

---

# Automatique Continue

## Travaux Dirigés

---

**Bernard BAYLE**

<http://eavr.u-strasbg.fr/~bernard>

**Hassan OMRAN**

<https://sites.google.com/site/hassansamiromran/>

Ce document évolue grâce à votre concours.  
Pour l'améliorer, communiquez vos remarques ou corrections à [bernard.bayle@unistra.fr](mailto:bernard.bayle@unistra.fr) et  
[homran@unistra.fr](mailto:homran@unistra.fr).

## Séance 1 – Outils mathématiques

Le but de ce TD est de se familiariser avec la transformée de Laplace qui fait partie des techniques élémentaires en Automatique.

On se propose d'étudier la solution de l'équation différentielle :

$$\omega_n^2 y(t) + 2\xi\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \omega_n^2 u(t), \quad (\text{E})$$

avec  $\xi > 0$  et  $\omega_n > 0$ .

1. Comment procède-t-on de manière générale pour résoudre l'équation différentielle (E) ?
2. Définir l'équation homogène (H) associée à (E).
3. Définir l'équation caractéristique associée et calculer ses pôles, notés  $p_1$  et  $p_2$ , en fonction de  $\xi$  et  $\omega_n$
4. Calculer le module et l'argument de ces pôles et les représenter dans le plan complexe.
5. Donner la solution de l'équation différentielle homogène dans les trois cas :  $\xi > 1$ ,  $\xi < 1$  et  $\xi = 1$ .
6. Réécrire (E) en fonction de  $p_1$  et  $p_2$ . On poursuivra les calculs avec cette nouvelle expression de l'équation (E).
7. On se place maintenant dans le cas où  $\xi > 1$ . L'entrée est un échelon unité  $u(t) = \mathcal{U}(t)$ . Déterminer la solution particulière de l'équation (E).
8. Donner la solution complète de l'équation (E), pour  $u(t) = \mathcal{U}(t)$ , en fonction de  $p_1, p_2$  et des conditions initiales  $y(0), \frac{dy}{dt}(0)$ .
9. Application numérique pour :  $p_1 = -0,5, p_2 = -1, y(0) = 2$ , et  $\frac{dy}{dt}(0) = 0,5$ .
10. On se propose maintenant d'effectuer cette résolution en utilisant la transformée de Laplace. Pour cela, démontrer que :

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{dy(t)}{dt} \right\} = sY(s) - y(0).$$

11. Transformer alors l'équation différentielle (Ebis) pour la mettre sous la forme :

$$P(s)Y(s) + P_0(s) = p_1 p_2 U(s),$$

où  $P(s)$  et  $P_0(s)$  sont des polynômes en  $s$ ,  $P_0(s)$  regroupant les termes liés aux conditions initiales.

12. Calculer la transformée de Laplace de l'échelon unité.
13. On a :

$$Y(s) = \frac{p_1 p_2 U(s) - P_0(s)}{P(s)}.$$

Quelles sont les racines de  $P(s)$  ? En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle précédente.

14. On donne :  $\mathcal{L}\{e^{-at} \mathcal{U}(t)\} = \frac{1}{s+a}$ . Retrouver la solution  $y(t)$  obtenue en résolvant l'équation différentielle.

## Séance 2 – Modélisation

On considère un four permettant de contrôler, au cours du temps, la température  $\theta_1$  d'une chambre de chauffage (enceinte n. 1) dont le schéma de principe est donné à la figure 1. Le milieu ambiant est à la température  $\theta_0$  et l'enceinte n. 2 dans laquelle se trouve la résistance chauffante à la température  $\theta_2$ .

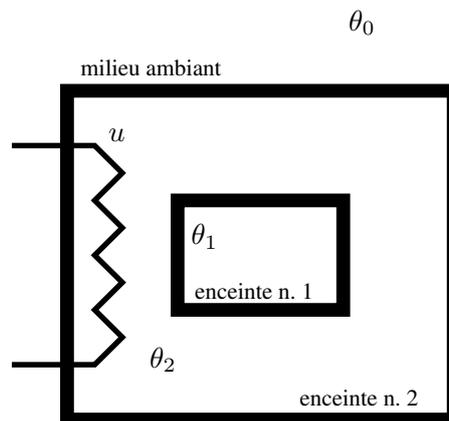


FIGURE 1 – Schéma de principe du four

L'énergie thermique apportée par le biais de la résistance électrique immergée dans un bain d'huile est notée  $u$ . L'écriture des équations de conservation de l'énergie donne :

$$\begin{aligned} m_1 c_1 \frac{d\theta_1}{dt} &= k_{12}(\theta_2 - \theta_1) \\ m_2 c_2 \frac{d\theta_2}{dt} &= -k_{12}(\theta_2 - \theta_1) - k_{20}(\theta_2 - \theta_0) + u \end{aligned}$$

où les coefficients  $m_1$  et  $m_2$  représentent les masses des fluides dans les enceintes 1 et 2 et  $c_1$  et  $c_2$  leurs capacités thermiques massiques ;  $k_{12}$  et  $k_{20}$  représentent les conductances thermiques à l'interface entre les enceintes 1 et 2 et entre l'enceinte 2 et le milieu ambiant. Les valeurs numériques correspondant à notre four sont :

$$\begin{aligned} m_1 c_1 &= 0,5 \\ m_2 c_2 &= 2 \\ k_{12} &= 1 \\ k_{20} &= 0,5 \end{aligned}$$

1. Réécrire les équations du système sous forme numérique en fonction des valeurs précisées ci-dessus.
2. Que représentent les grandeurs  $\theta_1$ ,  $\theta_0$  et  $u$  pour le système (entrée, sortie, perturbations, point de fonctionnement, ...) ?
3. Quelle représentation paraît la plus naturelle pour modéliser le système ?
4. Mettre les équations du système sous forme d'une représentation d'état.

5. Représenter à l'aide de schéma-blocs les relations entre les transformées de Laplace  $\Theta_1(s)$ ,  $\Theta_0(s)$  et  $U(s)$  des grandeurs  $\theta_1$ ,  $\theta_0$  et  $u$ .
6. A l'aide des transformées de Laplace des équations du système, ou des schémas blocs précédents, exprimer  $\Theta_1(s)$  en fonction de  $\Theta_0(s)$  et  $U(s)$ .
7. En déduire la fonction de transfert du système sous la forme :

$$G(s) = \frac{\Theta_1(s)}{U(s)}.$$

8. Retrouver cette fonction de transfert à partir de la transformée de Laplace de la représentation d'état.
9. Quels sont l'ordre et la classe du système ? Calculer les pôles du système de deux façons différentes.
10. Etablir la représentation d'état du système sous forme modale, à partir de l'expression de la fonction de transfert obtenue.
11. Retrouver ce résultat en diagonalisant la matrice d'état initiale.

### Séance 3 – Réponses temporelle et harmonique des systèmes

Cette étude concerne un système de chauffage électrique ventilé caractérisé par :

- une constante de temps lente ;
- un retard dû au transport de l'air.

1. Retrouver en la démontrant la transformée de Laplace du signal  $g_1(t - t_r)$  avec  $t_r$  une constante réelle positive. On note  $G_1(s)$  la transformée de Laplace du signal  $g_1(t)$ .
2. Donner la fonction de transfert  $G_2(s)$  d'un système du second ordre possédant un pôle réel double. On introduira pour cela la constante de temps  $\tau$  associée au pôle et le gain statique du système, noté  $K$ .
3. Que vaut le coefficient d'amortissement  $\xi$  d'un système du second ordre possédant un pôle réel double ? Justifier la réponse sans pour autant faire de calcul.
4. En utilisant l'abaque ci-dessous, donner le temps de réponse  $t_{5\%}$  d'un tel système en fonction de  $\tau$ .

