frac{1}{b-a} (b e^{-at} - a e^{-bt}) \right) \quad (\text{IV.12})$$

Observation

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) =$$

C'est le .

4.2.2 Système critique

La transformée de Laplace de la sortie se met sous la forme : $Y(p) = \left(\frac{K\omega_n^2}{p(p + \omega_n)^2} \right)$

Les tables fournissent :

$$y(t) = \quad (IV.13)$$

4.2.3 Système sous amorti

Lorsque les pôles sont complexes, la transformée de Laplace de la sortie s'écrit :

$$Y(p) = \frac{K}{p \left[\left(\frac{p}{\omega_n} \right)^2 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + 1 \right]}$$

Les tables donnent :

$$y(t) = K \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} \cdot t + \varphi) \right] \text{ avec } \varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right) \quad (IV.14)$$

Remarque $\omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ est appelée

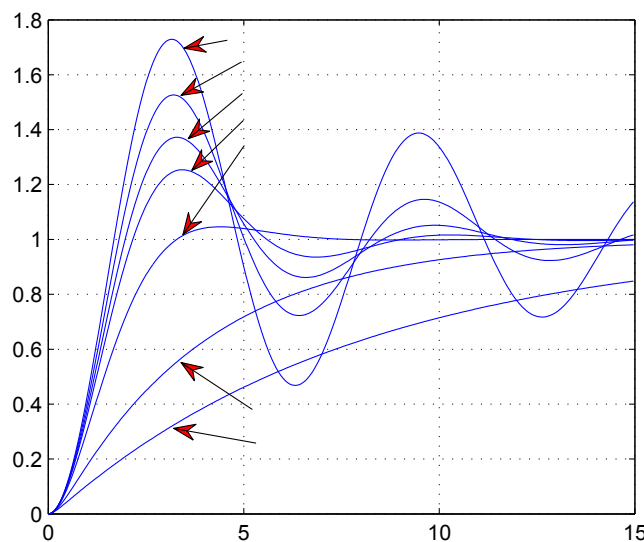


Figure 25 – Réponses indicielles pour différentes valeurs de ξ

La Figure 25 présente les réponses indicielles pour $K = 1$, $\omega = 1\text{rad/s}$ et pour différentes valeurs du

facteur d'amortissement ξ . On remarque que pour les systèmes sous-amortis ($\xi < 1$), le premier dépassement est important. Il se calcule en % par la formule :

$$D\% =$$

Ce premier dépassement dépend du facteur d'amortissement. Plus ξ est faible, plus le dépassement est important.

La Figure 25 montre que le temps de réponse dépend du facteur d'amortissement. Nous remarquons que :

- le temps de réponse à 5% est minimum pour les facteurs d'amortissement $\xi =$
- le temps de réponse est élevé pour , mais il est également élevé pour . Il existe un minimum pour $\xi =$

Pour $\xi <$ on admet l'approximation $T_{\text{réponse}} =$

Pour $\xi >$ on admet l'approximation $T_{\text{réponse}} =$

Ces formules restent très approchées, mais elles montrent que le système est d'autant plus rapide que la pulsation propre ω_n est . Le Tableau 2 synthétise les temps de réponse pour différentes valeurs de ξ .

Facteur d'amortissement	$\xi = 0,2$	$\xi = 0,5$	$\xi = 2$
$T_{\text{réponse}}$ lecture Figure 25			
$T_{\text{réponse}}$ par formules			

Tableau 2 – Temps de réponse pour différentes valeurs de ξ

Faire les exercices de la partie 3 p.60.

Chapitre V

Performance des systèmes bouclés

Sommaire

1	Notations et relations	36
1.1	Rappels	36
1.2	Performances, objectifs	36
1.2.1	Stabilité	37
1.2.2	Précision, erreur	37
1.2.3	Temps de réponse	37
2	Étude de la stabilité	38
2.1	Condition sur les pôles	38
2.2	Critère de Routh	38
2.3	Exemples	39
2.3.1	Premier ordre	39
2.3.2	Second ordre	39
2.3.3	Troisième ordre	39
3	Étude de la précision	39
3.1	Divers types d'erreurs	39

1 NOTATIONS ET RELATIONS

1.1 Rappels

Nous avons vu dans un chapitre précédent le système bouclé présenté à la Figure 26.

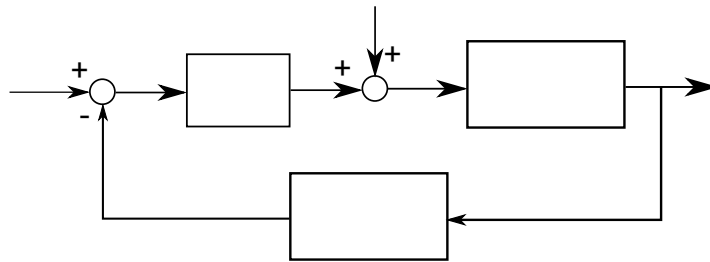


Figure 26 – Système continu bouclé

Quelques manipulations fournissent la sortie $Y(p)$:

$$Y(p) = \quad (V.1)$$

et l'erreur $E(p)$:

$$E(p) = \quad (V.2)$$

Très généralement, on désigne **la fonction de sensibilité** par :

$$S(p) = \quad (V.3)$$

et **la fonction de sensibilité complémentaire** par :

$$T(p) = \quad (V.4)$$

Et on vérifie que $S(p) + T(p) = 1$.

Le dénominateur commun à tous les transferts précédents permet de définir le **polynôme caractéristique** de l'asservissement.

1.2 Performances, objectifs

Le but d'un asservissement est de "faire en sorte" que la variable à asservir suive la variable de consigne. Le moyen d'obtenir ce "suivi de consigne" consiste à déterminer le correcteur afin de respecter le cahier des charges que l'on traduit en terme de performances du système bouclé.

2 ÉTUDE DE LA STABILITÉ

2.1 Condition sur les pôles

Si on considère un système du premier ordre de constante de temps τ , nous avons vu que les réponses impulsionnelles, indicelles et aux conditions initiales reposent sur l'évolution de $e^{-t/\tau}$. Par conséquent, pour que cette exponentielle tende vers 0, il faut $\tau > 0$.

Définitions

- Un système connu par sa fonction de transfert $H(p)$ est stable si
 - Si un des pôles est $\text{Re}(p) < 0$
 - Si les pôles sont $\text{Re}(p) < 0$

2.2 Critère de Routh

La recherche des racines d'une équation de degré élevé est une tâche fastidieuse. Heureusement, le critère de Routh permet de préciser le signe des parties réelles et des racines sans avoir à les calculer. Considérons le polynôme du dénominateur de $H(p)$ écrit sous la forme :

(V.5)

Première étape : Vérifier que

Deuxième étape : Former la matrice carrée suivante

(V.6)

On appelle mineur d'une matrice les déterminants des sous matrices extraites de la matrice initiale. On dit qu'un mineur est principal s'il contient le terme a_{ii} de la matrice.

