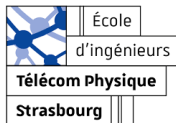


Automatique Continue

Bernard BAYLE

Télécom Physique Strasbourg



Enseignant responsable

Bernard Bayle : Pr. Télécom Physique Strasbourg.
Chercheur dans l'équipe AVR d'ICube.

<http://eavr.u-strasbg.fr/~bernard>

Organisation

CM : $12 \times 1h45$ ($\simeq 50$ min.+10 min. de pause+50 min.)

TD : $10 \times 1h45$

TP : $1 \times 4h$ Matlab + $3 \times 4h$ Automatique

Enseignant responsable

Bernard Bayle : Pr. Télécom Physique Strasbourg.
Chercheur dans l'équipe AVR d'ICube.

<http://eavr.u-strasbg.fr/~bernard>

Evaluation (documents autorisés)

CCF : 1h45

Quelques règles :

Portable éteint.

Mains sur la table.

Je détruis :

Les 20 minutes (et je sors les étudiants les lisant).

Les téléphones qui sonnent en cours.

Système

Etymologiquement : **ensemble organisé.**

Système

Etymologiquement : ensemble organisé.

Système et Automatique

Procédé de nature quelconque : électrique, mécanique, chimique, économique, ... d'entrée u et de sortie y .

Systeme

Etymologiquement : ensemble organisé.

Systeme et Automatique

Procédé de nature quelconque : électrique, mécanique, chimique, économique, ... d'entrée u et de sortie y .

Systeme dynamique

Procédé évoluant au cours du temps sous l'action de son entrée u .

Système asservi

Contre-réaction : entrée du système ajustée en réaction aux informations de sortie.

Système asservi

Contre-réaction : entrée du système ajustée en réaction aux informations de sortie.

A la douche . . .

- Douche à un bouton . . .

Système asservi

Contre-réaction : entrée du système ajustée en réaction aux informations de sortie.

A la douche ...

- Douche à un bouton...
- ... après la douche brûlante, la douche à deux robinets...

Système asservi

Contre-réaction : entrée du système ajustée en réaction aux informations de sortie.

A la douche ...

- Douche à un bouton...
- ... après la douche brûlante, la douche à deux robinets...
- ... un thermostat et c'est réglé !

Système asservi

Contre-réaction : entrée du système ajustée en réaction aux informations de sortie.

A la douche ...

- Douche à un bouton...
- ... après la douche brûlante, la douche à deux robinets...
- ... un thermostat et c'est réglé !

A quoi ça sert ?

- Avoir la température désirée...

Système asservi

Contre-réaction : entrée du système ajustée en réaction aux informations de sortie.

A la douche ...

- Douche à un bouton...
- ... après la douche brûlante, la douche à deux robinets...
- ... un thermostat et c'est réglé !

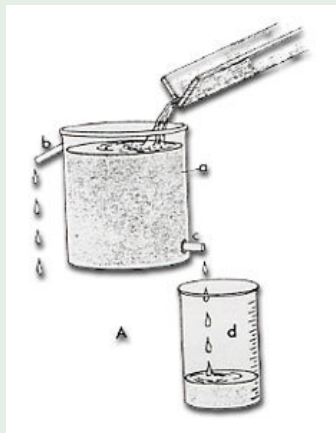
A quoi ça sert ?

- Avoir la température désirée...
- ... le débit d'eau chaude baisse ?

Systèmes asservis au cours du temps (1)

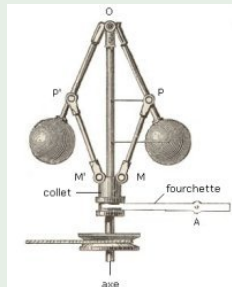
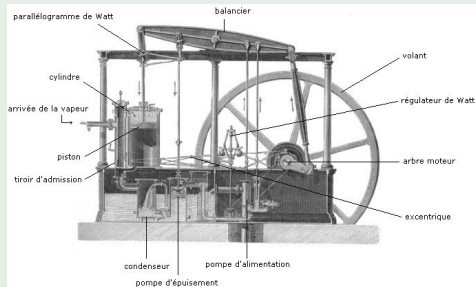
Clepsydre - Ktesibios d'Alexandrie (270 avant JC) - ...

Antique horloge à eau.



Machine de Watt 1769

Régulation de vitesse d'une machine à vapeur.



Systèmes asservis au cours du temps (3)

Théories classiques

Stabilité - Maxwell, Routh, Lyapunov, 1868-1893.

Servomécanismes - Nyquist, Bode, Evans, 1932-1947.

Théories modernes

Représentation d'état, Bellman, Kalman, Pontryagin, 1950.

Ce que vous allez apprendre...

Modélisation

- **Ecriture des lois de la physique**, lorsque les paramètres du système sont relativement bien connus.

Ce que vous allez apprendre...

Modélisation

- Ecriture des lois de la physique, lorsque les paramètres du système sont relativement bien connus.
- **Identification** d'un modèle dans le cas contraire.

Ce que vous allez apprendre...

Modélisation

- Ecriture des lois de la physique, lorsque les paramètres du système sont relativement bien connus.
- Identification d'un modèle dans le cas contraire.

Analyse

Caractérisation des différentes **propriétés du système**.

Ce que vous allez apprendre...

Modélisation

- Ecriture des lois de la physique, lorsque les paramètres du système sont relativement bien connus.
- Identification d'un modèle dans le cas contraire.

Analyse

Caractérisation des différentes propriétés du système.

Commande

Modification de l'entrée du système par un **correcteur**. Mise en œuvre de ce correcteur.

Objectifs et cadre de l'étude

Systemes étudiés

Cas des **systemes monovariables** : c'est-à-dire possédant une seule entrée u et une seule sortie y .

Objectifs et cadre de l'étude

Systemes étudiés

Cas des systèmes monovariables : c'est-à-dire possédant une seule entrée u et une seule sortie y .

Analogique ou numérique ?

Cas des **systemes à temps continu** : $u(t)$ et $y(t)$ fonctions d'une variable continue.

Objectifs et cadre de l'étude

Systemes étudiés

Cas des systèmes monovariables : c'est-à-dire possédant une seule entrée u et une seule sortie y .

Analogique ou numérique ?

Cas des systèmes à temps continu : $u(t)$ et $y(t)$ fonctions d'une variable continue.

Linéaire ou non ?

Etude des **systemes au comportement linéaire** : soit linéaires, soit linéarisés autour d'un point de fonctionnement.

Première partie I

Systemes à temps continu

1 Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2 Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3 Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

1 Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2 Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3 Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

1

Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2

Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3

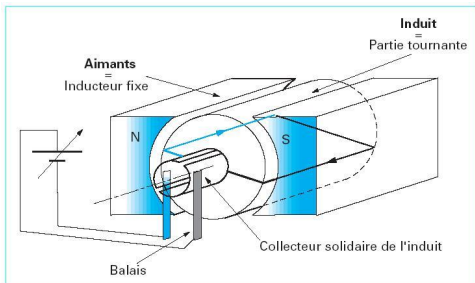
Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

Premier exemple : moteur à courant continu (1)

Description

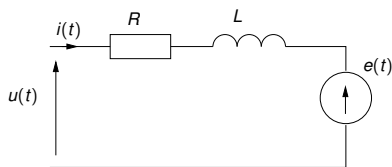
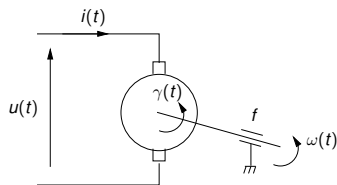
- Energie électrique : alimentation de l'induit mobile (rotor)
- Champ magnétique de l'inducteur (séparé et constant)
- Forces électriques (addition=balais+collecteur) : rotation
- Système : entrée=alimentation induit, sortie=rotation rotor



Premier exemple : moteur à courant continu (2)

Modélisation

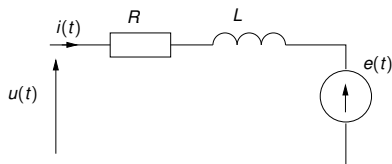
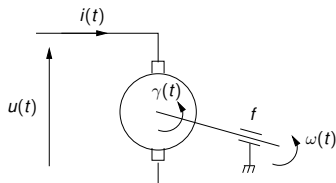
- Mécanique : principe fondamental de la dynamique
- Electrique : loi des mailles
- Entrée=tension d'induit, sortie=vitesse de rotation du rotor



Premier exemple : moteur à courant continu (3)

Modélisation

- Modélisation mécanique : $\gamma - f\omega = J\frac{d\omega}{dt}$
- Modélisation électrique : $Ri + L\frac{di}{dt} + e = u$
- Loi couple (par construction) : $\gamma = K_m i$
- Loi vitesse (par construction) : $e = K_e \omega$



Premier exemple : moteur à courant continu (4)

Equations mécaniques : $\gamma - f\omega = J\frac{d\omega}{dt}$ et $\gamma = K_m i$

Equations électriques : $Ri + L\frac{di}{dt} + e = u$ et $e = K_e \omega$

Relation entrée u - sortie ω avec ($K_e = K_m = K$) :

Premier exemple : moteur à courant continu (4)

Equations mécaniques : $\gamma - f\omega = J\frac{d\omega}{dt}$ et $\gamma = K_m i$

Equations électriques : $Ri + L\frac{di}{dt} + e = u$ et $e = K_e \omega$

Relation entrée u - sortie ω avec ($K_e = K_m = K$) :

$$Ki = f\omega + J\frac{d\omega}{dt}$$

Premier exemple : moteur à courant continu (4)

Equations mécaniques : $\gamma - f\omega = J\frac{d\omega}{dt}$ et $\gamma = K_m i$

Equations électriques : $Ri + L\frac{di}{dt} + e = u$ et $e = K_e \omega$

Relation entrée u - sortie ω avec ($K_e = K_m = K$) :

$$Ki = f\omega + J\frac{d\omega}{dt}$$

$$K\frac{di}{dt} = f\frac{d\omega}{dt} + J\frac{d^2\omega}{dt^2}$$

Premier exemple : moteur à courant continu (4)

Equations mécaniques : $\gamma - f\omega = J \frac{d\omega}{dt}$ et $\gamma = K_m i$

Equations électriques : $Ri + L \frac{di}{dt} + e = u$ et $e = K_e \omega$

Relation entrée u - sortie ω avec ($K_e = K_m = K$) :

$$Ki = f\omega + J \frac{d\omega}{dt}$$

$$K \frac{di}{dt} = f \frac{d\omega}{dt} + J \frac{d^2\omega}{dt^2}$$

$$\frac{R}{K} (f\omega + J \frac{d\omega}{dt}) + \frac{L}{K} \left(f \frac{d\omega}{dt} + J \frac{d^2\omega}{dt^2} \right) + K \omega = u$$

Premier exemple : moteur à courant continu (4)

Equations mécaniques : $\gamma - f\omega = J \frac{d\omega}{dt}$ et $\gamma = K_m i$

Equations électriques : $Ri + L \frac{di}{dt} + e = u$ et $e = K_e \omega$

Relation entrée u - sortie ω avec ($K_e = K_m = K$) :

$$Ki = f\omega + J \frac{d\omega}{dt}$$

$$K \frac{di}{dt} = f \frac{d\omega}{dt} + J \frac{d^2\omega}{dt^2}$$

$$\frac{R}{K} (f\omega + J \frac{d\omega}{dt}) + \frac{L}{K} \left(f \frac{d\omega}{dt} + J \frac{d^2\omega}{dt^2} \right) + K \omega = u$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ+Lf}{LJ} \frac{d\omega}{dt} + \frac{Rf+K^2}{LJ} \omega = \frac{K}{LJ} u$$

Premier exemple : moteur à courant continu (4)

Equations mécaniques : $\gamma - f\omega = J \frac{d\omega}{dt}$ et $\gamma = K_m i$

Equations électriques : $Ri + L \frac{di}{dt} + e = u$ et $e = K_e \omega$

Relation entrée u - sortie ω avec ($K_e = K_m = K$) :

$$Ki = f\omega + J \frac{d\omega}{dt}$$

$$K \frac{di}{dt} = f \frac{d\omega}{dt} + J \frac{d^2\omega}{dt^2}$$

$$\frac{R}{K} (f\omega + J \frac{d\omega}{dt}) + \frac{L}{K} (f \frac{d\omega}{dt} + J \frac{d^2\omega}{dt^2}) + K \omega = u$$

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ+Lf}{LJ} \frac{d\omega}{dt} + \frac{Rf+K^2}{LJ} \omega = \frac{K}{LJ} u$$

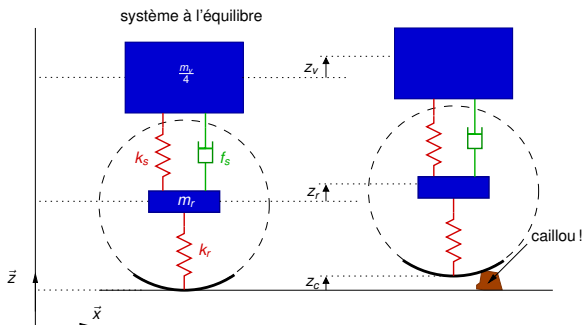
Relation entrée-sortie

Equation différentielle d'ordre 2, linéaire à coef. constants.

Deuxième exemple : suspension (1)

Description

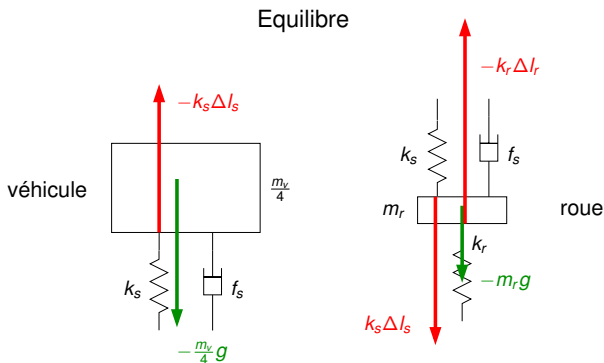
- Véhicule : masse m_v
- Modèle suspension : ressort amorti (k_s, f_s)
- Roue : masse m_r , modèle roue + pneu : ressort idéal (k_r)
- Système : entrée=profil route, sortie=altitude véhicule



Deuxième exemple : suspension (2)

Modélisation

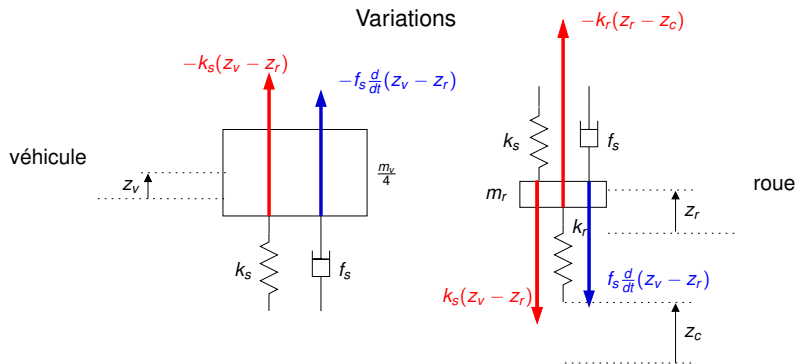
- Deux solides à l'équilibre
- Mécanique : principe fondamental de la statique



Deuxième exemple : suspension (3)

Modélisation

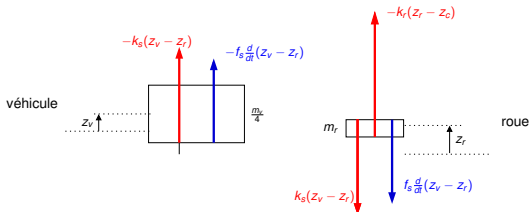
- Deux solides en mouvement
- Mécanique : principe fondamental de la dynamique



Deuxième exemple : suspension (4)

Modélisation

- Véhicule : $\frac{m_v}{4} \frac{d^2 z_v}{dt^2} = -k_s(z_v - z_r) - f_s \left(\frac{dz_v}{dt} - \frac{dz_r}{dt} \right)$
- Roue : $m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} = -k_r(z_r - z_c) + k_s(z_v - z_r) + f_s \left(\frac{dz_v}{dt} - \frac{dz_r}{dt} \right)$



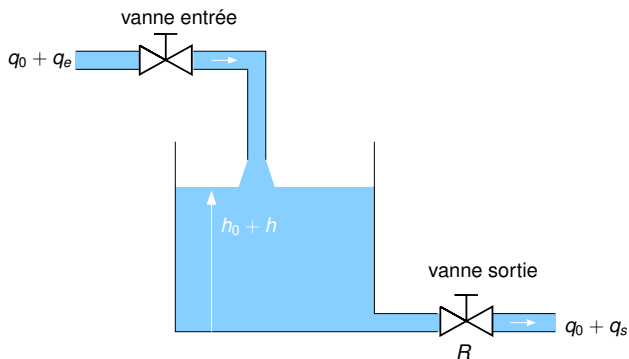
Relation entrée-sortie

Relation entrée z_c - sortie z_v ?

Troisième exemple : régulateur de niveau (1)

Description

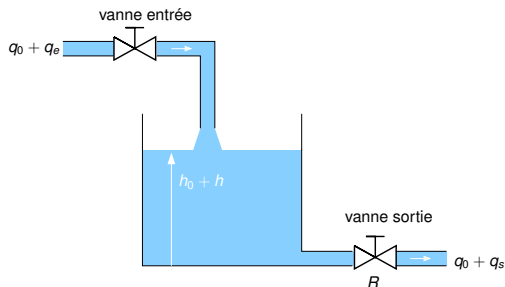
- Réservoir alimenté en liquide
- Niveau réglé par une vanne d'entrée
- Système : entrée=débit vanne, sortie=niveau liquide



Troisième exemple : régulateur de niveau (2)

Modélisation

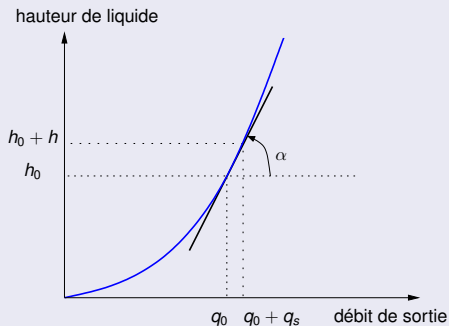
- Point de fonctionnement nominal (q_0, h_0)
- Résistance du tuyau de sortie : variations hauteur de liquide/débit de sortie (variations notées h et q_s)
- Hauteur de liquide : fonction de la section C et de la différence de débit entrée - sortie



Troisième exemple : régulateur de niveau (3)

Modélisation

- Résistance (selon nature de l'écoulement)



$$R = \tan \alpha(q_0) = \frac{h}{q_s}$$

- Section : $Cdh = (q_e - q_s)dt$

Troisième exemple : régulateur de niveau (4)

Equation résistance : $R = \frac{h}{q_s}$

Equation écoulement : $Cdh = (q_e - q_s)dt$

Relation entrée q_e - sortie h :

Troisième exemple : régulateur de niveau (4)

Equation résistance : $R = \frac{h}{q_s}$

Equation écoulement : $Cdh = (q_e - q_s)dt$

Relation entrée q_e - sortie h :

$$C \frac{dh}{dt} = q_e - \frac{h}{R}$$

Troisième exemple : régulateur de niveau (4)

Equation résistance : $R = \frac{h}{q_s}$

Equation écoulement : $Cdh = (q_e - q_s)dt$

Relation entrée q_e - sortie h :

$$C \frac{dh}{dt} = q_e - \frac{h}{R}$$

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_e$$

Troisième exemple : régulateur de niveau (4)

Equation résistance : $R = \frac{h}{q_s}$

Equation écoulement : $Cdh = (q_e - q_s)dt$

Relation entrée q_e - sortie h :

$$C \frac{dh}{dt} = q_e - \frac{h}{R}$$

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_e$$

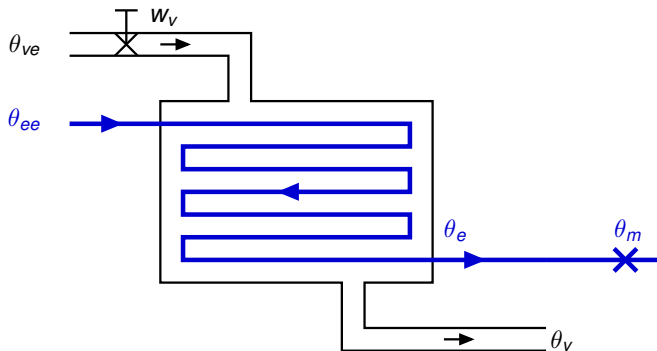
Relation entrée-sortie

Equation différentielle d'ordre 1, linéaire à coef. constants.

Quatrième exemple : échangeur thermique (1)

Description

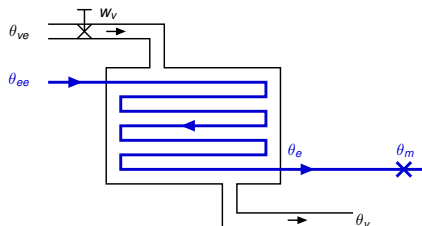
- Echange thermique entre circuit de vapeur et circuit d'eau
- Débit de vapeur réglé par une vanne d'entrée
- Système : entrée=débit vapeur, sortie=température eau



Quatrième exemple : échangeur thermique (2)

Modélisation

- Chaleur amenée par la vapeur : $q_v = w_v c_v (\theta_{ve} - \theta_v)$
(w_v : débit massique et c_v : chaleur massique de la vapeur)
- Bilan de chaleur : $q_e = \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$
(R : résistance thermique moyenne de l'échangeur)
- Flux de chaleur net : $C_v \frac{d\theta_v}{dt} = q_v - q_e$
(C_v : capacité thermique de la vapeur)



Quatrième exemple : échangeur thermique (3)

$$\text{Chaleur amenée : } q_v = w_v c_v (\theta_{ve} - \theta_v)$$

$$\text{Bilan de chaleur : } q_e = \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$$

$$\text{Flux de chaleur net : } C_v \frac{d\theta_v}{dt} = q_v - q_e$$

Equations du système :

Quatrième exemple : échangeur thermique (3)

Chaleur amenée : $q_v = w_v c_v (\theta_{ve} - \theta_v)$

Bilan de chaleur : $q_e = \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$

Flux de chaleur net : $C_v \frac{d\theta_v}{dt} = q_v - q_e$

Equations du système :

Flux de chaleur net, vapeur :

$$C_v \frac{d\theta_v}{dt} = w_v c_v (\theta_{ve} - \theta_v) - \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$$

Quatrième exemple : échangeur thermique (3)

Chaleur amenée : $q_v = w_v c_v (\theta_{ve} - \theta_v)$

Bilan de chaleur : $q_e = \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$

Flux de chaleur net : $C_v \frac{d\theta_v}{dt} = q_v - q_e$

Equations du système :

Flux de chaleur net, vapeur :

$C_v \frac{d\theta_v}{dt} = w_v c_v (\theta_{ve} - \theta_v) - \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$

Flux de chaleur net, eau : $C_e \frac{d\theta_e}{dt} = w_e c_e (\theta_{ee} - \theta_e) + \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$

Quatrième exemple : échangeur thermique (3)

$$\text{Chaleur amenée : } q_v = w_v c_v (\theta_{ve} - \theta_v)$$

$$\text{Bilan de chaleur : } q_e = \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$$

$$\text{Flux de chaleur net : } C_v \frac{d\theta_v}{dt} = q_v - q_e$$

Equations du système :

Flux de chaleur net, vapeur :

$$C_v \frac{d\theta_v}{dt} = w_v c_v (\theta_{ve} - \theta_v) - \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$$

$$\text{Flux de chaleur net, eau : } C_e \frac{d\theta_e}{dt} = w_e c_e (\theta_{ee} - \theta_e) + \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$$

$$\text{Mesure : } \theta_m(t) = \theta_e(t - \tau)$$

Quatrième exemple : échangeur thermique (3)

Chaleur amenée : $q_v = w_v c_v (\theta_{ve} - \theta_v)$

Bilan de chaleur : $q_e = \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$

Flux de chaleur net : $C_v \frac{d\theta_v}{dt} = q_v - q_e$

Equations du système :

Flux de chaleur net, vapeur :

$C_v \frac{d\theta_v}{dt} = w_v c_v (\theta_{ve} - \theta_v) - \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$

Flux de chaleur net, eau : $C_e \frac{d\theta_e}{dt} = w_e c_e (\theta_{ee} - \theta_e) + \frac{\theta_v - \theta_e}{R}$

Mesure : $\theta_m(t) = \theta_e(t - \tau)$

Relation entrée-sortie

Système non linéaire avec retard.

1 Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- **Propriétés des systèmes à temps continu**
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2 Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

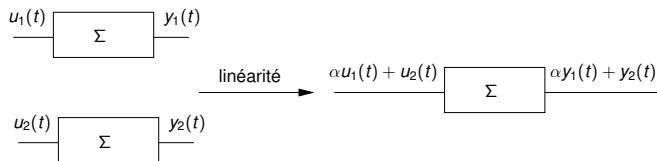
3 Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

Définition

Soit $y_1(t)$ et $y_2(t)$ les réponses d'un système Σ excité séparément par les entrées $u_1(t)$ et $u_2(t)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

Le système est *linéaire* si sa sortie vaut $\alpha y_1(t) + y_2(t)$ en réponse à l'entrée $\alpha u_1(t) + u_2(t)$.



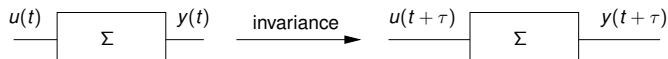
Principe de *superposition*.

Invariance

Définition

Soit $y(t)$ la réponse d'un système Σ d'entrée $u(t)$.

Le système est *invariant* si une même commande, appliquée à deux instants différents produit la même sortie aux instants considérés.



Principe de causalité

Définition

Un *signal* $f(t)$ à temps continu est *causal* si $f(t) = 0, \forall t < 0$.

Définition

Soit $y(t)$ la réponse d'un système d'entrée $u(t)$.

Le système est *causal* si, $\forall t < 0, u(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$.

La réponse du système ne précède pas son excitation.

Tout système physiquement réalisable est causal.

Hypothèse

Tous les signaux et systèmes étudiés sont causaux.

Linéarité et invariance des systèmes étudiés

Invariance

Commande appliquée à l'instant $t + \tau$: même sortie qu'en appliquant cette commande à l'instant t , décalée de τ .

- MCC : échauffement du circuit = variation de la résistance

Linéarité

Linéarité : hypothèses de modélisation.

- Suspension : pas de frottement sec
- Niveau de liquide : étude en un point de fonctionnement
- Echangeur thermique : non linéaire ?

Retard

Sans influence sur la linéarité et l'invariance.

1

Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- **Représentations temporelles des systèmes**
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2

Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3

Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

Représentation externe par une équation différentielle

Propriété

Un système à temps continu *linéaire et invariant sans retard* est décrit par une *équation différentielle linéaire à coefficients constants*.

Notations

$$\sum_{i=c}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

Propriété

Un système à temps continu *linéaire et invariant sans retard* est décrit par une *équation différentielle linéaire à coefficients constants*.

Notations

$$\sum_{i=c}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

- a_i et $b_i \in \mathbb{R}$ tel que a_c, a_n, b_0 et $b_m \neq 0$

Propriété

Un système à temps continu *linéaire et invariant sans retard* est décrit par une *équation différentielle linéaire à coefficients constants*.

Notations

$$\sum_{i=c}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

- a_i et $b_i \in \mathbb{R}$ tel que a_c, a_n, b_0 et $b_m \neq 0$
- $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq n$ pour un système causal

Propriété

Un système à temps continu *linéaire et invariant sans retard* est décrit par une *équation différentielle linéaire à coefficients constants*.

Notations

$$\sum_{i=c}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

- a_i et $b_i \in \mathbb{R}$ tel que a_c, a_n, b_0 et $b_m \neq 0$
- $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq n$ pour un système causal
- n : *ordre du système*, $c \leq n$: *classe du système*

Propriété

Un système à temps continu *linéaire et invariant sans retard* est décrit par une *équation différentielle linéaire à coefficients constants*.