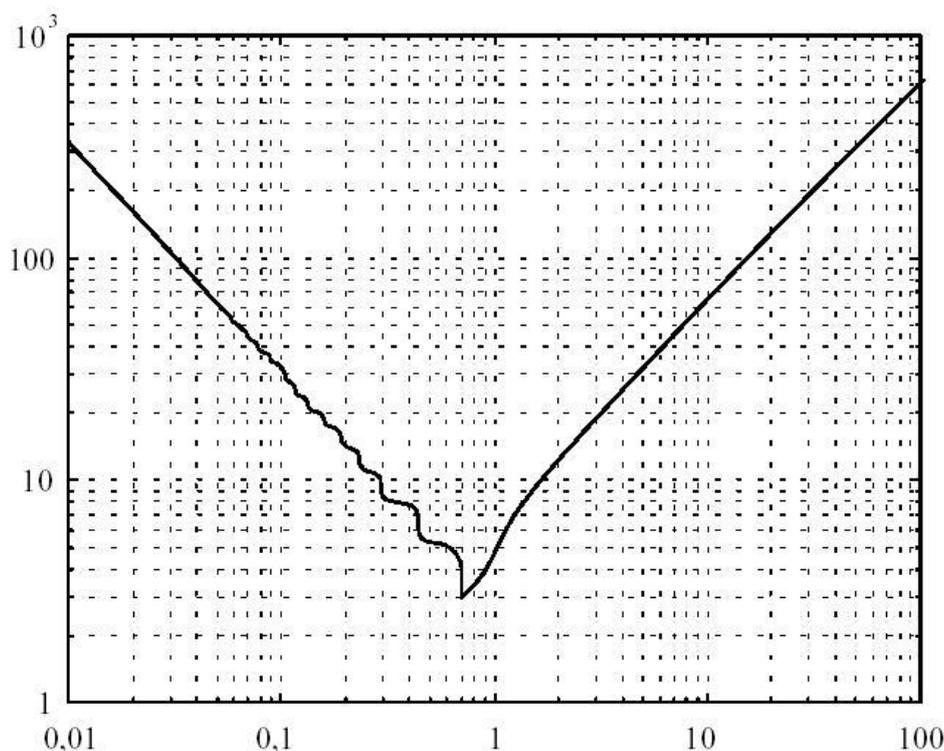


FIGURE 2 – Temps de réponse normalisé  $\omega_n t_{5\%}$  d'un système du second ordre de fonction de transfert  $\frac{K\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\xi\omega_n s + s^2}$  en fonction de son coefficient d'amortissement  $\xi$ .

5. On modélise le système de chauffage électrique ventilé considéré par un second ordre avec retard possédant un pôle double réel. Néanmoins les paramètres de ce modèle étant mal connus, on va utiliser une mesure de la réponse indicielle du système pour les

- identifier. D'après les questions 1 et 2, donner l'expression de sa fonction de transfert  $G(s)$  en conservant les notations précédentes.
6. Tracer l'allure de la réponse indicielle correspondant à la fonction de transfert précédente en fonction de  $t_r$ ,  $\tau$  et  $K$ .
  7. La réponse du système à un échelon d'amplitude 10V est donnée à la figure 4. Comparer cette réponse au tracé précédemment effectué et, d'après les questions précédentes, identifier les paramètres  $t_r$ ,  $\tau$  et  $K$  en utilisant la figure réponse 4. Expliquer la méthode utilisée.

On se propose d'identifier les paramètres précédents de manière plus précise en utilisant la méthode de Strejc. La méthode de Strejc est une méthode d'identification classique qui permet de déterminer les paramètres d'un système dont le modèle peut s'écrire sous la forme de la fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{K e^{-t_r s}}{(1 + \tau s)^n} \quad (1)$$

A partir de la courbe de la réponse indicielle (voir figure 3) on trace la tangente à la

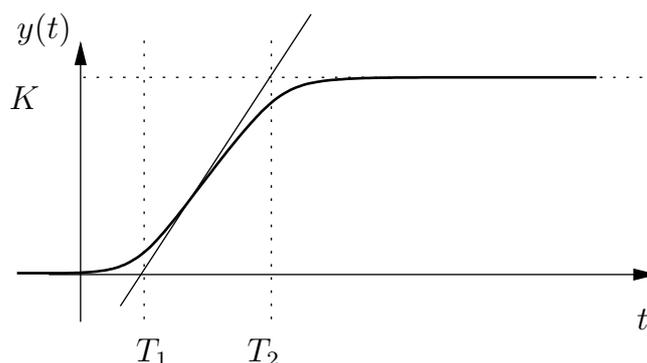


FIGURE 3 – Identification par la méthode de Strejc

réponse au point d'inflexion. On obtient alors les caractéristiques  $T_1$  et  $T_2$  de la réponse. Alors, les paramètres de la fonction de transfert (1) sont déduits du tableau ci-dessous.

$n$	$\frac{T_1}{\tau}$	$\frac{T_2 - T_1}{\tau}$	$\frac{T_1}{T_2 - T_1}$
1	0	1	0
2	0,28	2,72	0,1
3	0,8	3,7	0,22
4	1,42	4,46	0,32

TABLE 1 – Paramètres du modèle selon la méthode de Strejc, en fonction de  $T_1$  et  $T_2$

On procède comme suit :

- (a) tout d'abord on identifie l'ordre du système à partir de la troisième colonne du tableau. Si la valeur de  $\frac{T_1}{T_2 - T_1}$  ne correspond pas à l'une des valeurs de la colonne correspondante, ce qui est presque toujours le cas, on choisit la valeur immédiatement inférieure et on en déduit  $n$  ;
- (b) une fois  $n$  déterminé, on déduit la constante de temps  $\tau$  du système d'après l'indication de la seconde colonne ;
- (c) on estime le temps de retard  $t_r$  en comparant la valeur de  $T_1$  donnée en appliquant la formule de la première colonne du tableau à la valeur mesurée de  $T_1$  ;
- (d)  $K$  est bien évidemment toujours obtenu directement d'après le régime permanent de la réponse.

8. Appliquer la méthode de Strejc, en vous appuyant sur la figure 5.

*On se propose maintenant d'étudier l'effet du retard sur la réponse harmonique du système. Pour cela, on considérera que le système a pour fonction de transfert :*