Critères :

- Pour que le système soit stable, tous les mineurs principaux doivent être > 0 .
- Si un des déterminants principaux est < 0 , l'équation V.5 possède n racines à partie réelle positive et le système est instable.
- Si un des déterminants principaux est < 0 , le système est instable.

2.3 Exemples

2.3.1 Premier ordre

Le système ayant pour fonction de transfert $G(s) = \frac{K}{s + a}$, le polynôme caractéristique s'écrit $s + a = 0$.
Pour que le système soit stable, il faut et il suffit que $a > 0$. C'est

2.3.2 Second ordre

Il s'agit des systèmes dont l'équation V.5 s'écrit :

La première condition exige que $a > 0$ et $b > 0$ et

La deuxième condition conduit à l'écriture de la matrice :

Les deux conditions sur les déterminants principaux sont $a > 0$ et $b > 0$

Conclusion

2.3.3 Troisième ordre

Il s'agit des systèmes dont l'équation V.5 s'écrit : $s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0$. Supposons tous les

coefficients $a_i > 0$ et formons la matrice :

Les conditions sur les mineurs principaux donnent :

—
—
—
—

Conclusion Tous les a_i positifs et

3 ÉTUDE DE LA PRÉCISION

3.1 Divers types d'erreurs

Définition On cherche à déterminer l'écart entre la consigne et la sortie du processus, mesurée par le capteur. On cherche donc la limite, si elle existe, pour un temps t "grand", de l'erreur $e(t)$ pour le système à retour unitaire ($G(s) = \frac{K}{s + a}$) de la Figure 26, lorsque la perturbation est nulle.

- lorsque la consigne est un échelon, l'erreur est dite
 - lorsque la consigne est une rampe de pente a ; l'erreur est dite ou
- Donc, dans le cas où , l'erreur est donnée par :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) =$$

soit : $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) =$

L'erreur statique correspond à une consigne :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) =$$

soit : $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) =$ (V.7)

Notons $L(p) =$. La relation V.7 montre que, sous réserve de stabilité, pour que l'erreur statique soit nulle, il doit y avoir au moins un soit dans , soit dans . Le dénominateur de $L(p)$ doit donc contenir p à une puissance supérieure ou égale à . Le système est dit

L'erreur dynamique correspond à une consigne :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) =$$

soit : $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) =$ (V.8)

La relation V.8 montre que, sous réserve de stabilité, pour que l'erreur dynamique soit nulle, il doit y avoir au moins intégrateur dans $L(p)$ ou si le dénominateur de $L(p)$ contient p à une puissance supérieure ou égale à . Le système est dit

Notion de classe La classe d'un système bouclé à retour unitaire est définie dans le Tableau 3.1 qui montre également la valeur des erreurs.

	Classe 0	Classe 1	Classe 2
Nb d'intégrateur dans $L(p)$			
Erreur statique			
Erreur dynamique			

Tableau 3 – Classe d'un système bouclé à retour unitaire

Faire les exercices de la partie 4 p.61.

Chapitre VI

Analyse fréquentielle

Sommaire

1	Introduction	42
1.1	Intérêt	42
1.2	Définitions	42
1.3	Rappel sur les nombres complexes	42
1.4	Plan de Bode	43
1.5	Théorèmes	44
2	Diagramme de Bode	44
2.1	Transmittance $H(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau j\omega}$	44
2.2	Transmittance $H(j\omega) = 1 + \tau j\omega$	46
2.3	Transmittance $H(j\omega) = j\omega$	47
2.4	Transmittance $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$	48
2.5	Composition des graphes	50
3	Cas du second ordre sous amorti	50
4	Correspondance temps-fréquence	51
4.1	Bande passante	51
4.2	Résonance	51
5	Performances	52
5.1	Marges de stabilité	52
5.2	Dans le plan de Bode	52

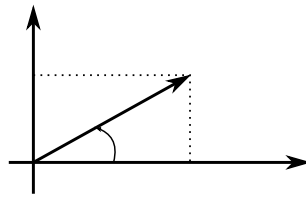


Figure 29 – Plan complexe

Cette représentation géométrique permet de mettre en évidence :

— Il se calcule par

(VI.3)

— Elle est définie

Donc

(VI.4)

1.4 Plan de Bode

Nous comprenons maintenant grâce aux équations VI.1 que $G(j\omega)$ et $\phi(\omega)$ du signal de sortie va dépendre de $U(j\omega)$ de l'entrée $u(t)$. Afin de visualiser le comportement du signal de sortie en fonction de ω , nous allons tracer $G(j\omega)$ en fonction de ω et de façon $\phi(\omega)$ à l'aide de 2 courbes dans le **plan de Bode**.

La courbe du $G(j\omega)$ sera exprimée par $|G(j\omega)|$. Cette courbe est graduée 20 dB/décade .

(VI.5)

Comme nous allons manipuler de grands nombres complexes, calculés par des logarithmes, nous allons utiliser un graphique \log , comme présenté Figure 30. L'intervalle entre 10^0 et 10^1 s'appelle

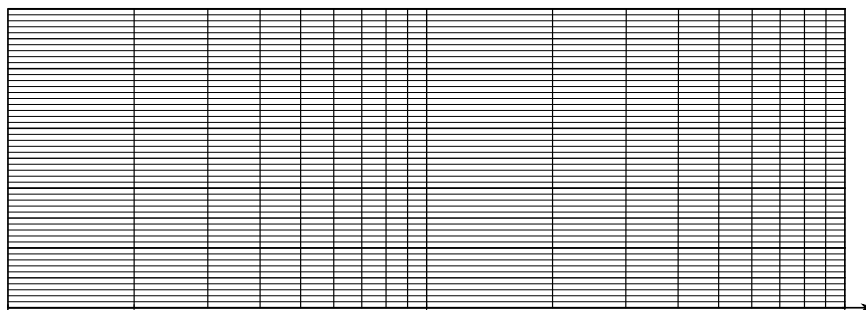


Figure 30 – Graphe semi-logarithmique

Attention La lecture d'un graphe semi-logarithmique ne semble pas naturelle au premier abord. Il faut bien faire attention au fait que l'on navigue en puissances de 10. *Remarque : où est le zéro ?*

1.5 Théorèmes

Travailler avec des logarithmes permet donc de manipuler aisément des grands nombres et d'utiliser leurs propriétés pour simplifier les calculs.