Notations

$$\sum_{i=c}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

- a_i et $b_i \in \mathbb{R}$ tel que a_c, a_n, b_0 et $b_m \neq 0$
- $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq n$ pour un système causal
- n : *ordre du système*, $c \leq n$: *classe du système*
- $y(t)$: n CI pour y et m CI pour u

Relation entrée-sortie du MCC

Entrée : tension d'induit u

Sortie : vitesse de rotation du rotor ω

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ + Lf}{LJ} \frac{d\omega}{dt} + \frac{Rf + K^2}{LJ} \omega = \frac{K}{LJ} u$$

Relation entrée-sortie du MCC

Entrée : tension d'induit u

Sortie : vitesse de rotation du rotor ω

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ + Lf}{LJ} \frac{d\omega}{dt} + \frac{Rf + K^2}{LJ} \omega = \frac{K}{LJ} u$$

- $n = 2$: système d'ordre 2

Relation entrée-sortie du MCC

Entrée : tension d'induit u

Sortie : vitesse de rotation du rotor ω

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ + Lf}{LJ} \frac{d\omega}{dt} + \frac{Rf + K^2}{LJ} \omega = \frac{K}{LJ} u$$

- $n = 2$: système d'ordre 2
- $c = 0 \leq n$: système de classe 0

Relation entrée-sortie du MCC

Entrée : tension d'induit u

Sortie : vitesse de rotation du rotor ω

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ + Lf}{LJ} \frac{d\omega}{dt} + \frac{Rf + K^2}{LJ} \omega = \frac{K}{LJ} u$$

- $n = 2$: système d'ordre 2
- $c = 0 \leq n$: système de classe 0
- $\omega(t)$: 2 CI pour ω , $\frac{d\omega}{dt}(0)$ et $\omega(0)$

Représentation d'état du système (1)

Propriété

Un système à temps continu *linéaire et invariant sans retard* est décrit par une infinité de représentations sous forme de systèmes différentiels d'ordre un, à coefficients constants.

Représentation d'état

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Représentation d'état du système (2)

Notations

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, && \text{équation d'évolution, d'état} \\ y &= Cx + Du, && \text{équation de sortie, de mesure}\end{aligned}$$

Représentation d'état du système (2)

Notations

$$\begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu, & \text{équation d'évolution, d'état} \\ y = Cx + Du, & \text{équation de sortie, de mesure} \end{array}$$

- x de dimension $n \times 1$: *vecteur d'état*, représentation interne du système

Représentation d'état du système (2)

Notations

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, && \text{équation d'évolution, d'état} \\ y &= Cx + Du, && \text{équation de sortie, de mesure}\end{aligned}$$

- x de dimension $n \times 1$: *vecteur d'état*, représentation interne du système
- A , B , C et D : matrices constantes

Représentation d'état du système (2)

Notations

$$\begin{array}{ll} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu, & \text{équation d'évolution, d'état} \\ y = Cx + Du, & \text{équation de sortie, de mesure} \end{array}$$

- x de dimension $n \times 1$: *vecteur d'état*, représentation interne du système
- A , B , C et D : matrices constantes
- A de dimension $n \times n$: *matrice d'évolution* (ou *d'état*)

Représentation d'état du système (2)

Notations

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, && \text{équation d'évolution, d'état} \\ y &= Cx + Du, && \text{équation de sortie, de mesure} \end{aligned}$$

- x de dimension $n \times 1$: *vecteur d'état*, représentation interne du système
- A , B , C et D : matrices constantes
- A de dimension $n \times n$: *matrice d'évolution* (ou *d'état*)
- B de dimension $n \times 1$: *matrice de commande* (ou *d'entrée*)

Représentation d'état du système (2)

Notations

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, && \text{équation d'évolution, d'état} \\ y &= Cx + Du, && \text{équation de sortie, de mesure}\end{aligned}$$

- x de dimension $n \times 1$: *vecteur d'état*, représentation interne du système
- A , B , C et D : matrices constantes
- A de dimension $n \times n$: *matrice d'évolution* (ou *d'état*)
- B de dimension $n \times 1$: *matrice de commande* (ou *d'entrée*)
- C de dimension $1 \times n$: *matrice d'observation*

Représentation d'état du système (2)

Notations

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, && \text{équation d'évolution, d'état} \\ y &= Cx + Du, && \text{équation de sortie, de mesure}\end{aligned}$$

- x de dimension $n \times 1$: *vecteur d'état*, représentation interne du système
- A , B , C et D : matrices constantes
- A de dimension $n \times n$: *matrice d'évolution* (ou *d'état*)
- B de dimension $n \times 1$: *matrice de commande* (ou *d'entrée*)
- C de dimension $1 \times n$: *matrice d'observation*
- D scalaire : *coefficient de transmission directe*

Représentation d'état du système (2)

Notations

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, && \text{équation d'évolution, d'état} \\ y &= Cx + Du, && \text{équation de sortie, de mesure}\end{aligned}$$

- x de dimension $n \times 1$: *vecteur d'état*, représentation interne du système
- A , B , C et D : matrices constantes
- A de dimension $n \times n$: *matrice d'évolution* (ou *d'état*)
- B de dimension $n \times 1$: *matrice de commande* (ou *d'entrée*)
- C de dimension $1 \times n$: *matrice d'observation*
- D scalaire : *coefficient de transmission directe*
- $x(t)$ et $y(t)$: Cl $x(t_0)$

Modèle d'état du MCC

Entrée u , sortie ω

Variables d'état indépendantes $x_1 = \omega$ et $x_2 = i$

Modèle d'état du MCC

Entrée u , sortie ω

Variables d'état indépendantes $x_1 = \omega$ et $x_2 = i$

Réécriture des équations :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + K\omega = u$$
$$Ki - f\omega = J \frac{d\omega}{dt}$$

Modèle d'état du MCC

Entrée u , sortie ω

Variables d'état indépendantes $x_1 = \omega$ et $x_2 = i$

Réécriture des équations :

$$\begin{aligned} Rx_2 + L \frac{dx_2}{dt} + Kx_1 &= u \\ Kx_2 - fx_1 &= J \frac{dx_1}{dt} \end{aligned}$$

Modèle d'état du MCC

Entrée u , sortie ω

Variables d'état indépendantes $x_1 = \omega$ et $x_2 = i$

Réécriture des équations :

$$\begin{aligned} R x_2 + L \frac{dx_2}{dt} + K x_1 &= u \\ K x_2 - f x_1 &= J \frac{dx_1}{dt} \end{aligned}$$

Représentation d'état

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u, \\ y &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Modèle d'état du MCC

Entrée u , sortie ω

Variables d'état indépendantes $x_1 = \omega$ et $x_2 = \frac{d\omega}{dt}$

Modèle d'état du MCC

Entrée u , sortie ω

Variables d'état indépendantes $x_1 = \omega$ et $x_2 = \frac{d\omega}{dt}$

Réécriture des équations :

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ + Lf}{LJ} \frac{d\omega}{dt} + \frac{Rf + K^2}{LJ} \omega = \frac{K}{LJ} u$$

Modèle d'état du MCC

Entrée u , sortie ω

Variables d'état indépendantes $x_1 = \omega$ et $x_2 = \frac{d\omega}{dt}$

Réécriture des équations :

$$\frac{dx_2}{dt} + \frac{RJ + Lf}{LJ}x_2 + \frac{Rf + K^2}{LJ}x_1 = \frac{K}{LJ}u$$
$$x_2 = \frac{dx_1}{dt}$$

Modèle d'état du MCC

Entrée u , sortie ω

Variables d'état indépendantes $x_1 = \omega$ et $x_2 = \frac{d\omega}{dt}$

Réécriture des équations :

$$\frac{dx_2}{dt} + \frac{RJ + Lf}{LJ}x_2 + \frac{Rf + K^2}{LJ}x_1 = \frac{K}{LJ}u$$
$$x_2 = \frac{dx_1}{dt}$$

Représentation d'état

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Rf+K^2}{LJ} & -\frac{RJ+Lf}{LJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{LJ} \end{pmatrix} u,$$
$$y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1 Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- **Représentation par fonction de transfert**
- Correspondances entre représentations

2 Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3 Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

Transformée de Laplace : définition

Définition

Soit $f(t)$ un signal à temps continu, prenant la valeur $f(t)$ à l'instant t . La *transformée de Laplace* de $f(t)$ est définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Propriété

Soit $s = \sigma + j\omega$. La transformée de Laplace est généralement définie sur un demi-plan complexe pour lequel $\sigma \in]\sigma_0, +\infty[$. La valeur σ_0 définissant la limite de convergence est appelée *abscisse de convergence* de la transformée.

Tables de transformées

Autant que possible, on utilise des tables de transformées pré-calculées :

$$\begin{aligned}\delta(t) &\rightarrow 1 \\ \mathcal{U}(t) &\rightarrow \frac{1}{s} \\ &\dots\end{aligned}$$

Calcul

Calcul direct de l'intégrale

Exemple de calcul

Calcul de la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at} \mathcal{U}(t)$.

Exemple de calcul

Calcul de la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at} \mathcal{U}(t)$.

Définition ($s = \sigma + j\omega$) :

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt, \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt, \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} dt. \end{aligned}$$

Exemple de calcul

Calcul de la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at} \mathcal{U}(t)$.

Convergence en valeur absolue de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t}| dt &= \int_0^{+\infty} |e^{-(\sigma+a)t}| |e^{-j\omega t}| dt, \\ &= \int_0^{+\infty} |e^{-(\sigma+a)t}| dt, \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(\sigma+a)t} dt, \\ &= \left[-\frac{e^{-(\sigma+a)t}}{\sigma+a} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty}. \end{aligned}$$

Converge en valeur absolue ssi $\sigma + a > 0$, donc $\sigma > \sigma_0 = -a$.

Exemple de calcul

Calcul de la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at} \mathcal{U}(t)$.

Calcul :

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt, \\ &= \left[-\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \\ &= \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

Exemple de calcul

Calcul de la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-at} \mathcal{U}(t)$.

Transformée de $e^{-at} \mathcal{U}(t)$

Finalement :

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{-at} \mathcal{U}(t)\} = \frac{1}{s+a}$$

pour tout $s = \sigma + j\omega$ si et seulement si $\sigma > -a$.

Transformée de Laplace : propriétés principales

linéarité

$$\mathcal{L}\{f(t) + \alpha g(t)\} = F(s) + \alpha G(s), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

retard

$$\mathcal{L}\{f(t - \tau)\} = e^{-\tau s} F(s), \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

intégration

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

dérivation en t

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0)$$

valeur finale

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

convolution

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right\} = F(s)G(s)$$

Définition

Soit $F(s)$ la transformée de Laplace de $f(t)$. La *transformée de Laplace inverse* de $F(s)$ s'écrit :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} F(s) e^{st} ds.$$

Tables de transformées

Décomposition en éléments simples pour utiliser les tables de transformées.

...sinon formule d'inversion et calcul des résidus.

Réécriture du modèle du système

Pour les systèmes linéaires à temps continu : possibilité de transformer les équations différentielles décrivant l'évolution dynamique du système en équations algébriques en s .

Conditions initiales

Dérivation en t : $\mathcal{L} \left\{ \frac{df(t)}{dt} \right\} = sF(s) - f(0)$

Termes liés aux CI $\neq 0$

Relation entrée-sortie du MCC en t

Variable t :

$$\omega(t) + \frac{RJ + Lf}{Rf + K^2} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{LJ}{Rf + K^2} \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} = \frac{K}{Rf + K^2} u(t),$$

Relation entrée-sortie du MCC en t

Variable t :

$$\omega(t) + \frac{RJ + Lf}{Rf + K^2} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{LJ}{Rf + K^2} \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} = \frac{K}{Rf + K^2} u(t),$$

Transformée de Laplace à CI nulles :

$$\Omega(s) + \frac{RJ + Lf}{Rf + K^2} s\Omega(s) + \frac{LJ}{Rf + K^2} s^2\Omega(s) = \frac{K}{Rf + K^2} U(s),$$

Relation entrée-sortie du MCC en t

Variable t :

$$\omega(t) + \frac{RJ + Lf}{Rf + K^2} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{LJ}{Rf + K^2} \frac{d^2\omega(t)}{dt^2} = \frac{K}{Rf + K^2} u(t),$$

Transformée de Laplace à CI nulles :

$$\Omega(s) + \frac{RJ + Lf}{Rf + K^2} s\Omega(s) + \frac{LJ}{Rf + K^2} s^2\Omega(s) = \frac{K}{Rf + K^2} U(s),$$

Relation entrée-sortie du MCC en s

$$\left(1 + \frac{RJ + Lf}{Rf + K^2} s + \frac{LJ}{Rf + K^2} s^2 \right) \Omega(s) = \frac{K}{Rf + K^2} U(s),$$

Fonction de transfert : définition

Soit un système linéaire invariant sans retard d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$.

Relation entrée-sortie :

$$\sum_{i=c}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}.$$

Fonction de transfert : définition

Soit un système linéaire invariant sans retard d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$.

En appliquant la transformée de Laplace à CI nulles :

$$\sum_{i=c}^n a_i s^i Y(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^i U(s),$$

soit :

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

Fonction de transfert : définition

Soit un système linéaire invariant sans retard d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$.

Définition

On appelle *fonction de transfert* (FT) du système la fraction rationnelle :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$

Le terme synonyme *transmittance* est souvent utilisé.

Forme de la fonction de transfert

Dans le cas des systèmes linéaires invariants sans retard la FT prend la forme d'une fraction rationnelle :

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=c}^n a_i s^i}$$

Caractéristiques :

- racines de $N(s)$: m zéros
- racines de $D(s)$: n pôles
- zéros et les pôles $\in \mathbb{C}$

Forme de la fonction de transfert

Dans le cas des systèmes linéaires invariants sans retard la FT prend la forme d'une fraction rationnelle :

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_c s^c + a_{c+1} s^{c+1} + \dots + a_n s^n}$$

Caractéristiques :

- racines de $N(s)$: m zéros
- racines de $D(s)$: n pôles
- zéros et les pôles $\in \mathbb{C}$

- $K = \frac{b_0}{a_c}$: *gain statique*

Forme de la fonction de transfert

Dans le cas des systèmes linéaires invariants sans retard la FT prend la forme d'une fraction rationnelle :

$$G(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Caractéristiques :

- racines de $N(s)$: m zéros
- racines de $D(s)$: n pôles
- zéros et les pôles $\in \mathbb{C}$

- $\frac{b_m}{a_n}$: *coefficient de gain*

Relation entrée-sortie du MCC en s :

$$\left(1 + \frac{RJ + Lf}{Rf + K^2} s + \frac{LJ}{Rf + K^2} s^2\right) \Omega(s) = \frac{K}{Rf + K^2} U(s),$$

Fonction de transfert du MCC

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{LJ}}{s^2 + \frac{RJ + Lf}{LJ} s + \frac{Rf + K^2}{LJ}}.$$

donc :

$$N(s) = \frac{K}{LJ} \text{ et } D(s) = s^2 + \frac{RJ + Lf}{LJ} s + \frac{Rf + K^2}{LJ}.$$

Fonction de transfert du MCC

Caractéristiques :

- pas de zéro
- pôles (tels que $D(s) = 0$) ?

On montre (...) :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_G}{\tau_{el}\tau_{em}}}{\left(s + \frac{1}{\tau_{el}}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)},$$

$$\tau_{el} = \frac{L}{R},$$

$$\tau_{em} = \frac{RJ}{Rf + K^2},$$

$$\text{et } K_G = \frac{K}{Rf + K^2}.$$

Fonction de transfert du MCC

Caractéristiques :

- pas de zéro
- pôles (tels que $D(s) = 0$) ?

On montre (...) :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_G}{\tau_{el}\tau_{em}}}{\left(s + \frac{1}{\tau_{el}}\right) \left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)},$$

donc deux pôles :

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_{el}}$$

et $p_2 = -\frac{1}{\tau_{em}}$.

1 Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- **Correspondances entre représentations**

2 Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3 Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

Passage représentation d'état/fonction de transfert

Transformée de Laplace de la représentation d'état :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Passage représentation d'état/fonction de transfert

Transformée de Laplace de la représentation d'état :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

soit :

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Passage représentation d'état/fonction de transfert

Transformée de Laplace de la représentation d'état :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu & sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ y &= Cx + Du & Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}X(s) &= (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s)\end{aligned}$$

Passage représentation d'état/fonction de transfert

$$Y(s) = \left(C(sI - A)^{-1}B + D \right) U(s)$$

Calcul des pôles

Fonction de transfert :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D,$$

Calcul des pôles

Fonction de transfert :

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= C(sI - A)^{-1}B + D, \\ &= C \frac{\text{co}^T(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D,\end{aligned}$$

Calcul des pôles

Fonction de transfert :

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= C(sI - A)^{-1}B + D, \\ &= C \frac{\text{co}^T(sI - A)}{\det(sI - A)} B + D, \\ &= \frac{C (\text{co}^T(sI - A)) B}{\det(sI - A)} + D.\end{aligned}$$

Calcul des pôles

Fonction de transfert :

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= C(sI - A)^{-1}B + D, \\ &= C \frac{\text{co}^T(sI - A)}{\det(sI - A)}B + D, \\ &= \frac{C (\text{co}^T(sI - A)) B}{\det(sI - A)} + D.\end{aligned}$$

Equation caractéristique du système = équation des pôles :

$$\det(sI - A) = 0.$$

Calcul des pôles

Fonction de transfert :

$$\begin{aligned}\frac{Y(s)}{U(s)} &= C(sI - A)^{-1}B + D, \\ &= C \frac{\text{co}^T(sI - A)}{\det(sI - A)}B + D, \\ &= \frac{C (\text{co}^T(sI - A)) B}{\det(sI - A)} + D.\end{aligned}$$

Equation caractéristique du système = équation des pôles :

$$\det(sI - A) = 0.$$

Pôles et valeurs propres

Pôles du système = valeurs propres de A

Passage fonction de transfert/représentation d'état (1)

Non-unicité de la représentation d'état

\exists une infinité de représentations équivalentes.

Non-unicité de la représentation d'état

\exists une infinité de représentations équivalentes.

Changement de variable régulier $z = P^{-1}x$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Pz) &= P \frac{dz}{dt} = APz + Bu, \\ y &= CPz + Du, \end{aligned}$$

Non-unicité de la représentation d'état

∃ une infinité de représentations équivalentes.

Changement de variable régulier $z = P^{-1}x$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(Pz) &= P \frac{dz}{dt} = APz + Bu, \\ y &= CPz + Du,\end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= P^{-1}APz + P^{-1}Bu, \\ y &= CPz + Du.\end{aligned}$$

Passage fonction de transfert/représentation d'état (2)

Type de représentation d'état

Obtention d'un modèle d'état avec A diagonale, pôles distincts

Passage fonction de transfert/représentation d'état (2)

Type de représentation d'état

Obtention d'un modèle d'état avec A diagonale, pôles distincts

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} + D.$$

Type de représentation d'état

Obtention d'un modèle d'état avec A diagonale, pôles distincts

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} + D.$$

Choix des variables d'état telles que :

$$X_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} U(s),$$

Type de représentation d'état

Obtention d'un modèle d'état avec A diagonale, pôles distincts

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} + D.$$

Choix des variables d'état telles que :

$$sX_i(s) = \lambda_i X_i(s) + U(s),$$

Type de représentation d'état

Obtention d'un modèle d'état avec A diagonale, pôles distincts

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} + D.$$

Choix des variables d'état telles que :

$$\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i + u.$$

Passage fonction de transfert/représentation d'état (3)

Obtention d'un modèle d'état avec A diagonale

Pôles distincts : $\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i + u$, $X_i(s) = \frac{1}{s-\lambda_i} U(s)$ et $Y(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i(s) + DU(s)$

Passage fonction de transfert/représentation d'état (3)

Obtention d'un modèle d'état avec A diagonale

Pôles distincts : $\frac{dx_i}{dt} = \lambda_i x_i + u$, $X_i(s) = \frac{1}{s-\lambda_i} U(s)$ et $Y(s) = \sum_{i=1}^n \alpha_i X_i(s) + DU(s)$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$
$$y = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \alpha_n) x + Du.$$

Représentation d'état sous *forme modale*

Passage fonction de transfert/représentation d'état (4)

Type de représentation d'état

Modèle d'état avec A diagonale, pôles **pas tous distincts**

Type de représentation d'état

Modèle d'état avec A diagonale, pôles pas tous distincts

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{(s - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{(s - \lambda_1)^p} + \sum_{i=p+1}^n \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} + D$$

Type de représentation d'état

Modèle d'état avec A diagonale, pôles pas tous distincts

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{(s - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{(s - \lambda_1)^p} + \sum_{i=p+1}^n \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} + D$$

Variables d'état telles que :

$$X_1(s) = \frac{1}{s - \lambda_1} U(s),$$

...

$$X_p(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)^p} U(s),$$

$$X_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} U(s), \text{ pour } i = p + 1, \dots, n.$$

Type de représentation d'état

Modèle d'état avec A diagonale, pôles pas tous distincts

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{(s - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{(s - \lambda_1)^p} + \sum_{i=p+1}^n \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} + D$$

Variables d'état telles que :

$$X_1(s) = \frac{1}{s - \lambda_1} U(s),$$

...

$$X_p(s) = \frac{1}{(s - \lambda_1)} X_{p-1}(s),$$

$$X_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} U(s), \text{ pour } i = p + 1, \dots, n.$$

Passage fonction de transfert/représentation d'état (4)

Type de représentation d'état

Modèle d'état avec A diagonale, pôles pas tous distincts

Décomposition en éléments simples :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\alpha_1}{s - \lambda_1} + \frac{\alpha_2}{(s - \lambda_1)^2} + \dots + \frac{\alpha_p}{(s - \lambda_1)^p} + \sum_{i=p+1}^n \frac{\alpha_i}{s - \lambda_i} + D$$

Variables d'état telles que :

$$sX_1(s) = \lambda_1 X_1(s) + U(s),$$

$$sX_2(s) = \lambda_1 X_2(s) + X_1(s),$$

...

$$sX_p(s) = \lambda_1 X_p(s) + X_{p-1}(s),$$

$$sX_i(s) = \lambda_i X_i(s) + U(s), \text{ pour } i = p + 1, \dots, n.$$

Obtention d'un modèle d'état avec A diagonale

Pôles pas tous distincts : $sX_1(s) = \lambda_1 X_1(s) + U(s)$, $sX_2(s) = \lambda_1 X_2(s) + X_1(s)$, ...
 $sX_p(s) = \lambda_1 X_p(s) + X_{p-1}(s)$ et $sX_i(s) = \lambda_i X_i(s) + U(s)$, $i = p + 1, \dots, n$

Passage fonction de transfert/représentation d'état (5)

Obtention d'un modèle d'état avec A diagonale

Pôles pas tous distincts : $sX_1(s) = \lambda_1 X_1(s) + U(s)$, $sX_2(s) = \lambda_1 X_2(s) + X_1(s)$, ...
 $sX_p(s) = \lambda_1 X_p(s) + X_{p-1}(s)$ et $sX_i(s) = \lambda_i X_i(s) + U(s)$, $i = p+1, \dots, n$

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 1 & \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_{p+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_p \\ x_{p+1} \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$
$$y = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n) x + Du.$$

Matrice d'évolution sous *forme réduite de Jordan*

Passage fonction de transfert/représentation d'état (6)

Type de représentation d'état

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Type de représentation d'état

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Fonction de transfert ($a_n = 1$) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + s^n},$$

Type de représentation d'état

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Fonction de transfert ($a_n = 1$) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + s^n},$$

Variable d'état x_1 telle que :

$$U(s) = D(s)X_1(s),$$

$$Y(s) = N(s)X_1(s),$$

Type de représentation d'état

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Fonction de transfert ($a_n = 1$) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + s^n},$$

Variable d'état x_1 telle que :

$$\begin{aligned}U(s) &= (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)X_1(s), \\Y(s) &= (b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0)X_1(s).\end{aligned}$$

Type de représentation d'état

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Fonction de transfert ($a_n = 1$) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + s^n},$$

Variables d'état x_2, \dots, x_n telles que :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ &\dots \\ \frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n. \end{aligned}$$

Type de représentation d'état

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Fonction de transfert ($a_n = 1$) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + \dots + s^n},$$

Finalement, variables d'état x_1, x_2, \dots, x_n telles que :

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{d^i x_1}{dt^i}.$$

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

$$U(s) = (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)X_1(s), \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d^i x_1}{dt^i} \text{ et } \frac{dx_{i-1}}{dt} = x_i.$$

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

$$U(s) = (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)X_1(s), \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d^i x_1}{dt^i} \text{ et } \frac{dx_{i-1}}{dt} = x_i.$$

Il vient :

$$\frac{d^n x_1}{dt^n} = -a_{n-1} \frac{d^{n-1} x_1}{dt^{n-1}} - \dots - a_0 x_1 + u,$$

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

$$U(s) = (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)X_1(s), \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d^i x_1}{dt^i} \text{ et } \frac{dx_{i-1}}{dt} = x_i.$$

Il vient :

$$\frac{dx_n}{dt} = -a_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dt} - \dots - a_0 x_1 + u,$$

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

$$U(s) = (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)X_1(s), \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d^i x_1}{dt^i} \text{ et } \frac{dx_{i-1}}{dt} = x_i.$$

Il vient :

$$\frac{dx_n}{dt} = -a_{n-1}x_n - \dots - a_0x_1 + u.$$

Passage fonction de transfert/représentation d'état (7)

Obtention d'un modèle d'état avec *A* compagne

$$U(s) = (s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0)X_1(s), \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d^i x_1}{dt^i} \text{ et } \frac{dx_{i-1}}{dt} = x_i.$$

soit :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Matrice d'évolution sous forme *compagne horizontale*.

Passage fonction de transfert/représentation d'état (8)

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Il reste alors à déterminer la sortie.

Passage fonction de transfert/représentation d'état (8)

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Il reste alors à déterminer la sortie.

Sortie :

$$Y(s) = b_m s^m X_1(s) + (b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) X_1(s).$$

Passage fonction de transfert/représentation d'état (8)

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Il reste alors à déterminer la sortie.

Sortie :

$$Y(s) = b_m s^m X_1(s) + (b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) X_1(s).$$

Fonction de transfert **strictement propre** ($m < n$) :

$$y = (b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0) x.$$

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Il reste alors à déterminer la sortie.

Sortie :

$$Y(s) = b_m s^m X_1(s) + (b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) X_1(s).$$

Fonction de transfert strictement propre ($m < n$) :

$$y = (b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0) x.$$

Fonction de transfert **non strictement propre** ($n = m$) :

$$Y(s) = b_n s^n X_1(s) + (b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0) X_1(s),$$

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Il reste alors à déterminer la sortie.

Sortie :

$$Y(s) = b_m s^m X_1(s) + (b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) X_1(s).$$

Fonction de transfert strictement propre ($m < n$) :

$$y = (b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0) x.$$

Fonction de transfert non strictement propre ($n = m$) :

$$Y(s) = b_n \left((-a_{n-1} s^{n-1} \dots - a_0) X_1(s) + U(s) \right) + (b_{n-1} s^{n-1} \dots + b_0) X_1(s).$$

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Il reste alors à déterminer la sortie.

Sortie :

$$Y(s) = b_m s^m X_1(s) + (b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) X_1(s).$$

Fonction de transfert strictement propre ($m < n$) :

$$y = (b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_m \quad 0 \quad \dots \quad 0) x.$$

Fonction de transfert non strictement propre ($n = m$) :

$$y = (b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n) x + b_n u.$$

Passage fonction de transfert/représentation d'état (9)

Obtention d'un modèle d'état avec A compagne

Récapitulatif

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} u$$
$$y = (b_0 - a_0 b_n \quad b_1 - a_1 b_n \quad \dots \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_n) x + b_n u.$$

Forme *canonique commandable*.