$$G(s) = \frac{2,4 e^{-0,5s}}{(1 + 2s)^2}.$$

9. Tracer tout d'abord le diagramme de Bode du système en boucle ouverte sans tenir compte du retard :

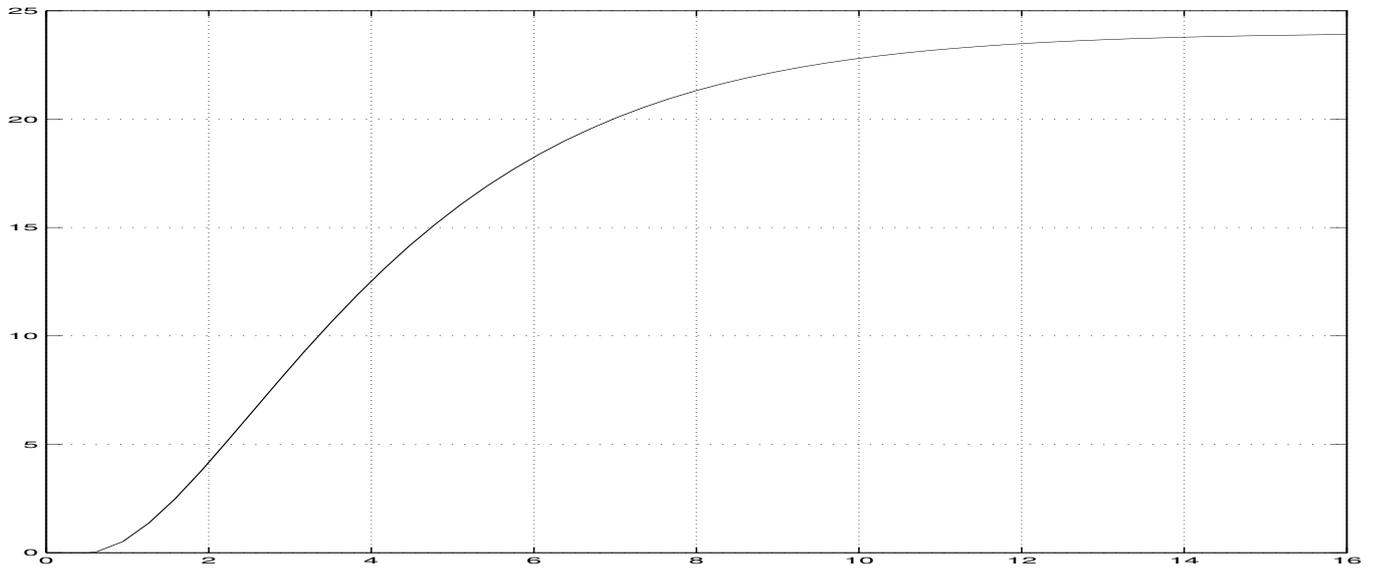
$$G(s) = \frac{2,4}{(1 + 2s)^2}$$

sur la figure 6.

10. On s'intéresse maintenant à l'influence du retard. Quel est le déphasage introduit par le terme de retard, à une pulsation  $\omega$  donnée ?
11. Evaluer ce déphasage pour différentes valeurs de  $\omega$  judicieusement choisies dans la plage de variation des pulsations de la figure 6. En déduire le diagramme de Bode de la fonction de transfert du système en boucle ouverte :

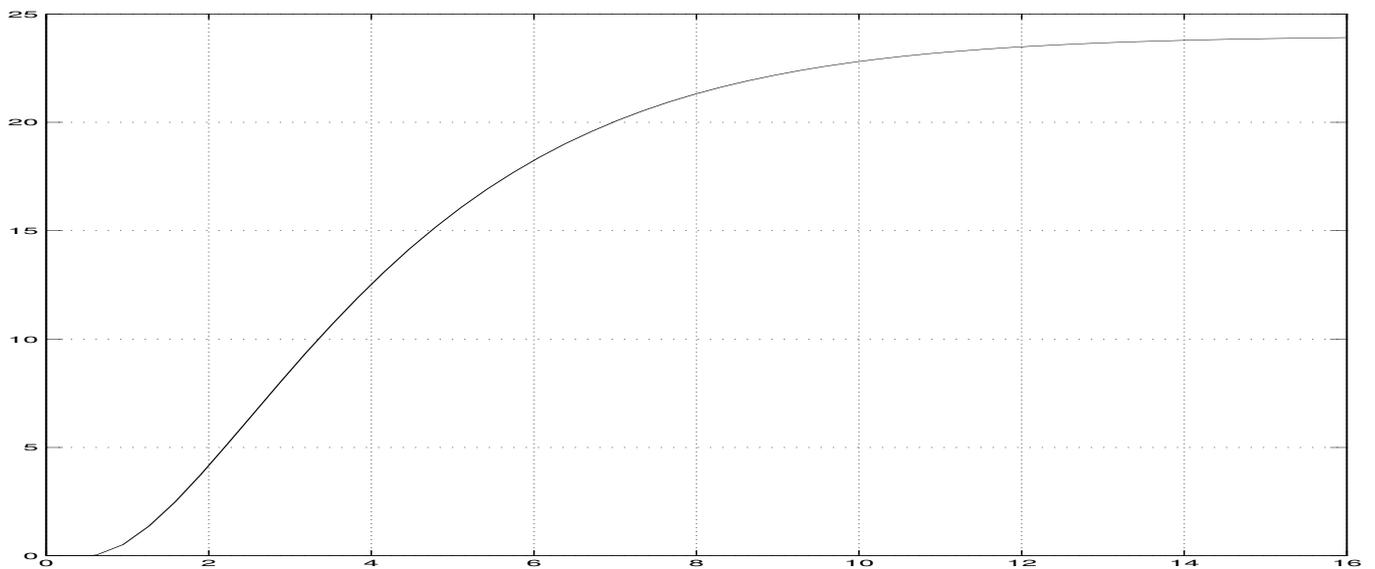
$$G(s) = \frac{2,4 e^{-0,5s}}{(1 + 2s)^2}$$

dans la limite de la place disponible à la figure 6.



Time offset: 0

FIGURE 4 – Identification du système d’après sa réponse indicielle



Time offset: 0

FIGURE 5 – Identification du système d’après sa réponse indicielle : méthode de Strejc