Soient les transmittances $H(j\omega)$, $A(j\omega)$ et $B(j\omega)$:

Théorème 1 Si $H = A.B$, alors

Théorème 2 Si $H = A/B$, alors

2 DIAGRAMME DE BODE

Nous allons donc tracer les module et phase de la fonction de transfert, que nous aurons exprimé comme produit de fonctions caractéristiques : $\frac{1}{1 + \tau j\omega}$, $1 + \tau j\omega$, $\tau j\omega$ et $\frac{1}{\tau j\omega}$.

Le tracé exact serait difficile à faire à la main (et pendant un examen), nous allons donc tracer les ; il convient donc d'en choisir les .

2.1 Transmittance $H(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau j\omega}$

Étape 0 : mise en forme

Pour commencer, il faut s'assurer que la transmittance est bien sous la forme complexe .

$$H(j\omega) =$$

La partie réelle est donc et la partie imaginaire

1^{re} étape : calcul du module et du gain

Il est nécessaire de calculer le module, qui servira juste après pour le calcul du gain. Si l'on reprend la définition VI.3, et maintenant que nous avons les parties réelle et imaginaires, nous pouvons alors calculer le module $|H(j\omega)| =$ (à faire).

Une fois que nous avons le module, nous pouvons calculer le gain en décibel, en suivant la formule VI.5 :

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| =$$

Les propriétés des logarithmes permettent d'écrire cela sous la forme :

$$G_{dB} =$$

Pour en tracer les points caractéristiques, regardons ce qu'il se passe en basses fréquences, lorsque $\omega \rightarrow 0$:

$$G_{dB} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \quad \rightarrow$$

En basses fréquence, le gain tendra donc vers 0. Que se passe-t-il en hautes fréquences ?

$$G_{dB} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \quad \rightarrow$$

En hautes fréquences, le gain va tendre vers avec une pente de

Entre les basses et hautes fréquences, il va donc se produire un , qui se fait

Remarque à la pulsation de coupure le gain vaut exactement

2^{me} étape : calcul de la phase

L'équation VI.4 nous permet de calculer la phase :

$$\varphi = \arctan \frac{Im}{Re} =$$

De même que pour le gain, regardons ce qu'il se passe en basses et hautes fréquences :

$$\begin{aligned} \varphi &\xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \quad \rightarrow \\ \varphi &\xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} \quad \rightarrow \end{aligned}$$

Remarque à la pulsation de coupure la phase vaut exactement

La Figure 31 présente le diagramme de Bode en gain et en phase de $H(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau j\omega}$ dans le cas où $\tau = 1$.

Les autres exemples suivants suivent exactement la même démarche, nous n'allons donc pas donner tous les détails de calcul.

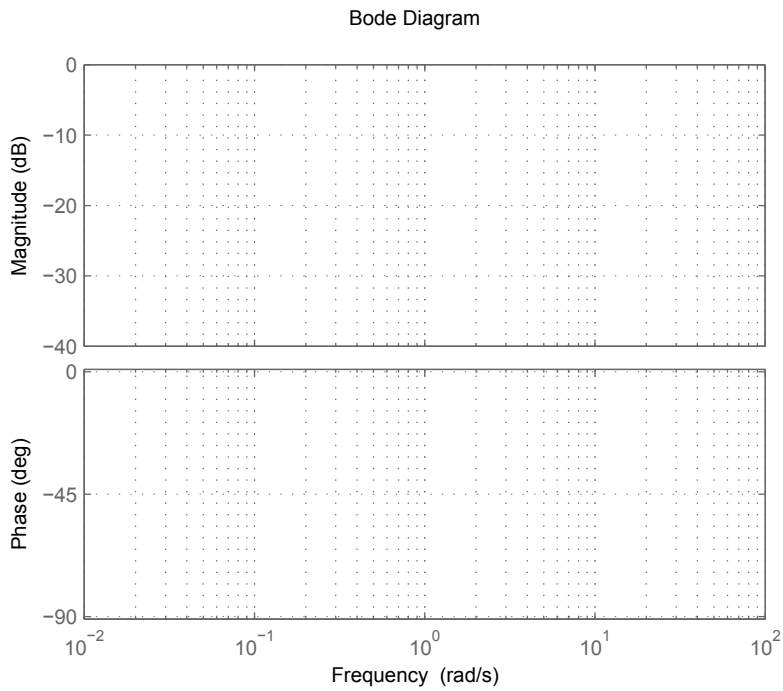


Figure 31 – Bode de $H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega}$

2.2 Transmittance $H(j\omega) = 1 + \tau j\omega$

Étape 0 : mise en forme

La transmittance est déjà sous la forme d'un nombre complexe classique. La partie réelle est et la partie imaginaire

1^{re} étape : calcul du module et du gain

Module : $|H(j\omega)| =$.

Gain : $G_{dB} =$.

Basses fréquences : $G_{dB} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0}$ → .

Hautes fréquences : $G_{dB} \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty}$: pente de

2^{me} étape : calcul de la phase

Phase : $\varphi =$

Basses fréquences : $\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0}$ →

Hautes fréquences = $\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty}$ →

Remarque à la pulsation de coupure la phase vaut exactement

La Figure 32 présente le diagramme de Bode en gain et en phase de $H(j\omega) = 1 + \tau j\omega$ dans le cas où $\tau = 1$.

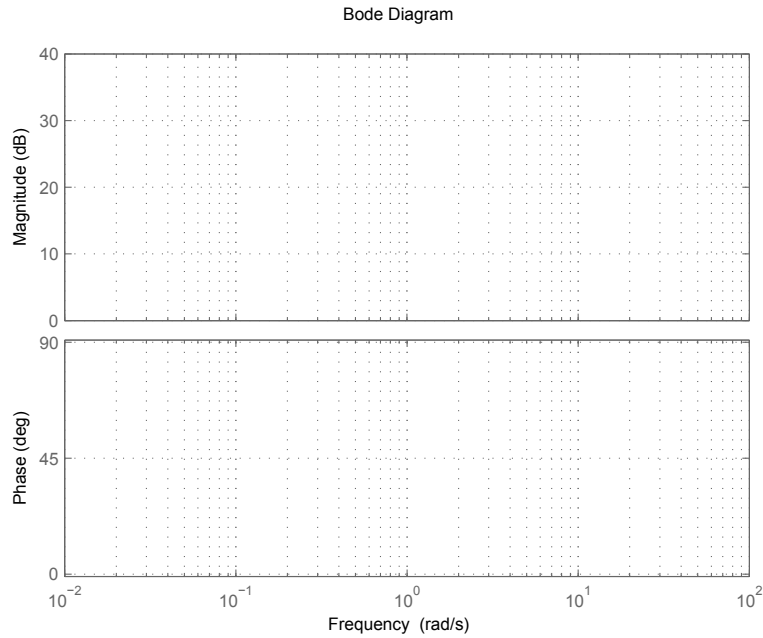


Figure 32 – Bode de $H(j\omega) = 1 + j\omega$

2.3 Transmittance $H(j\omega) = j\omega$

Étape 0 : mise en forme

La transmittance est déjà sous la forme d'un nombre complexe classique. La partie réelle est et la partie imaginaire est , c'est .

