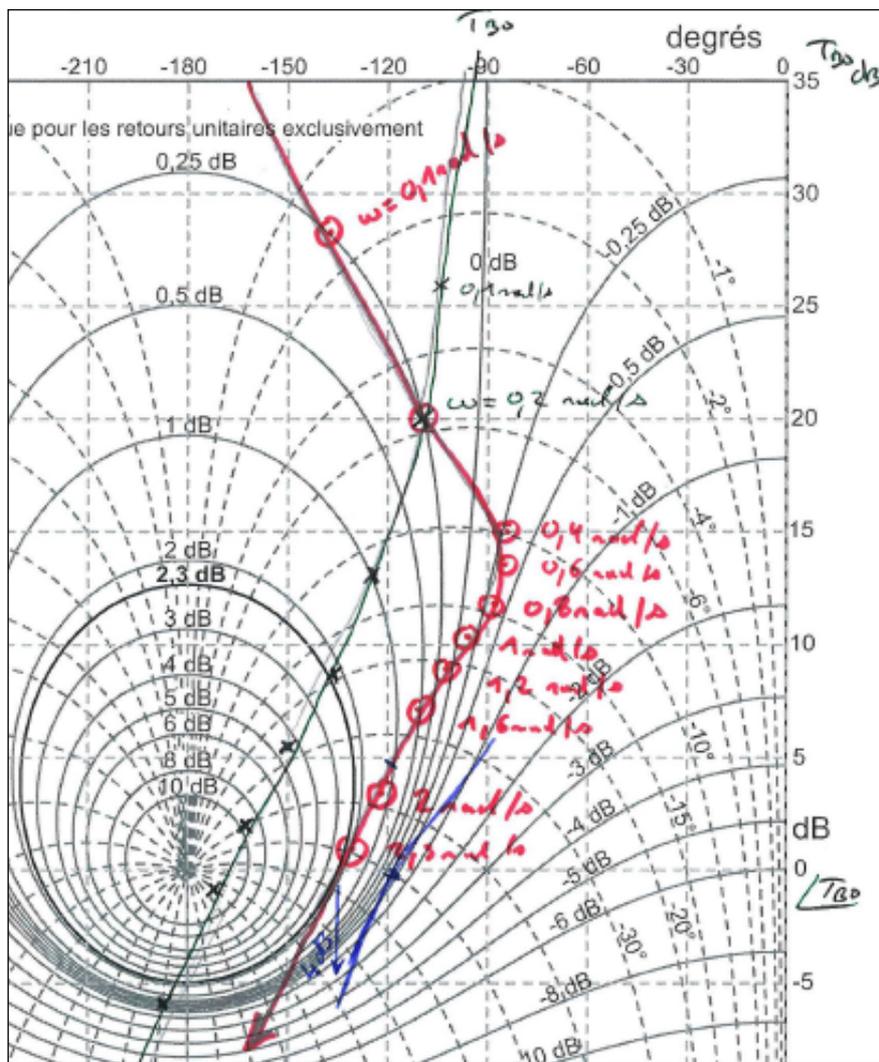


Automatique Linéaire 1 – Travaux Dirigés

1A ISMIN



TD 1 – Introduction, modélisation, outils.

Exercice 1.1 : Calcul de la réponse d'un 2nd ordre à une rampe

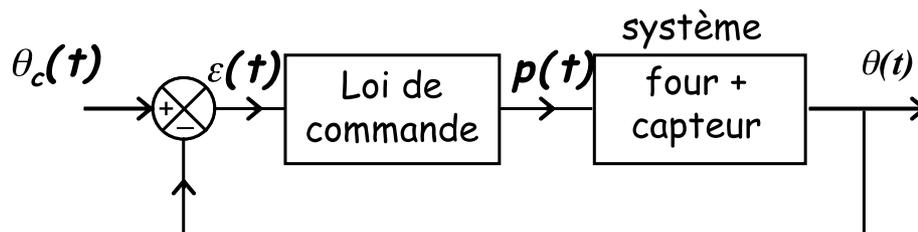
On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 3 \cdot \frac{ds}{dt} + 2 \cdot s(t) = +e(t)$$

Calculer la réponse de ce système à une rampe d'entrée $e(t) = t$.

Exercice 1.2 : Asservissement de température d'un four (1^{er} ordre) de type proportionnelle dérivée.

On considère l'asservissement de température du système constitué d'un four et d'un capteur de température associé, représenté figure suivante :



Avec :

- $\theta_c(t)$ tension de consigne [V]
Elle représente la température de consigne désirée pour le four (par rapport à la température ambiante).
- $\theta(t)$ tension de mesure [V]
C'est la tension image de la température intérieure du four délivrée par le capteur (exprimée par rapport à la température ambiante).
- $p(t)$ puissance électrique délivrée au four [W].
- $\varepsilon(t)$ erreur entre la consigne et la mesure [V].