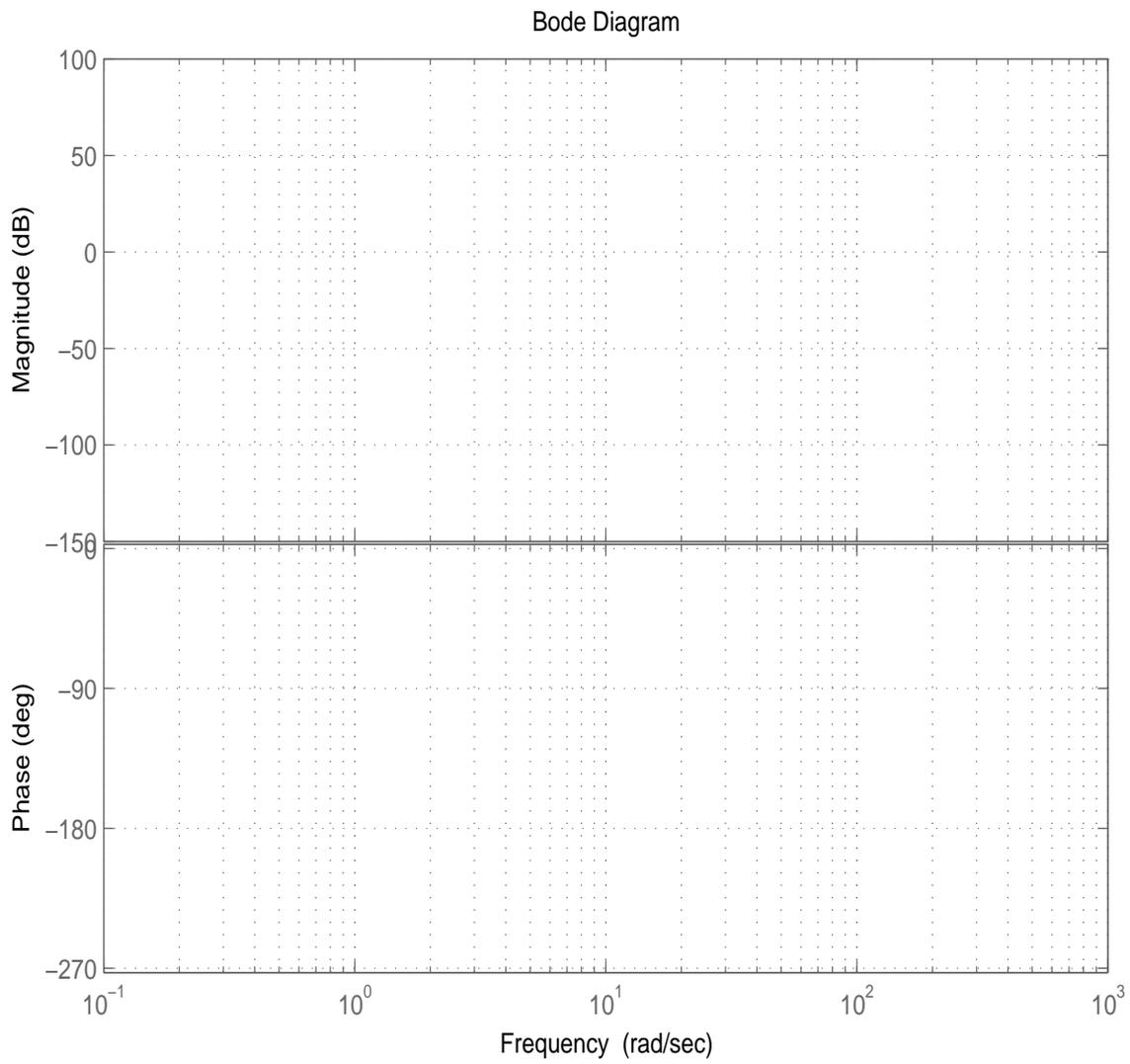


FIGURE 6 – Diagramme de Bode

## Séance 4 – Schémas blocs et systèmes asservis

### Représentations par fonction de transfert

#### Représentation d'un système avec perturbation et bruit de mesure

Pour tenir compte des imperfections de modélisation représentées sur le schéma 7, calculer la transformée de Laplace  $Y(s)$  de la sortie de l'asservissement en fonction de  $Y_r(s)$ ,  $P(s)$  et  $B(s)$  à l'aide du théorème de superposition.

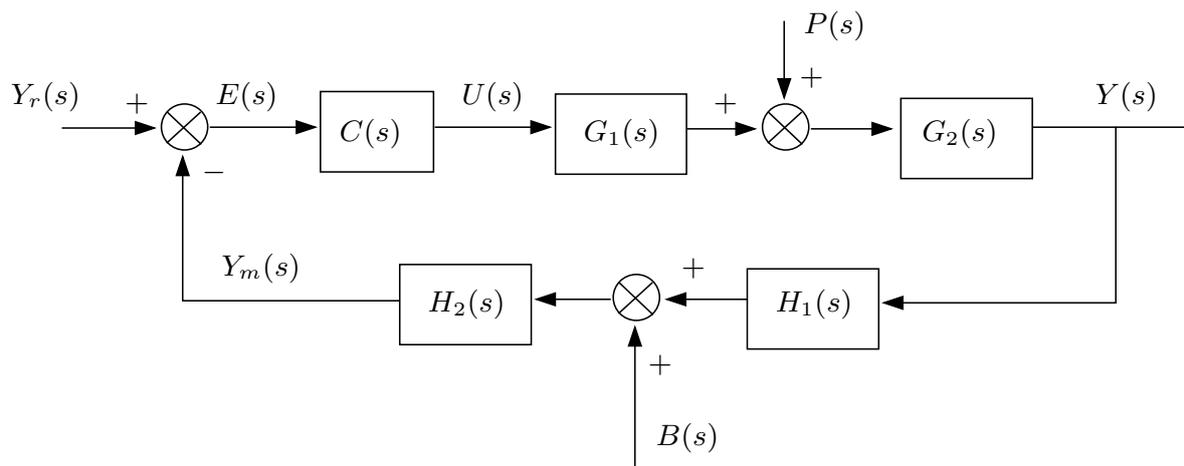


FIGURE 7 – Schéma bloc d'un asservissement à temps continu : cas général

#### Calcul générique de la représentation d'un système en boucle fermée : règle de Mason

On se propose de calculer la transmittance (synonyme de fonction de transfert) :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{Y_r(s)}$$

du système représenté à la figure 8. Compte tenu de la configuration du système, qui présente différentes boucles entrelacées, il n'est pas possible de calculer  $G(s)$  en utilisant des combinaisons (série, parallèle, boucle simple) de transmittances. On va donc utiliser une méthode générique, appelée règle de Mason. On peut résumer cette règle de manière très succincte comme suit. La transmittance d'un système d'entrée  $Y_r(s)$  et de sortie  $Y(s)$ , comportant différentes boucles éventuellement imbriquées vaut :

$$\frac{Y(s)}{Y_r(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} M_i(s) \Delta_i(s)}{\Delta(s)},$$

où :

- $n$  indique le nombre de parcours ouverts, c'est-à-dire sans boucle, entre  $Y_r(s)$  et  $Y(s)$
- $M_i(s)$  représente la transmittance du  $i$ -ème parcours ouvert

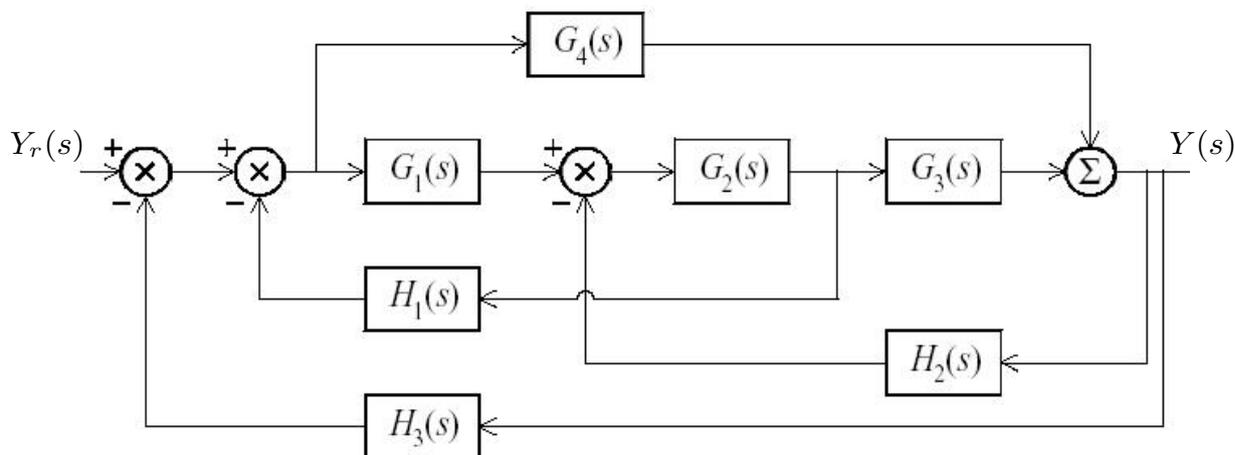


FIGURE 8 – Système avec boucles imbriquées

—  $\Delta(s)$  est calculé par :

$$\Delta(s) = 1 - \sum B_i(s) + \sum B_i(s)B_j(s) - \sum B_i(s)B_j(s)B_k(s) + \dots$$

où les termes  $B_i(s)$  représentent les transmittances des boucles isolées, les termes  $B_i(s)B_j(s)$  représentent les produits des transmittances des boucles disjointes deux à deux, les termes  $B_i(s)B_j(s)B_k(s)$  les produits des transmittances des boucles disjointes trois à trois, etc.

—  $\Delta_i(s)$  est calculé comme  $\Delta(s)$  précédemment, mais pour le sous-système obtenu en enlevant  $i$ -ème parcours ouvert

Pour obtenir la transmittance  $G(s)$  du système, on va adopter la démarche suivante.

1. Déterminer dans le schéma 8 les parcours ouverts, c'est-à-dire les chemins de  $Y_r(s)$  à  $Y(s)$  qui ne passent jamais deux fois par un même point et leur transmittance  $M_i(s)$ .
2. Déterminer les boucles présentes dans le schéma et leur transmittance  $B_i(s)$ .
3. Existe-t-il des boucles disjointes, c'est-à-dire n'ayant aucun nœud commun ? En déduire  $\Delta(s)$  pour le système.
4. Si l'on élimine les parcours ouverts, reste-t-il des boucles complètes ? En déduire les  $\Delta_i(s)$  des sous-systèmes obtenus en ôtant les parcours ouverts.
5. En déduire la transmittance  $G(s)$  du système.