1^{re} étape : calcul du module et du gain

Module : $|H(j\omega)| =$.

Gain : $G_{dB} =$.

Le gain va donc de à avec une pente de . Il faudra

2^{me} étape : calcul de la phase

Comme la fonction de transfert est $H(j\omega) = j\omega$, il est représenté comme sur la Figure 33. Quelle que soit

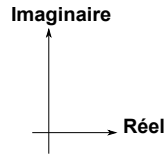


Figure 33 – Imaginaire pur $j\omega$ dans le plan complexe

La Figure 34 présente le diagramme de Bode en gain et en phase de $H(j\omega) = j\omega$.

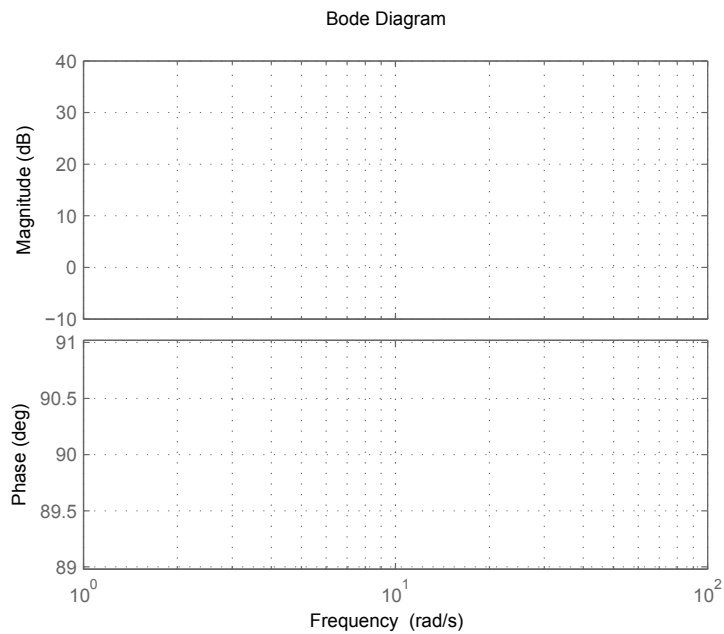


Figure 34 – Bode de $H(j\omega) = j\omega$

2.4 Transmittance $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

Étape 0 : mise en forme

$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$. C'est la partie imaginaire

1^{re} étape : calcul du module et du gain

Module : $|H(j\omega)| = \frac{1}{\omega}$.

Gain : $G_{dB} =$.

Le gain va donc de à avec une pente de . Il faudra

2^{me} étape : calcul de la phase

Comme la fonction de transfert est un , il est représenté comme sur la Figure 35. Quelle que soit

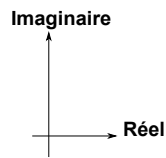


Figure 35 – Imaginaire pur $-j\omega$ dans le plan complexe

La Figure 36 présente le diagramme de Bode en gain et en phase de $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$.

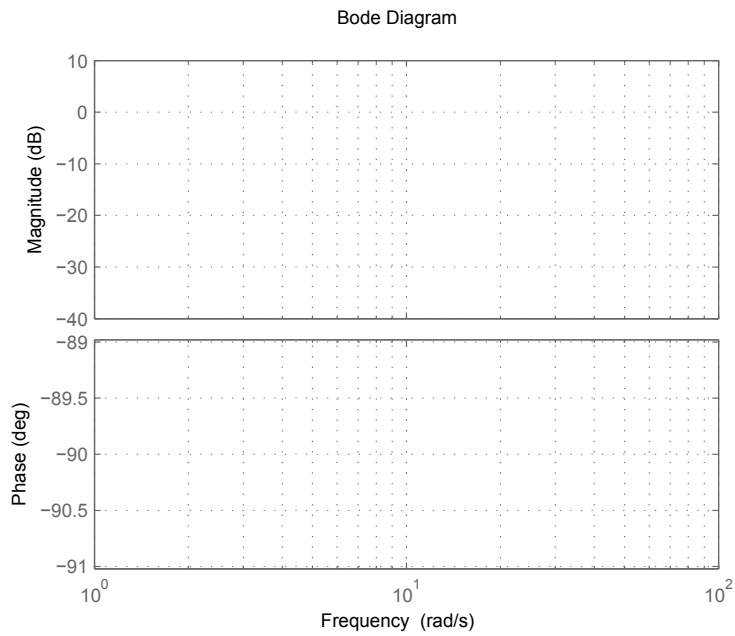


Figure 36 – Bode de $H(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

2.5 Composition des graphes

Considérons la fonction de transfert $H(p) = \dots$. C'est une composition de fonctions :

$$H(j\omega) =$$

Avec :

$$H_1(j\omega) =$$

$$H_2(j\omega) =$$

$$H_3(j\omega) =$$

$$H_4(j\omega) =$$

D'après les théorèmes du paragraphe 1.5 : $Bode(H) = \dots$.
 Pour tracer les diagrammes de Bode en gain et en phase de $H(p)$, il faudra donc tracer les graphes de chacune des fonctions H_i comme vu précédemment en fonction des valeurs des ω , puis (p.54).

3 CAS DU SECOND ORDRE SOUS AMORTI

Considérons le système :
$$H(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{\frac{-\omega^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi j\omega}{\omega_n} + 1} = \frac{1}{1 - u^2 + 2\xi ju} \tag{VI.6}$$

Avec $u = \frac{\omega}{\omega_n}$ qui est la pulsation réduite.

Calculons le module :
$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}}$$

Et la phase :
$$\varphi = \begin{cases} -\arctan\left[\frac{2\xi u}{1 - u^2}\right] & \text{si } 1 - u^2 > 0 \\ -\pi - \arctan\left[\frac{2\xi u}{1 - u^2}\right] & \text{si } 1 - u^2 < 0 \end{cases}$$

Le gain passe par un maximum si le facteur d'amortissement ξ est inférieur à 0,707, et ce maximum vaut $Q = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$ (à convertir en dB). Q est le **facteur de surtension**. Le maximum à lieu pour $\omega_R = \omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$, nommée **pulsation de résonance**.

La Figure 37 présente le diagramme de Bode en gain et en phase de $H(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$ pour $\omega_n = 1$ et différentes valeurs de ξ .