1

Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2

Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3

Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

1

Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2

Réponses des systèmes à temps continu

- **Réponse temporelle**
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3

Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

Problème

- 1 Résolution de l'équation d'état :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu.$$

- 2 Obtention de la réponse du système :

$$y = Cx + Du.$$

Représentation d'état : calcul de la réponse (2)

Réponse libre de l'état

Réponse libre : solution de l'équation d'état homogène :

$$\frac{dx}{dt} = Ax.$$

Matrice de transition

On montre :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0).$$

avec $\Phi(t, t_0)$ *matrice de transition*, d'ordre n tq :

$$\frac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0), \forall t \geq t_0.$$

Représentation d'état : calcul de la réponse (3)

Réponse forcée de l'état

Réponse forcée : réponse au seul signal d'entrée, CI nulles :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu.$$

On montre :

$$x(t) = \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) Bu(\tau) d\tau.$$

Réponse complète

Réponse complète du système, par superposition :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau,$$

Réponse complète

Réponse complète du système, par superposition :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

Réponse complète

Réponse complète du système, par superposition :

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau,$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t),$$

$$y(t) = C \left(\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau \right) + Du(t).$$

Représentation d'état : calcul de la réponse (5)

Matrice de transition

Pour un système linéaire invariant :

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$$

où :

$$e^{At} = 1 + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots$$

Réponse complète

Réponse complète du système, par superposition :

$$y(t) = C \left(e^{A(t-t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right) + D u(t).$$

Représentation d'état : calcul de la réponse (6)

Calcul de la matrice de transition

Dans le cas où A est diagonale, chacun des termes de la diagonale de e^{At} est l'exponentielle du terme correspondant de A . En effet, $\forall a_i, i = 1, 2, \dots, n$:

$$e^{a_i t} = 1 + a_i t + \frac{a_i^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{a_i^n t^n}{n!} + \dots$$

Représentation d'état : calcul de la réponse (6)

Calcul de la matrice de transition

Dans le cas où A est diagonale, chacun des termes de la diagonale de e^{At} est l'exponentielle du terme correspondant de A . En effet, $\forall a_i, i = 1, 2, \dots, n$:

$$e^{a_i t} = 1 + a_i t + \frac{a_i^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{a_i^n t^n}{n!} + \dots$$

Méthode générale

Dans le cas où A est non diagonale : diagonalisation préalable $A_d = P^{-1}AP$, puis changement de variable d'état ou :

$$e^{At} = P e^{A_d t} P^{-1}.$$

Représentation d'état : calcul de la réponse (6)

Calcul de la matrice de transition

Dans le cas où A est diagonale, chacun des termes de la diagonale de e^{At} est l'exponentielle du terme correspondant de A . En effet, $\forall a_i, i = 1, 2, \dots, n$:

$$e^{a_i t} = 1 + a_i t + \frac{a_i^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{a_i^n t^n}{n!} + \dots$$

Autres méthodes

Transformée de Laplace, théorème de Sylvester.

Moteur à courant continu Maxon F2260, bobinage 885

Problème : calculer la sortie $y(t) = \omega(t)$ en réponse à une tension constante de 12 V pour les CI en $t = 0$:

$$\omega = 2230 \text{ tours/min} = 233,5 \text{ rad/s},$$

$$i = 0,168 \text{ A},$$

Représentation d'état :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u,$$
$$y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

avec $x_1 = \omega$ et $x_2 = i$.

Valeur numérique du modèle :

$$R = 1,44 \Omega$$

$$L = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

$$J = 1,29 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

$$f = 7,19 \cdot 10^{-5} \text{ N.s.m}^{-1}$$

$$K = 0,10 \text{ N.m.A}^{-1}$$

Moteur à courant continu Maxon F2260, bobinage 885

Expression numérique de la représentation d'état :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,55768 & 775,19 \\ -178,57 & -2571,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1785,7 \end{pmatrix} u,$$
$$y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Diagonalisation de la représentation d'état :

$$A_d = \begin{pmatrix} -55,58 & 0 \\ 0 & -2516,4 \end{pmatrix}$$
$$P = \begin{pmatrix} 0,9975 & -0,2945 \\ -0,07080 & 0,9557 \end{pmatrix}$$

Changement de variable régulier $z = P^{-1}x$:

$$\frac{dz}{dt} = P^{-1}APz + P^{-1}Bu,$$
$$y = CPz + Du.$$

Diagonalisation de la représentation d'état :

$$z(0) = \begin{pmatrix} 239,3745 \\ 17,9099 \end{pmatrix}$$

$$\frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} -55,58 & 0 \\ 0 & -2516,4 \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 563,9 \\ 1910,3 \end{pmatrix} u,$$

$$y = (0,9975 \quad -0,2945) z$$

Réponse :

$$y(t) = CP \left(\Phi(t, 0)z(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)P^{-1}Bu(\tau)d\tau \right),$$

avec :

$$\Phi(t, \tau) = \begin{pmatrix} e^{-55,58(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2516,4(t-\tau)} \end{pmatrix}$$

soit :

$$y(t) = 238,77 e^{-55,58t} - 5,2738 e^{-2516,4t} + 121,45(1 - e^{-55,58t}) - 2,6825(1 - e^{-2516,4t})$$

ou :

$$y(t) = \left(118,77 + 117,32 e^{-55,58t} - 2,5913 e^{-2516,4t} \right) u(t).$$

Représentation externe : calcul de la réponse (1)

Méthode directe

Résolution de l'équation différentielle entrée-sortie :

$$\sum_{i=c}^n a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u(t)}{dt^i}$$

Problématique au delà de $n = 2$.

Transformée de Laplace

On utilise la transformée de Laplace et donc la FT du système, si les CI sont nulles.

Représentation externe : calcul de la réponse (2)

D'après la définition de la FT, avec des CI sont nulles :

$$Y(s) = G(s)U(s).$$

Propriété de la transformée de Laplace vis-à-vis de la convolution :

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau\right\} = F(s)G(s)$$

Théorème

La réponse d'un système linéaire invariant d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ peut s'écrire sous la forme :

$$y(t) = g(t) * u(t).$$

Valeur numérique du modèle :

$$R = 1,44 \Omega$$

$$L = 5,6 \cdot 10^{-4} \text{ H}$$

$$J = 1,29 \cdot 10^{-4} \text{ kg.m}^2$$

$$f = 7,19 \cdot 10^{-5} \text{ N.s.m}^{-1}$$

$$K = 0,10 \text{ N.m.A}^{-1}$$

Problème : calculer la sortie $y(t) = \omega(t)$ en réponse à une tension constante de 12 V pour des CI nulles.

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{9,8975}{(1 + 0,0184s)(1 + 0,0004s)},$$

d'où :

$$Y(s) = \frac{9,8975}{(1 + 0,0184s)(1 + 0,0004s)} U(s),$$

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{9,8975}{(1 + 0,0184s)(1 + 0,0004s)},$$

d'où :

$$Y(s) = \frac{9,8975}{(1 + 0,0184s)(1 + 0,0004s)} \frac{12}{s},$$

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{9,8975}{(1 + 0,0184s)(1 + 0,0004s)},$$

d'où :

$$Y(s) = \frac{118,77}{s(1 + 0,0184s)(1 + 0,0004s)}.$$

Décomposition en éléments simples :

$$Y(s) = \frac{118,77}{s(1 + 0,0184s)(1 + 0,0004s)},$$

devient :

$$Y(s) = \frac{118,77}{s} - \frac{2,2308}{1 + 0,0184s} + \frac{9,9808 \cdot 10^{-4}}{1 + 0,0004s},$$

Moteur à courant continu Maxon F2260, bobinage 885

On connaît :

$$\mathcal{L}\{e^{-at} u(t)\} = \frac{1}{s+a}$$

donc :

$$\mathcal{L}\{e^{-\frac{t}{\tau}} u(t)\} = \frac{\tau}{1+\tau s}.$$

La transformée inverse de Laplace de :

$$Y(s) = \frac{118,77}{s} - \frac{2,2308}{1+0,0184s} + \frac{9,9808 \cdot 10^{-4}}{1+0,0004s},$$

donne :

$$y(t) = \left(118,77 - 121,45 e^{-55,58t} + 2,6825 e^{-2516,4t} \right) u(t).$$

Réponse impulsionnelle (1)

Definition (Impulsion de Dirac)

Soit $f(t)$ une fonction continue en 0. Alors l'*impulsion de Dirac* est la distribution $\delta(t)$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0).$$

Réponse impulsionnelle

Réponse impulsionnelle : réponse à une impulsion de Dirac.

Réponse impulsionnelle (2)

Réponse impulsionnelle du système :

$$y(t) = g(t) * \delta(t)$$

soit, par définition de l'impulsion de Dirac :

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = g(t).$$

Réponse impulsionnelle (2)

Réponse impulsionnelle du système :

$$y(t) = g(t) * \delta(t)$$

soit, par définition de l'impulsion de Dirac :

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = g(t).$$

Réponse impulsionnelle

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$: *réponse impulsionnelle* du système.

Réponse impulsionnelle (2)

Réponse impulsionnelle du système :

$$y(t) = g(t) * \delta(t)$$

soit, par définition de l'impulsion de Dirac :

$$y(t) = \int_0^t g(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = g(t).$$

Réponse impulsionnelle

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$: *réponse impulsionnelle* du système.

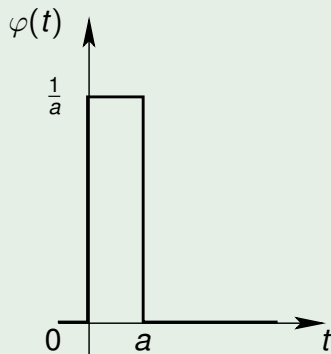
Remarque

Faible intérêt pratique.

Approximation de l'impulsion de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau)d\tau = f(0).$$

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \varphi(t)$$



Définition

On appelle *réponse indicielle* d'un système sa réponse à un *échelon unité* :

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ 1, & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$

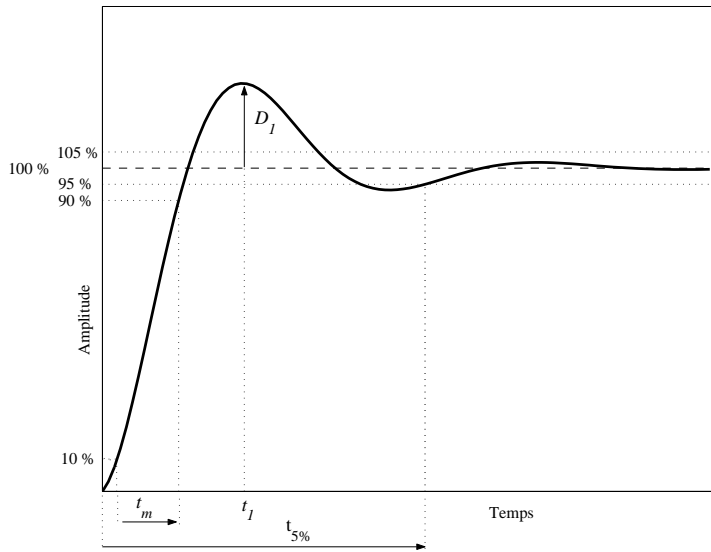
Cette réponse vaut :

$$y(t) = g(t) * u(t) = \int_0^t g(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau) d\tau.$$

Remarque

Intérêt pratique : caractérisation (identification) du système.

Réponse indicielle



Systèmes du 1er ordre : réponse temporelle (1)

Définition

Un *système linéaire invariant à temps continu d'ordre un* est décrit par une équation différentielle d'ordre un à coefficients constants reliant son entrée $u(t)$ et sa sortie $y(t)$:

$$y(t) + \tau \frac{dy(t)}{dt} = Ku(t)$$

où τ et K sont des constantes réelles non nulles ; τ est la *constante de temps* du système et K son gain statique.

La réponse indicielle est $y(t) = \alpha + \beta e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec α et β deux constantes réelles dépendant des CI.

Systemes du 1er ordre : réponse temporelle (2)

Détermination des paramètres de :

$$y(t) = \alpha + \beta e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- terme constant : *régime permanent* de la sortie
- une partie variable : *régime transitoire*
- cas $\tau > 0$: stable

Systèmes du 1er ordre : réponse temporelle (2)

Détermination des paramètres de :

$$y(t) = \alpha + \beta e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- terme constant : *régime permanent* de la sortie
- une partie variable : *régime transitoire*
- cas $\tau > 0$: stable

A l'instant $t = 0$:

$$y(0) = \alpha + \beta.$$

Systèmes du 1er ordre : réponse temporelle (2)

Détermination des paramètres de :

$$y(t) = \alpha + \beta e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- terme constant : *régime permanent* de la sortie
- une partie variable : *régime transitoire*
- cas $\tau > 0$: stable

Quand $t \rightarrow \infty$, $\frac{dy(t)}{dt} = 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = K,$$

et

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \alpha,$$

Systemes du 1er ordre : réponse temporelle (2)

Détermination des paramètres de :

$$y(t) = \alpha + \beta e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

- terme constant : *régime permanent* de la sortie
- une partie variable : *régime transitoire*
- cas $\tau > 0$: stable

soit les paramètres :

$$\alpha = K,$$

$$\beta = y(0) - K.$$

Systèmes du 1er ordre : réponse temporelle (2)

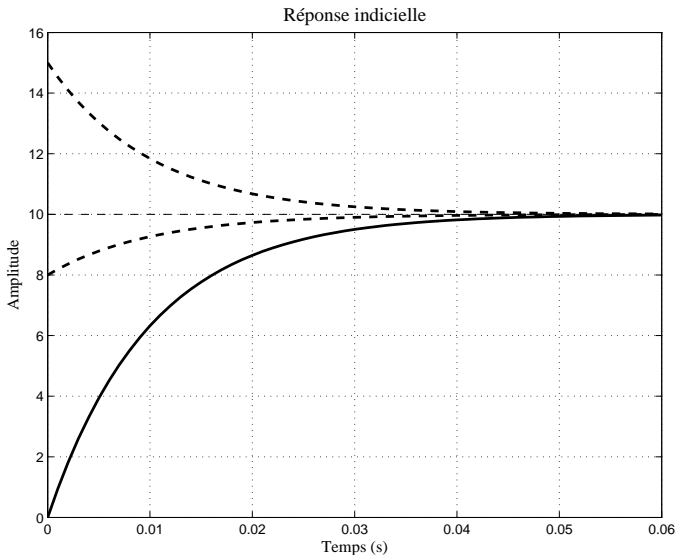
Détermination des paramètres de :

$$y(t) = \alpha + \beta e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

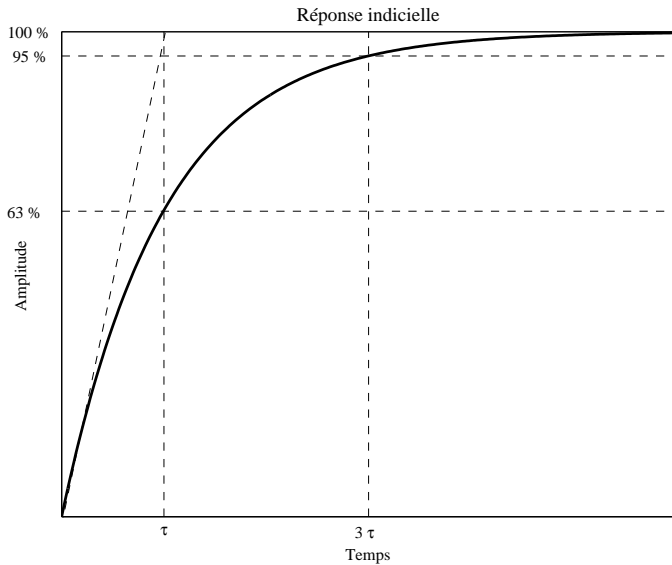
- terme constant : *régime permanent* de la sortie
- une partie variable : *régime transitoire*
- cas $\tau > 0$: stable

Finalement :

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) + y(0)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$



Réponse indicielle d'un système du premier ordre de constante de temps $\tau = 0,01$ s et de gain statique $K = 10$ pour différentes CI



Caractéristiques de la réponse indicielle d'un système d'ordre 1

Définition

Un *système linéaire invariant à temps continu d'ordre deux* est décrit par une équation différentielle d'ordre deux à coefficients constants reliant son entrée $u(t)$ et sa sortie $y(t)$.

Définition

On considère des systèmes dont l'équation différentielle se met sous la forme canonique :

$$\omega_n^2 y(t) + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} = K\omega_n^2 u(t),$$

où ξ , ω_n et K sont des constantes réelles strictement positives

Définition

On considère des systèmes dont l'équation différentielle se met sous la forme canonique :

$$\omega_n^2 y(t) + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} = K\omega_n^2 u(t),$$

où ξ , ω_n et K sont des constantes réelles strictement positives

- ξ : *coefficient d'amortissement*
- ω_n : *pulsation propre non amortie* ou *pulsation naturelle*
- K : gain statique

Systèmes du 2nd ordre : réponse temporelle (2)

Réponse indicielle fonction de la valeur de ξ :

$$\begin{cases} \alpha + \beta e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \varphi), & \text{si } 0 < \xi < 1, \\ \alpha + (\beta + \gamma t) e^{-\xi\omega_n t}, & \text{si } \xi = 1, \\ \alpha + \beta e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + \gamma e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}, & \text{si } \xi > 1, \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ dépendant des CI.

Systèmes du 2nd ordre : réponse temporelle (2)

Réponse indicielle fonction de la valeur de ξ :

$$\begin{cases} \alpha + \beta e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \varphi), & \text{si } 0 < \xi < 1, \\ \alpha + (\beta + \gamma t) e^{-\xi\omega_n t}, & \text{si } \xi = 1, \\ \alpha + \beta e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + \gamma e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}, & \text{si } \xi > 1, \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ dépendant des CI.

- $\xi \geq 1$: aucune oscillation

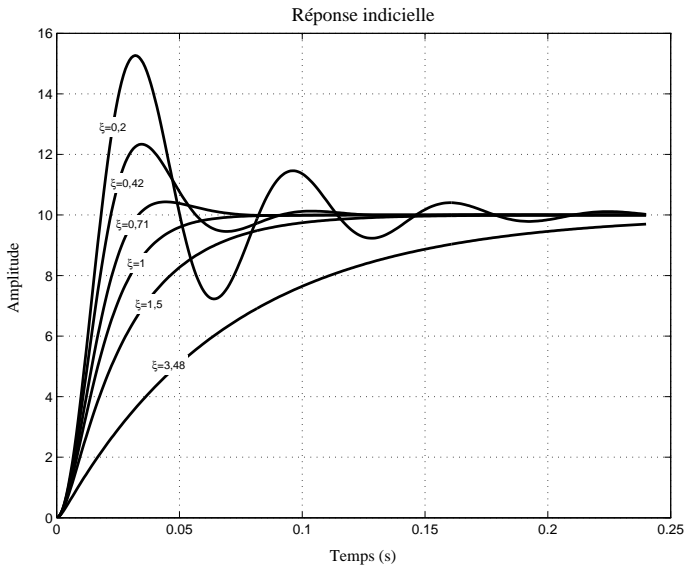
Systèmes du 2nd ordre : réponse temporelle (2)

Réponse indicielle fonction de la valeur de ξ :

$$\begin{cases} \alpha + \beta e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \varphi), & \text{si } 0 < \xi < 1, \\ \alpha + (\beta + \gamma t) e^{-\xi\omega_n t}, & \text{si } \xi = 1, \\ \alpha + \beta e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t} + \gamma e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n t}, & \text{si } \xi > 1, \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ dépendant des CI.

- $\xi \geq 1$: aucune oscillation
- $\xi < 1$: *pseudo-oscillations* i. e. oscillations de pulsation fixe $\omega_p = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_n$, dont l'amplitude décroît exponentiellement vers zéro. On appelle ω_p *pseudo-pulsation* ou *pulsation amortie*.

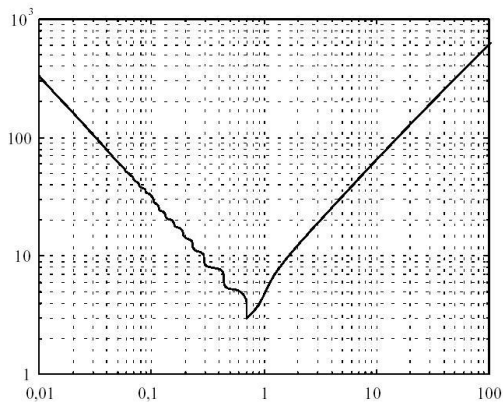


Réponses indicielles d'un système du second ordre pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement

Systèmes du 2nd ordre : réponse temporelle (3)

Temps de réponse

Pas de loi simple : abaquages ou simulation.



Courbe $\omega_n t_{5\%}$ fonction de ξ

Temps de réponse

Pas de loi simple : approximation.

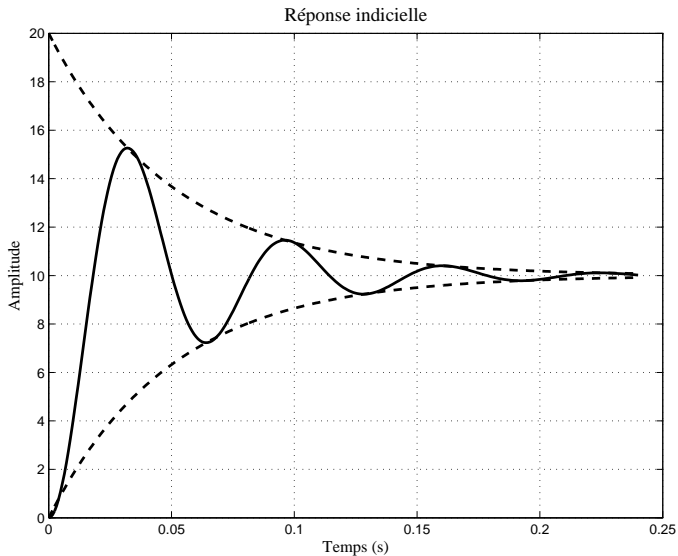
Approximation :

- deux pôles réels, associés à deux constantes de temps ($\tau_1 \gg \tau_2$)

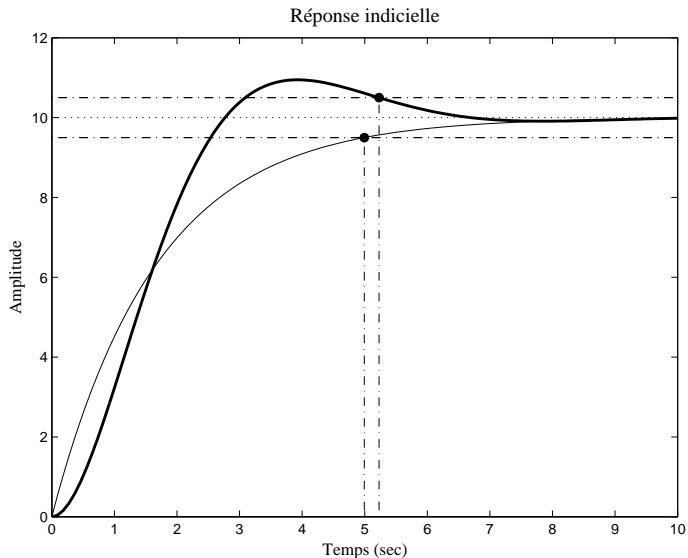
$$\alpha + \beta e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \gamma e^{-\frac{t}{\tau_2}} \Rightarrow t_{5\%} \simeq 3\tau_1$$

- deux pôles complexes : la réponse indicielle est comprise à l'intérieur d'une enveloppe exponentielle connue :

$$\alpha + \beta e^{-\xi\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_n t + \varphi) \Rightarrow t_{5\%} \simeq \frac{3}{\xi\omega_n}$$



Réponse indicielle d'un système du second ordre pseudo-oscillant et
enveloppe des pseudo-oscillations



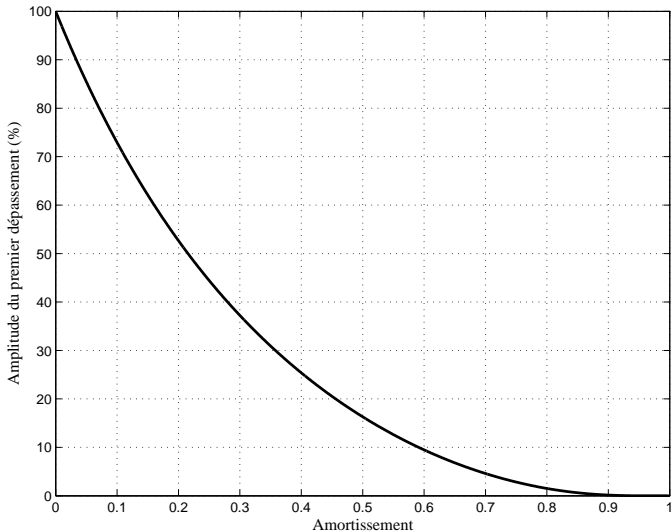
Temps de réponse à 5 % d'un système du second ordre de coefficient d'amortissement 0,6 et d'un premier ordre de constante de temps $\frac{1}{\xi\omega_n}$

Premier dépassement (cas pseudo-oscillant)

Formes analytiques :

$$t_1 = \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2} \omega_n}, \quad D_1 = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}.$$

Compromis optimal amortissement-rapidité ?



Correspondance entre premier dépassement ($D_{1\%}$) et coefficient d'amortissement, pour un système du second ordre

Premier dépassement (cas pseudo-oscillant)

Compromis optimal amortissement-rapidité est obtenu pour :

$$\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0,7$$

Temps de réponse : $D_1\% = 5\%$ de la valeur finale : $t_1 = t_5\%$.

1

Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2

Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- **Réponse harmonique**
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3

Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

Définition

On considère le cas d'un système linéaire invariant de FT $G(s)$, en *régime permanent sinusoïdal* de pulsation ω . On appelle $G(s = j\omega)$ *réponse harmonique*.

Propriété

La réponse du système à une entrée sinusoïdale $A \sin \omega t$ est :

$$y(t) = A |G(j\omega)| \sin(\omega t + \text{Arg}\{G(j\omega)\}).$$

Définition

On considère le cas d'un système linéaire invariant de FT $G(s)$, en *régime permanent sinusoïdal* de pulsation ω . On appelle $G(s = j\omega)$ *réponse harmonique*.

Analyse harmonique

Analyse harmonique : étude de la fonction $G(j\omega)$:

- comportement fréquentiel du système (signal périodique)
- diagrammes mettant en correspondance module et argument

Diagrammes harmoniques (1)

Diagramme de Bode

Le *diagramme de Bode* est constitué de deux courbes :

- module en décibels (*dB*) : $G_{dB}(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)|$
- argument en degrés (*deg*) : $\varphi(\omega) = \text{Arg}\{G(j\omega)\}$

Vocabulaire

On utilise traditionnellement les termes de *gain* et de *phase*, plutôt que les termes modules et argument.

Intérêt du diagramme de Bode

- Module d'un produit de nombres complexes = produit de leurs modules. Module en dB d'un produit de nombres complexes = somme de leurs modules en dB :

$$\begin{aligned}20 \log_{10} |G_1(j\omega)G_2(j\omega)| &= 20 \log_{10} |G_1(j\omega)| + 20 \log_{10} |G_2(j\omega)|, \\ &= G_{1_{dB}}(j\omega) + G_{2_{dB}}(j\omega).\end{aligned}$$

- Argument d'un produit de nombres complexes = somme des arguments :

$$\text{Arg}\{G_1(j\omega)G_2(j\omega)\} = \text{Arg}G_1(j\omega) + \text{Arg}G_2(j\omega).$$

Diagrammes harmoniques (3)

Diagramme de Nyquist

Le *diagramme de Nyquist* est le lieu de $G(j\omega)$ dans le plan complexe, lorsque ω varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Remarque

Ce diagramme est orienté selon les ω croissants. En général on choisit l'échelle du diagramme de Nyquist de sorte que le point complexe d'abscisse -1 , dit *point critique* apparaisse et puisse être situé par rapport au lieu de $G(j\omega)$.

