



Université de Liège
Faculté des Sciences Appliquées
Département d'Électricité,
Électronique et Informatique
(Institut Montefiore)

CIRCUITS ÉLECTRIQUES

Exercices

Patricia ROUSSEAU,
Chargé de Cours.

Janvier 2009

Partie I
ENONCES

Chapitre 1

Régime continu

Les exercices regroupés dans ce chapitre concernent des circuits fonctionnant en régime continu, c'est-à-dire des circuits dans lesquels les excitations (sources de tension et de courant) délivrent des signaux constants. Ces exercices exploitent les notions des chapitres 1 à 4 du cours théorique.

Exercice 1.1

Déterminer le bilan de puissance pour chacun des 3 circuits ci-dessous.

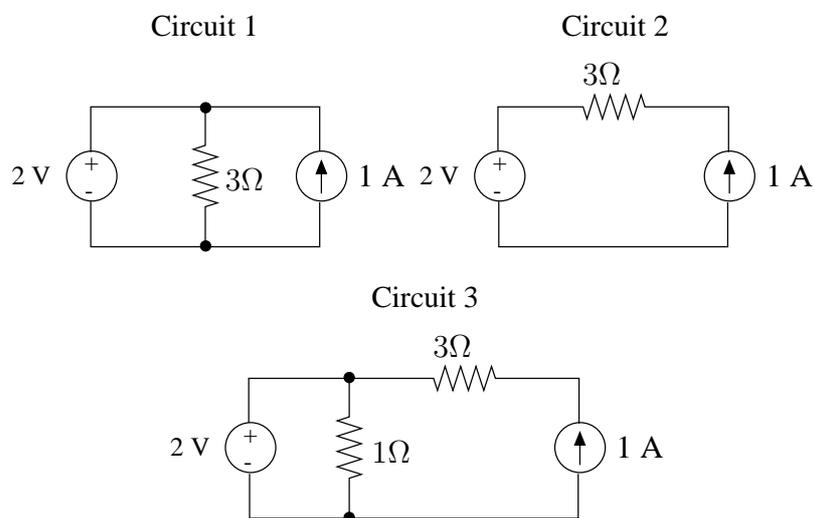


FIG. 1.1

Rép.: Circuit 1 : $p_R = \frac{4}{3}$ W, $p_J = 2$ W, $p_E = -\frac{2}{3}$ W
Circuit 2 : $p_R = 3$ W, $p_J = 5$ W, $p_E = -2$ W
Circuit 3 : $p_{1\Omega} = 4$ W, $p_{3\Omega} = 3$ W, $p_E = 2$ W, $p_J = 5$ W

Exercice 1.2

Déterminer le courant I_0 débité par la source V_s du circuit de la Fig. 1.2 à l'aide des lois de Kirchhoff et de la loi d'Ohm.

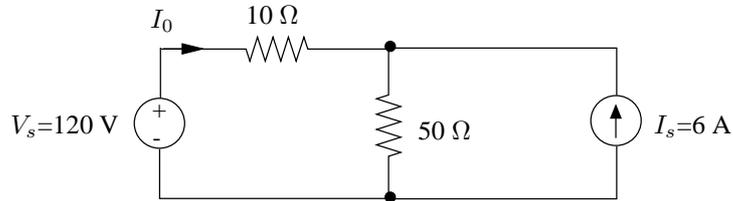


FIG. 1.2

Rép.: $I_0 = -3$ A

Exercice 1.3

Déterminer la résistance équivalente

1. à l'association en série des n résistances R_1, R_2, \dots, R_n .
2. à l'association en parallèle des n résistances R_1, R_2, \dots, R_n .
3. Déterminer la résistance équivalente du dipôle de la Fig. 1.3 à l'aide de réductions successives d'associations d'éléments en série ou en parallèle.

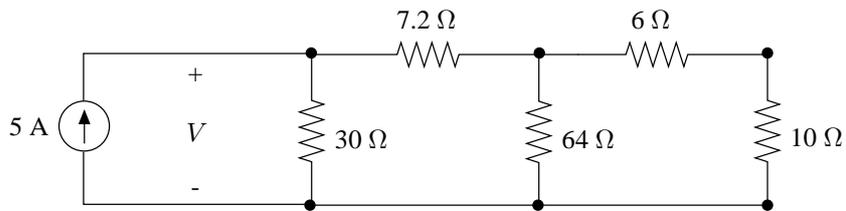


FIG. 1.3

Rép.: 1) $R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$
 2) $G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$
 3) $R_{eq} = 12 \Omega$

Exercice 1.4

Le diviseur potentiométrique

1. Déterminer l'expression des tensions V_1 et V_2 aux bornes des résistances R_1 et R_2 du diviseur potentiométrique de la Fig. 1.4.

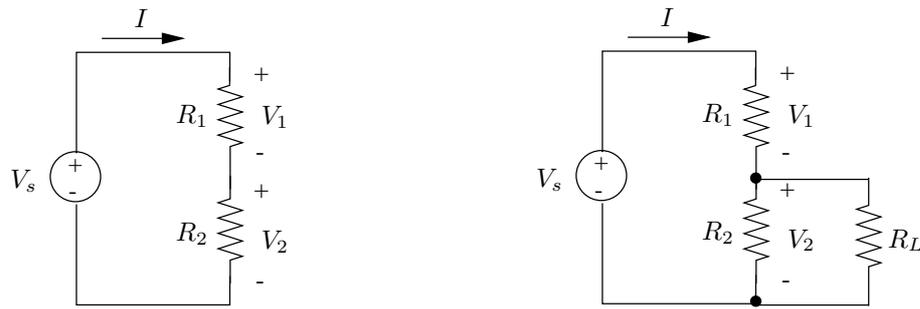


FIG. 1.4

2. On alimente une résistance de charge R_L par le tension V_2 . Déterminer sous quelle condition la valeur de V_2 est peu influencée par la résistance de charge R_L .