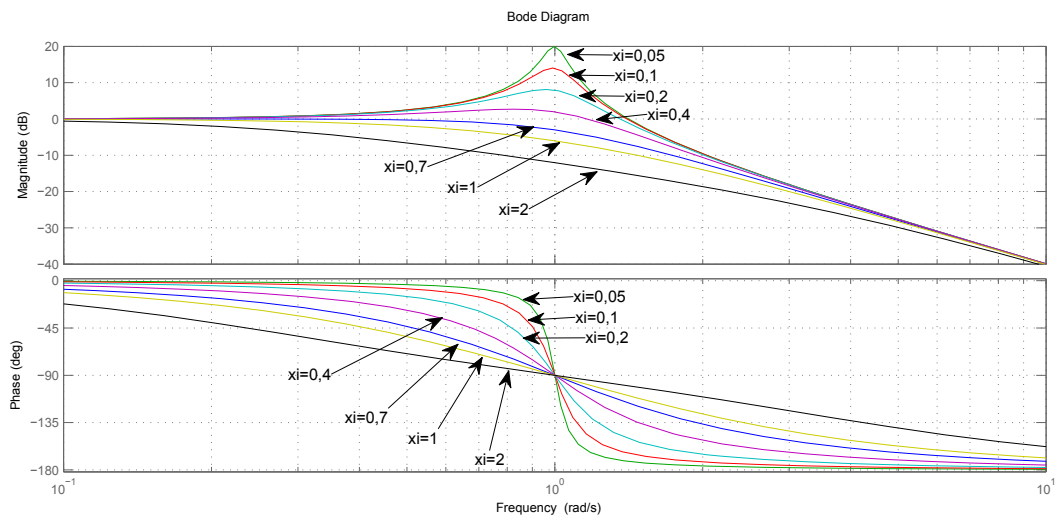


Figure 37 – Bode de $H(p) = \frac{1}{\omega_n^2 + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1}$ pour $\omega_n = 1$ et différentes valeurs de ξ

La Figure 37 montre que :

- pour les pulsations faibles, le gain vaut $0dB$, *i.e.* le système transmet la sinusoïde d'entrée. Aux pulsations élevées, le gain présente une pente de $-40dB/décade$, *i.e.* le système réduit l'amplitude de la sinusoïde d'entrée
- pour les pulsations faibles, la phase vaut 0° alors qu'aux pulsations élevées elle vaut $-\pi$
- un point caractéristique de la courbe est celui de la pulsation ω_n et de phase $-\pi/2$

4 CORRESPONDANCE TEMPS-FRÉQUENCE

4.1 Bande passante

La bande passante d'un système est la pulsation ω_B pour laquelle le gain du système est

$$. \text{ Pour un } 1^{er} \text{ ordre, } \omega_B = 1/\tau.$$

Pour un système stable, plus la bande passante est grande, plus la réponse indicielle est rapide (*i.e.* temps de réponse faible).

4.2 Résonance

La pulsation de résonance d'un système est la pulsation pour laquelle le gain passe par un maximum. Si c'est un système mécanique, il y a un risque d'endommagement important.

5 PERFORMANCES

5.1 Marges de stabilité

Nous avons vu que la stabilité dépend des pôles de $L(p)$ (avec $L = \dots$) qui s'annule pour $L(p) = \dots$, soit :

$$|L| = \dots \text{ et } \varphi(L) = \dots$$

Le point de module \dots et de phase \dots est appelé le \dots

5.2 Dans le plan de Bode

Démarche : on trace les courbes du système en boucle ouverte :

Le système est stable si \dots

La marge de gain est définie lorsque \dots

La Figure 38 montre les mesures de marges de gain et de phase sur le diagramme de Bode de la fonction $L(p) = \frac{5}{p(p+1)(p+4)}$. Nous voyons que pour cette fonction, la marge de gain est de \dots et la marge de phase de \dots

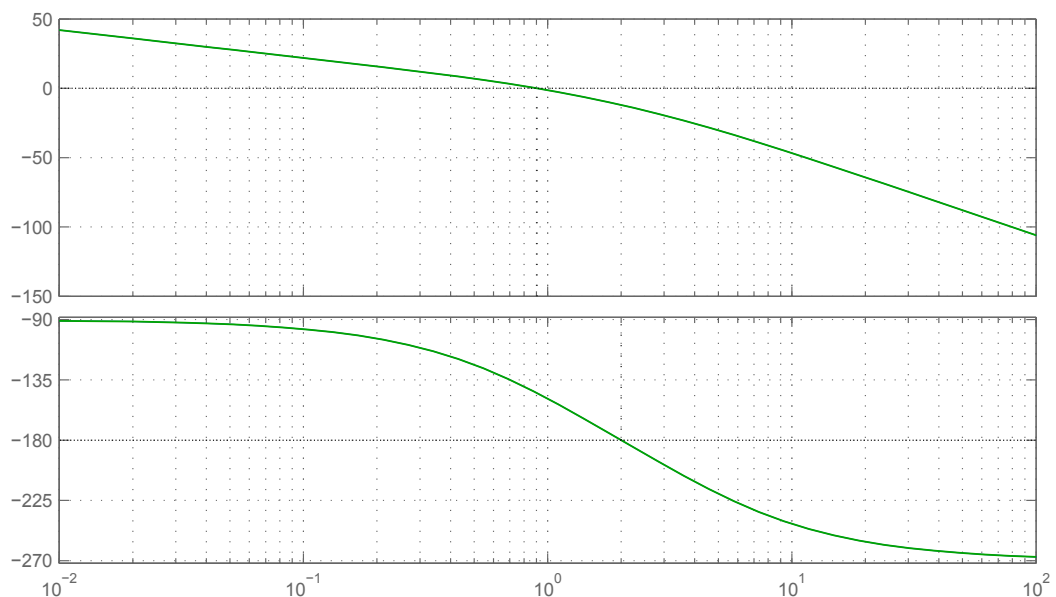
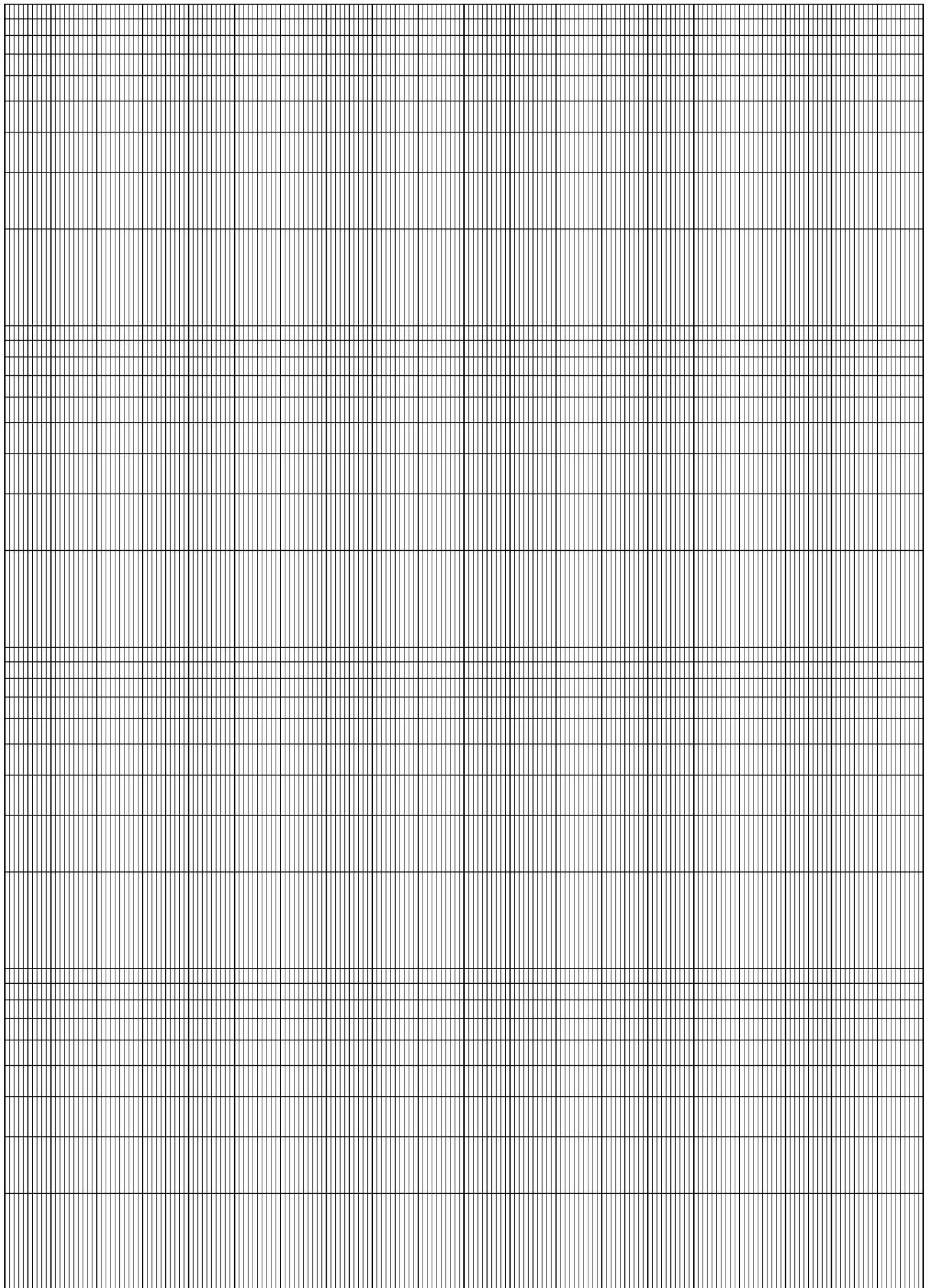