Diagrammes harmoniques (4)

Lieu de Black-Nichols

Le *lieu de Black-Nichols* est le lieu orienté des points de coordonnées $(\varphi(\omega), G_{dB}(\omega))$ lorsque ω varie de $-\infty$ à $+\infty$. On tache aussi de faire apparaître le point critique de coordonnées $(-180, 0)$ sur ce lieu.

Remarque

Ce diagramme est orienté selon les ω croissants. En général on choisi l'échelle du diagramme de Nyquist de sorte que le point complexe d'abscisse -1 , dit *point critique* apparaisse et puisse être situé par rapport au lieu de $G(j\omega)$.

Moteur à courant continu Maxon F2260, bobinage 885

Valeur numérique des paramètres du modèle :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_G}{\tau_{el}\tau_{em}}}{\left(s + \frac{1}{\tau_{el}}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)},$$

$$\tau_{el} = \frac{L}{R},$$

$$\tau_{em} = \frac{RJ}{Rf + K^2},$$

$$\text{et } K_G = \frac{K}{Rf + K^2}.$$

$$G(s) = \frac{9,8975}{(1 + 0,0184s)(1 + 0,0004s)}.$$

Diagramme de Bode

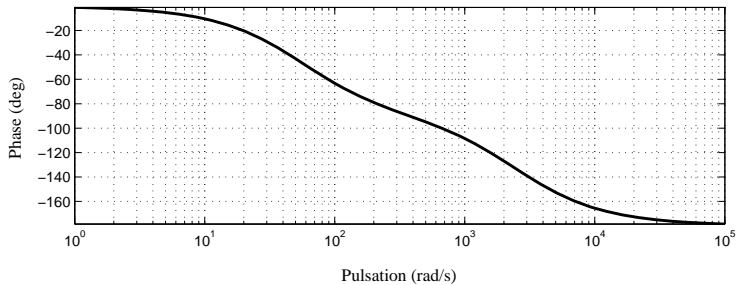
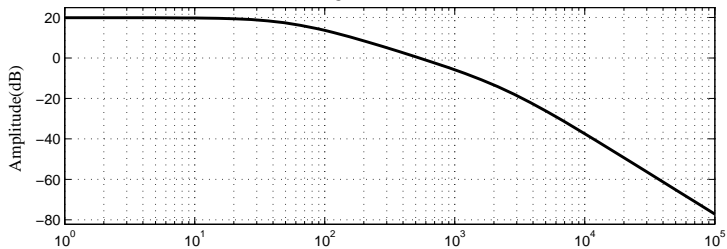
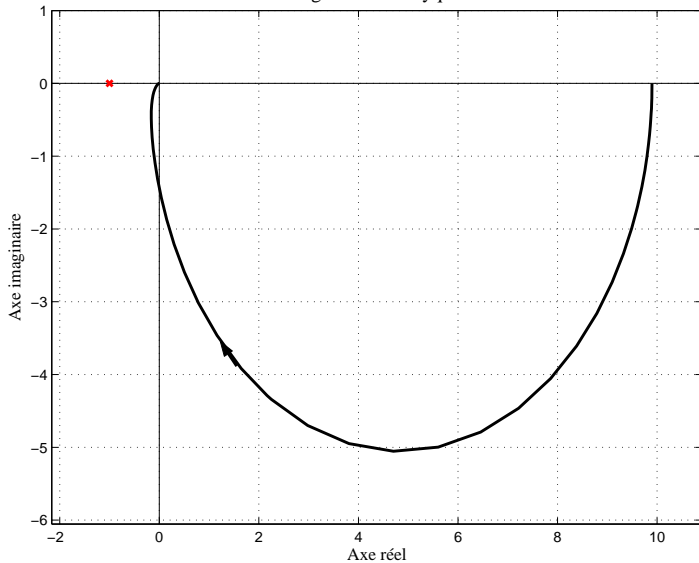
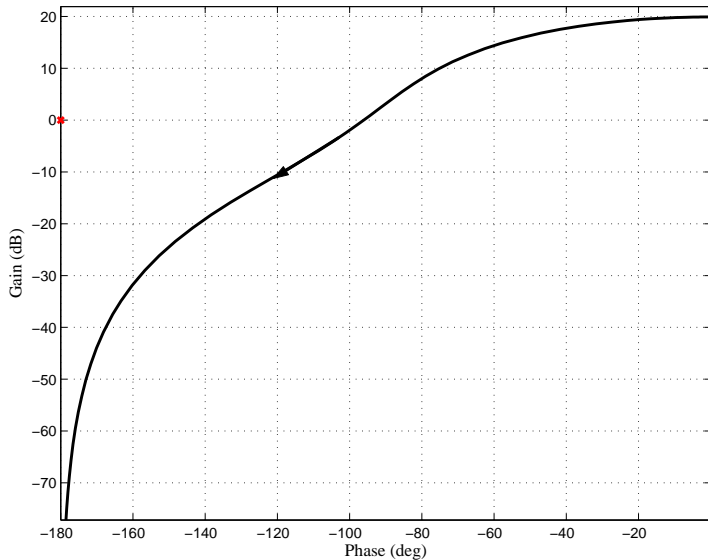


Diagramme de Nyquist



Lieu de Black–Nichols



Systèmes du 1er ordre : réponse harmonique (1)

Fonction de transfert

La FT d'un système du premier ordre est donc :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + \tau s}$$

Réponse harmonique

La réponse harmonique associée est :

$$G(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega}.$$

Description de la réponse harmonique :

- étude du comportement asymptotique du régime permanent sinusoïdal
- extrapolation par des valeurs choisies

Systèmes du 1er ordre : réponse harmonique (2)

Description de la réponse harmonique : $G(j\omega) = \frac{K}{1+j\tau\omega}$.

ω	$G(j\omega)$ équivalent	gain	gain (dB)	phase (deg)
$\omega \ll \frac{1}{\tau}$	K	K	$K_{dB} = 20 \log_{10} K$	0
$\frac{1}{\tau}$	$\frac{K}{1+j}$	$\frac{K}{\sqrt{2}}$	$K_{dB} - 3$	-45
$\omega \gg \frac{1}{\tau}$	$\frac{-jK}{\tau\omega}$	$\frac{K}{\tau\omega}$	$K_{dB} - 20 \log_{10} \tau - 20 \log_{10} \omega$	-90

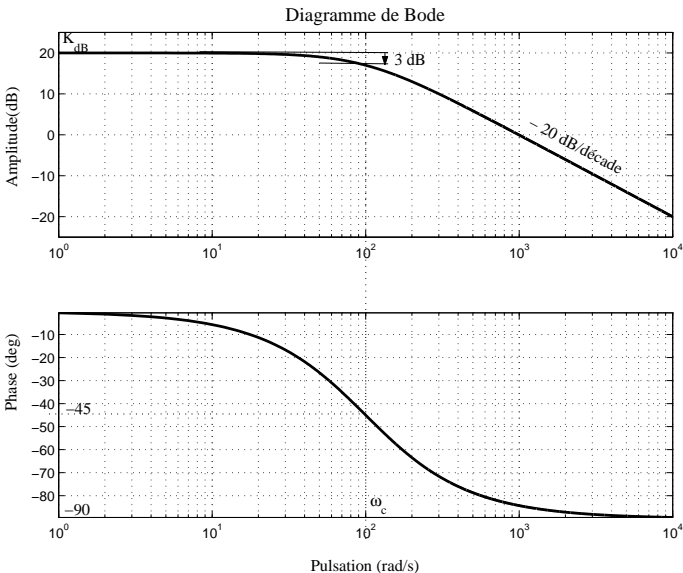


Diagramme de Bode d'un système du premier ordre de constante de temps $\tau = 0,01$ s et de gain statique $K = 10$

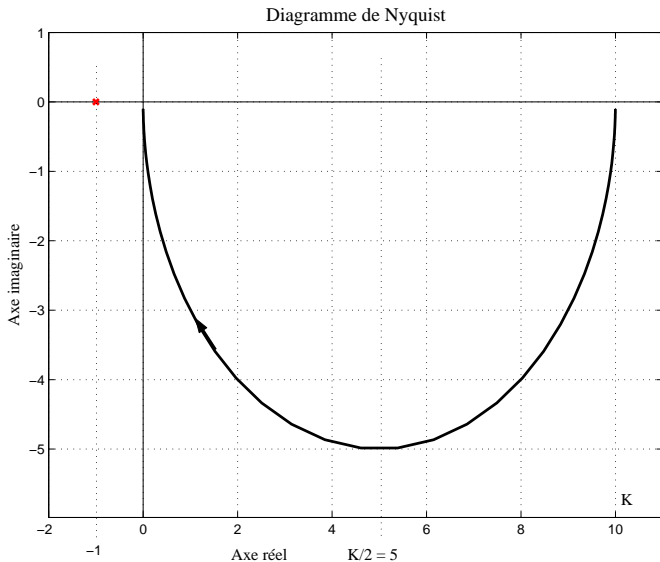


Diagramme de Nyquist d'un système du premier ordre de constante de temps $\tau = 0,01$ s et de gain statique $K = 10$

Systèmes du 2nd ordre : réponse harmonique (1)

Fonction de transfert

La FT du système du second ordre est :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2}.$$

Systèmes du 2nd ordre : réponse harmonique (1)

Fonction de transfert

La FT du système du second ordre est :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2}.$$

Pôles = solutions de $\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2 = 0$:

$$p_{1,2} = -(\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2})\omega_n \text{ si } 0 < \xi \leq 1$$

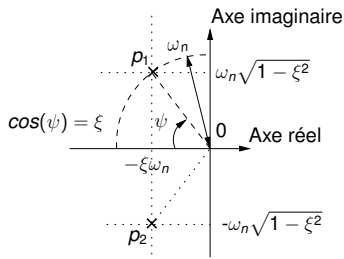
et $p_{1,2} = -(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n \text{ si } \xi \geq 1.$

Systèmes du 2nd ordre : réponse harmonique (1)

Fonction de transfert

La FT du système du second ordre est :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2}.$$



Systèmes du 2nd ordre : réponse harmonique (2)

Description de la réponse harmonique : $G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\xi\omega_n\omega}$.

ω	$G(j\omega)$ équivalent	gain	gain (dB)	phase (deg)
$\omega \ll \omega_n$	K	K	$K_{dB} = 20 \log_{10} K$	0
ω_n	$\frac{K}{2j\xi}$	$\frac{K}{2\xi}$	$K_{dB} - 6 - 20 \log_{10} \xi$	-90
$\omega \gg \omega_n$	$\frac{-K\omega_n^2}{\omega^2}$	$\frac{K\omega_n^2}{\omega^2}$	$K_{dB} + 40 \log_{10} \omega_n - 40 \log_{10} \omega$	-180

Résonance

Si $\xi \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, il peut y avoir un phénomène de résonance, c'est-à-dire que le gain passe par un maximum en :

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2\xi^2} \omega_n.$$

Le dépassement en gain correspondant vaut :

$$G_r = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Diagramme de Bode

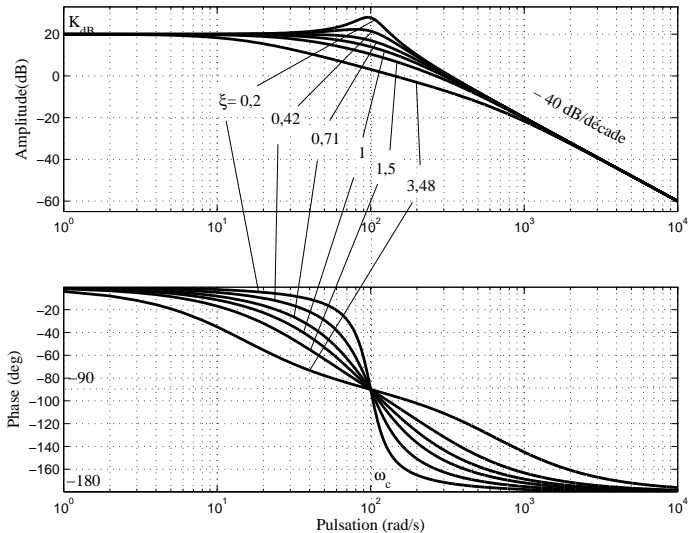


Diagramme de Bode d'un système du second ordre $K = 10$,
 $\omega_n = 100$, ξ variable

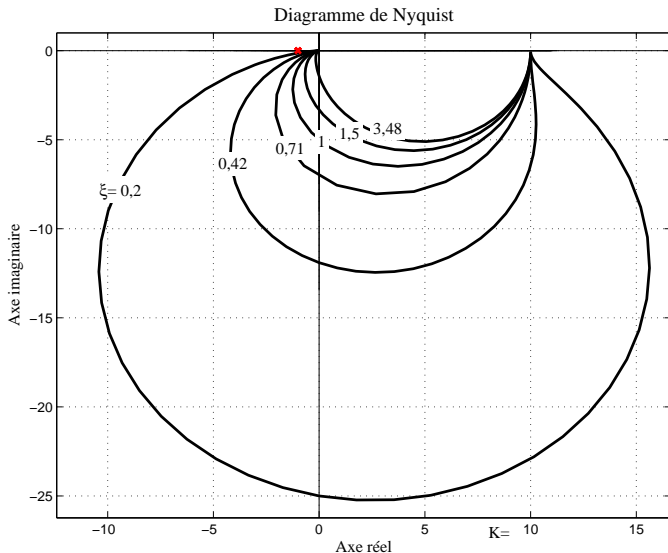


Diagramme de Nyquist d'un système du second ordre $K = 10$,
 $\omega_n = 100$, ξ variable

1

Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2

Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- **Simplification de la représentation d'un système**

3

Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

Simplification de modèles (1)

Forme générique d'une FT :

$$G(s) = \frac{K}{s^c} \frac{\prod_{i=1}^p (1 + \tau_i s) \prod_{i=p+1}^q (1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{1}{\omega_{ni}^2} s^2)}{\prod_{j=1}^{p'} (1 + \tau_j s) \prod_{j=p'+1}^{q'} (1 + 2\frac{\xi_j}{\omega_{nj}} s + \frac{1}{\omega_{nj}^2} s^2)}$$

Simplification de modèles (1)

Forme générique d'une FT :

$$G(s) = \frac{K}{s^c} \frac{\prod_{i=1}^p (1 + \tau_i s) \prod_{i=p+1}^q (1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{1}{\omega_{ni}^2} s^2)}{\prod_{j=1}^{p'} (1 + \tau_j s) \prod_{j=p'+1}^{q'} (1 + 2\frac{\xi_j}{\omega_{nj}} s + \frac{1}{\omega_{nj}^2} s^2)}$$

- Termes du premier ordre : pôles et zéros réels

Simplification de modèles (1)

Forme générique d'une FT :

$$G(s) = \frac{K}{s^c} \frac{\prod_{i=1}^p (1 + \tau_i s) \prod_{i=p+1}^q (1 + 2\frac{\xi_i}{\omega_{ni}} s + \frac{1}{\omega_{ni}^2} s^2)}{\prod_{j=1}^{p'} (1 + \tau_j s) \prod_{j=p'+1}^{q'} (1 + 2\frac{\xi_j}{\omega_{nj}} s + \frac{1}{\omega_{nj}^2} s^2)}$$

- Termes du premier ordre : pôles et zéros réels
- Termes du second ordre : pôles et zéros complexes conjugués

Simplification du modèle du MCC

Modèle du second ordre :

$$G(s) = \frac{9,8975}{(1 + 0,0184s)(1 + 0,0004s)}$$

Modèle du premier ordre :

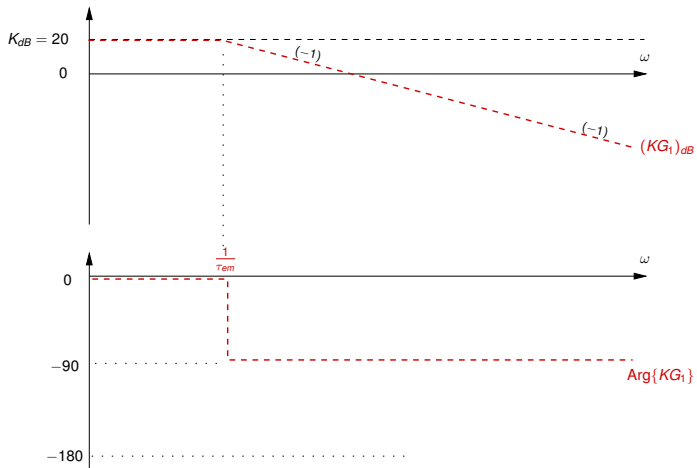
$$G(s) = \frac{9,8975}{1 + 0,0184s}$$

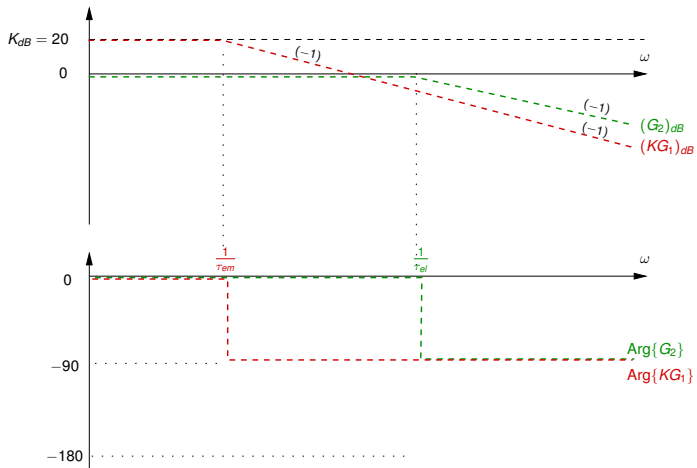
Réponse harmonique relative au pôle dominant ?

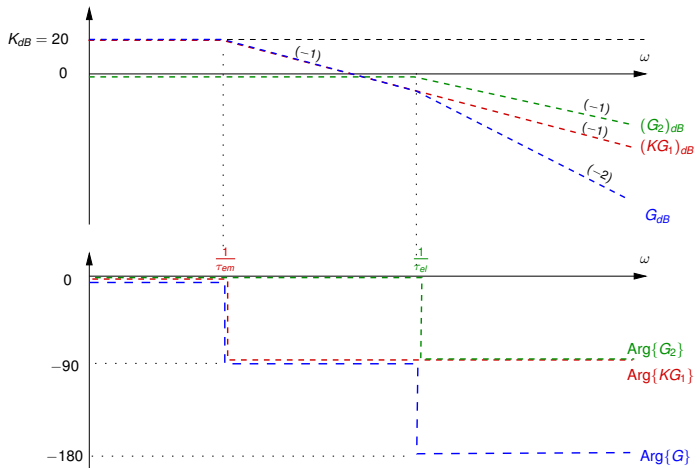
$$G_1(j\omega) = \frac{1}{1 + 0,0184j\omega}$$

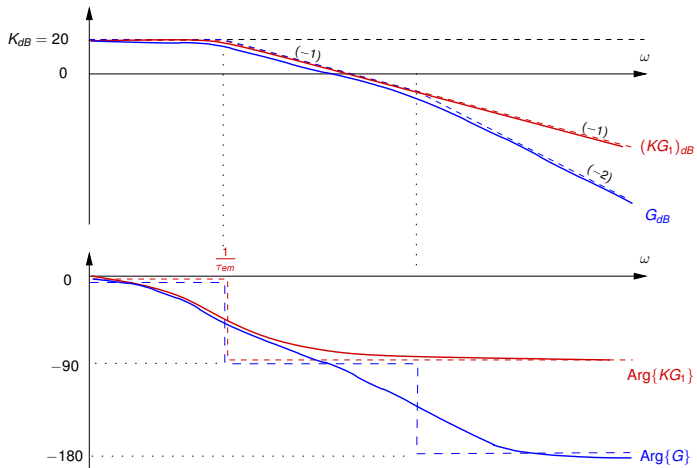
Réponse harmonique relative au pôle secondaire ?

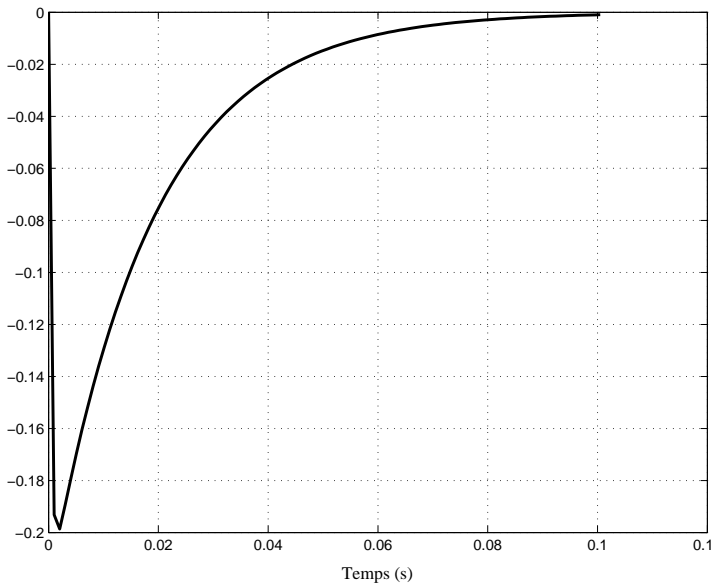
$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1 + 0,0004j\omega}$$











Erreur de modélisation dans l'hypothèse d'un modèle d'ordre un du MCC : erreur sur la réponse indicielle pour un moteur Maxon F2260

Règles générales : pôles réels

Lorsque deux pôles sont suffisamment distincts le pôle le plus près de l'axe des imaginaires, c'est-à-dire le plus petit en valeur absolue, associé à la constante de temps la plus lente, est prépondérant.

Si l'on doit faire une approximation pour simplifier l'étude d'un système, dont le modèle est d'ordre élevé, on négligera donc les pôles les plus rapides.

Si les pôles sont proches, il peut devenir plus hasardeux d'effectuer une telle simplification.

Simplification de modèles (2)

Règles générales : pôles complexes conjugués

On pourra, de même considérer que la dynamique liée à une paire de pôles complexes conjugués est négligeable devant celle liée à un pôle simple ou à une autre paire de pôles complexes conjugués si la pulsation naturelle associée à cette paire est grande devant la pulsation naturelle de l'autre paire, ou devant la pulsation associée au pôle simple.

Simplification de modèles (2)

Règles générales : zéros

Cas similaire : on simplifiera les zéros entre eux de la même manière.

En revanche, on procédera avec prudence pour ce qui est de négliger un zéro prépondérant au vu de la valeur des pôles.

Exemple 1

$$G(s) = \frac{K(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_3 s)}$$

avec $\tau_1 > \tau_2 > \tau_3$.

A. N. :

$$\tau_1 = 1 \text{ s}$$

$$\tau_2 = 0,1 \text{ s}$$

$$\tau_3 = 0,01 \text{ s}$$

Caractéristiques

- Tracé du diagramme de Bode
- Tracé du lieu des pôles et zéros

Exemple 2

$$G(s) = \frac{K(1 + \tau_1 s)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_2} + \frac{s^2}{\omega_2^2}\right) (1 + \tau_3 s)}$$

avec $\tau_1 > \frac{1}{\omega_2} > \tau_3$.

A. N. :

$$\tau_1 = 1 \text{ s}$$

$$\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$$

$$\tau_3 = 0,01 \text{ s}$$

Caractéristiques

- Tracé du diagramme de Bode
- Tracé du lieu des pôles et zéros

1

Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2

Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3

Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

1

Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2

Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3

Analyse des systèmes à temps continu

- **Commandabilité et observabilité**
- Stabilité

Commandabilité et observabilité : généralités

Contexte

Notions fondamentales pour l'étude des systèmes en vue de leur commande, définies à partir du modèle d'état du système considéré

Objectif

Caractérisation d'après les critères de Kalman.

Commandabilité (1)

Définition

Commandabilité d'un système = capacité à voir son comportement évoluer sous l'action de sa commande (son entrée).

Commandabilité d'un système

Une variable d'état x_i est *commandable* s'il est possible de déterminer une commande $u(t)$ sur un intervalle $[t_0, t_f]$ conduisant tout état initial $x_i(t_0)$ en 0 en un temps t_1 avec $t_0 \leq t_1 \leq t_f$.

Si cette propriété est vraie pour tout t_0 et pour toute variable du vecteur d'état, alors le système est dit *complètement commandable*.

Critère de commandabilité (de Kalman)

Un système linéaire invariant d'équation dynamique d'état :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité :

$$\mathcal{C} = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$$

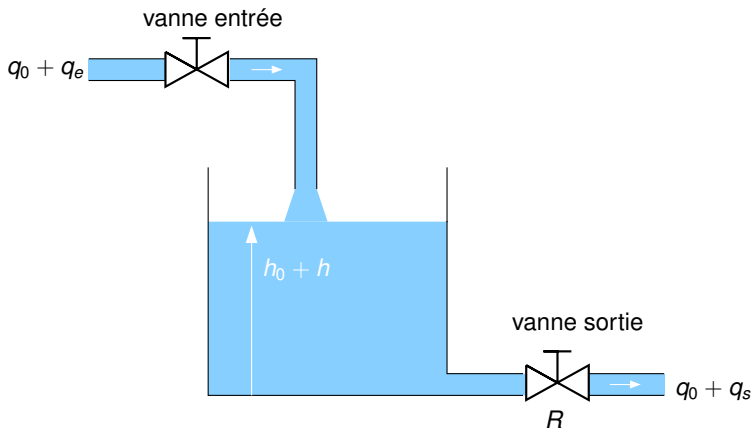
est de rang n .

On parle couramment de commandabilité de la paire (A, B) .

Système de niveau de liquide

Système de niveau de liquide régi par la loi d'évolution :

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_e.$$



Modèle d'état

Modèle physique :

$$RC \frac{dh}{dt} + h = Rq_e.$$

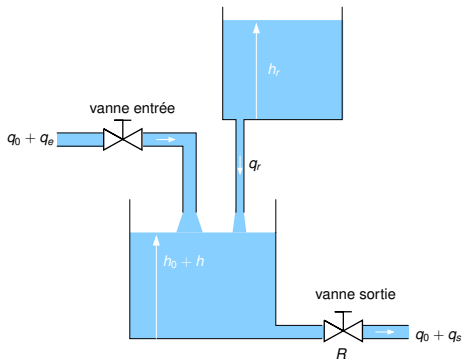
Système d'ordre 1 : variable d'état = variation h de la hauteur de liquide, entrée (commande) = variations $u = q_e$ du débit d'entrée autour du débit nominal q_0 .

Equation d'état :

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{RC} x + \frac{1}{C} u$$

Commandabilité

Système commandable car $B = \frac{1}{C} \neq 0$



Système de niveau de liquide modifié

Système de niveau de liquide régi par les lois d'évolution :

$$\begin{aligned}
 Cdh &= (q_e + q_r - q_s)dt & C_r dh_r &= -q_r dt, \\
 q_s &= \frac{h}{R} & q_r &= \frac{h_r}{R_r}.
 \end{aligned}$$

Modèle d'état

Système d'ordre 2 : variables d'état = h et h_r , commande = u .

Equation d'état :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{R_r C} \\ 0 & -\frac{1}{R_r C_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u.$$

Commandabilité

$$\mathcal{C} = (B \ AB) = \begin{pmatrix} \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Système non complètement commandable, car \mathcal{C} de rang $n - 1 = 1$.

$x_2 = h_r$ non commandable par la vanne d'entrée...

Observabilité (1)

Définition

Observabilité d'un système = possibilité de déterminer son état à partir des mesures de sa sortie.

Observabilité d'un système

Une variable d'état x_i est *observable* s'il est possible de déterminer $x_i(t_0)$ à partir de la connaissance de la sortie $y(t)$ sur un intervalle $[t_0, t_f]$.