Pour plus de précisions et des exemples sur la règle de Mason, on pourra se référer à l'ouvrage d'Eric Ostertag, *Systèmes et Asservissements Continus. Modélisation, Analyse, Synthèse des Lois de Commande*, publié chez Ellipses, Technosup<sup>1</sup>. Sur internet, on consultera avec intérêt : <http://www.laas.fr/~arzelier/polycop/n6k1/pc1bis.ps>

## Représentations d'état

La notion de schéma fonctionnel ou schéma bloc est bien connue (et fondamentale) dans le cas de la représentation d'un système par fonction de transfert. La figure 8 est un exemple

1. Cet ouvrage est disponible en plusieurs exemplaires à la bibliothèque.

de schéma fonctionnel. Dans le cas des représentations d'état, un schéma fonctionnel est une représentation graphique constituée de blocs sommateurs, soustracteurs, gains ou intégrateurs permettant d'illustrer le modèle du système. A titre d'exemple, on donne le schéma fonctionnel de la figure 9.

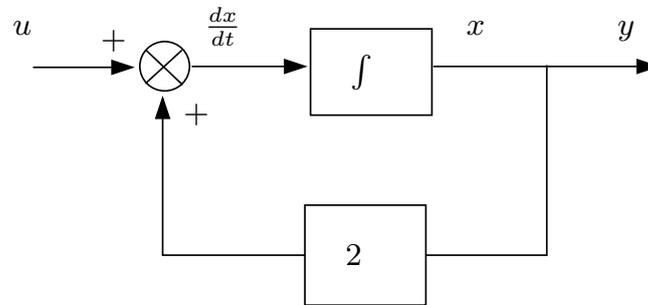


FIGURE 9 – Schéma fonctionnel élémentaire

1. Donner le schéma fonctionnel du système dont la représentation d'état s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx + Du.\end{aligned}$$

2. Calculer la représentation d'état équivalente aux trois schémas de la figure 10.

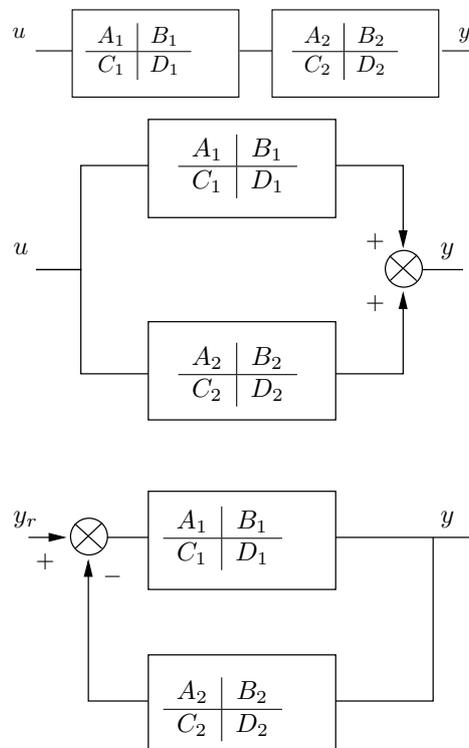


FIGURE 10 – Combinaison de sous-blocs dans le formalisme d'état

## Séance 5 – Stabilité des systèmes asservis

On considère un procédé dont le modèle sous forme d'état est :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 + \tau_d \\ -1 \end{pmatrix} u, \\ y &= (K \quad K) x. \end{aligned}$$

1. Quels sont les états d'équilibre de ce système en boucle ouverte ? Sont-ils stables ?
2. On se propose d'asservir le procédé. Déterminer sa fonction de transfert en boucle ouverte, notée  $G(s)$ , sous forme factorisée.
3. Appliquer le critère de Nyquist pour étudier la stabilité du système en boucle fermée lorsque l'on effectue une correction proportionnelle selon le schéma de la figure 11. On représentera séparément les cas  $\tau_d = 0$  et  $\tau_d \neq 0$ .

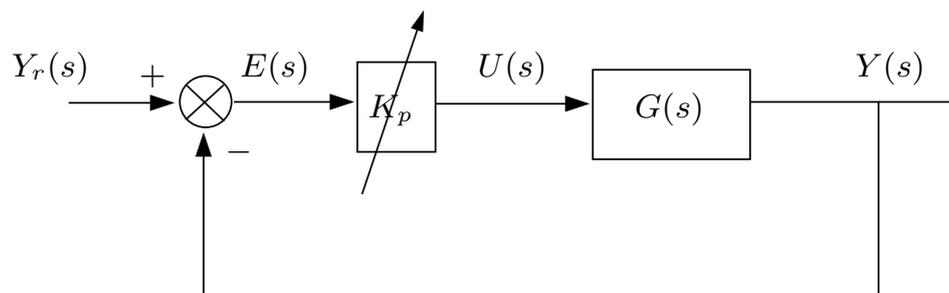


FIGURE 11 – Correction proportionnelle

4. Tracer le lieu des racines du système et retrouver la condition de stabilité précédente.

## Séance 6 – Commande : synthèse fréquentielle de correcteur

On considère le système en boucle fermée, avec correcteur proportionnel, représenté à la figure 12. Il réalise l'asservissement d'un procédé de fonction de transfert :

$$G_1(s) = \frac{1}{(s + 1 + 0,1j)(s + 1 - 0,1j)(s + 20)}.$$

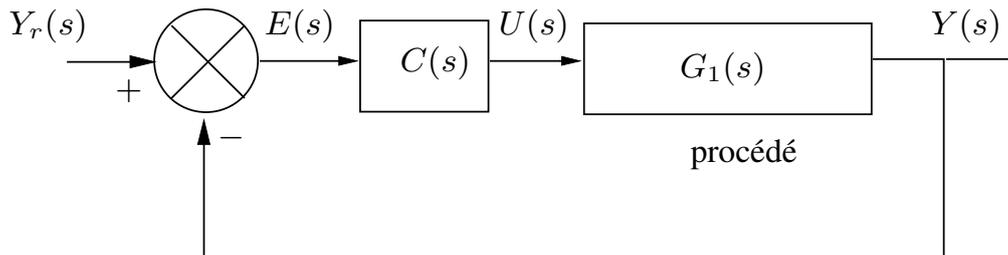


FIGURE 12 – Système en boucle fermée avec correcteur proportionnel

1. Pour effectuer une correction satisfaisante du système présenté, on a deux choix :
  - effectuer cette résolution numériquement en s'appuyant sur un logiciel de simulation comme Matlab ;
  - approximer le système pour pouvoir effectuer les calculs manuellement, dans un premier temps.

Dans ce dernier cas, une des techniques possibles consiste à étudier une représentation simplifiée d'ordre inférieur ou égal à deux. Cela est-il possible ici ? Pour justifier, on donnera les différents modes du procédé et leur signification.

2. On approxime la fonction de transfert du procédé :

$$G_1(s) = \frac{1}{(s + 1 + 0,1j)(s + 1 - 0,1j)(s + 20)}$$

par la fonction de transfert du second ordre :

$$G_2(s) = \frac{K}{(s - p_1)(s - p_2)}.$$

Déterminer  $p_1$  et  $p_2$  et  $K$ . Pour  $K$  on prendra soin de calculer le gain statique du procédé.

*On utilisera désormais  $G_2(s)$  pour représenter le procédé.*

3. On propose tout d'abord d'effectuer une correction proportionnelle  $C(s) = K_p$ . Calculer, en fonction de  $K_p$ , la fonction de transfert du système en boucle fermée.
4. La fonction de transfert d'un système du second ordre peut se mettre sous la forme canonique :

$$\frac{K_G \omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}.$$

Calculer, en fonction de  $K_p$ , le coefficient d'amortissement et la pulsation propre non amortie correspondant à la paire de pôles du système en boucle fermée.