La loi de commande est telle que :

$$p(t) = K_c \cdot \left[\varepsilon(t) + \tau_d \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right] \quad \text{Eq. 1}$$

Avec K_c gain statique
 τ_d constante de dérivation

Et les équations de fonctionnement du système conduisent à :

$$\theta(t) + \tau \cdot \frac{d\theta(t)}{dt} = K \cdot p(t) \quad \text{Eq. 2}$$

Avec τ constante de temps du système
 K gain statique du système

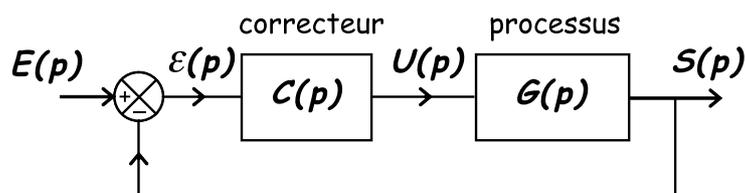
1. Exprimer l'équation différentielle liant $\theta_c(t)$ et $\theta(t)$.
2. Donner la transformée de Laplace de l'équation différentielle trouvée au 1. (à $t = 0$ on a $\theta(0) = 0$)
 La mettre sous la forme $\Theta(p) = G(p) \cdot \Theta_c(p)$
3. On considère une consigne de la forme : $\theta_c(t) = A_0 \cdot \Gamma(t)$ A_0 constante réelle.
 Quelles sont alors les valeurs initiales $\theta(0^+)$ et finale $\theta(+\infty)$ de $\theta(t)$? Conclusions ?
4. Exprimer $P(p)$ en fonction de $\Theta_c(p)$.
 En déduire les valeurs initiale et finale de la commande $p(t)$ pour $\theta_c(t) = A_0 \cdot \Gamma(t)$.
 Conclusion ?
5. On considère $\tau_d = \tau = 60 \text{ s}$, $K = 0,01 \text{ V/W}$, et $A_0 = 7$.
 Tracer sur un même graphe : $\theta_c(t)$, $\theta(t)$, et $p(t)$ pour $K_c = 100$. Commentaire ?

Exercice 1.3 : Asservissement du 2nd ordre.

Un processus physique est modélisé par une fonction de transfert du 2nd ordre :

$$G(p) = \frac{G_0}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad , G_0 = 1, \tau_1 = 10 \text{ s}, \tau_2 = 2 \text{ s}$$

Ce processus est inséré dans une boucle d'asservissement contenant un régulateur proportionnel : $C(p) = K$.



1. a. Déterminer l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée :
 $H(p) = S(p)/E(p)$ et la mettre sous la forme canonique :

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + 2m \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

En déduire les expressions des paramètres de $H(p)$:

H_0 gain statique

m coefficient d'amortissement

ω_0 pulsation propre non amortie

En fonction de τ_1 , τ_2 , G_0 , et K .

- b. Calculer la valeur de K pour obtenir $m = 0,7$.
2. Dans la suite de l'exercice, la consigne est un échelon unitaire et K est réglé tel que $m = 0,7$.
- On se place en régime permanent, déterminer l'expression de $s(+\infty)$ et calculer sa valeur.
 - Exprimer $\varepsilon_0(+\infty) = e(+\infty) - s(+\infty)$, la calculer.
 - Calculer la valeur du $t_{r5\%}$.
 - Représenter l'allure de $s(t)$.
3. Pour diminuer l'erreur de position, on augmente la valeur de K .
- Calculer la valeur de K permettant d'obtenir $\varepsilon_0(+\infty) = 0,05 \text{ V}$.
 - En déduire la nouvelle valeur du coefficient d'amortissement m .
 - Calculer l'amplitude relative (en %) du premier dépassement D_1 .
 - Calculer la nouvelle valeur du $t_{r5\%}$.
 - Représenter l'allure de $s(t)$.
 - Calculer $u(0^+)$. Sachant que cette grandeur de commande est maximale à l'instant $t = 0^+$, en déduire la dynamique nécessaire à la sortie du correcteur pour que l'asservissement fonctionne toujours en régime linéaire.

TD 2 – Stabilité des systèmes asservis.

Exercice 2.1 : Stabilité d'un système du 3^{ème} ordre (Routh)

On considère un système de F.T.B.O. :

$$T(p) = \frac{K}{p \cdot (p+1) \cdot (p+2)} \quad K > 0$$

Déterminer à l'aide du critère de Routh les conditions de stabilité de ce système en boucle fermée lorsqu'il est placé dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.