Si cette propriété est vraie pour tout t_0 et pour toute variable du vecteur d'état, alors le système est dit *complètement observable*.

Critère d'observabilité (de Kalman)

Un système linéaire invariant de représentation d'état :

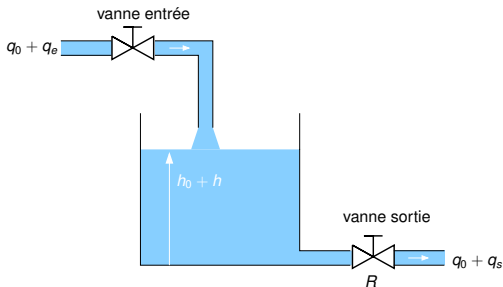
$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

est observable si et seulement si la matrice d'observabilité :

$$O = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

est de rang n .

On parle couramment d'observabilité de la paire (A, C) .



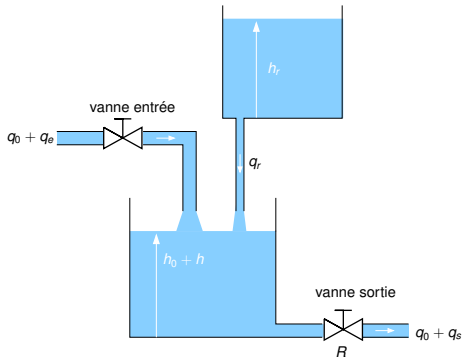
Système de niveau de liquide

Représentation d'état du système :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\frac{1}{RC} x + \frac{1}{C} u, \\ y &= x, \end{aligned}$$

Observabilité

Système observable car $C = 1$.



Système de niveau de liquide avec réservoir auxiliaire

Représentation d'état du système :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{R_r C} \\ 0 & -\frac{1}{R_r C_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u,$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Système de niveau de liquide avec réservoir auxiliaire

Représentation d'état du système :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{R_r C} \\ 0 & -\frac{1}{R_r C_r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u,$$
$$y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Observabilité

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{RC} & \frac{1}{R_r C} \end{pmatrix}.$$

Système complètement observable car la matrice d'observabilité est de rang $n = 2$.

1

Modélisation

- Mise en équation d'un système physique
- Propriétés des systèmes à temps continu
- Représentations temporelles des systèmes
- Représentation par fonction de transfert
- Correspondances entre représentations

2

Réponses des systèmes à temps continu

- Réponse temporelle
- Réponse temporelle des systèmes élémentaires
- Réponse harmonique
- Réponse harmonique des systèmes élémentaires
- Simplification de la représentation d'un système

3

Analyse des systèmes à temps continu

- Commandabilité et observabilité
- Stabilité

Etat d'équilibre

Un *état d'équilibre* est un état du système qui reste non modifié lorsque le système est abandonné à lui-même.

Première définition de la stabilité : stabilité interne

De manière naturelle, on dira qu'un système est *stable* si, écarté de sa position d'équilibre, il y revient.

Caractérisation d'un état d'équilibre

Dans un état d'équilibre $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$ s'écrit :

$$Ax = 0.$$

A = application linéaire sur l'espace d'état :

$$\dim(\text{Im } A) + \dim(\text{Ker } A) = \text{rang } A + \dim(\text{Ker } A) = n.$$

Conclusions :

- si $\text{Ker } A = 0$: $x = 0$ est unique solution ;
- si $\text{Ker } A \neq 0$, alors $\text{rang } A \neq n$ et donc $\det A = 0$: $\exists x \neq 0$

Cas où $\det A \neq 0$

Cas du MCC, sortie=vitesse de rotation, entrée=tension d'induit :

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}.$$

Alors $\det A = \frac{fR}{JL} + \frac{K^2}{JL} > 0$.

Le seul état d'équilibre possible du système est obtenu quand $x_1 = \omega = 0$ et $x_2 = i = 0 \dots$

Remarque

Il n'existe qu'une seule solution au système en $x = 0$. Le seul état d'équilibre est donc l'origine de l'espace d'état.

Cas où $\det A = 0$

Cas du MCC, sortie=position angulaire θ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ 0 & -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$$

Alors $\det A = 0$. Résolution de $Ax = 0$: tous les triplets t.q. $x_2 = x_3 = 0$ sont des états d'équilibre ...

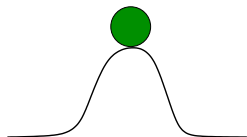
Remarque

Dans ce cas $\text{Ker}A \neq 0$ et \exists une infinité d'états d'équilibre tous compris dans un espace de dimension $n - \text{rang } A$, que l'on obtient en résolvant $Ax = 0$.

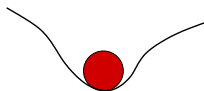
Vocabulaire

Différents types d'équilibre :

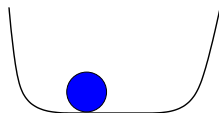
- *équilibre instable*
- *équilibre asymptotiquement stable*
- *équilibre simplement stable*



équilibre instable

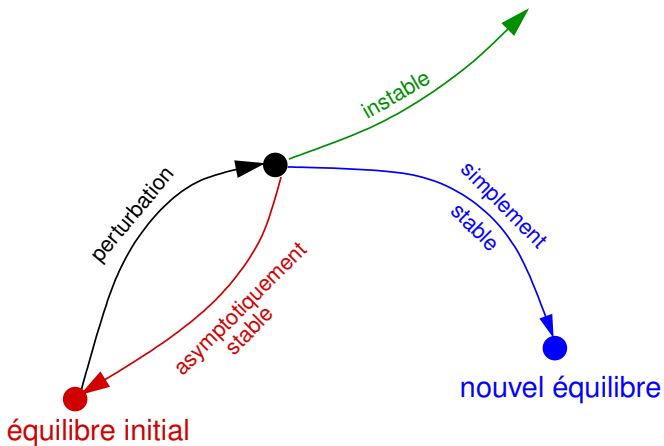


équilibre asymptotiquement stable



équilibre simplement stable

Stabilité et état d'équilibre (6)



Deuxième définition de la stabilité : stabilité BIBO

Un système est *stable* si toute entrée bornée produit une sortie bornée.

Cette définition caractérise la *stabilité entrée bornée-sortie bornée*

ESBS ou plus couramment *BIBO* en anglais.

Théorème

Un système linéaire invariant à temps continu *est stable si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.*

Ce théorème est valable pour tout système, qu'il soit en boucle ouverte ou fermée. Pour un système d'ordre élevé, il faut généralement recourir à une résolution numérique pour déterminer les pôles du système.

Théorème

Un système linéaire invariant à temps continu *est stable si tous ses pôles sont à partie réelle strictement négative.*

Ce théorème est valable pour tout système, **qu'il soit en boucle ouverte ou fermée**. Pour un système d'ordre élevé, il faut généralement recourir à une résolution numérique pour déterminer les pôles du système.

Critères algébriques de stabilité (2)

Critère de Routh-Hurwitz

Soit $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_c s^c$ le dénominateur de la FT considérée. Le système est stable si les a_i , $\forall i = c, c + 1, \dots, n$ sont de même signe et du même signe que les éléments de la première colonne du tableau suivant (dit tableau de Routh) :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	...
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	...
$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$b_{n-3} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$	b_{n-5}	...
$c_{n-1} = \frac{b_{n-1}a_{n-3} - a_{n-1}b_{n-3}}{b_{n-1}}$	$c_{n-3} = \frac{b_{n-1}a_{n-5} - a_{n-1}b_{n-5}}{b_{n-1}}$
$d_{n-1} = \frac{c_{n-1}b_{n-3} - b_{n-1}c_{n-3}}{c_{n-1}}$
...

Critères algébriques de stabilité (3)

Critère de Routh-Hurwitz

Le nombre de changements de signe dans la première colonne indique le nombre de pôles instables du système.

Cas où apparaît un zéro dans la première colonne du tableau

On le remplace par un scalaire $\varepsilon > 0$, et on poursuit le calcul.

Si le scalaire directement sous ε est positif, il existe un pôle à partie réelle nulle. Sinon, il existe un pôle à partie réelle positive.

Stabilité des systèmes d'ordre un, deux et trois (1)

Système d'ordre un

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + \tau s}$$

Unique pôle $p = -\frac{1}{\tau}$.

Condition de stabilité

Un tel système est stable si $\tau > 0$.

Système d'ordre deux

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2}$$

Une paire de pôles :

$$p_{1,2} = -(\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2})\omega_n, \text{ si } 0 < \xi \leq 1,$$

$$p_{1,2} = -(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n, \text{ si } \xi \geq 1.$$

Condition de stabilité

- Pôles complexes : système stable ssi $\xi\omega_n > 0$.
- Pôles réels : le système est stable système stable ssi $(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n > 0$.

Système toujours stable si $\xi > 0$ et $\omega_n > 0$.

Système d'ordre trois

Fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{K}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3},$$

avec a_1 , a_2 et a_3 tous positifs.

Pôles ? \rightarrow Routh.

Tableau de Routh

a_3	a_1	0
a_2	1	0
$\frac{a_1 a_2 - a_3}{a_2}$	0	0
1	0	0
0	0	0

Conclusions :

- système stable ssi $a_1 a_2 > a_3$
- sinon, il existe deux pôles à partie réelle négative (deux changements de signe)

Stabilité des systèmes d'ordre un, deux et trois (6)

Cas où $a_1 a_2 = a_3$: nouveau tableau de Routh

a_3	a_1	0
a_2	1	0
ε	0	0
1	0	0
0	0	0

Conclusion : le système possède alors un pôle à partie réelle nulle.

Système d'ordre trois : condition de stabilité

- système stable si $a_1 a_2 > a_3$
- système instable si $a_1 a_2 < a_3$
- système stable *au sens large*

Exemples numériques :

- éq. car. : $s^3 + 2s^2 + s + 1 = 0$, racines : $-1,755$ et $-0,123 \pm 0,745j$: stable ;
- éq. car. : $2s^3 + s^2 + s + 1 = 0$, racines : $-0,739$ et $0,119 \pm 0,814j$: instable ;
- éq. car. : $s^3 + s^2 + s + 1 = 0$, racines : -1 et $\pm j$: limite de stabilité.

Etude d'un cas

On s'intéresse à un procédé de fonction de transfert :

$$F_1(s) = \frac{5000}{s^3 + 61s^2 + 560s + 500}.$$

- 1 Calculer les pôles du système. Le système est-il stable ?
- 2 Appliquer le critère de Routh-Hurwitz pour résoudre le même problème.
- 3 Quelle est l'influence d'un zéro ? Pour cela ajouter un zéro, de sorte que le système ait pour fonction de transfert :

$$F_2(s) = 5000 \frac{0,2s + 1}{s^3 + 61s^2 + 560s + 500}.$$

Pôles :

- système du troisième ordre sans zéro.
- on remarque que $p_1 = -1$ est racine du polynôme dénominateur, ce qui nous permet de factoriser :

$$s^3 + 61s^2 + 560s + 500 = (s + 1)(s^2 + 60s + 500).$$

- racines de $s^2 + 60s + 500$:

$$p_{2/3} = -30 \pm \sqrt{\Delta'},$$

avec $\Delta' = 30^2 - 500 = 20^2$. On obtient :

$$p_2 = -10$$

$$p_3 = -50$$

Conclusion

Pôles du système tous réels et négatifs : système stable.

Critère de Routh-Hurwitz :

1	560	0
61	500	0
$551,8 = \frac{61 \times 560 - 1 \times 500}{61}$	0	0
500	0	0
0	0	0

Conclusion

Tous les coefficients du polynôme dénominateur et tous les éléments de la première colonne du tableau de Routh sont positifs : système stable.

Etude d'un nouveau cas

On s'intéresse maintenant à un procédé de fonction de transfert :

$$F_2(s) = 5000 \frac{0,2s + 1}{s^3 + 61s^2 + 560s + 500}.$$

Critère de Routh-Hurwitz ?

Conclusion

Un zéro n'introduit pas d'exception : le système reste stable.

Deuxième partie II

Asservissements à temps continu

4 Systèmes asservis à temps continu

- Les différents types d'asservissement
- Asservissement classique
- Asservissement par retour d'état

5 Analyse des systèmes asservis à temps continu

- Stabilité
- Précision des systèmes à temps continu

6 Commande des systèmes à temps continu

- Cahier des charges
- Correcteurs *PID*
- Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
- Méthode du lieu des racines
- Synthèse de correcteur par retour d'état

4 Systèmes asservis à temps continu

- Les différents types d'asservissement
- Asservissement classique
- Asservissement par retour d'état

5 Analyse des systèmes asservis à temps continu

- Stabilité
- Précision des systèmes à temps continu

6 Commande des systèmes à temps continu

- Cahier des charges
- Correcteurs *PID*
- Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
- Méthode du lieu des racines
- Synthèse de correcteur par retour d'état

4 Systèmes asservis à temps continu

- Les différents types d'asservissement
 - Asservissement classique
 - Asservissement par retour d'état

5 Analyse des systèmes asservis à temps continu

- Stabilité
- Précision des systèmes à temps continu

6 Commande des systèmes à temps continu

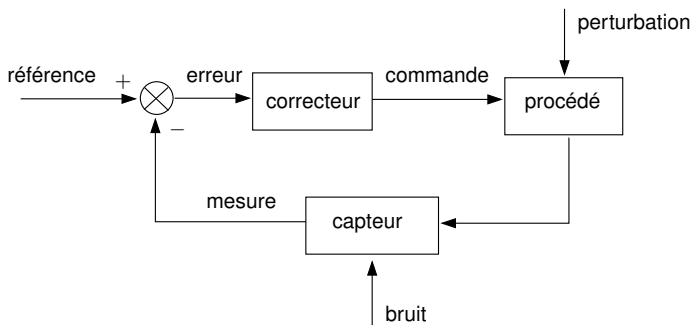
- Cahier des charges
- Correcteurs *PID*
- Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
- Méthode du lieu des racines
- Synthèse de correcteur par retour d'état

Notion de système asservi (1)

Schéma général

Schéma bouclé : *entrée* du procédé corrigée selon la différence entre *grandeur de référence* et *grandeur de mesure*

Correcteur : produit la *commande* du procédé.



Notion de système asservi (2)

Techniques d'asservissement envisagées...

... pour conférer au système le comportement dynamique et le régime permanent souhaités

Si l'état n'est pas complètement mesurable

Représentation externe du système par sa fonction de transfert pour effectuer la correction : techniques fréquentielles, placement de pôle, ou méthodes empiriques.

Si l'état est complètement mesurable

Utilisation prioritaire de la représentation d'état du système et correction de type *retour d'état*.

4 Systèmes asservis à temps continu

- Les différents types d'asservissement
- **Asservissement classique**
- Asservissement par retour d'état

5 Analyse des systèmes asservis à temps continu

- Stabilité
- Précision des systèmes à temps continu

6 Commande des systèmes à temps continu

- Cahier des charges
- Correcteurs *PID*
- Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
- Méthode du lieu des racines
- Synthèse de correcteur par retour d'état

Schéma d'un système asservi (1)

Schéma général d'un *asservissement à temps continu*

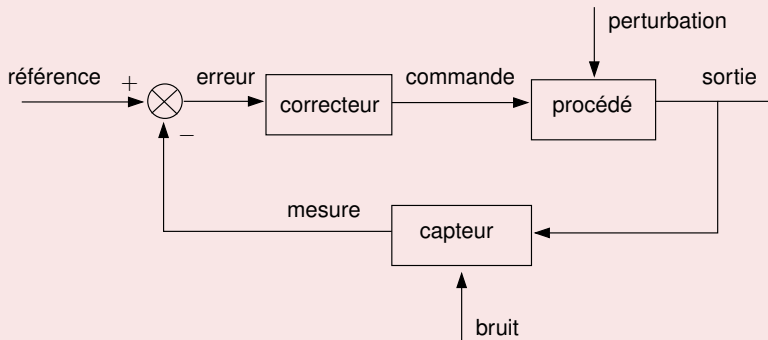


Schéma d'un système asservi (2)

Schéma bloc

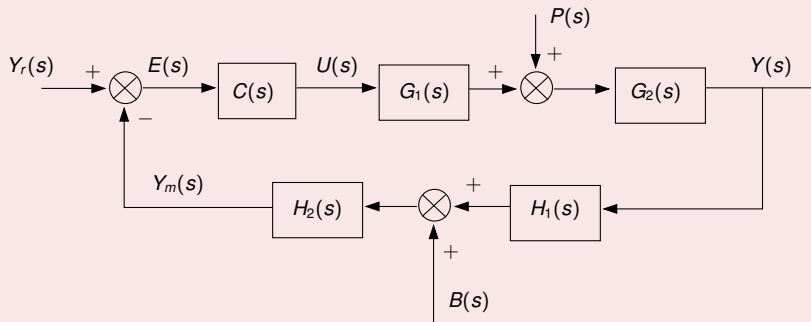
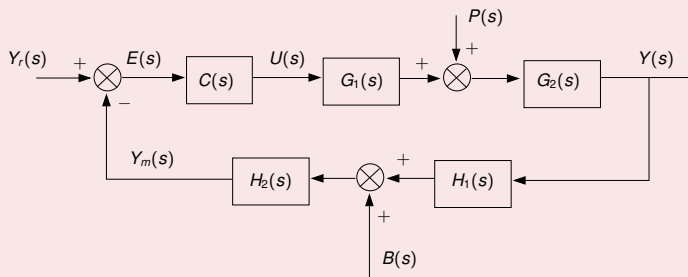


Schéma d'un système asservi (3)

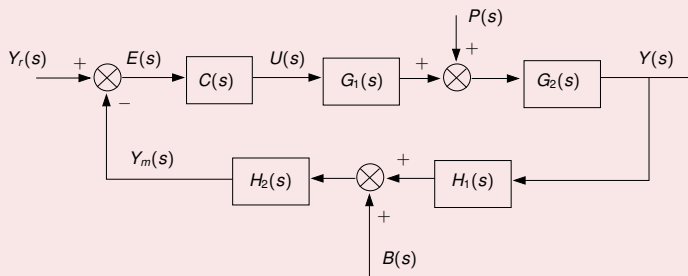
Schéma bloc



Vocabulaire et notations

Schéma d'un système asservi (3)

Schéma bloc

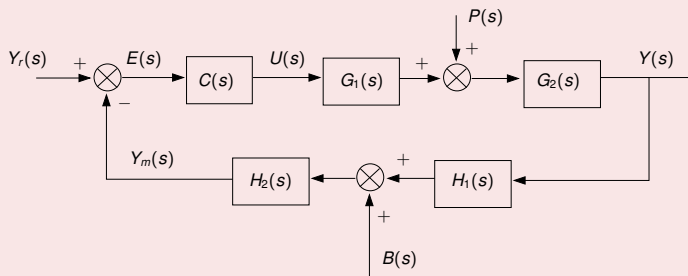


Vocabulaire et notations

$Y_r(s)$: référence (ou *grandeur de consigne*)

Schéma d'un système asservi (3)

Schéma bloc

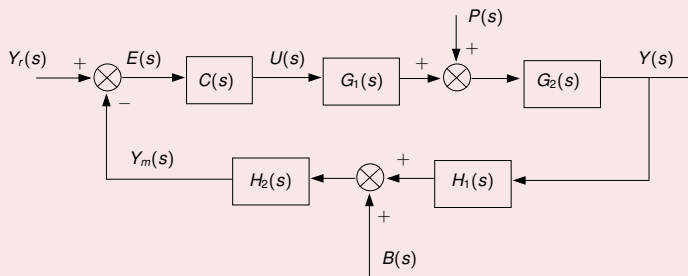


Vocabulaire et notations

$Y(s)$: sortie (ou grandeur réglée)

Schéma d'un système asservi (3)

Schéma bloc

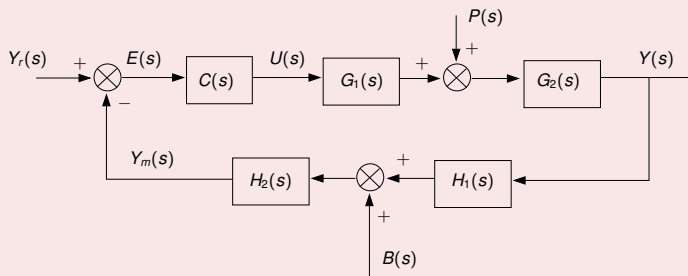


Vocabulaire et notations

$Y_m(s)$: mesure

Schéma d'un système asservi (3)

Schéma bloc

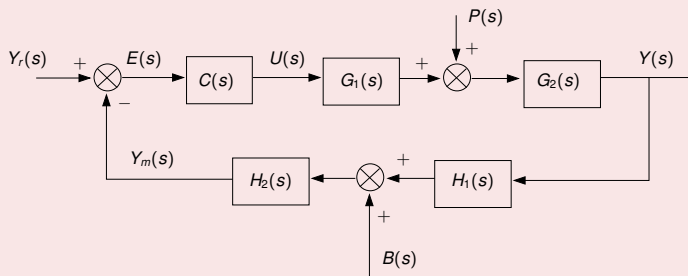


Vocabulaire et notations

$E(s)$: *erreur (ou écart) de l'asservissement*

Schéma d'un système asservi (3)

Schéma bloc

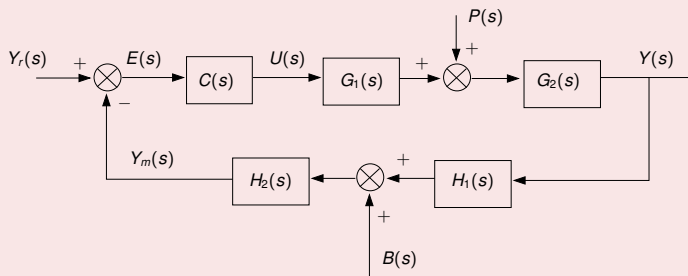


Vocabulaire et notations

$C(s)$: correcteur

Schéma d'un système asservi (3)

Schéma bloc

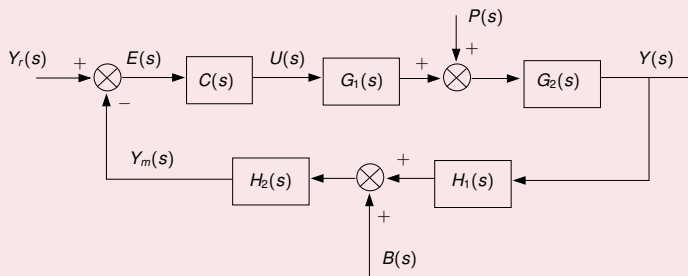


Vocabulaire et notations

$U(s)$: commande du procédé

Schéma d'un système asservi (3)

Schéma bloc

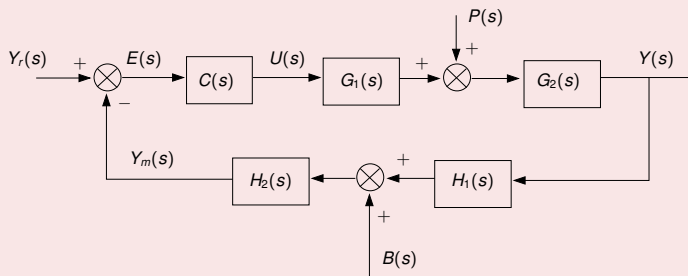


Vocabulaire et notations

$P(s)$: perturbation

Schéma d'un système asservi (3)

Schéma bloc

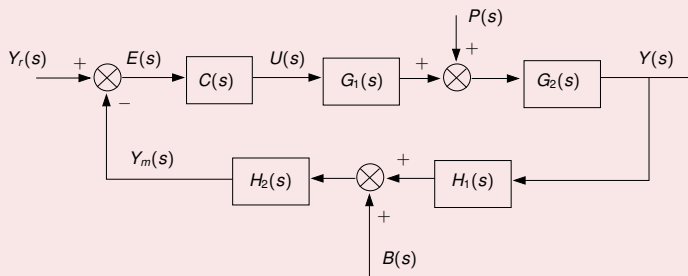


Vocabulaire et notations

$B(s)$: bruit de mesure

Schéma d'un système asservi (3)

Schéma bloc

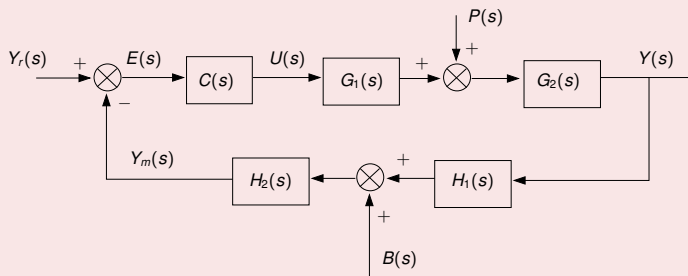


Vocabulaire et notations

$CG(s) = C(s)G_1(s)G_2(s)$: fonction de transfert de la *chaîne directe* (ou *chaîne d'action*)

Schéma d'un système asservi (3)

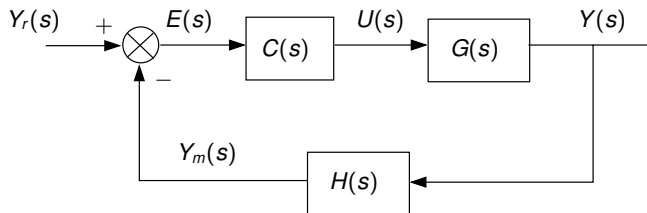
Schéma bloc



Vocabulaire et notations

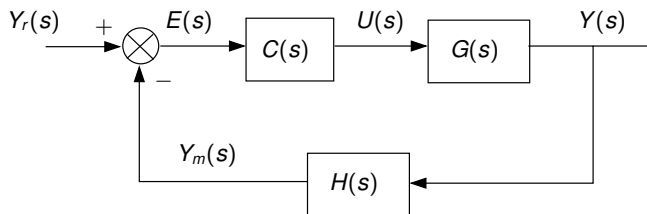
$H(s) = H_1(s) H_2(s)$: fonction de transfert de la *chaîne de retour* (ou *chaîne de contre-réaction*)

Fonction de transfert d'un système asservi (1)



Définitions

Fonction de transfert d'un système asservi (1)



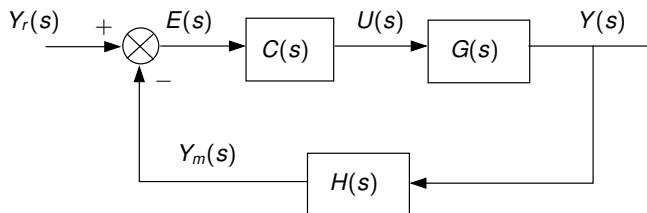
Définitions

Fonction de transfert en boucle ouverte du système :

$$FTBO : C(s)G(s)H(s),$$

notée $CGH(s)$

Fonction de transfert d'un système asservi (1)

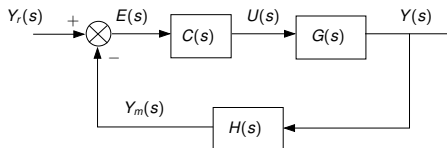


Définitions

Fonction de transfert en boucle fermée du système :

$$FTBF : \frac{Y(s)}{Y_r(s)}$$

Fonction de transfert d'un système asservi (2)



$$\begin{aligned}U(s) &= C(s)E(s), \\E(s) &= Y_r(s) - Y_m(s), \\Y_m(s) &= H(s)Y(s), \\Y(s) &= G(s)U(s).\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}U(s) &= C(s)(Y_r(s) - H(s)Y(s)), \\Y(s) &= CG(s)(Y_r(s) - H(s)Y(s)),\end{aligned}$$

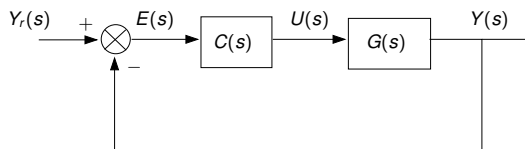
et finalement :

$$\frac{Y(s)}{Y_r(s)} = \frac{CG(s)}{1 + CGH(s)}.$$

Equation caractéristique

Equation des pôles : $1 + CGH(s) = 0$

Fonction de transfert d'un système asservi (3)



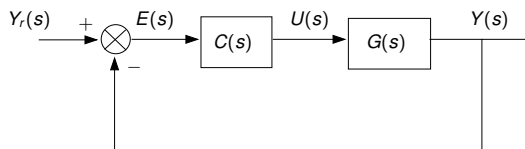
En notant :

$$CG(s) = \frac{N(s)}{D(s)},$$

on a :

$$\frac{Y(s)}{Y_r(s)} = \frac{CG(s)}{1 + CG(s)} = \frac{N(s)}{N(s) + D(s)}.$$

Fonction de transfert d'un système asservi (3)



Equation caractéristique

Equation des pôles : $N(s) + D(s) = 0$.