5. Calculer le gain  $K_p$  d'un correcteur proportionnel permettant d'obtenir un amortissement donné. Evaluer le gain, noté  $K_{0,45}$ , donnant au système un amortissement égal à  $\xi = 0,45$ .
6. Quelle est la classe du système corrigé en boucle ouverte ? En déduire son erreur statique en réponse à un échelon unité, que l'on calculera pour le système corrigé à l'aide du correcteur proportionnel de valeur  $K_{0,45}$ .
7. Le système subit une perturbation, résultant d'un offset sur l'entrée de commande, conformément au schéma de la figure 13. Calculer l'erreur en régime permanent introduite par cette perturbation. A quelle condition l'asservissement compense-t-il l'effet de cette perturbation ?

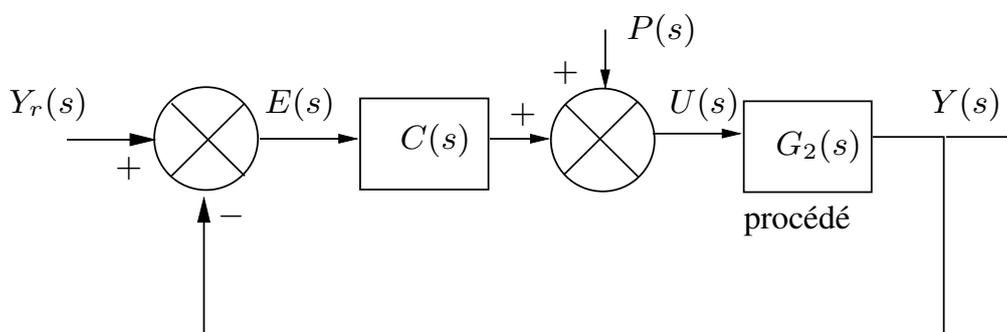


FIGURE 13 – Système en boucle fermée avec correcteur proportionnel

8. On souhaite remplir le cahier des charges suivant :
  - erreur statique nulle ;
  - rejet de la perturbation constante ;
  - marge de phase de  $45 \text{ deg}$ .
 Caractériser le système et déterminer quel type de correction pourrait convenir.
9. Déterminer les paramètres du correcteur en question en esquissant un diagramme de Bode. On représentera sur une même figure le diagramme de Bode de  $G_2(s)$  puis la construction du correcteur qui conduit au diagramme de Bode corrigé de  $C G_2(s)$  correspondant au cahier des charges.
10. Pour résoudre le problème analytiquement, peut-on facilement reproduire le raisonnement mené dans le cas de la correction proportionnelle ?

## Séance 7 – Commande : méthode du lieu des racines

On considère un système en pesanteur dont l'altitude  $z$  est commandée par un actionneur vertical, supposé de bande passante infinie et de gain  $K_a$ . En l'absence de pesanteur et de frottement, l'altitude du système est donnée par double intégration de la force verticale appliquée par l'actionneur au système. On considère donc que l'ensemble actionneur+procédé a pour fonction de transfert :

$$\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{K_a K_g}{s^2}$$

avec  $K_a = 0,5$  et  $K_g = 0,1$ . L'asservissement de l'altitude du système correspond au schéma de la figure 14.

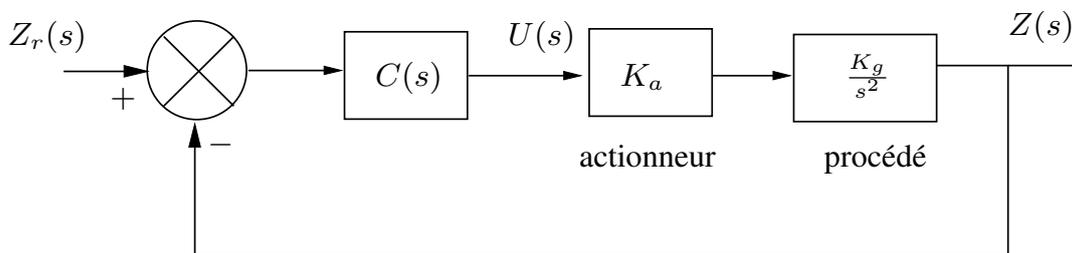


FIGURE 14 – Système corrigé en boucle fermée

1. On considère tout d'abord le cas non corrigé  $C(s) = 1$  (questions 1 à 7). Calculer la fonction de transfert du système en boucle fermée.
2. En déduire l'équation différentielle à laquelle obéit cet asservissement. Comment appelle-t-on ce type de système ?
3. Quel en est l'équivalent électrique (circuit à base de composants passifs) ? Calculer l'équation différentielle régissant un tel circuit pour justifier le résultat.
4. Le système est-il stable en boucle ouverte ? Donner la signification physique de cette réponse.
5. Le système est-il stable en boucle fermée ? Donner la signification physique de cette réponse.
6. Tracer l'allure du diagramme de Bode du système en donnant l'intersection de la courbe des gains en  $dB$  avec l'axe  $0 \text{ dB}$ .
7. Que vaut la marge de phase du système en boucle ouverte ? Quel type de correction s'impose ?
8. On se propose de faire la correction du système pour lui assurer un bon compromis performance-stabilité. En accord avec les réponses précédentes, on cherche tout d'abord à déterminer un correcteur sous la forme :

$$C(s) = K_p \frac{1 + \tau_d s}{1 + a \tau_d s} \quad (2)$$

avec  $a < 1$ . Quel correcteur idéal ce correcteur approche-t-il ?

9. Pour pouvoir effectuer les calculs «à la main», on va d'abord travailler sur le correcteur idéal. Esquisser le lieu des racines du système corrigé par :

$$C(s) = K_p(1 + \tau_d s).$$

On conservera toujours la variable  $\tau_d$  sous sa forme littérale. Préciser la valeur de  $K_p$  aux points de séparation en fonction de  $\tau_d$ .

10. Dans le cas (général) d'un système d'ordre deux possédant deux pôles complexes conjugués, établir la valeur des pôles assurant un amortissement de 0,707 et une pulsation propre non amortie  $\omega_n = 5,73 \text{ rad/s}$ .
11. Identifier les paramètres  $K_p$  et  $\tau_d$  permettant d'obtenir ce comportement dynamique pour le système corrigé en boucle fermée.
12. Illustrer cette correction en traçant maintenant le lieu ainsi corrigé et en y faisant apparaître les courbes correspondant à un amortissement de 0,707 et une pulsation propre non amortie  $\omega_n = 5,73 \text{ rad/s}$ . Pour tracer précisément la partie du lieu correspondant à des pôles complexes on calculera la valeur des pôles pour 3 ou 4 valeurs de  $K_p$ .
13. Pour obtenir un correcteur physiquement réalisable sous la forme (2) que reste-t-il à faire ? Tracer le lieu des racines ainsi obtenu dans les deux cas possibles : 1) il y a un point de séparation sur l'axe réel 2) il y a trois points de séparation sur l'axe réel (que l'on ne cherchera pas à déterminer). Qu'en sera-t-il des performances obtenues par rapport à celles issues d'une correction *PD* idéale ?

## Séance 8 – Commande par retour d'état

N'oubliez pas vos calculatrices en TD !

En pleine mer, un ferry se déplace généralement à vitesse stabilisée. On se propose d'étudier l'asservissement par retour d'état du gouvernail d'un tel bateau pour réaliser une fonction de «pilote automatique». On considère un bateau de 100 m de long, qui, en régime de croisière se déplace à la vitesse de 10 m/s. Son modèle est déterminé en fonction des paramètres suivants (voir figure 15) :

- $\delta$  : orientation du gouvernail ;
- $\psi$  : cap du bateau dans un repère de référence ;
- $r$  : vitesse angulaire de lacet (dans le plan vertical, pas représenté sur la figure) ;
- $\beta$  : angle de glissement par rapport à la direction principale.