Exercice 2.2 : Réglage d'un système avec deux conditions de stabilité

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte :

$$T(p) = \frac{K}{p(p+100)^2} \quad K > 0$$

Déterminer les conditions sur K de manière à ce que le système soit caractérisé par une marge de phase supérieure à 45° et par une marge de gain supérieure à 6 dB.

Exercice 2.3 : Mise en évidence des marges sur les diagrammes de Bode

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte :

$$T(p) = \frac{K}{(p+10)^3} \quad K > 0$$

Déterminer la valeur de K qui assure au système une marge de gain égale à 6 dB. Calculer la marge de phase pour cette valeur de K .

Tracer les diagrammes de Bode du système en boucle ouverte en y faisant apparaître ces marges.

Exercice 2.4 : Nyquist

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte :

$$T(p) = \frac{K}{p(p+1)(p+2)} \quad K > 0$$

1. Tracer son diagramme de Nyquist (le tracé préalable d'un diagramme de Bode est une aide).
2. Etudier sa stabilité.

Exercice 2.5 : Nyquist

On considère un système de F.T.B.O. :

$$T(p) = \frac{K.(1 + \tau_1 p)}{p^2.(1 + \tau_2 p).(1 + \tau_3 p)} \quad \tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > 0$$

K gain positif réglable

1. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de la B.O. pour le cas particulier $\tau_1 = 1$ s, $\tau_2 = 0,1$ s, $\tau_3 = 0,01$ s, et $K = 1$.
2. Chercher la pulsation ω_s non nulle pour laquelle $\Phi_{BO}(\omega_s) = -180^\circ$. A quelle condition sur τ_1 , τ_2 , et τ_3 existe-t-elle ?
3. Tracer l'allure du lieu de Nyquist de la boucle ouverte selon que cette condition est réalisée ou non.
4. En déduire les conditions de stabilité en boucle fermée pour les valeurs particulières des constantes de temps données au 1. Retrouver ces conditions à l'aide du critère du revers.
5. Etablir les conditions de stabilité à l'aide du critère de Routh (sur les constantes de temps et sur K).

Exercice 2.6 : Nyquist

On considère un système de F.T.B.O. :

$$T(p) = \frac{K}{(1 + \tau_1 p).(1 + \tau_2 p).(1 - \tau_3 p)} \quad \tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > 0$$

K gain positif réglable

1. Tracer le diagramme de Bode asymptotique de la boucle ouverte.
2. Tracer l'allure du lieu de Nyquist de la boucle ouverte.
3. En déduire les conditions de stabilité en boucle fermée. Quel serait le résultat par application du critère du revers ? Conclusion ?

Exercice 2.7 : Nyquist

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte :

$$T(p) = \frac{10^4}{p(p+10)(p+100)}$$

1. Tracer son diagramme de Bode asymptotique (module et phase).
2. En déduire son diagramme de Nyquist. Vous démontrerez l'existence d'une asymptote à la courbe de Nyquist lorsque $\omega \rightarrow 0$.

TD 3 – Correction des systèmes asservis.

Exercice 3.1 : Correction à avance de phase.

La fonction de transfert en boucle ouverte d'un système asservi s'écrit :

$$T(p) = \frac{C}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)} \quad \tau_1 = 0,16 \text{ s} \quad \tau_2 = 0,02 \text{ s}$$

C réel et positif

- Tracer le diagramme de Bode asymptotique de $T(p)$ (gain et phase) pour $C = 1$, et préciser les points remarquables.
- Le système est à retour unitaire. Calculer $C = C_{max}$ qui rend le système instable en boucle fermée.
- Retrouver C_{max} en appliquant le critère de Routh.
- Calculer $C = C_0$ qui assure une marge de phase de 45° .
- Pour une entrée indicielle d'amplitude X_c , expliciter la transformée de Laplace de la sortie $Y(p)$ du système bouclé. En déduire la valeur de $y(+\infty)$.
- Calculer l'erreur de traînage du système bouclé pour une entrée en rampe : $x_c(t) = X_c.t \quad (\forall t > 0)$.
- On désire améliorer le comportement du système à l'aide d'un correcteur qui présente la fonction de transfert suivante :

$$C(p) = \frac{(1 + \alpha.p)}{(1 + \beta.p)} \quad \alpha, \beta \text{ réels et positifs}$$

Tracer le diagramme de Bode de $C(p)$ pour un comportement dit à avance de phase. On posera : $k = \alpha/\beta$.