Influence des pôles et zéros de la BO sur les pôles de la BF.

Régulation de la vitesse du rotor d'un MCC

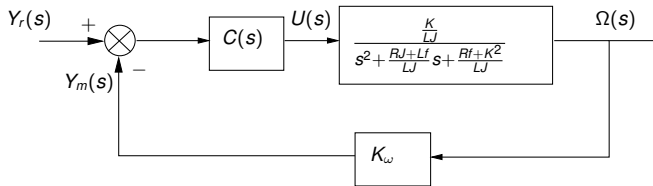
Commande = tension d'entrée y_r pour une vitesse de rotation désirée ω_r . Mesure = vitesse du rotor est mesurée par une

génératrice tachymétrique placée sur l'axe et qui délivre une tension y_m proportionnelle à la vitesse de rotation de l'axe.

Régulation de la vitesse du rotor d'un MCC

Commande = tension d'entrée y_r pour une vitesse de rotation désirée ω_r . Mesure = vitesse du rotor est mesurée par une

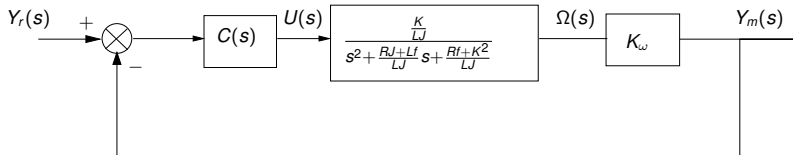
génératrice tachymétrique placée sur l'axe et qui délivre une tension y_m proportionnelle à la vitesse de rotation de l'axe.



Régulation de la vitesse du rotor d'un MCC

Commande = tension d'entrée y_r pour une vitesse de rotation désirée ω_r . Mesure = vitesse du rotor est mesurée par une

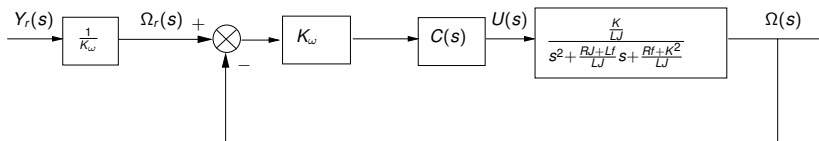
génératrice tachymétrique placée sur l'axe et qui délivre une tension y_m proportionnelle à la vitesse de rotation de l'axe.



Régulation de la vitesse du rotor d'un MCC

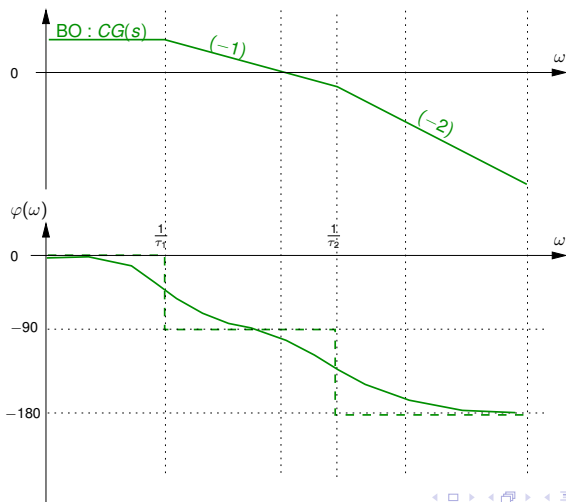
Commande = tension d'entrée y_r pour une vitesse de rotation désirée ω_r . Mesure = vitesse du rotor est mesurée par une

génératrice tachymétrique placée sur l'axe et qui délivre une tension y_m proportionnelle à la vitesse de rotation de l'axe.



Comportement fréquentiel d'un système asservi

$$\frac{Y(j\omega)}{Y_r(j\omega)} = \frac{CG(j\omega)}{1 + CGH(j\omega)} \rightarrow \begin{cases} \simeq CG(j\omega), & \text{si } CGH(j\omega) \ll 1, \\ \simeq \frac{1}{H(j\omega)}, & \text{si } CGH(j\omega) \gg 1. \end{cases}$$



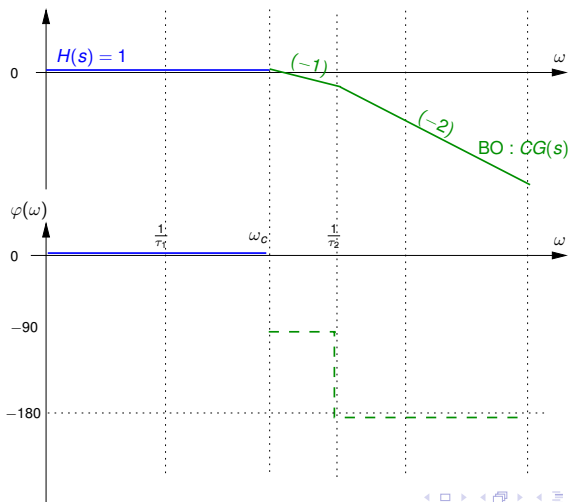
Comportement fréquentiel d'un système asservi

$$\frac{Y(j\omega)}{Y_r(j\omega)} = \frac{CG(j\omega)}{1 + CGH(j\omega)} \rightarrow \begin{cases} \simeq CG(j\omega), & \text{si } CGH(j\omega) \ll 1, \\ \simeq \frac{1}{H(j\omega)}, & \text{si } CGH(j\omega) \gg 1. \end{cases}$$



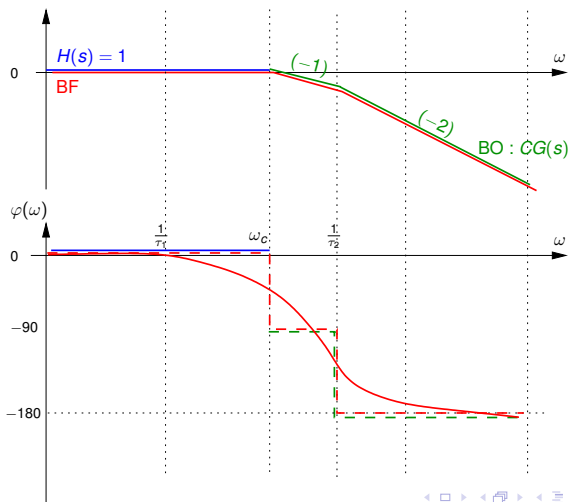
Comportement fréquentiel d'un système asservi

$$\frac{Y(j\omega)}{Y_r(j\omega)} = \frac{CG(j\omega)}{1 + CGH(j\omega)} \rightarrow \begin{cases} \simeq CG(j\omega), & \text{si } CGH(j\omega) \ll 1, \\ \simeq \frac{1}{H(j\omega)}, & \text{si } CGH(j\omega) \gg 1. \end{cases}$$



Comportement fréquentiel d'un système asservi

$$\frac{Y(j\omega)}{Y_r(j\omega)} = \frac{CG(j\omega)}{1 + CGH(j\omega)} \rightarrow \begin{cases} \simeq CG(j\omega), & \text{si } CGH(j\omega) \ll 1, \\ \simeq \frac{1}{H(j\omega)}, & \text{si } CGH(j\omega) \gg 1. \end{cases}$$



4 Systèmes asservis à temps continu

- Les différents types d'asservissement
- Asservissement classique
- Asservissement par retour d'état

5 Analyse des systèmes asservis à temps continu

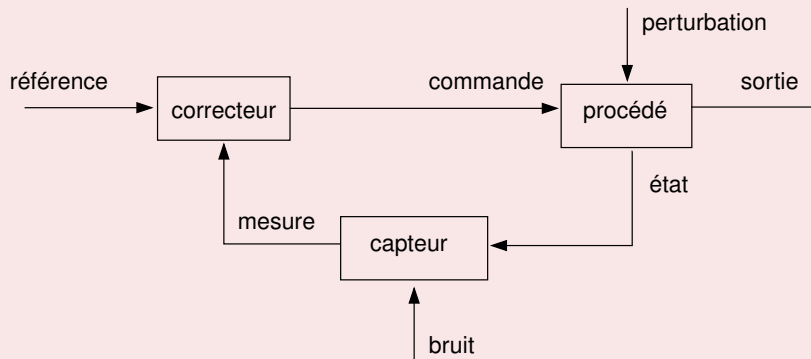
- Stabilité
- Précision des systèmes à temps continu

6 Commande des systèmes à temps continu

- Cahier des charges
- Correcteurs *PID*
- Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
- Méthode du lieu des racines
- Synthèse de correcteur par retour d'état

Schéma d'un système asservi par retour d'état

Schéma général d'un *asservissement par retour d'état*



Représentation d'état du système corrigé (1)

Retour d'état

Loi de commande u proportionnelle à l'état :

$$u = -Kx,$$

où : $K = (K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n)$ en monovariable.

Représentation d'état du système corrigé (1)

Retour d'état

Loi de commande u proportionnelle à l'état :

$$u = -Kx,$$

où : $K = (K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n)$ en monovariable.

Retour d'état et réglage dynamique

Nouveau modèle d'évolution :

$$\frac{dx}{dt} = Ax - BKx$$

Représentation d'état du système corrigé (1)

Retour d'état

Loi de commande u proportionnelle à l'état :

$$u = -Kx,$$

où : $K = (K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n)$ en monovariable.

Retour d'état et réglage dynamique

Nouveau modèle d'évolution :

$$\frac{dx}{dt} = (A - BK)x.$$

Choix de K : réglage du comportement dynamique du système.

Représentation d'état du système corrigé (2)

Retour d'état et référence

Problème : introduire la consigne dans la loi de commande.

Objectif : $y_{\infty} = y_r$ (sortie en régime permanent).

Représentation d'état du système corrigé (2)

Retour d'état et référence

Problème : introduire la consigne dans la loi de commande.

Objectif : $y_\infty = y_r$ (sortie en régime permanent).

Première modification de la loi initiale

Soient x_∞ et u_∞ les régimes permanents de x et u . La commande par retour d'état :

$$u - u_\infty = -K(x - x_\infty)$$

est telle que $u = u_\infty$ dès lors que $x = x_\infty$.

Représentation d'état du système corrigé (2)

Retour d'état et référence

Problème : introduire la consigne dans la loi de commande.

Objectif : $y_\infty = y_r$ (sortie en régime permanent).

Première modification de la loi initiale

Soient x_∞ et u_∞ les régimes permanents de x et u . La commande par retour d'état :

$$u - u_\infty = -K(x - x_\infty)$$

est telle que $u = u_\infty$ dès lors que $x = x_\infty$.

Reformulation du problème

Calculer x_∞ et u_∞ tels que $y_\infty = y_r$.

Représentation d'état du système corrigé (3)

Equations d'état du système en régime permanent :

$$\begin{aligned}0 &= Ax_{\infty} + Bu_{\infty}, \\ y_{\infty} &= Cx_{\infty} + Du_{\infty}.\end{aligned}$$

Représentation d'état du système corrigé (3)

Equations d'état du système en régime permanent :

$$\begin{aligned}0 &= Ax_{\infty} + Bu_{\infty}, \\ y_{\infty} &= Cx_{\infty} + Du_{\infty}.\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}x_{\infty} &= N_x y_{\infty}, \\ u_{\infty} &= N_u y_{\infty},\end{aligned}$$

Représentation d'état du système corrigé (3)

Equations d'état du système en régime permanent :

$$\begin{aligned}0 &= Ax_{\infty} + Bu_{\infty}, \\ y_{\infty} &= Cx_{\infty} + Du_{\infty}.\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}x_{\infty} &= N_x y_{\infty}, \\ u_{\infty} &= N_u y_{\infty},\end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_{\infty} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_u \end{pmatrix} y_{\infty}$$

Représentation d'état du système corrigé (3)

Equations d'état du système en régime permanent :

$$\begin{aligned}0 &= Ax_{\infty} + Bu_{\infty}, \\ y_{\infty} &= Cx_{\infty} + Du_{\infty}.\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}x_{\infty} &= N_x y_{\infty}, \\ u_{\infty} &= N_u y_{\infty},\end{aligned}$$

il vient :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_{\infty} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_u \end{pmatrix} y_{\infty}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_x \\ N_u \end{pmatrix}.$$

Représentation d'état du système corrigé (4)

Après inversion :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Représentation d'état du système corrigé (4)

Après inversion :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

l'équation initiale :

$$u = u_\infty - K(x - x_\infty)$$

Représentation d'état du système corrigé (4)

Après inversion :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

l'équation initiale :

$$u = u_\infty - K(x - x_\infty)$$

conduit donc à :

$$u = N_u y_\infty - K(x - N_x y_\infty).$$

Représentation d'état du système corrigé (4)

Après inversion :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

l'équation initiale :

$$u = u_\infty - K(x - x_\infty)$$

conduit donc à :

$$u = N_u y_\infty - K(x - N_x y_\infty).$$

On choisit donc la loi de commande :

$$u = N_u y_r - K(x - N_x y_r).$$

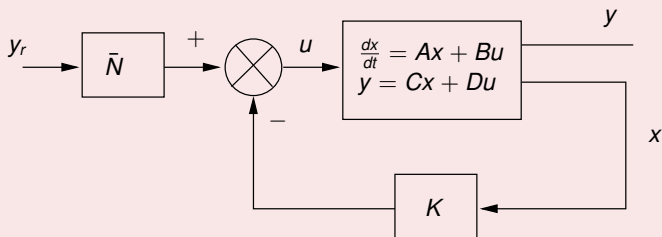
Représentation d'état du système corrigé (5)

Expression finale du retour d'état

On trouve :

$$u = -Kx + \bar{N}y_r,$$

avec $\bar{N} = N_u + KN_x$.

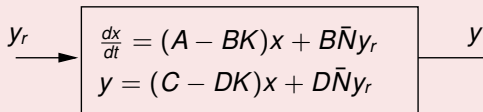


Représentation d'état du système corrigé (5)

Expression finale du retour d'état

Modèle d'état du système corrigé en boucle fermée :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (A - BK)x + B\bar{N}y_r, \\ y &= (C - DK)x + D\bar{N}y_r.\end{aligned}$$



Exemple de commande par retour d'état (1)

Asservissement de la vitesse d'un MCC par retour d'état

Hypothèse : il faut disposer de mesure de son état.

Rappel sur les modèles du MCC pour $y = \omega$:

- $x_1 = \omega$ et $x_2 = i$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u, \\ y &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- $x_1 = \omega$ et $x_2 = \frac{d\omega}{dt}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{Rf+K^2}{LJ} & -\frac{RJ+Lf}{LJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K}{LJ} \end{pmatrix} u, \\ y &= (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exemple de commande par retour d'état (1)

Asservissement de la vitesse d'un MCC par retour d'état

Hypothèse : il faut disposer de mesure de son état.

Rappel sur les modèles du MCC pour $y = \omega$:

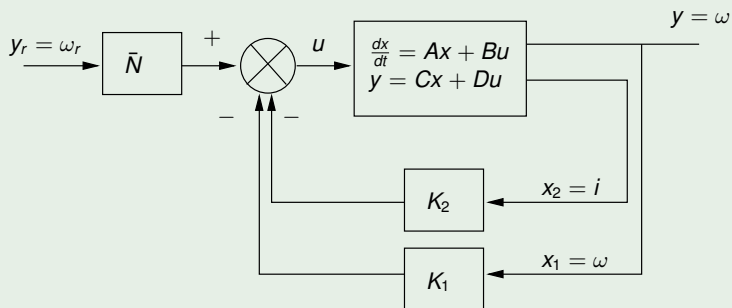
- $x_1 = \omega$ et $x_2 = i$
- $x_1 = \omega$ et $x_2 = \frac{d\omega}{dt}$

Technologie :

- mesure de la vitesse angulaire du rotor
- mesure du courant d'induit = réalisation du variateur
- mesure de l'accélération angulaire du rotor

Exemple de commande par retour d'état (2)

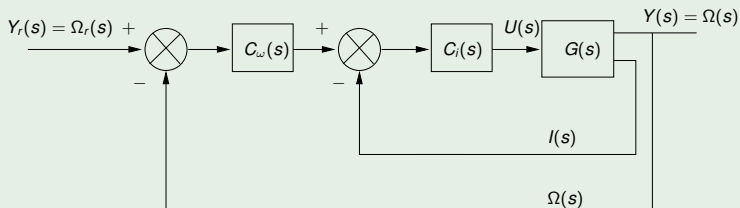
Asservissement de la vitesse d'un MCC par retour d'état



Retour d'état : $u = \bar{N}\omega_r - K_1\omega - K_2i$.

Exemple de commande par retour d'état (3)

Asservissement de la vitesse d'un MCC par boucles imbriquées



Boucles imbriquées : $U(s) = C_\omega(s)C_i(s)\Omega_r(s) - C_\omega(s)C_i(s)\Omega(s) - C_i(s)I(s)$.

Similitudes

Retour d'état : $u = \bar{N}\omega_r - K_1\omega - K_2i$.

Boucles imbriquées : $U(s) = C_\omega(s)C_i(s)\Omega_r(s) - C_\omega(s)C_i(s)\Omega(s) - C_i(s)I(s)$.

Exemple de commande par retour d'état (4)

Similitudes

Retour d'état : $u = \bar{N}\omega_r - K_1\omega - K_2i$.

Boucles imbriquées : $U(s) = C_\omega(s)C_i(s)\Omega_r(s) - C_\omega(s)C_i(s)\Omega(s) - C_i(s)I(s)$.

Avec :

$$C_\omega(s) = \frac{K_1}{K_2} \text{ et } C_i(s) = K_2$$

on a le retour d'état $U(s) = K_1\Omega_r(s) - K_1\Omega(s) - K_2I(s)$.

Exemple de commande par retour d'état (4)

Similitudes

Retour d'état : $u = \bar{N}\omega_r - K_1\omega - K_2i$.

Boucles imbriquées : $U(s) = C_\omega(s)C_i(s)\Omega_r(s) - C_\omega(s)C_i(s)\Omega(s) - C_i(s)I(s)$.

Avec :

$$C_\omega(s) = \frac{K_1}{K_2} \text{ et } C_i(s) = K_2$$

on a le retour d'état $U(s) = K_1\Omega_r(s) - K_1\Omega(s) - K_2I(s)$.

Exemple de commande par retour d'état (4)

Similitudes

Retour d'état : $u = \bar{N}\omega_r - K_1\omega - K_2i$.

Boucles imbriquées : $U(s) = C_\omega(s)C_i(s)\Omega_r(s) - C_\omega(s)C_i(s)\Omega(s) - C_i(s)I(s)$.

Avec :

$$C_\omega(s) = \frac{K_1}{K_2} \text{ et } C_i(s) = K_2$$

on a le retour d'état $U(s) = K_1\Omega_r(s) - K_1\Omega(s) - K_2I(s)$.

Asservissement de position du MCC

Même analogie entre asservissement de position par retour d'état et avec boucles imbriquées de courant, de position et tachymétrique (voir TP sur le MCC).

- 4 Systèmes asservis à temps continu
 - Les différents types d'asservissement
 - Asservissement classique
 - Asservissement par retour d'état
- 5 Analyse des systèmes asservis à temps continu
 - Stabilité
 - Précision des systèmes à temps continu
- 6 Commande des systèmes à temps continu
 - Cahier des charges
 - Correcteurs *PID*
 - Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
 - Méthode du lieu des racines
 - Synthèse de correcteur par retour d'état

- 4 Systèmes asservis à temps continu
 - Les différents types d'asservissement
 - Asservissement classique
 - Asservissement par retour d'état
- 5 Analyse des systèmes asservis à temps continu
 - **Stabilité**
 - Précision des systèmes à temps continu
- 6 Commande des systèmes à temps continu
 - Cahier des charges
 - Correcteurs *PID*
 - Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
 - Méthode du lieu des racines
 - Synthèse de correcteur par retour d'état

Généralités

Notions et critères de stabilité définis dans le cas général sont valables dans le cas d'un système asservi :

- calcul des pôles du système
- critère de Routh appliqué à la FTBF

Particularités

On dispose de plusieurs autres outils et résultats pour étudier la stabilité d'un système en boucle fermée **à partir du modèle de la boucle ouverte**.

Critère de Nyquist (1)

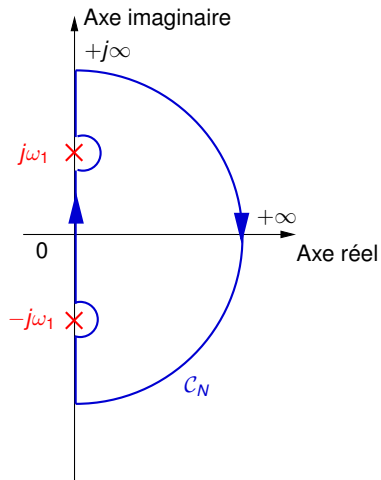
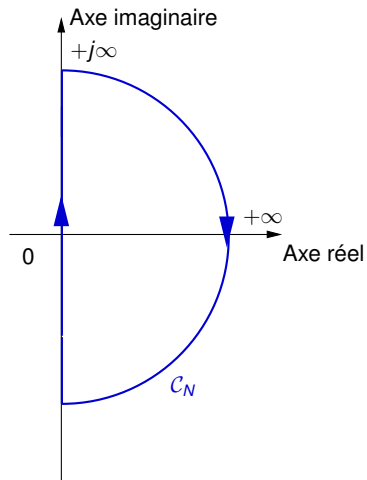
Principe

Critère de Nyquist : basé sur le tracé dans le diagramme de Nyquist du lieu de la réponse harmonique en boucle ouverte ou *lieu de Nyquist*.

Contour de Nyquist

Préalable au tracé du lieu de Nyquist : définition du *contour de Nyquist* C_N .

Critère de Nyquist (2)



Critère de Nyquist (3)

Principe du critère

Stabilité en BF : dépend de la manière dont le lieu de Nyquist entoure le point critique.

Critère de Nyquist

Soit un système possédant P pôles à partie réelle > 0 . Soit N le nombre de tours fait par le lieu de Nyquist autour du point critique, comptés positivement dans le sens trigonométrique.

Alors, le nombre de pôles instables du système en BF est :

$$Z = P - N.$$

Critère de Nyquist (3)

Principe du critère

Stabilité en BF : dépend de la manière dont le lieu de Nyquist entoure le point critique.

Précaution

Attention : les tours sont comptés dans le sens trigo alors que le C_N est orienté dans le sens anti-trigo.

Critère de Nyquist (3)

Principe du critère

Stabilité en BF : dépend de la manière dont le lieu de Nyquist entoure le point critique.

Corollaire

Système est stable en BF si le lieu fait P tours autour du point critique.

Cas du MCC

On s'intéresse à la position θ du rotor. Par intégration de la fonction de transfert en vitesse :

$$\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K_G}{s(1 + \tau_{el}s)(1 + \tau_{em}s)}$$

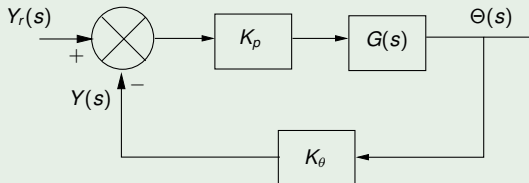
Critère de Nyquist (4)

Cas du MCC : hypothèses

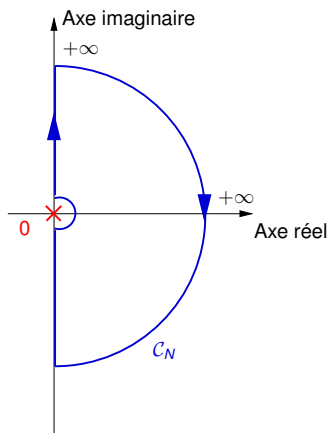
Modèle d'ordre deux :

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{K_G}{s(1 + \tau_{em}s)}$$

et correction proportionnelle $C(s) = K_p$ avec un capteur de position assimilé à un gain pur K_θ .



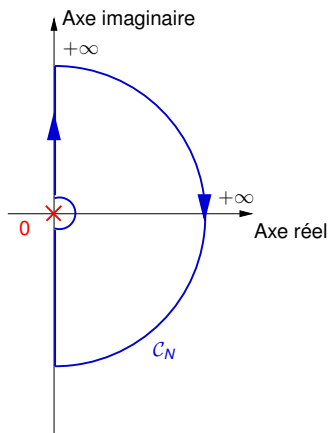
Critère de Nyquist (5)



Paramétrage du contour de Nyquist :

- partie du contour à partie imaginaire positive
- partie entourant l'origine : $s = \rho e^{j\alpha}$, avec α croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et ρ tendant vers 0 .
- points de l'axe imaginaire : $s = j\omega$ avec $\omega \in [\rho, +\infty[$
- fermeture du contour : $s = \rho e^{j\alpha}$ avec α décroissant de $\frac{\pi}{2}$ à 0 et ρ tendant vers l'infini.

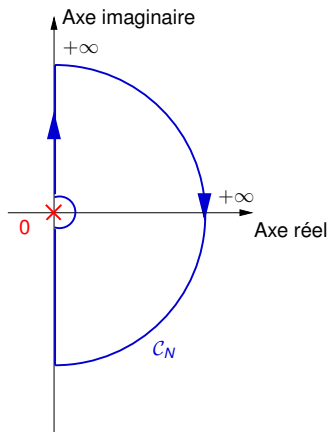
Critère de Nyquist (5)



Paramétrage du contour de Nyquist :

- partie du contour à partie imaginaire positive
- **partie entourant l'origine** : $s = \rho e^{j\alpha}$, avec α croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et ρ tendant vers 0 .
- points de l'axe imaginaire : $s = j\omega$ avec $\omega \in [\rho, +\infty[$
- fermeture du contour : $s = \rho e^{j\alpha}$ avec α décroissant de $\frac{\pi}{2}$ à 0 et ρ tendant vers l'infini.

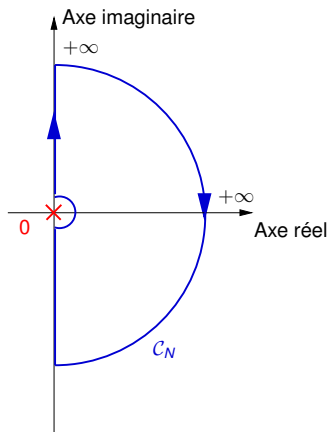
Critère de Nyquist (5)



Paramétrage du contour de Nyquist :

- partie du contour à partie imaginaire positive
- partie entourant l'origine : $s = \rho e^{j\alpha}$, avec α croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et ρ tendant vers 0 .
- **points de l'axe imaginaire** : $s = j\omega$ avec $\omega \in [\rho, +\infty[$
- fermeture du contour : $s = \rho e^{j\alpha}$ avec α décroissant de $\frac{\pi}{2}$ à 0 et ρ tendant vers l'infini.

Critère de Nyquist (5)



Paramétrage du contour de Nyquist :

- partie du contour à partie imaginaire positive
- partie entourant l'origine : $s = \rho e^{j\alpha}$, avec α croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et ρ tendant vers 0.
- points de l'axe imaginaire : $s = j\omega$ avec $\omega \in [\rho, +\infty[$
- **fermeture du contour** : $s = \rho e^{j\alpha}$ avec α décroissant de $\frac{\pi}{2}$ à 0 et ρ tendant vers l'infini.