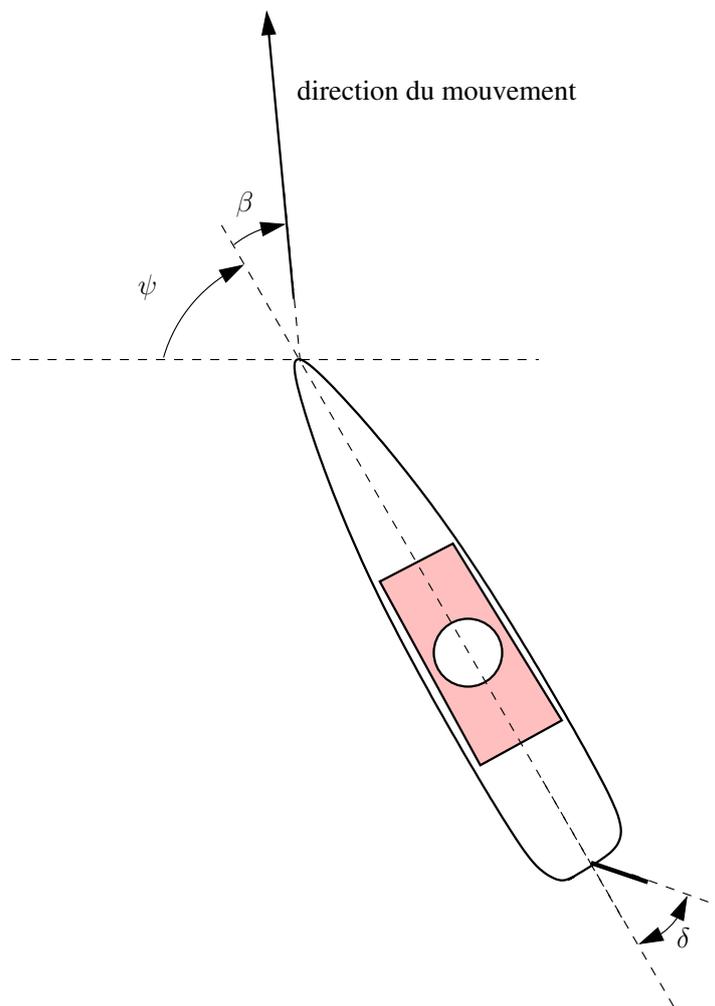


FIGURE 15 – Repérage du système

L'équation dynamique du système, linéarisée autour du régime de croisière, s'écrit :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} -0,0895 & -0,286 & 0 \\ -0,0439 & -0,272 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0,0145 \\ -0,0122 \\ 0 \end{pmatrix} \delta$$

avec  $x = (\beta \ r \ \psi)^T$ . On se propose d'asservir le cap du bateau : l'angle  $\psi$  sera donc considéré comme sortie de notre système.

1. Quels sont les états d'équilibre de ce système ? Sont-ils stables ?
2. Le système est-il commandable ? On note  $\mathcal{C}$  la matrice de commandabilité du système, associée à la paire  $(A, B)$ .

A partir d'un modèle d'état quelconque du système, on peut déterminer le modèle sous forme canonique commandable par un changement de variable adéquat<sup>2</sup>. Soit un système d'équation caractéristique :

$$s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0. \quad (3)$$

On définit la matrice :

$$W = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_{n-1} & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors le changement de variable  $x = T\hat{x}$ , avec  $T = \mathcal{C}W$  est régulier et conduit à une représentation du système sous forme canonique commandable (encore appelée forme compagne de commande).

3. Déterminer l'équation caractéristique du système et, d'après le théorème précédent, en déduire la représentation d'état sous forme canonique commandable.
4. On suppose que l'état du système est complètement mesurable à l'aide d'instruments de navigation. Calculer le gain de la matrice  $K$  du retour d'état  $u = -Kx$  permettant de placer les pôles du système en boucle fermée en :

$$\begin{aligned} p_1 &= -0,2 \\ p_2 &= -0,2 + 0,2j \\ p_3 &= -0,2 - 0,2j \end{aligned}$$

5. Compléter la synthèse par le calcul du gain  $\bar{N}$  permettant d'obtenir une erreur statique nulle en régime permanent entre le cap de consigne  $\psi_c$  et le cap réel du bateau. On donnera le schéma de principe de l'asservissement ainsi réalisé.
6. Question subsidiaire : de passage en salle informatique vérifier le résultat en appliquant la formule d'Ackerman avec Matlab (fonction `acker`) et en réalisant l'asservissement avec Simulink.

Ce TD est basé sur un exercice proposé dans l'ouvrage *Feedback control of dynamic systems*, de G. F. Franklin, J. D. Powell et A. Emami-Naeini, édition Prentice Hall, 2002.

<sup>2</sup> La démonstration de la formule de passage d'une représentation quelconque à une représentation sous forme canonique commandable pourra par exemple être trouvée dans l'ouvrage *Modern control engineering*, de K. Ogata, édition Prentice Hall, 2001 (page 914-915, exercice A-12-2 et A-12-3)

## Séance 9 – Placement de pôles : deux solutions

Soit un procédé d'entrée  $u$  et de sortie  $y$ . Son évolution est décrite par le système d'équations différentielles d'ordre un :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -4x_1 - 0,5x_2 + 0,5u \\ \dot{x}_2 &= 8x_1 \\ \dot{x}_3 &= x_2\end{aligned}$$

et l'équation de sortie :

$$y = 0,25x_2 + 0,05x_3.$$

L'objectif de ce problème est d'asservir la sortie du système afin de remplir le cahier des charges suivant :

- erreur statique nulle ;
- premier dépassement inférieur à 5% de la consigne ;
- temps de réponse inférieur à 2 s.

### Méthode du lieu des racines

1. Montrer que la fonction de transfert du système est :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 0,2}{s(s + 2)^2}.$$

2. Donner l'équation caractéristique définissant le lieu des racines du système.
3. Appliquer les règles de construction du lieu des racines du système et tracer le lieu aussi précisément que possible. Indication : les racines du polynôme  $2x^3 + 4,6x^2 + 1,6x + 0,8$  sont  $-2$  et  $-0,15 \pm 0,42j$ .
4. La méthode du lieu des racines est généralement basée sur des compensations. Quelles compensations sont envisageables ici ?
5. On souhaite corriger le système à l'aide d'un correcteur à deux pôles et deux zéros, permettant de se placer dans l'hypothèse d'un système d'ordre deux. En accord avec les questions précédentes, choisir l'un des pôles et les deux zéros du correcteur et donner la forme du correcteur complet (on notera  $p$  le pôle restant à déterminer). Donner aussi la fonction de transfert de la chaîne directe résultante.
6. Une fois ces compensations faites, il reste donc à placer un pôle et régler le gain du correcteur. Tracer le lieu des racines en choisissant le pôle de sorte que le système en boucle fermée soit toujours stable.
7. Dans le cas d'un système possédant une paire de pôles complexes dominants, la contrainte du cahier des charges liée au premier dépassement est équivalente à une contrainte sur le coefficient d'amortissement  $\xi$ . La contrainte sur le temps de réponse conduit quant à elle à placer les pôles en boucle fermée sur une droite verticale dans le lieu des racines. Retrouver l'origine de ces deux règles.

8. Traduire les contraintes correspondant au cahier des charges sur la position des pôles en boucle fermée et représenter graphiquement ces contraintes sur une nouvelle figure.
9. Etant donnée l'allure du lieu des racines déterminé à la question 6 et les contraintes définies à la question précédente, placer alors le second pôle du système pour remplir le cahier des charges. Représenter le lieu obtenu sur le tracé précédent.
10. Enfin, calculer le gain proportionnel du correcteur permettant de remplir le cahier des charges.