- Donner la valeur de α permettant de corriger intégralement le pôle dominant. On impose le déphasage maximal apporté par le correcteur : $\varphi_{max} = 45^\circ$. Et, on veut obtenir au final après correction une marge de phase de 45° . Calculer les valeurs de α , β , et $C = C_{0c}$ permettant de remplir ces conditions.
- Tracer dans le plan de Black les fonctions de transfert en boucle ouverte du système corrigé et non corrigé à partir des valeurs données dans le tableau suivant (elles correspondent au cas $C = C_0$) :

ω (rad/s)	1	2	5	10	17,5	30	50
$ T(j\omega) $ dB	16,3	9,9	0,22	-9,3	-18,4	-28,3	-38
$\text{Arg}(T(j\omega))$	-100	-110	-134	-160	-180	-199	-218
$ C(j\omega).T(j\omega) $ dB	16,4	10,3	2,3	-4	-9,8	-16,7	-25
$\text{Arg}(C(j\omega).T(j\omega))$	-93	-95,4	-103,4	-116	-134	-160	-189

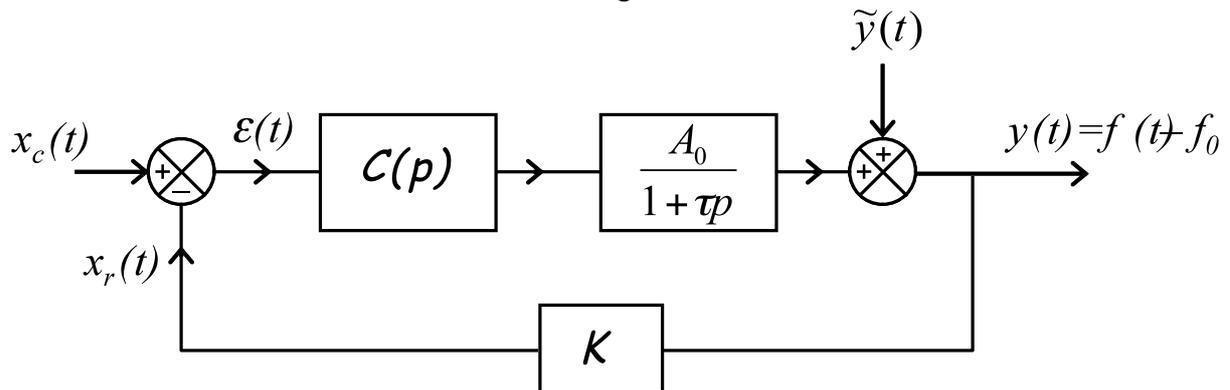
Retrouver la valeur de C_{0c} à l'aide du diagramme.

10. Quelle est la fréquence de résonance du système corrigé (pour $C = C_{0c}$) en boucle fermée? Dessiner l'allure approchée du module de la F.T.B.F. en dB (1^{er} diagramme de Bode). Quel sont sa bande passante à -3 dB, et son temps de réponse à 5% ? Comparer ces valeurs à celles obtenues sans correction ($C = C_0$).

Exercice 3.2 : Asservissement de fréquence d'un laser Hélium-Néon.

La mesure de la fréquence f d'émission d'un laser hélium-néon est réalisée à l'aide d'un filtre optique sélectif dont le coefficient de transmission varie rapidement en fonction de la différence $f - f_0$, f_0 étant la fréquence à laquelle le laser est susceptible d'émettre.

Après conditionnement électronique du signal issu de ce filtre, on dispose d'un signal électrique $x_r(t) = K.[f(t) - f_0]$ avec K une constante. Ce signal de mesure est utilisé au sein d'un asservissement dont le schéma est donné figure suivante :



On a : $K = 5.10^{-8} \text{ V/Hz}$ $A_0 = 90 \text{ MHz/V}$ $\tau = 0,1 \text{ ms}$

$\tilde{y}(t)$ est un signal perturbateur.

I. Correction proportionnelle.

$C(p)$ est un correcteur proportionnel : $C(p) = C_0$.

- Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $T_{BO}(p)$ pour $C_0 = 1$ et $\tilde{y}(t) = 0$.
- Calculer C_0 afin d'obtenir une pulsation de transition de 10^5 rad/s .
- Calculer alors la réponse en boucle fermée à un échelon de tension à l'entrée.
- $\tilde{y}(t)$ est maintenant un signal perturbateur contenant une composante continue ainsi

qu'une composante sinusoïdale de pulsation 500 rad/s : $\tilde{y}(t) = 5.10^8 + 10^7 \cdot \cos(500t)$

Quel est l'effet sur la sortie d'un tel signal perturbateur ?

II. Correction intégrale.

$C(p)$ est un correcteur intégral : $C(p) = C_0/p$.

- Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $T_{BO}(p)$ pour $C_0 = 1$ et $\tilde{y}(t) = 0$.

- b. Calculer C_0 afin d'obtenir une marge de phase de 45° .
- c. Donner l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée et déterminer la valeur du temps de réponse à 5% à partir des abaques (pour un 2nd ordre).
- d. $\tilde{y}(t)$ prend la même valeur qu'au I.d. Quel est l'effet sur la sortie d'un tel signal perturbateur ?