Critère de Nyquist (6)

$$CGH(s) = \frac{K_{CGH}}{s(1+\tau_{em}s)} \text{ avec } K_{CGH} = K_p K_G K_\theta$$

Lieu de Nyquist

Critère de Nyquist (6)

$$CGH(s) = \frac{K_{CGH}}{s(1+\tau_{em}s)} \text{ avec } K_{CGH} = K_p K_G K_\theta$$

Lieu de Nyquist

Contour : partie du contour de Nyquist entourant l'origine : $s = \rho e^{j\alpha}$, avec α croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$ et ρ tendant vers 0

Lieu, image du contour :

$$CGH(s) = \frac{K_{CGH}}{\rho e^{j\alpha}} = r e^{j\beta},$$

avec $r = \frac{K_{CGH}}{\rho}$ tendant vers $+\infty$ et $\beta = -\alpha$ décroissant de 0 à $-\frac{\pi}{2}$.

Critère de Nyquist (6)

$$CGH(s) = \frac{K_{CGH}}{s(1+\tau_{em}s)} \text{ avec } K_{CGH} = K_p K_G K_\theta$$

Lieu de Nyquist

Contour : points de l'axe imaginaire $s = j\omega$ avec $\omega \in [\rho, +\infty[$

Lieu image du contour :

$$CGH(j\omega) = \frac{K_{CGH}}{j\omega(1+j\tau_{em}\omega)}$$

Pas de particularité remarquable : tracé à partir du calcul de la partie réelle et de la partie imaginaire de $CGH(j\omega)$ lorsque ω varie de 0^+ à $+\infty$:

$$\operatorname{Re}(CGH(j\omega)) = -\frac{K_{CGH}\tau_{em}}{1+\tau_{em}^2\omega^2}, \text{ et } \operatorname{Im}(CGH(j\omega)) = -\frac{K_{CGH}}{\omega(1+\tau_{em}^2\omega^2)}$$

Critère de Nyquist (6)

$$CGH(s) = \frac{K_{CGH}}{s(1+\tau_{em}s)} \text{ avec } K_{CGH} = K_p K_G K_\theta$$

Lieu de Nyquist

Contour : fermeture du contour $s = \rho e^{j\alpha}$ avec α décroissant de $\frac{\pi}{2}$ à 0 et ρ tendant vers l'infini.

Lieu, image du contour :

$$CGH(s) = \frac{K_{CGH}}{\tau_{em} \rho^2 e^{2j\alpha}},$$

réduit à l'origine car dans ce cas ρ tend vers $+\infty$.

Critère de Nyquist (7)

Lieu de Nyquist :

- Première partie :

$$CGH(s) = r e^{j\beta},$$

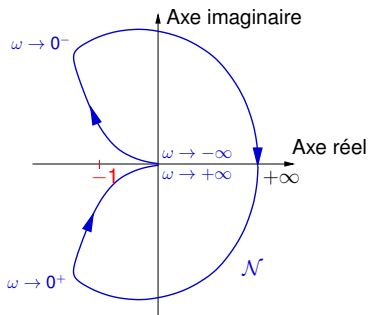
avec $r = \frac{K_{CGH}}{\rho}$ tendant vers $+\infty$ et $\beta = -\alpha$ décroissant de 0 à $-\frac{\pi}{2}$.

- Deuxième partie : lorsque ω varie de 0^+ à $+\infty$:

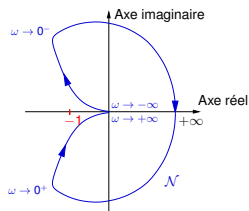
$$\operatorname{Re}(CGH(j\omega)) = -\frac{K_{CGH}\tau_{em}}{1 + \tau_{em}^2\omega^2},$$

$$\operatorname{Im}(CGH(j\omega)) = -\frac{K_{CGH}}{\omega(1 + \tau_{em}^2\omega^2)}.$$

- Troisième partie : réduite à l'origine.



Critère de Nyquist (8)



Application du critère de Nyquist

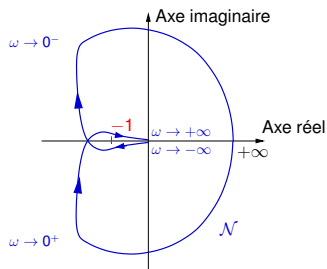
Pas de pôle instable : $P = 0$. Par ailleurs $N = 0$.

L'asservissement en position d'un MCC à l'aide d'un correcteur purement proportionnel est toujours stable, ce qui est normal puisque il s'agit d'un système du second ordre.

Critère de Nyquist (9)

Attention

Si on ne néglige plus le pôle électrique du système, pour K_p assez grand. . .

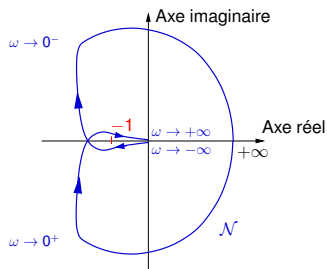


Critère de Nyquist (9)

Attention

Si on ne néglige plus le pôle électrique du système, pour K_p assez grand : $N = -2$ alors que l'on a toujours $P = 0$.

Alors $Z = 2$: le système en BF possède une paire de pôles instables (pôles complexes conjugués).



Critère du revers (1)

Hypothèses

Version simplifiée du critère de Nyquist, quand le *système* est à *minimum de phase* (pôles et zéros à partie réelle négative uniquement et pas de terme de retard).

Critère du revers

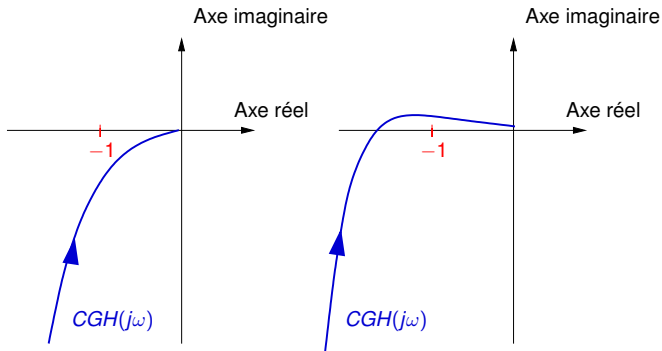
Soit un système à minimum de phase.

Le système est stable en BF si en parcourant le lieu de transfert de la boucle ouverte selon les ω croissants on laisse le point critique à gauche dans le plan de Nyquist (ou à droite dans le plan de Black).

Critère du revers (2)

Cas du MCC

Système à phase minimale : on applique le critère du revers.



Cas toujours stable
(modèle simplifié 2nd ordre)

Cas instable
(grand gain proportionnel
et pôle électrique pris en compte)

Marges de stabilité (1)

Marge de phase

$$M_\varphi = 180 + \text{Arg}\{CGH(j\omega_c)\},$$

où ω_c est telle que $|CGH(j\omega_c)|_{dB} = 0 \text{ dB}$.

Marge de gain

$$M_G = \frac{1}{|CGH(j\omega_{-180})|},$$

ou :

$$M_{GdB} = -20 \log_{10} |CGH(j\omega_{-180})|$$

avec ω_{-180} tel que $\text{Arg}\{CGH(j\omega_{-180})\} = -180 \text{ deg}$.

Marges de stabilité (2)

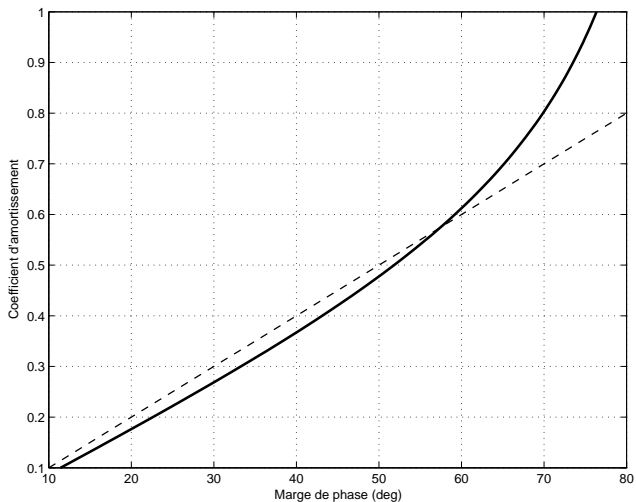
Théorème

Le système est stable en boucle fermée si la marge de phase (la marge de gain) du système en boucle ouverte est positive.

Stabilité relative

La valeur de la marge de phase permet donc de donner une image de la stabilité du système, comme l'amortissement.

Marges de stabilité (3)



Coefficient d'amortissement ξ vs marge de phase M_φ

Marges de stabilité (4)

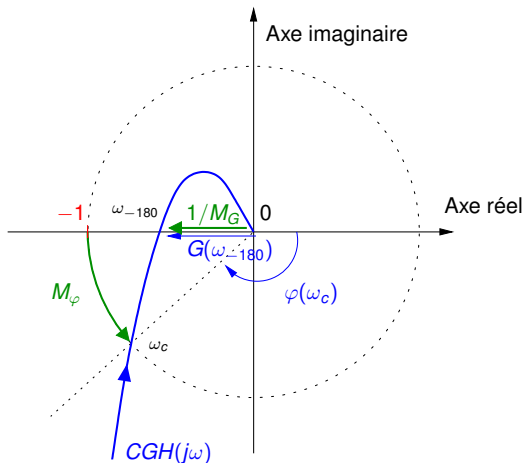
Marges de stabilité et diagrammes harmoniques

Les marges de stabilité peuvent être observées indifféremment dans l'un ou l'autre des diagrammes harmoniques.

Marges de stabilité (4)

Marges de stabilité et diagrammes harmoniques

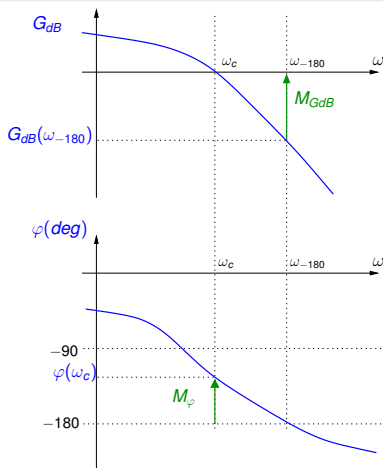
Les marges de stabilité peuvent être observées indifféremment dans l'un ou l'autre des diagrammes harmoniques.



Marges de stabilité (4)

Marges de stabilité et diagrammes harmoniques

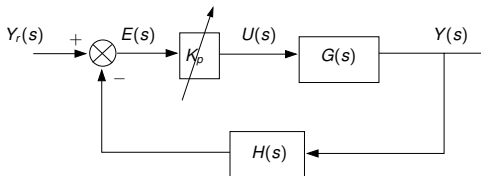
Les marges de stabilité peuvent être observées indifféremment dans l'un ou l'autre des diagrammes harmoniques.



Lieu des racines (1)

Définition

Lieu des racines (lieu d'Evans) : lieu des pôles de la fonction de transfert en BF lorsque le gain K_p de la chaîne directe varie de 0 à $+\infty$.



Lieu des racines et stabilité

Système stable en BF : pôles dans le demi-plan complexe gauche, pour K_p donné.

Lieu des racines (2)

Lieu des racines : construction

Soit m le degré du numérateur de la FTBO du système et n son ordre. Soit $N(s)$ le numérateur de la FTBO du système et $D(s)$ son dénominateur. Les propriétés suivantes du lieu des racines, permettent sa construction :

Lieu des racines (2)

Lieu des racines : construction

Soit m le degré du numérateur de la FTBO du système et n son ordre. Soit $N(s)$ le numérateur de la FTBO du système et $D(s)$ son dénominateur. Les propriétés suivantes du lieu des racines, permettent sa construction :

Règle n. 1 : Symétrie par rapport à l'axe réel ;

Lieu des racines (2)

Lieu des racines : construction

Soit m le degré du numérateur de la FTBO du système et n son ordre. Soit $N(s)$ le numérateur de la FTBO du système et $D(s)$ son dénominateur. Les propriétés suivantes du lieu des racines, permettent sa construction :

Règle n. 2 : n branches ;

- n points de départ, pour $K_p = 0$, confondus avec les pôles de la FTBO ;
- m points d'arrivée, pour $K_p = +\infty$, confondus avec les zéros de la FTBO.

Lieu des racines : construction

Soit m le degré du numérateur de la FTBO du système et n son ordre. Soit $N(s)$ le numérateur de la FTBO du système et $D(s)$ son dénominateur. Les propriétés suivantes du lieu des racines, permettent sa construction :

Règle n. 3 : $n - m$ branches infinies :

- ces branches donnent $n - m$ asymptotes faisant des angles $\beta_\lambda = \frac{2\lambda+1}{n-m}\pi$, avec $\lambda = 0, 1, \dots, n - m - 1$ avec l'horizontale ;
- intersection des asymptotes avec l'axe réel au point d'affixe $\delta = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}$.

Lieu des racines (2)

Lieu des racines : construction

Soit m le degré du numérateur de la FTBO du système et n son ordre. Soit $N(s)$ le numérateur de la FTBO du système et $D(s)$ son dénominateur. Les propriétés suivantes du lieu des racines, permettent sa construction :

Règle n. 4 : Branches du lieu appartenant à l'axe réel : un point d'affixe réelle appartient au lieu si le nombre de pôles et zéros réels de la FTBO situés à sa droite est impair ;

Lieu des racines (2)

Lieu des racines : construction

Soit m le degré du numérateur de la FTBO du système et n son ordre. Soit $N(s)$ le numérateur de la FTBO du système et $D(s)$ son dénominateur. Les propriétés suivantes du lieu des racines, permettent sa construction :

Règle n. 5 : Intersections du lieu avec l'axe réel : un point d'affixe réelle x est un point potentiel de séparation si :

$$\frac{1}{N(s)} \frac{dN(s)}{ds} \Big|_{s=x} = \frac{1}{D(s)} \frac{dD(s)}{ds} \Big|_{s=x} .$$

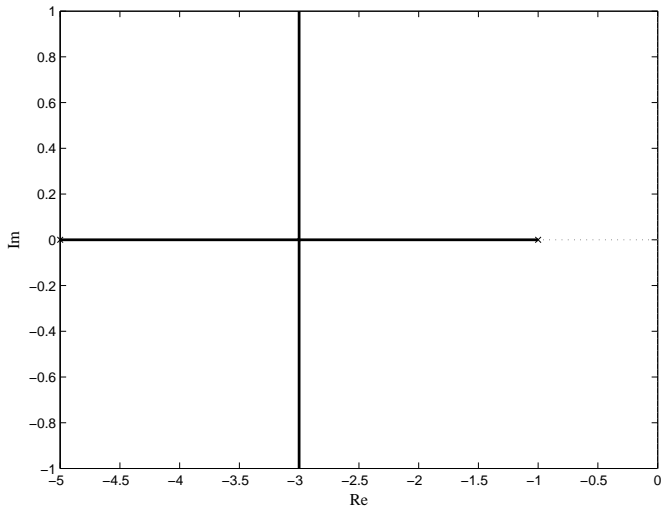
Lieu des racines d'un système du 2nd ordre, en boucle fermé

On s'intéresse au lieu des racines du procédé de fonction de transfert :

$$G_2(s) = \frac{1}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

en boucle fermée, le retour étant unitaire.

Lieu des racines



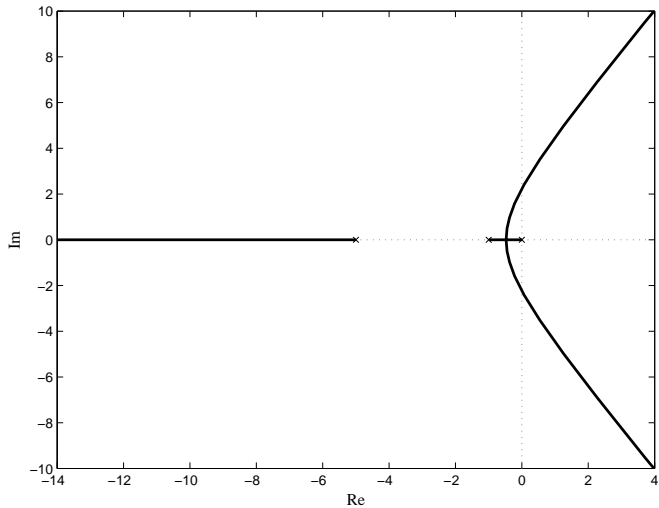
Lieu des racines d'un système du 3ème ordre, en boucle fermé

On s'intéresse au lieu des racines du procédé de fonction de transfert :

$$G_3(s) = \frac{1}{s(s - p_1)(s - p_2)}$$

en boucle fermée, le retour étant unitaire.

Lieu des racines



- 4 Systèmes asservis à temps continu
 - Les différents types d'asservissement
 - Asservissement classique
 - Asservissement par retour d'état

- 5 Analyse des systèmes asservis à temps continu
 - Stabilité
 - Précision des systèmes à temps continu

- 6 Commande des systèmes à temps continu
 - Cahier des charges
 - Correcteurs *PID*
 - Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
 - Méthode du lieu des racines
 - Synthèse de correcteur par retour d'état

Précision (1)

Précision statique

La *précision statique* du système est caractérisée par l'erreur en régime permanent en réponse à un échelon.

Cette erreur est appelée *erreur statique* (ou *erreur de position*). D'après le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s).$$

Précision dynamique

On parlera de *précision dynamique* dès que l'entrée du système évolue de manière continue dans le temps : par exemple on désigne par *erreur de vitesse* la valeur de l'erreur quand l'entrée du système est une rampe.

Précision (2)

Sans perturbation ni bruit de mesure, l'expression de l'erreur est :

$$E(s) = Y_r(s) - H(s)Y(s),$$

et donc :

$$E(s) = Y_r(s) - \frac{CGH(s)Y_r(s)}{1 + CGH(s)}.$$

Finalement :

$$E(s) = \frac{Y_r(s)}{1 + CGH(s)}.$$

Précision (3)

L'expression générale de l'erreur d'un système asservi est :

$$\varepsilon_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s Y_r(s)}{1 + CGH(s)}$$

Avec :

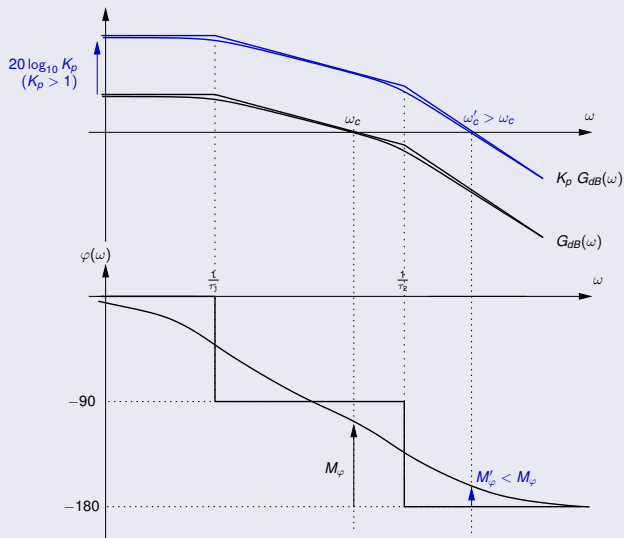
$$CGH(s) = \frac{K}{s^c} \frac{1 + \beta_1 s + \dots}{1 + \alpha_1 s + \dots}$$

On établit le tableau suivant :

entrée	échelon $Y_r = \frac{E_0}{s}$	rampe $Y_r = \frac{V_0}{s^2}$
classe 0	$\frac{E_0}{1 + K}$	∞
classe 1	0	$\frac{V_0}{K}$
classe 2	0	0

Précision (4)

Dualité stabilité-précision



- 4 Systèmes asservis à temps continu
 - Les différents types d'asservissement
 - Asservissement classique
 - Asservissement par retour d'état

- 5 Analyse des systèmes asservis à temps continu
 - Stabilité
 - Précision des systèmes à temps continu

- 6 Commande des systèmes à temps continu
 - Cahier des charges
 - Correcteurs *PID*
 - Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
 - Méthode du lieu des racines
 - Synthèse de correcteur par retour d'état

- 4 Systèmes asservis à temps continu
 - Les différents types d'asservissement
 - Asservissement classique
 - Asservissement par retour d'état

- 5 Analyse des systèmes asservis à temps continu
 - Stabilité
 - Précision des systèmes à temps continu

- 6 Commande des systèmes à temps continu
 - **Cahier des charges**
 - Correcteurs *PID*
 - Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
 - Méthode du lieu des racines
 - Synthèse de correcteur par retour d'état

Problème posé ?

La commande $u(t)$ d'un système à temps continu peut être modifiée en asservissant ce système à l'aide d'un correcteur.

Les paramètres de réglages sont :

- la forme du correcteur :
 - série
 - boucle interne
 - retour d'état
 - *etc.*
- les paramètres du correcteur :
 - réglage des actions proportionnelle, intégrale et dérivée
 - réglage d'un correcteur par retour d'état

Cahier des charges

Problème posé sous forme d'un *cahier des charges* (faisable) = ensemble de contraintes à satisfaire

Exemples :

- dépassement maximal
- précision statique ou dynamique
- temps de réponse
- bande passante
- *etc.*

Caractéristiques classiques d'un bon asservissement

Stabilité :

- système stable
- amortissement maîtrisé
- $M_\varphi \simeq 50$ à 70 deg
- $\xi \simeq 0,5$ à $0,8$

Précision : selon la classe ou le gain du système (le cas échéant ajout d'une ou plusieurs intégrations)

Rapidité : rapidité et bande passante sont liées (pulsation de coupure élevée, système rapide)

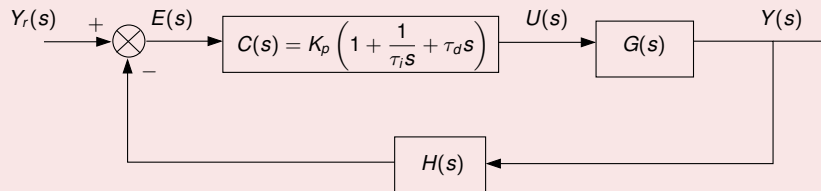
- 4 Systèmes asservis à temps continu
 - Les différents types d'asservissement
 - Asservissement classique
 - Asservissement par retour d'état

- 5 Analyse des systèmes asservis à temps continu
 - Stabilité
 - Précision des systèmes à temps continu

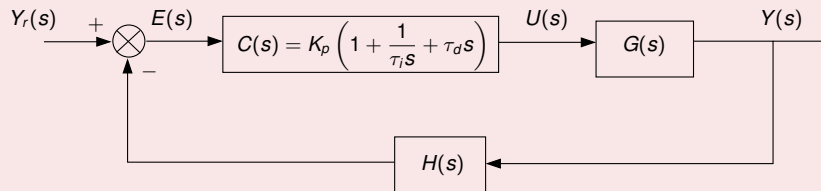
- 6 Commande des systèmes à temps continu
 - Cahier des charges
 - **Correcteurs *PID***
 - Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
 - Méthode du lieu des racines
 - Synthèse de correcteur par retour d'état

Correcteurs PID : introduction

Forme idéale du PID



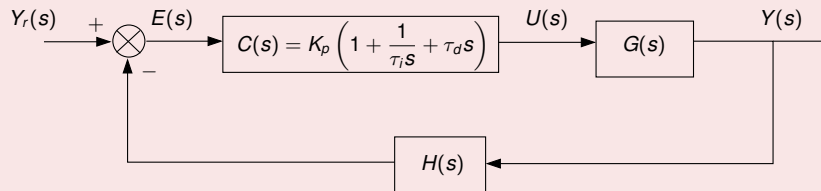
Forme idéale du PID



Action proportionnelle :

- précision améliorée / stabilité diminuée
- temps de montée réduit et plus de dépassement
- temps de réponse pas forcément diminué

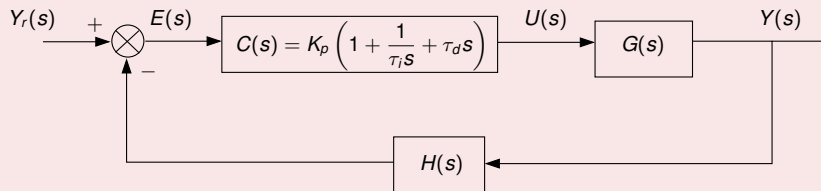
Forme idéale du PID



Action intégrale :

- classe du système augmentée : précision améliorée
- marge de phase diminuée de 90 *deg* par l'ajout d'une intégration pure
- saturation : dispositif d'anti-saturation

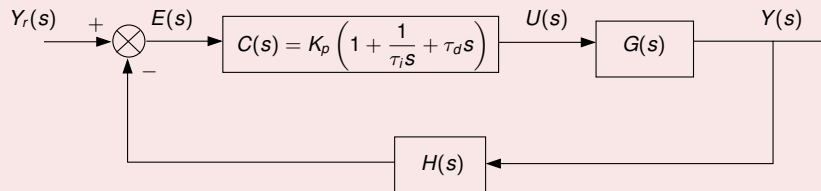
Forme idéale du PID



Action dérivée :

- augmentation de la bande passante du système
- augmentation de la stabilité, à bande passante égale
- correcteur dérivé non causal : correction approchée, par avance de phase

Forme idéale du PID



Actions combinées :

- P = proportionnel
- PI = proportionnel et intégral (ou retard de phase)
- PD = proportionnel et dérivé (ou avance de phase)
- PID = proportionnel, intégral et dérivé

Correcteur PI

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) = \frac{K_p(1 + \tau_i s)}{\tau_i s}.$$

Avantages :

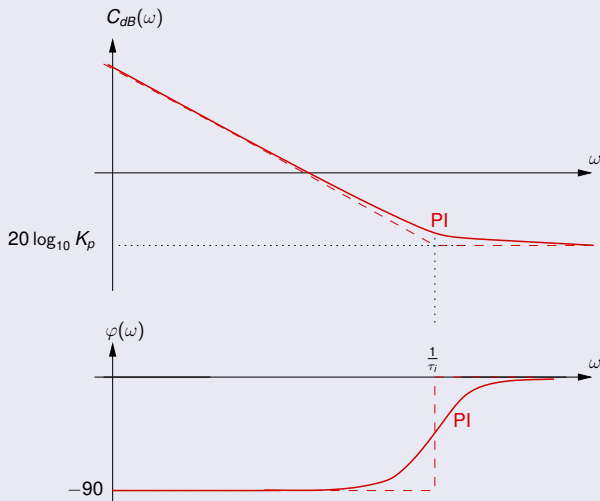
- intégration : *convient donc bien lorsque l'on souhaite annuler l'erreur statique d'un système de classe 0*
- correcteur le plus utilisé

Inconvénient :