### Correction par retour d'état

On suppose dans cette partie que l'état est entièrement mesurable à tout instant.

1. Sous quelle condition existe-t-il un retour d'état permettant d'imposer le placement des pôles du système ? Cette condition est-elle satisfaite ici ?
2. Le système étant d'ordre trois, la forme d'état donnée au début du problème ne permet pas de calculer simplement un correcteur par retour d'état. Pour cela, établir la forme canonique commandable de la représentation d'état, notée :

$$\begin{aligned}\dot{z} &= A_c z + B_c u, \\ y &= C_c z.\end{aligned}$$

3. Déterminer alors les gains  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  de la loi de commande par retour d'état :

$$u = -K_1 z_1 - K_2 z_2 - K_3 z_3$$

permettant de placer les pôles du système en  $-1, 5 \pm 1, 5j$  et  $-0, 2$ .

4. Introduire enfin la consigne de l'asservissement :

$$u = -K_1 z_1 - K_2 z_2 - K_3 z_3 + \alpha y_r$$

en calculant  $\alpha$  de sorte que l'erreur statique du système soit nulle.

Indication :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 1 \\ 0,2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Séance 10 - Réalisation des correcteurs à base d'AOP

Un amplificateur opérationnel (AOP) est un composant électronique qui amplifie la différence de potentiel entre l'entrée non-inverseuse  $V_+$  et l'entrée inverseuse  $V_-$ . Les AOP sont utilisés notamment pour faire des calculs analogiques, des filtres, mais aussi des correcteurs pour l'Automatique.

1. Préciser les hypothèses relatives à un amplificateur idéal. Quels sont les régimes de fonctionnement ?
2. En pratique, l'amplificateur opérationnel réel présente des défauts par rapport au modèle idéal. Donner un modèle d'AOP qui prend en compte les caractéristiques (non-idéales) suivantes :
  - gain en basse fréquence  $A$  ;
  - bande passante déterminée par  $\omega_p$  ;
  - impédance d'entrée  $Z_e$  ;
  - impédance de sortie  $Z_s$  ;
  - saturation.
3. On considère le montage inverseur de la Figure 16, en régime linéaire.

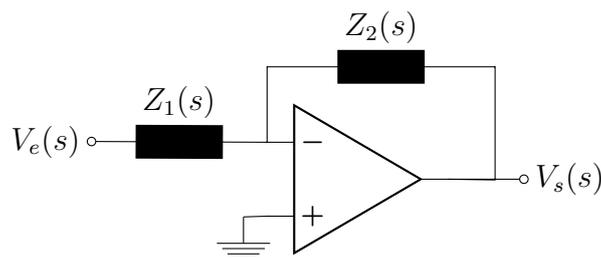


FIGURE 16 – Montage inverseur

On souhaite étudier les effets d'un gain fini  $A$  et d'une bande passante finie  $\omega_p$ .

- (a) Trouver la fonction de transfert  $V_s(s)/V_e(s)$ .
- (b) Trouver la fonction de transfert  $(V_+(s) - V_-(s))/V_e(s)$ .
- (c) Trouver la limite de ces fonctions de transfert quand  $A \rightarrow \infty$ .
- (d) Application numérique pour :  $Z_1(s) = R$ ,  $Z_2(s) = aR$ , avec  $a = 100$ . Le gain  $A$  et la bande passante  $\omega_p$  sont déterminés à partir de la réponse fréquentielle donnée à la Figure 17. Calculer le produit gain  $\times$  bande passante, en boucle ouverte et en boucle fermée.

On considère désormais un AOP idéal (rétroaction sur la sortie  $V_-$ ) :

- les courants de l'entrée non-inverseuse et l'entrée inverseuse sont  $i_+ = i_- = 0$  ;
- en régime linéaire  $\Rightarrow V_+ = V_-$ .

4. Trouver à nouveau la fonction de transfert  $V_s(s)/V_e(s)$  pour le montage inverseur.

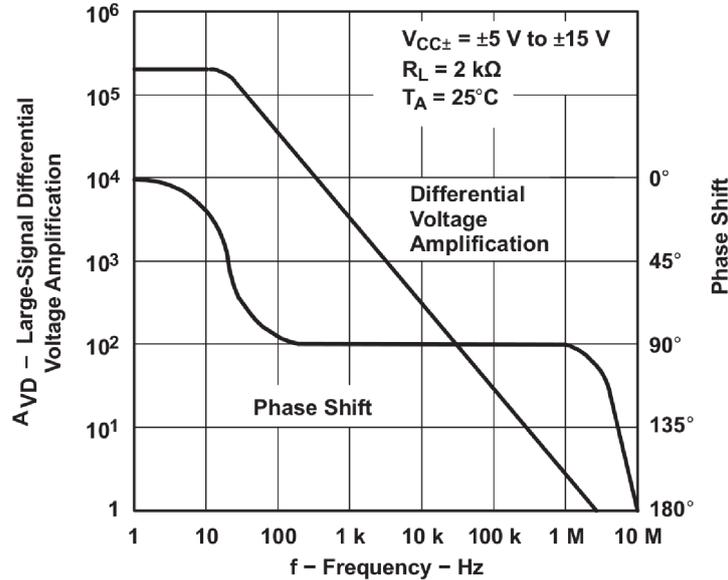


FIGURE 17 – Réponse fréquentielle d'un AOP TL082 en boucle ouverte

5. Donner les schémas et les relations entrée-sortie pour les configurations suivantes : amplificateur sommateur et amplificateur soustracteur.
6. Trouver la fonction de transfert  $V_s(s)/V_e(s)$  pour le montage de la Figure 18. Que représente cette fonction de transfert ?

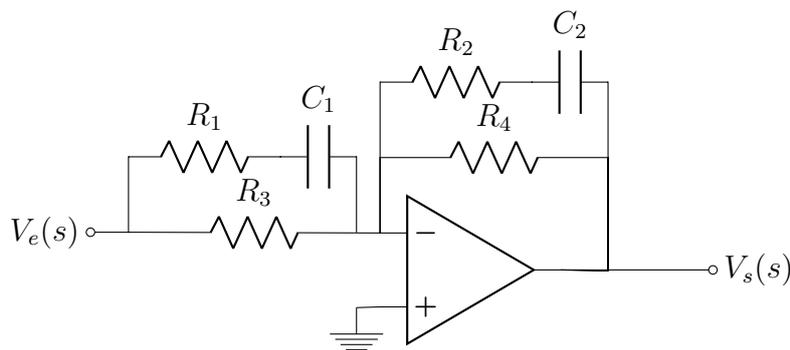


FIGURE 18 – Circuit correcteur à base d'AOP

7. Trouver la fonction de transfert pour le montage de la Figure 18 dans les deux cas :
  - $R_1 = \infty, C_1 = 0$  et  $R_4 = \infty$  ;
  - $R_2 = \infty, C_2 = 0$  et  $R_3 = \infty$ .

8. En déduire un montage à base d'AOP permettant de réaliser le correcteur de type PID :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + \frac{K_d s}{\tau_d s + 1}$$

Application numérique pour :  $K_p = 6.5$ ,  $K_i = 5$ ,  $K_d = 0.3$  et  $\tau_d = 0.02$ .

9. Trouver la fonction de transfert d'un correcteur qui permet d'avoir :
- un déphasage de  $+40^\circ$  à  $\omega = 107 \text{ rad s}^{-1}$  ;
  - un gain égal à 6.02 dB en basse fréquence.
- En déduire un montage à base d'AOP permettant de réaliser ce correcteur.