III. Correction proportionnelle et intégrale.

$C(p)$ est un correcteur proportionnel et intégral : $C(p) = C_0 (1 + \tau p) / p$.

- a. Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte $T_{BO}(p)$ pour $C_0 = 1$ et $\tilde{y}(t) = 0$.
- b. Calculer C_0 afin d'obtenir une pulsation de transition de 10^5 rad/s.
- c. Déterminer la valeur du temps de réponse à 5% lorsque l'entrée est un échelon de tension.
- d. $\tilde{y}(t)$ prend la même valeur qu'au I.d. Quel est l'effet sur la sortie d'un tel signal perturbateur ?

IV. Bilan.

Discuter et comparer les performances des trois correcteurs envisagés précédemment.

Exercice 3.3 : Correcteur P.I.D.

On considère le système (non corrigé) de fonction de transfert en boucle ouverte :

$$T_{BO}(p) = \frac{4}{p \cdot (p+1) \cdot (p+2)}$$

Il est inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire, comprenant un correcteur, $C(p)$, de type P.I.D. tel que :

$$C(p) = K \cdot \left(1 + \frac{1}{\tau_i \cdot p} + \tau_d \cdot p \right) \quad \text{avec } \tau_d = \frac{\tau_i}{4}$$

4. Représenter $T_{BO}(j\omega)$ dans le plan de Black.

On donne :

ω (rad/s)	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,6	2	2,5
$ T_{BO} $ dB	20	13	8,7	5,2	2	-1	-5,4	-10,5	-15
$\text{Arg}(T_{BO})$ (degrés)	-107	-123	-138	-150	-162	-172	-186	-200	-210

On pourra également utiliser l'abaque A5.1 donnée ci-après pour tracer le lieu de Black de la FTBO.

5. Le correcteur P.I.D. est tel que $K = 1$ et on pose $u = \tau_i \cdot \omega$.

Calculer $|C(j\omega)|_{\text{dB}}$ et $\text{Arg}(C(j\omega))$ pour $u = 1 \ 2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ 12 \ 16 \ 20 \ 25$.

6. Le P.I.D. est calculé par la méthode du pivot.

On choisit comme pivot le point $\omega = 0,2 \text{ rad/s}$, en déduire τ_i .

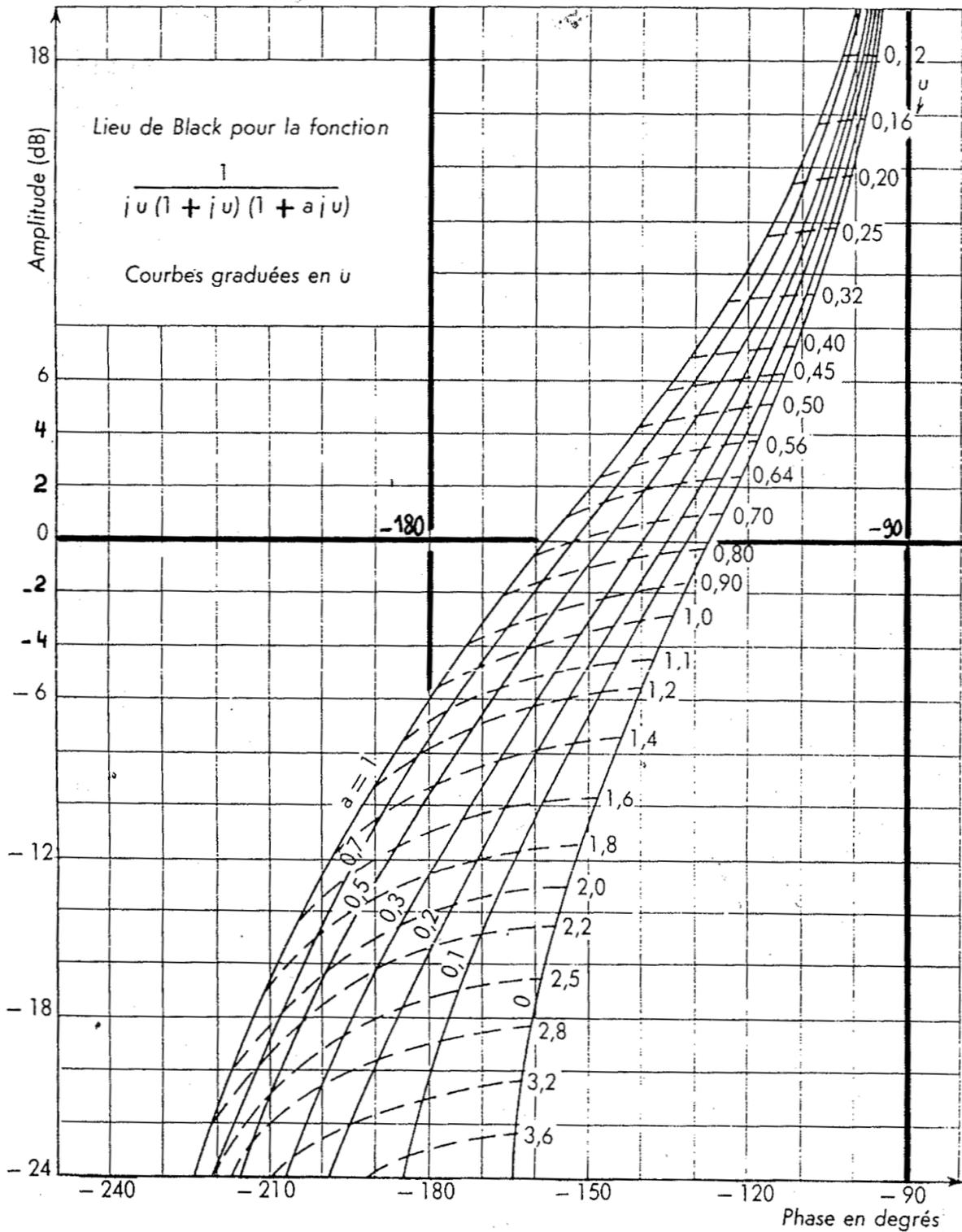
Dessiner la FTBO corrigée pour $K = 1$:

$$T_{BOC}(p) = C(p) \cdot T_{BO}(p)$$

Déterminer la valeur de K permettant d'obtenir un coefficient d'amortissement $m = 0,7$ pour le second ordre dominant équivalent.

7. Quelles sont les erreurs à l'échelon, à la rampe, et à la parabole unitaire ?

A5.1. LIEUX DE BLACK DE $\frac{1}{ju(1+ju)(1+aju)}$



Bibliographie.

"Cours d'automatique, tome 2 – Asservissement, régulation, commande analogique", Maurice Rivoire, Jean-Louis Ferrier, Ed. Eyrolles.

"Electronique Tome 2 : Systèmes bouclés linéaires, de communication et de filtrage : Cours et exercices", François Manneville, Jacques Esquieu, Ed. Dunod.

"Automatique: Commande des systèmes linéaires" , Philippe de Larminat, Ed. Hermes.

"Feedback Control of Dynamic Systems", Franklin G.F., Powell J.D., Naemi-Emani A., Addison-Wesley.

Beaucoup de liens de bonne qualité (dans tous les domaines) sur :

<http://pagesperso-orange.fr/xcotton/electron/coursetdocs.htm>

"Cours d'automatique 1^{ère} année", Jean-Paul Bourguet, cours cycle ISMIN.

Annexe 1 – Transformée de Laplace.

Transformée de Laplace monolatérale.

$$TL[f(t)] = F(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-pt} dt \quad p = \sigma + j\omega$$

Linéarité.

$$a.f(t) + b.g(t) \xrightarrow{TL} a.F(p) + b.G(p)$$

Convolution.

$$(f * g)(t) \xrightarrow{TL} F(p).G(p)$$

Fonction de transfert – $H(p)$.

$$y(t) = (u * h)(t) \xrightarrow{TL} Y(p) = U(p).H(p) \quad H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

Dérivation en temps.

$$TL[f'(t)] = p.F(p) - f(0^-)$$

Intégration.

$$TL\left[\int_0^t f(\theta)d\theta\right] = \frac{1}{p}.F(p)$$

Dérivation en p .

$$\frac{dF(p)}{dp} = TL[-t.f(t)]$$

Translation en p .

$$TL[e^{at}.f(t)] = F(p - a)$$

Théorème du retard temporel.

$$g(t) = f(t - \tau) \rightarrow TL[g(t)] = e^{-p\tau}.F(p)$$

Théorème de la valeur initiale.

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} p.TL[f(t)] = f(0^+)$$

Théorème de la valeur finale.

$$\lim_{p \rightarrow 0} p.TL[f(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = f(+\infty)$$

Transformées de Laplace usuelles.

$$\text{Dirac : } \delta(t) \xrightarrow{TL} 1$$

$$\text{Échelon : } \Gamma(t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{p}$$

$$\text{Rampe : } t \xrightarrow{TL} \frac{1}{p^2}$$

$$e^{-a.t} \xrightarrow{TL} \frac{1}{p+a}$$

$$t.e^{-a.t} \xrightarrow{TL} \frac{1}{(p+a)^2}$$

$$\sin(\omega t) \xrightarrow{TL} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$\cos(\omega t) \xrightarrow{TL} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

$$e^{-a.t}.\cos(\omega t) \xrightarrow{TL} \frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$$