Figure 38 – Bode de $L(p) = \frac{5}{p(p+1)(p+4)}$

Faire les exercices de la partie 5 p.61.



Chapitre VII

Correction des systèmes

Sommaire

1	Généralités	56
---	-------------------	----

1 GÉNÉRALITÉS

Chapitre VIII

Exercices

1 EXERCICES CHAPITRE TRANSFORMÉE DE LAPLACE

Exercice 1 Analyser les valeurs finales des courbes Figures 6 et 7. Comparer avec les valeurs obtenues en utilisant les théorèmes sur les limites.

Exercice 2 Calculer la transformée de Laplace de $y(t) = 10t(1 - e^{-5t})$

Exercice 3 Calculer les originales de :

$$F(p) = \frac{e^{-Tp}}{p} \quad G(p) = \frac{p}{p+a} \quad H(p) = \frac{1}{p^3} \quad (\text{VIII.1})$$

Exercice 4 Résoudre l'équation différentielle $\ddot{y} + 3\dot{y} + 4y = 0$ avec les conditions initiales $\dot{y}(0) = \dot{y}(0) = 0$ et $y(0) = 3$.

Exercice 5 Montrer que le produit de convolution de $\sin(t)$ par $\cos(t)$ est égal à $0,5t \sin(t)$.
En déduire la transformée de Laplace de $t \sin(t)$

Exercice 6 Soit le signal périodique : $x(t) = 1$ pour $0 \leq t < T/2$ et $x(t) = -1$ pour $T/2 \leq t < T$.
Calculer sa transformée de Laplace.

2 EXERCICES CHAPITRE MODÉLISATION

Exercice 7 Considérons le système de la Figure 39. Montrer que :

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{Mp^2 + cp + k}$$

Exercice 8 Considérons le système de la Figure 40. Montrer que :

$$\frac{Z(p)}{X(p)} = \frac{\alpha\tau p}{1 + \alpha\tau p} \text{ avec } \alpha = \frac{c1}{c1 + c2} < 1 \text{ et } \tau = \frac{c2}{k}$$

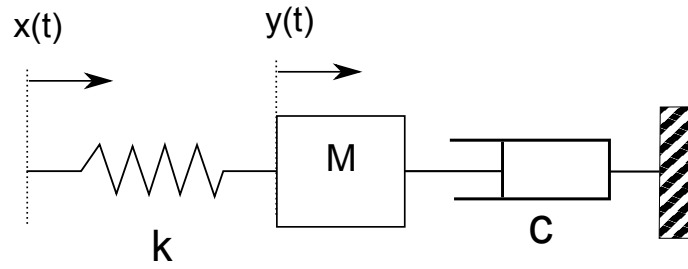


Figure 39 -

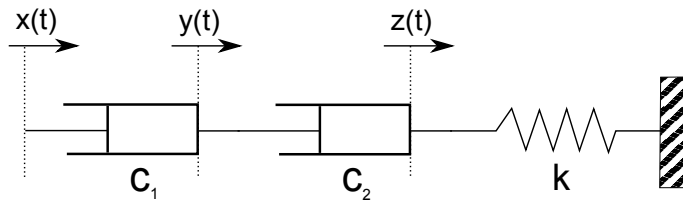


Figure 40 -

Exercice 9 Considérons le système de la Figure 41. Un actionneur délivre la force $f(t)$. Notons x_i les déplacements et \dot{x}_i les vitesses des masses M_i par rapport à un repère fixe positif vers la droite. À partir des équations de la mécanique, donner le modèle ayant pour entrée la force f et pour sortie la position x_3 .