- action intégrale : saturation éventuelle de la commande

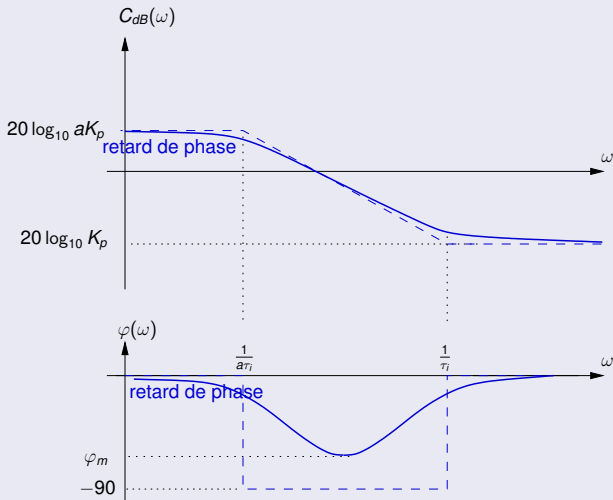
Correcteur PI

$$C(s) = K_p \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}$$



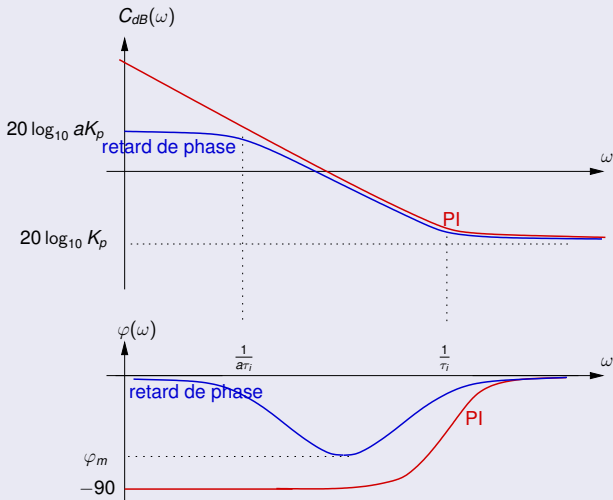
Correcteur à retard de phase

$$C(s) = aK_p \frac{1 + \tau_i s}{1 + a\tau_i s}, \text{ avec } a > 1$$



Comparaison correcteur PI et correcteur à retard de phase

$C(s) = aK_p \frac{1+\tau_i s}{1+a\tau_i s}$, avec $a > 1 \rightarrow$ PI approché, si $a \gg 1$



Adéquation correcteurs/systèmes à asservir (2)

Correcteur à avance de phase et correcteur PD

$$C(s) = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + a \tau_d s} \quad (a < 1) \text{ et } C(s) = K_p (1 + \tau_d s)$$

Avantages :

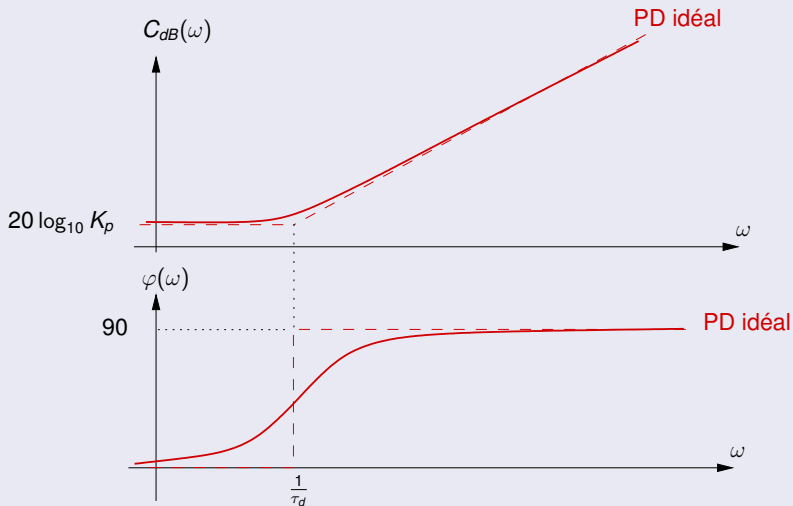
- augmentation de la phase dans une certaine bande de fréquence
- système corrigé plus stable : *convient donc bien pour la correction des systèmes peu stables* (systèmes de classe supérieure ou égale à un)

Inconvénient :

- PD idéal non causal : non réalisable physiquement

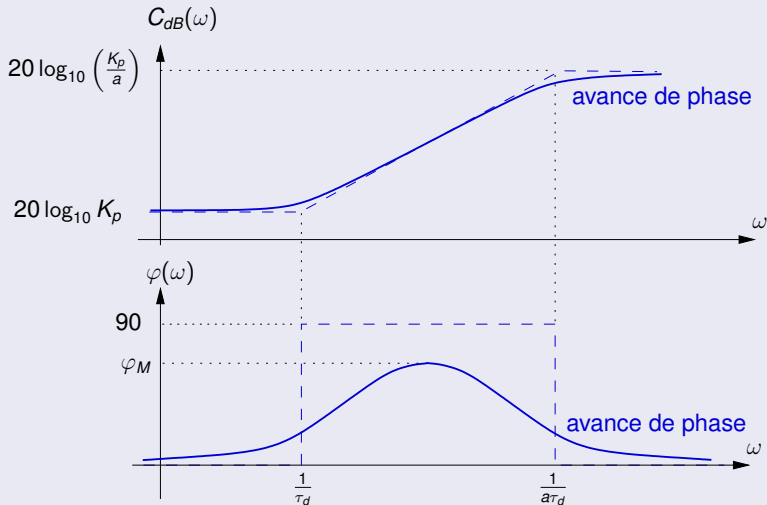
Correcteur PD

$$C(s) = K_p (1 + \tau_d s)$$



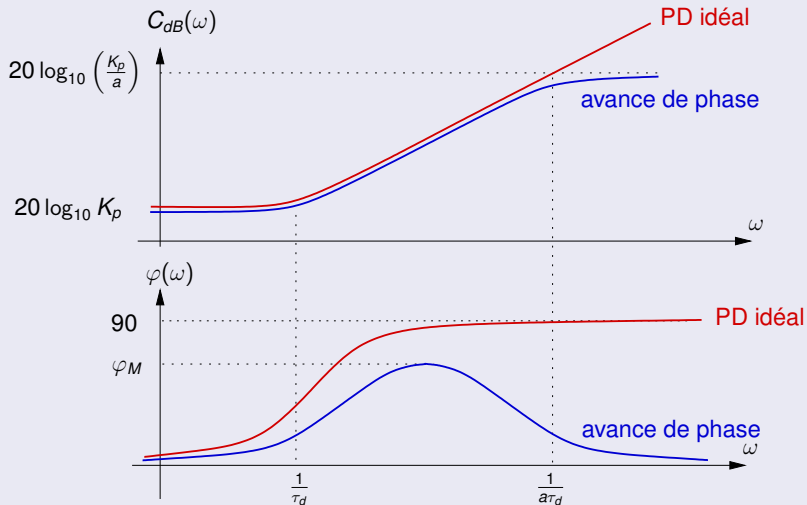
Correcteur à avance de phase

$$C(s) = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + a \tau_d s}, \text{ avec } a < 1$$



Comparaison correcteur à avance de phase et PD

$$C(s) = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + a \tau_d s}, \text{ avec } a < 1 \rightarrow \text{PD approché, si } a \ll 1$$



Adéquation correcteurs/systèmes à asservir (3)

Correcteur à avance de phase : caractéristiques

Avance de phase maximale telle que :

$$\sin \varphi_M = \frac{1 - a}{1 + a} \text{ à } \omega_M = \frac{1}{\sqrt{a}\tau_d}.$$

Exemple : $a = 0,1 \rightarrow \varphi_M = 54,9 \text{ deg}$

Correcteur à avance de phase : réglage

Calcul de a :

$$a = \frac{1 - \sin \varphi_M}{1 + \sin \varphi_M}$$

Calcul de τ_d :

$$\tau_d = \frac{1}{\sqrt{a}\omega_M}.$$

Adéquation correcteurs/systèmes à asservir (4)

Correcteur à avance et retard de phase

$$C(s) = bK_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + a\tau_d s} \frac{1 + \tau_i s}{1 + b\tau_i s},$$

avec $a < 1$ et $b > 1$.

Intérêt

Ce correcteur est bien évidemment plus général que les correcteurs précédents. Il a vocation à corriger des systèmes plus délicats à régler. Il n'est cependant pas nécessaire d'utiliser ce type de correcteur si le cahier des charges peut être rempli par un des correcteurs précédemment évoqués.

Approche le correcteur PID idéal.

- 4 Systèmes asservis à temps continu
 - Les différents types d'asservissement
 - Asservissement classique
 - Asservissement par retour d'état

- 5 Analyse des systèmes asservis à temps continu
 - Stabilité
 - Précision des systèmes à temps continu

- 6 Commande des systèmes à temps continu
 - Cahier des charges
 - Correcteurs *PID*
 - **Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur**
 - Méthode du lieu des racines
 - Synthèse de correcteur par retour d'état

Correction PI

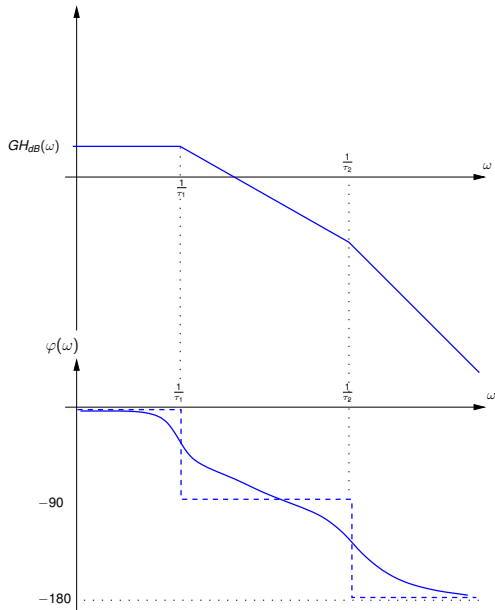
Réglage d'un correcteur PI :

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) = \frac{K_p(1 + \tau_i s)}{\tau_i s}.$$

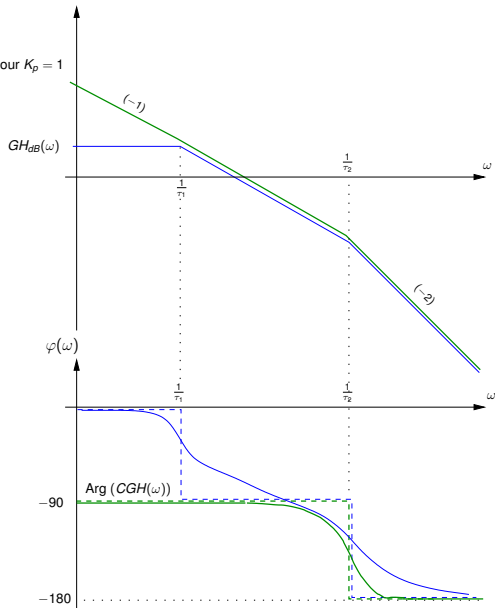
en utilisant le diagramme de Bode.

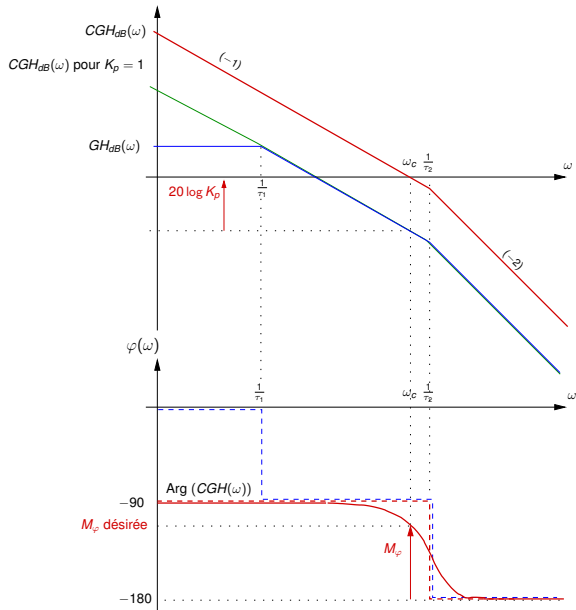
Hypothèse

Système de classe zéro avec deux pôles réels, associés aux constantes de temps τ_1 et τ_2 , $\tau_1 \gg \tau_2$.



$CGH_{dB}(\omega)$ pour $K_p = 1$





Synthèse de correcteur PI

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$$

Cahier des charges :

- erreur statique nulle
- coefficient d'amortissement de 0,7

Méthodes harmoniques : correction à avance de phase

Correction à avance de phase

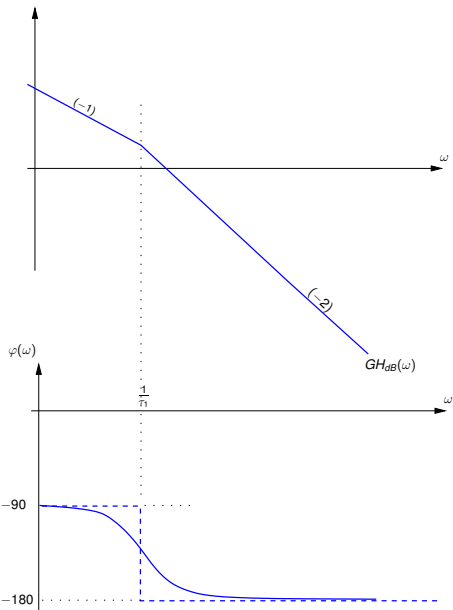
Réglage d'un correcteur PD approché :

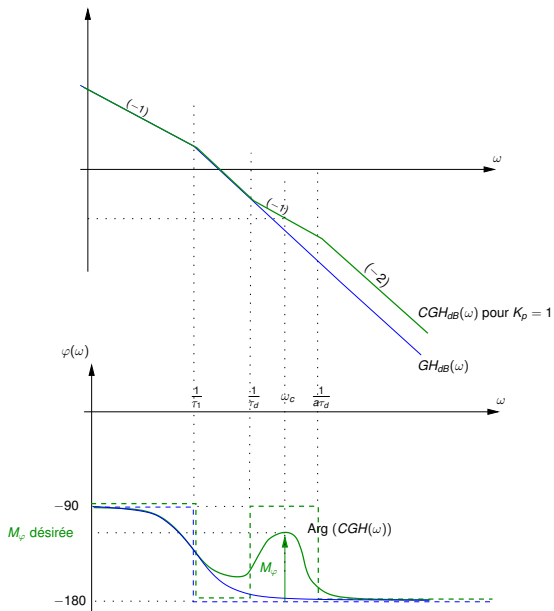
$$C(s) = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + a\tau_d s}$$

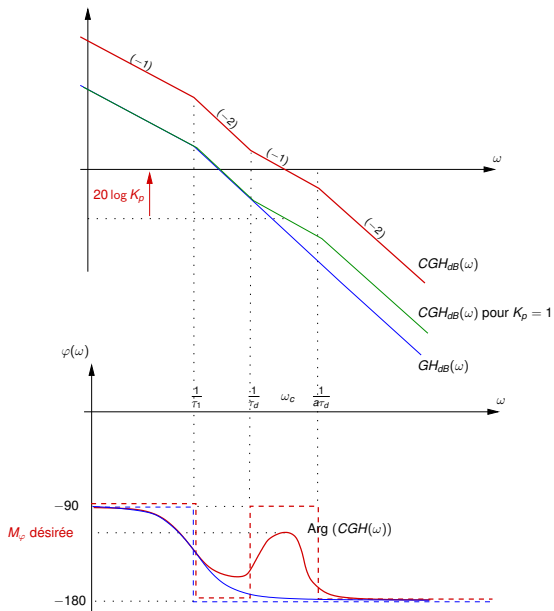
en utilisant le diagramme de Bode.

Hypothèse

Système est de classe 1 avec un pôle réel, associé à la constante de temps τ_1 .







Synthèse de correcteur à avance de phase

$$G(s) = \frac{150}{s(s+5)}$$

Cahier des charges :

- erreur statique nulle
- marge de phase de 60 *deg*
- bande passante 10 *rad/s*

- 4 Systèmes asservis à temps continu
 - Les différents types d'asservissement
 - Asservissement classique
 - Asservissement par retour d'état

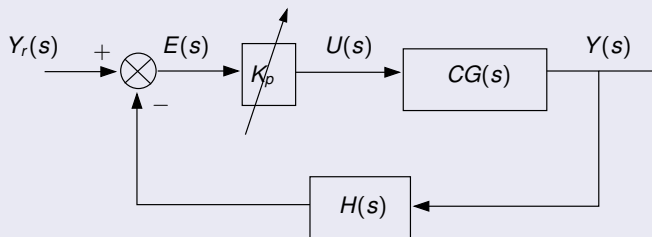
- 5 Analyse des systèmes asservis à temps continu
 - Stabilité
 - Précision des systèmes à temps continu

- 6 **Commande des systèmes à temps continu**
 - Cahier des charges
 - Correcteurs *PID*
 - Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
 - **Méthode du lieu des racines**
 - Synthèse de correcteur par retour d'état

Méthode du lieu des racines (1)

Interprétation pour la correction des systèmes

Lieu des racines = lieu des pôles de la FTBO, lorsque le gain de la chaîne directe varie.

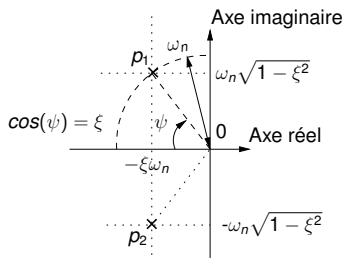


Synthèse par placement de pôles et zéros

Problème de synthèse = obtention des pôles et zéros conférant au système le comportement dynamique souhaité, généralement de type second ordre :

- choix de pôles et zéros compensant les pôles présents dans la FTBO
- choix de pôles et zéros imposant la nouvelle dynamique du système
- réglage du gain

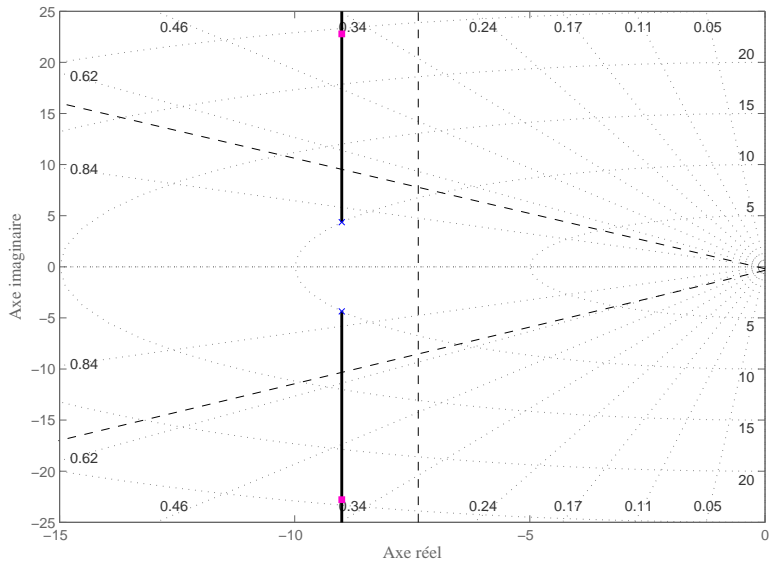
Méthode du lieu des racines (3)



Utilisation des courbes caractéristiques pour un système équivalent ordre 2 pseudo-oscillant :

- courbes de même amortissement
- courbes de même temps de réponse
- courbes de même bande passante

Lieu des racines



Principe de compensation : précautions !

Tous les systèmes ne peuvent pas nécessairement être transformés en système du second ordre.

Principe de compensation : précautions !

Tous les systèmes ne peuvent pas nécessairement être transformés en système du second ordre.

Certaines compensations doivent être évitées :

$$\frac{s - (p_i + \Delta p_i)}{s - p_i} = 1 - \frac{\Delta p_i}{s - p_i}.$$

Principe de compensation : précautions !

Tous les systèmes ne peuvent pas nécessairement être transformés en système du second ordre.

Certaines compensations doivent être évitées :

$$\frac{s - (p_i + \Delta p_i)}{s - p_i} = 1 - \frac{\Delta p_i}{s - p_i}.$$

- on ne compense jamais un pôle à partie réelle positive

Principe de compensation : précautions !

Tous les systèmes ne peuvent pas nécessairement être transformés en système du second ordre.

Certaines compensations doivent être évitées :

$$\frac{s - (p_i + \Delta p_i)}{s - p_i} = 1 - \frac{\Delta p_i}{s - p_i}.$$

- on ne compense jamais un pôle à partie réelle positive
- on ne compense pas autant que possible une paire de pôles très oscillants

Synthèse de correcteur PI

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+5)}$$

Cahier des charges :

- erreur statique nulle
- coefficient d'amortissement de 0,7

Synthèse de correcteur à avance de phase

$$G(s) = \frac{150}{s(s+5)}$$

Cahier des charges :

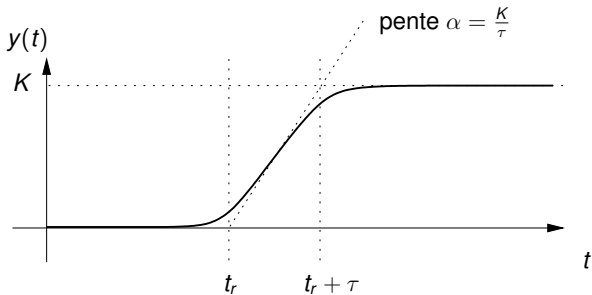
- erreur statique nulle
- marge de phase de 60 *deg*
- bande passante 10 *rad/s*

Méthodes de Ziegler-Nichols

Essais :

- identification de la réponse indicielle
- identification du régime critique

Synthèse sous forme de tableaux.



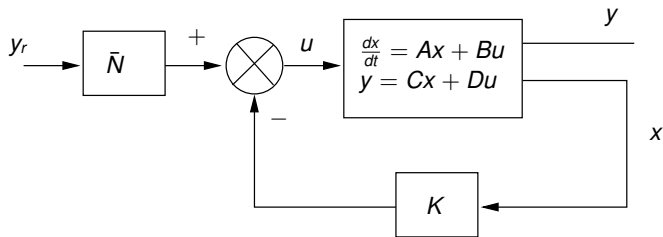
type de correcteur	coefficients du correcteur		
	K_p	τ_i	τ_d
P	$\frac{1}{\alpha t_r}$		
PI	$\frac{0,9}{\alpha t_r}$	$\frac{t_r}{0,3}$	
PID	$\frac{1,2}{\alpha t_r}$	$2t_r$	$0,5t_r$

- 4 Systèmes asservis à temps continu
 - Les différents types d'asservissement
 - Asservissement classique
 - Asservissement par retour d'état

- 5 Analyse des systèmes asservis à temps continu
 - Stabilité
 - Précision des systèmes à temps continu

- 6 **Commande des systèmes à temps continu**
 - Cahier des charges
 - Correcteurs *PID*
 - Méthodes harmoniques de synthèse de correcteur
 - Méthode du lieu des racines
 - **Synthèse de correcteur par retour d'état**

Commande par retour d'état (1)



Commande par retour d'état

Représentation d'état en boucle fermée :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (A - BK)x + B\bar{N}y_r, \\ y &= (C - DK)x + D\bar{N}y_r.\end{aligned}$$

Commande par retour d'état (2)

Commande par retour d'état

Représentation d'état en boucle fermée :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= (A - BK)x + B\bar{N}y_r, \\ y &= (C - DK)x + D\bar{N}y_r.\end{aligned}$$

Equation caractéristique

$\det(sI - (A - BK)) = 0$: degré n paramétrée par les n gains K_1, K_2, \dots, K_n .

Problème : placement de n pôles p_1, p_2, \dots, p_n donnant l'équation caractéristique : $(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0$.

Commandabilité et retour d'état

Si un système linéaire invariant est commandable, alors il existe toujours un choix de gains permettant de placer l'ensemble des pôles du système par un retour d'état.

Par ailleurs, dans le cas d'un système mono-entrée mono-sortie, ce choix est unique.

Commande par retour d'état (4)

Commande du MCC par retour d'état

Avec $x_1 = \omega$ et $x_2 = i$, représentation d'état du MCC :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u,$$
$$y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$sI - (A - BK) = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -\frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} (K_1 \quad K_2) \right),$$

ou :

$$sI - (A - BK) = \begin{pmatrix} s + \frac{f}{J} & -\frac{K}{J} \\ \frac{K + K_1}{L} & s + \frac{R + K_2}{L} \end{pmatrix}$$

Commande par retour d'état (5)

Equation caractéristique $sI - (A - BK)$:

$$s^2 + \left(\frac{f}{J} + \frac{R + K_2}{L} \right) s + \frac{f(R + K_2) + K(K + K_1)}{LJ} = 0.$$

Identification des pôles à une paire de pôles complexes conjugués :

$$(s - p_1)(s - p_2) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0.$$

Commande par retour d'état (5)

Equation caractéristique $sI - (A - BK)$:

$$s^2 + \left(\frac{f}{J} + \frac{R + K_2}{L} \right) s + \frac{f(R + K_2) + K(K + K_1)}{LJ} = 0.$$

Identification des pôles à une paire de pôles complexes conjugués :

$$(s - p_1)(s - p_2) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0.$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \frac{f}{J} + \frac{R + K_2}{L} &= 2\xi\omega_n, \\ \frac{f(R + K_2) + K(K + K_1)}{LJ} &= \omega_n^2, \end{aligned}$$

Commande par retour d'état (5)

Equation caractéristique $sI - (A - BK)$:

$$s^2 + \left(\frac{f}{J} + \frac{R + K_2}{L} \right) s + \frac{f(R + K_2) + K(K + K_1)}{LJ} = 0.$$

Identification des pôles à une paire de pôles complexes conjugués :

$$(s - p_1)(s - p_2) = s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0.$$

soit les gains du retour d'état :

$$K_2 = L(2\xi\omega_n - \frac{f}{J}) - R,$$
$$K_1 = \frac{LJ\omega_n^2 - f(R + K_2)}{K} - K.$$

Commande par retour d'état (6)

Remarque

Dans le cas précédent l'identification reste faisable analytiquement car le système n'est pas d'ordre trop élevé. Toutefois, au delà du second ordre, la résolution devient vite fastidieuse.

Problème

Trouver une méthode systématique pour un système d'ordre quelconque.

Commande par retour d'état (7)

Modèle dans sa forme canonique commandable :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

Retour d'état :

$$A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0 - K_1 & -a_1 - K_2 & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_{n-1} - K_n \end{pmatrix}.$$

Commande par retour d'état (8)

Equation caractéristique $\det(sI - (A - BK))$:

$$s^n + (a_{n-1} + K_n)s^{n-1} + (a_{n-2} + K_{n-1})s^{n-2} + \dots + a_0 + K_1 = 0.$$

Identification avec l'équation caractéristique sous forme développée : $s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_0 = 0$:

$$\begin{aligned} K_n &= \alpha_{n-1} - a_{n-1}, \\ K_{n-1} &= \alpha_{n-2} - a_{n-2}, \\ &\dots \\ K_1 &= \alpha_0 - a_0. \end{aligned}$$

Synthèse de correcteur par retour d'état, exemple (2)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$
$$y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Cahier des charges :

- erreur statique nulle
- coefficient d'amortissement de 1
- pulsation naturelle deux fois supérieure à la boucle ouverte

Commande par retour d'état (9)

Remarque

Résolution possible car la représentation d'état du système est sous forme canonique commandable.

Généralisation

Si ce n'est pas le cas, on recherche le changement de variable $x = Pz$ transformant le couple (A, B) en (A_c, B_c) , sous forme canonique commandable.

Une fois obtenue la matrice de gain K_c du retour d'état $u = -K_c z$, si l'on souhaite conserver la représentation d'état initiale, on transformera la matrice de gain pour déduire les gains nécessaires à la commande du système dans son état initial : $K = K_c P^{-1}$.

Formule d'Ackerman

Permet de déterminer la matrice de gain du retour d'état :

- calcul du changement de variable pour mettre le système dans sa forme canonique commandable
- calcul de la matrice de gain
- transformation de cette matrice pour appliquer le retour d'état dans la représentation initiale

Commande par retour d'état (11)

Formule d'Ackerman

Soit \mathcal{C} la matrice de commandabilité associée à la paire (A, B) .

Alors, la matrice de gain :

$$K = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1) \mathcal{C}^{-1} P_{\alpha}(A),$$

où $P_{\alpha}(A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \dots + \alpha_0 I$ est constitué à partir de l'équation caractéristique issue du placement de pôles.

Limitations

Intérêt pratique/faible robustesse : non validité en cas de mauvais conditionnement de la matrice de commandabilité.

Système d'ordre élevé : formule d'Ackerman inapplicable.

Synthèse de correcteur par retour d'état, exemple (2)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u,$$
$$y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Cahier des charges :

- erreur statique nulle
- coefficient d'amortissement de 1
- pulsation naturelle deux fois supérieure à la boucle ouverte