Transformées de Laplace inverses usuelles ($f(t)$ causale) :

$$\frac{1}{p^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad n \geq 1$$

$$\frac{1}{1+\tau.p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{p.(1+\tau.p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 - e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{p^2.(1+\tau.p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t - \tau + \tau.e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1+a.p}{1+\tau.p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{a}{\tau} \left(\delta(t) + \frac{\tau-a}{a\tau} e^{-t/\tau} \right)$$

$$\frac{1+a.p}{p.(1+\tau.p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 + \frac{a-\tau}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1+a.p}{p^2.(1+\tau.p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t + (a-\tau) - (a-\tau)e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(e^{-t/\tau_1} - e^{-t/\tau_2} \right)$$

$$\frac{1}{p.(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2} \right)$$

$$\frac{1}{p^2.(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t - (\tau_1 + \tau_2) - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \left(\tau_2^2 e^{-t/\tau_2} - \tau_1^2 e^{-t/\tau_1} \right)$$

$$\frac{1+a.p}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\tau_1 \tau_2 (\tau_1 - \tau_2)} \left[\tau_2 (\tau_1 - a) e^{-t/\tau_1} - \tau_1 (\tau_2 - a) e^{-t/\tau_2} \right]$$

$$\frac{1+a.p}{p.(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \left[(\tau_1 - a) e^{-t/\tau_1} - (\tau_2 - a) e^{-t/\tau_2} \right]$$

$$\frac{1+a.p}{p^2.(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t + (a - \tau_1 - \tau_2) + \frac{\tau_1 (\tau_1 - a)}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_2 (\tau_2 - a)}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2}$$

$$\frac{1}{(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{p.(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{p^2.(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t - 2\tau + (t + 2\tau) e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1+a.p}{(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \left(\frac{\tau-a}{\tau^3} t + \frac{a}{\tau^2} \right) e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1+a.p}{p.(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 1 + \left(\frac{a-\tau}{\tau^2} t - 1 \right) e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1+a.p}{p^2.(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} t + a - 2\tau + \left[t \left(1 - \frac{a}{\tau} \right) + 2\tau - a \right] e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{(1+\tau.p)^n} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\tau^n} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-t/\tau}$$

$$\frac{p}{(1+\tau.p)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{\tau^3} (\tau - t) e^{-t/\tau}$$

$$\frac{1}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)(1+\tau_3.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} (\tau_1 - \tau_2)(\tau_2 - \tau_3)(\tau_3 - \tau_1) \left[\tau_1 \cdot (\tau_3 - \tau_2) e^{-\tau_1 t} + \tau_2 \cdot (\tau_1 - \tau_3) e^{-\tau_2 t} + \tau_3 \cdot (\tau_2 - \tau_1) e^{-\tau_3 t} \right]$$

$$\frac{1+a.p}{(1+\tau_1.p)(1+\tau_2.p)(1+\tau_3.p)} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{1}{(\tau_1 - \tau_2)(\tau_2 - \tau_3)(\tau_3 - \tau_1)} \cdot \left[(\tau_1 - a)(\tau_3 - \tau_2) e^{-\tau_1 t} + (\tau_2 - a)(\tau_1 - \tau_3) e^{-\tau_2 t} + (\tau_3 - a)(\tau_2 - \tau_1) e^{-\tau_3 t} \right]$$

$$\frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \cdot e^{-m\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-m^2} \cdot t\right) \quad 0 < m < 1$$

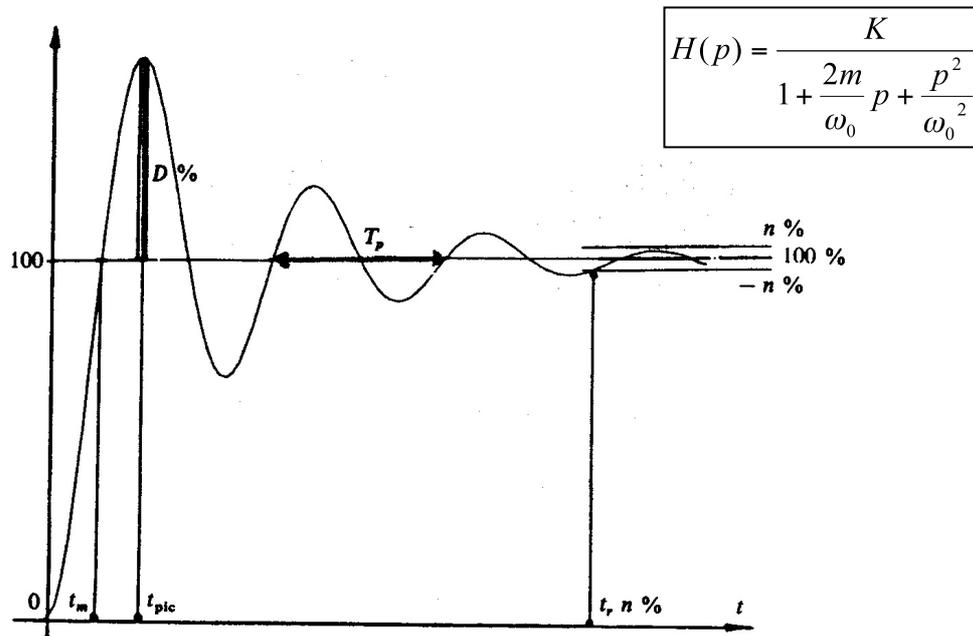
$$\frac{p}{1 + \frac{2m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \cdot e^{-m\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-m^2} \cdot t + \pi - \arccos m\right)$$