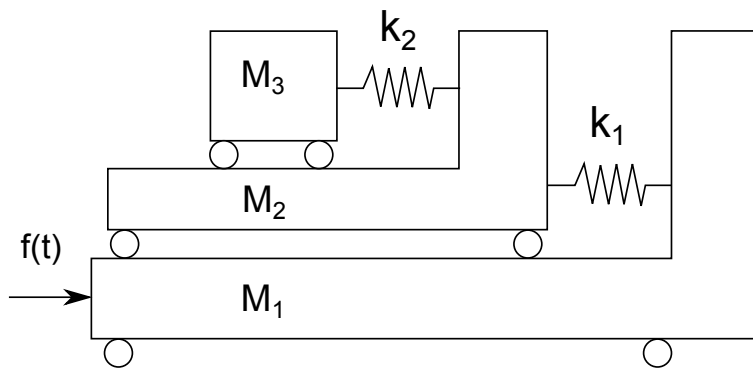


Figure 41 -

Exercice 10 Calculer la fonction de transfert $\frac{X(p)}{F(p)}$ du système présenté Figure 42.

Exercice 11 Calculer la fonction de transfert $\frac{X(p)}{F(p)}$ du système présenté Figure 43.

Exercice 12 Définir les variables intermédiaires et calculer la fonction de transfert $\frac{X(p)}{F(p)}$ du système présenté Figure 44.

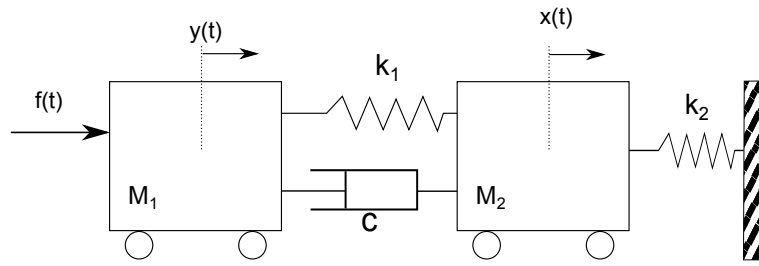


Figure 42 -

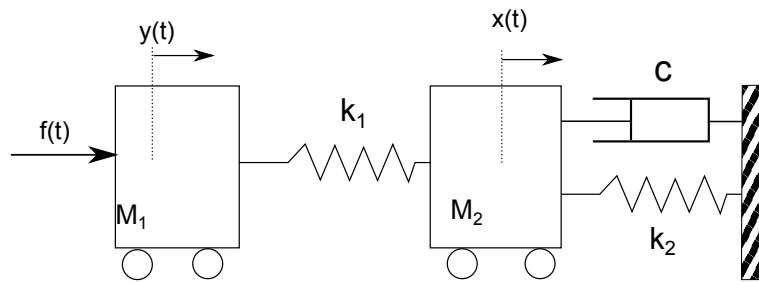


Figure 43 -

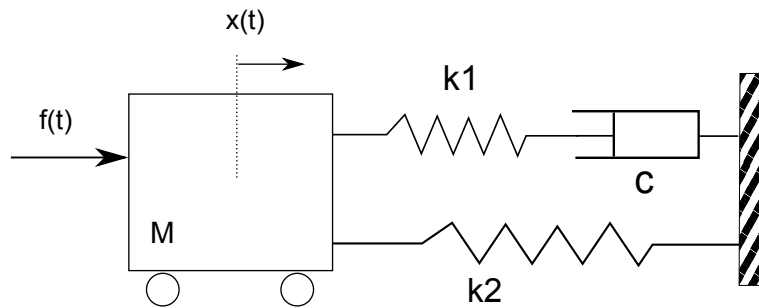


Figure 44 -

Exercice 13 Calculer la fonction de transfert $\frac{Y(p)}{F(p)}$ du système présenté Figure 45.

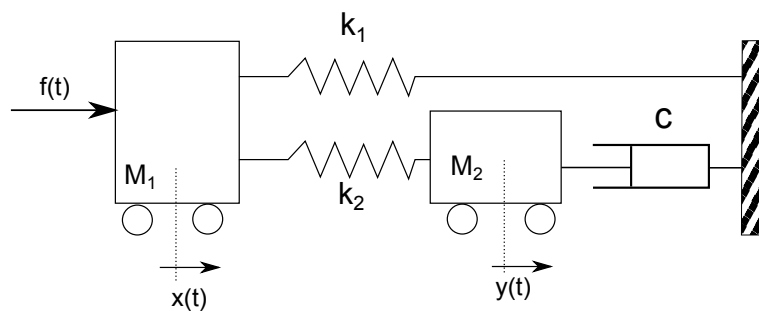


Figure 45 -

3 EXERCICES CHAPITRE ANALYSE TRANSITOIRE

Exercice 14 Calculer les réponses impulsionnelles des systèmes suivants :

$$F(p) = \frac{2}{p^2 + 5p + 4}; G(p) = \frac{2}{p^2 + 2p + 4}$$

$$\text{Réponses : } f(t) = \frac{2}{3}(e^{-t} - e^{-4t}); g(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t} \sin \sqrt{3}t$$

Exercice 15 Pour les systèmes suivants, on applique un échelon d'amplitude 1. Calculer la sortie à l'instant 1,5s.

$$H(p) = \frac{2}{p^2 + 5p + 4}; I(p) = \frac{2}{p^2 + 2p + 4}$$

$$\text{Réponses : } h(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{2}{3}e^{-t}; i(t) = 0,5(1 - 1,154e^{-t} \cos(t - 0,5236))$$

Exercice 16 Soit le système bouclé de la Figure 46 :

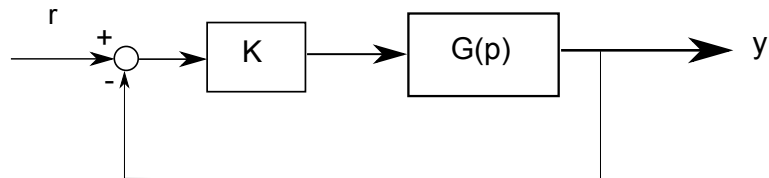


Figure 46 -

$$\text{Avec : } G(p) = \frac{1}{(1+p)(1+5p)}.$$

Calculer la fonction de transfert $\frac{Y(p)}{R(p)}$ et en déduire les valeurs finales de la sortie $y(t)$ en fonction de K quand on applique un échelon unitaire sur la consigne $r(t)$.

Tracer $y(t)$ pour les valeurs suivantes de $K = 1; 10; 500$.

Comparer les valeurs finales de y à celles précédemment calculées. Analyser le premier dépassement. Conclure.

Exercice 17 On considère à nouveau l'exercice précédent. Déterminer K pour que le système bouclé présente un facteur d'amortissement égal à 0,4. Quelle sera alors la valeur finale? Donner un ordre de grandeur du temps de réponse sans calculer $y(t)$. Conclure.

Exercice 18 Afin de tester le comportement de pièces à la tenue en température, on utilise un four régulé en... température. Le chauffage du four est réalisé par l'ouverture progressive $u(t)$ d'une vanne admettant un débit variable de vapeur d'eau. L'ouverture de la porte du four agit comme un signal de perturbation et est notée $d(t)$. On admet que la température $\theta(t)$ à l'intérieur du four est uniforme. En petites variations autour d'une température normale, la modélisation conduit au schéma de la Figure 47. Le temps est exprimé en minute.

On envisage bien sûr de commander ce four par un asservissement, représenté à la Figure 48. Pour mesurer la température du four, on utilise un thermocouple de constante de temps négligeable et de gain $0,04V/^{\circ}C$.

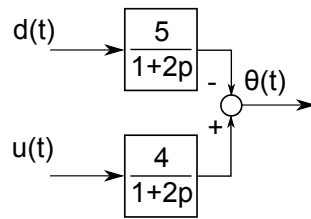


Figure 47 -

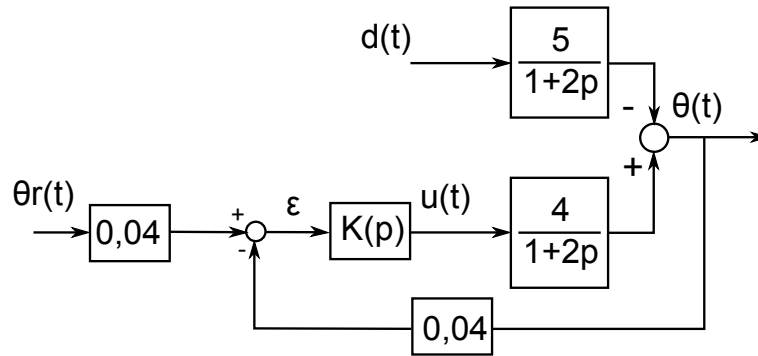


Figure 48 -

- Calculer la fonction de transfert $T(p) = \frac{\theta(p)}{\theta_r(p)}$ et $S(p) = \frac{\theta(p)}{d(p)}$
- Calculer la valeur finale de la température θ lorsque la consigne θ_r est un échelon de 10°C dans les deux cas suivants : $K = \text{constante}$ puis $K = a/p$. Conclure.
- On considère maintenant $K(p) = \frac{ap+b}{p}$. Déterminer a et b pour que le système bouclé ait un temps de réponse de 1s avec un dépassement inférieur à 2%.

4 EXERCICES CHAPITRE PERFORMANCE DES SYSTÈMES BOUCLÉS

5 EXERCICES CHAPITRE ANALYSE FRÉQUENTIELLE

Exercice 19 Tracez les courbes de Bode de :

$$F1 = \frac{0,2}{p(p^2 + p + 4)}; F2 = \frac{-p + 1}{p + 1}; F3 = e^{-2p}; F4 = \frac{1}{(1 + 5p)(1 + 40p)}$$

Exercice 20 On considère le système bouclé à retour unitaire avec K réel et $G(p) = \frac{1}{(1 + p)(1 + 5p)}$

- Tracer les courbes de Bode de $G(p)$.
- Déterminer K pour que la marge de phase soit de 45° . En déduire le temps de réponse et le premier dépassement du système bouclé pour une consigne échelon.

Table des transformées de Laplace

Fonction du temps $x(t), t > 0$		Transformée de Laplace $\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$	
$\delta(t)$: Impulsion de Dirac	$u(t)$	1	$1/p$
$\delta(t - \tau)$	$x(t - \tau)$	$e^{-\tau \cdot p}$	$X(p) \cdot e^{-\tau \cdot p}$
t	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{1}{p^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{1}{1+\tau p}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}$	$\frac{t^{n-1}}{\tau^n (n-1)!} e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$	$\frac{1}{(1+\tau p)^n}$
$\frac{1 - e^{-at}}{a}$	$1 - e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)}$
$\frac{e^{-at} + at - 1}{a^2}$	$\tau(e^{-t/\tau} - 1) + t$	$\frac{1}{p^2(p+a)}$	$\frac{1}{p^2(1+\tau p)}$
$\frac{1 - (at + 1)e^{-at}}{a^2}$	$1 - \frac{t + \tau}{\tau} e^{-t/\tau}$	$\frac{1}{p(p+a)^2}$	$\frac{1}{p(1+\tau p)^2}$
$\cos(\omega t)$	$\sin(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cosh(\omega t)$	$\sinh(\omega t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$

Fonction du temps $x(t), t > 0$	Transformée de Laplace $\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$
$\sqrt{\frac{(b-a)^2 + \omega^2}{\omega^2}} e^{-at} \sin(\omega t + \varphi)$ <p>avec :</p> $\varphi = \arctan\left(\frac{\omega}{b-a}\right)$	$\frac{p+b}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2})$	$\frac{1}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$
$\frac{1}{ab} \left(1 - \frac{1}{b-a} (b e^{-at} - a e^{-bt})\right)$	$\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$
$1 + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} (\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2})$	$\frac{1}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$
$\frac{1}{b-a} (b e^{-bt} - a e^{-at})$	$\frac{p}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{1}{\tau_1 \tau_2 (\tau_1 - \tau_2)} (\tau_1 e^{-t/\tau_2} - \tau_2 e^{-t/\tau_1})$	$\frac{p}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$
$\frac{1}{b-a} ((c-a)e^{-at} - (c-b)e^{-bt})$	$\frac{p+c}{(p+a)(p+b)}$
$\frac{\tau_1 - a}{\tau_1 (\tau_1 - \tau_2)} e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2 - a}{\tau_2 (\tau_1 - \tau_2)} e^{-t/\tau_2}$	$\frac{1+ap}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$
$\frac{1}{ab} \left(c - \frac{b(c-a)}{b-a} e^{-at} + \frac{a(c-b)}{b-a} e^{-bt}\right)$	$\frac{p+c}{p(p+a)(p+b)}$
$1 + \frac{\tau_1 - a}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2 - a}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2}$	$\frac{1+ap}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$

Fonction du temps $x(t), t > 0$	Transformée de Laplace $\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$
$\frac{\omega}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-z^2}.t)$	$\frac{1}{\frac{p^2}{\omega^2} + \frac{2zp}{\omega} + 1}$
$\frac{-\omega^2}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-z^2}.t - \varphi)$ avec : $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$	$\frac{p}{\frac{p^2}{\omega^2} + \frac{2zp}{\omega} + 1}$
$1 - \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} e^{-z\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-z^2}.t + \varphi)$ avec : $\varphi = \arctan\left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\right)$	$\frac{1}{p\left(\frac{p^2}{\omega^2} + \frac{2zp}{\omega} + 1\right)}$
$\omega\sqrt{\frac{1-2az\omega + a^2\omega^2}{1-z^2}} e^{-z\omega t} \sin(\omega\sqrt{1-z^2}.t + \phi)$ avec : $\phi = \arctan\left(\frac{a\omega\sqrt{1-z^2}}{1-az\omega}\right)$	$\frac{1+ap}{\frac{p^2}{\omega^2} + \frac{2zp}{\omega} + 1}$