$$\frac{1+a.p}{1 + \frac{2m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} \xrightarrow{TL^{-1}} \frac{\omega_0}{\sqrt{1-m^2}} \cdot \sqrt{1-2am\omega_0 + a^2\omega_0^2} \cdot e^{-m\omega_0 t} \cdot \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-m^2} \cdot t + \arctan \frac{a\omega_0 \sqrt{1-m^2}}{1-am\omega_0}\right)$$

$$\frac{1}{p \cdot \left(1 + \frac{2m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)} \xrightarrow{TL^{-1}} 1 - \frac{1}{\sqrt{1-m^2}} \cdot e^{-m\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-m^2} \cdot t + \arccos m\right)$$

$$\frac{1}{p^2 \cdot \left(1 + \frac{2m}{\omega_0} \cdot p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)} \xrightarrow{TL^{-1}} t - \frac{2m}{\omega_0} - \frac{1}{\omega_0 \cdot \sqrt{1-m^2}} \cdot e^{-m\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1-m^2} \cdot t + 2 \cdot \arccos m\right)$$

Annexe 2 – Systèmes linéaires du second ordre.



Pulsation de résonance	$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2.m^2}$
Pulsation de coupure	$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - 2.m^2 + \sqrt{1 + (1 - 2.m^2)^2}}$
Facteur de résonance	$M = \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$
Facteur de qualité	$Q = \frac{1}{2m}$
Temps de montée	$t_m = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}} (\pi - \arccos m)$
Temps de réponse à n% ($m < 0,7$)	$t_r \cong \frac{1}{\omega_0 . m} . \ln\left(\frac{100}{n}\right)$
Temps de pic	$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$
Pseudo-période	$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - m^2}}$
Dépassement	$D\% = 100 . e^{-\frac{\pi . m}{\sqrt{1 - m^2}}}$
Nombre d'oscillations complètes	$n \cong Q = \frac{1}{2m}$

m	$t_m \omega_0$	$t_{r, 5\%} \omega_0$	$t_{pic} \omega_0$	$T_p \omega_0$	$D \%$	ω_r / ω_0	ω_c / ω_0	ω_c / ω_r	M_{dB}	m
0,1	1,68	30	3,16	6,31	73	0,99	1,54	1,56	14	0,1
0,15	1,74	20	3,18	6,36	62	0,98	1,53	1,56	10,5	0,15
0,2	1,81	14	3,21	6,41	53	0,96	1,51	1,57	8,1	0,2
0,25	1,88	11	3,24	6,49	44	0,94	1,48	1,59	6,3	0,25
0,3	1,97	10,1	3,29	6,59	37	0,91	1,45	1,61	4,8	0,3
0,35	2,06	7,9	3,35	6,71	31	0,87	1,42	1,63	3,6	0,35
0,4	2,16	7,7	3,43	6,86	25	0,82	1,37	1,67	2,7	0,4
0,45	2,28	5,4	3,52	7,04	21	0,77	1,33	1,72	1,9	0,45
0,5	2,42	5,3	3,63	7,26	16	0,71	1,27	1,8	1,2	0,5
0,55	2,58	5,3	3,76	7,52	12,6	0,63	1,21	1,93	0,7	0,55
0,6	2,77	5,2	3,93	7,85	9,5	0,53	1,15	2,17	0,3	0,6
0,65	3	5	4,13	8,27	6,8	0,39	1,08	2,74	0,1	0,65
0,7	3,29	3	4,4	8,8	4,6	0,14	1,01	7,14	0	0,7
0,75	3,66	3,1	4,75	9,5	2,84	-	0,94	-	-	0,75
0,8	4,16	3,4	5,24	10,5	1,52	-	0,87	-	-	0,8
0,85	4,91	3,7	5,96	11,93	0,63	-	0,81	-	-	0,85
0,9	6,17	4	7,21	14,41	0,15	-	0,75	-	-	0,9
0,95	9,09	4,1	10,06	20,12	0,01	-	0,69	-	-	0,95