Exercice 1.5

Le diviseur de courant

Déterminer l'expression des courants I_1 et I_2 parcourant les résistances R_1 et R_2 de la Fig. 1.5.

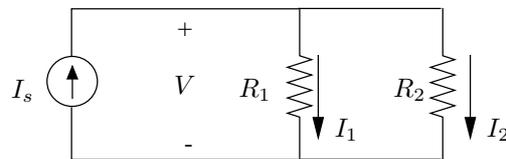


FIG. 1.5

Exercice 1.6

Sources réelles de tension et de courant

Les sources réelles de tension ou de courant ne présentent généralement pas la caractéristique idéale d'indépendance entre d.d.p. à leurs bornes et courant.

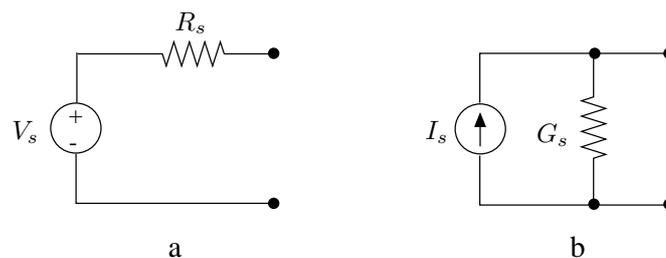


FIG. 1.6

Elles présentent en effet des pertes que l'on peut traduire par l'ajout d'une résistance interne R_s ou conductance G_s au modèle idéal. On modélise une source réelle de tension par un circuit de la forme de la Fig. 1.6.a et une source réelle de courant par un circuit de la forme de la forme de la Fig. 1.6.b

Montrer qu'une source réelle de tension alimentant une résistance de charge R_L se comporte comme une source idéale si $R_s \ll R_L$

Montrer qu'une source réelle de courant alimentant une résistance de charge R_L se comporte comme une source idéale si $G_s \ll G_L$.

Exercice 1.7

Equivalence de sources

Montrer, comme indiqué à la Fig. 1.7, qu'un dipôle "source de tension" peut être remplacé par un dipôle équivalent "source de courant".

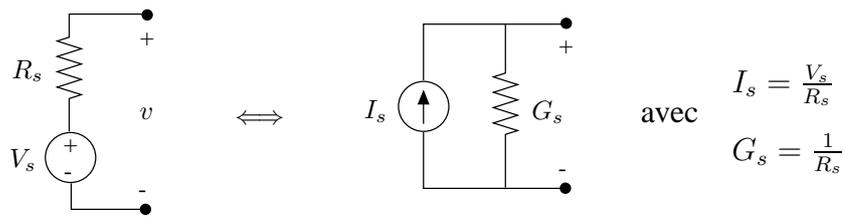


FIG. 1.7

Montrer, comme indiqué à la Fig. 1.8, qu'inversement, un dipôle "source de courant" peut être remplacé par un dipôle équivalent "source de tension".

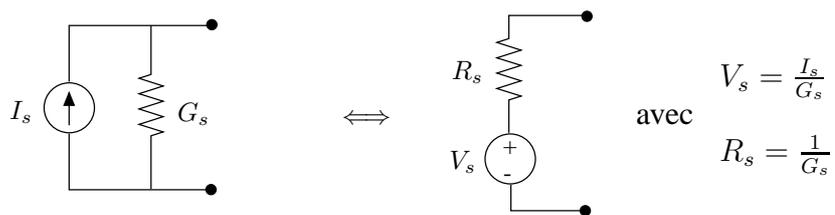
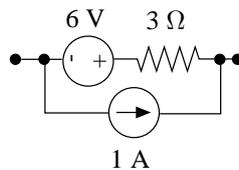


FIG. 1.8

Appliquer ces transformations pour réduire le dipôle ci-dessous à un dipôle équivalent "source de tension" ou "source de courant".



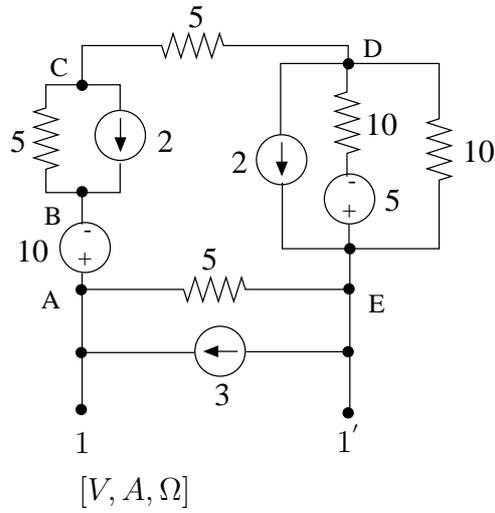


FIG. 1.9

Exercice 1.8

1. Réduire le circuit de la Fig. 1.9 à un dipôle équivalent comprenant une source de tension V_{eq} en série avec une résistance R_{eq} (dipôle “source de tension équivalente”).
2. Si on connecte à l'accès $11'$ une résistance de charge $R_L = 10\ \Omega$, calculer la puissance absorbée par R_L ainsi que l'état électrique complet du circuit.

Rép.: 1) $V_{eq} = 13.125\ \text{V}$, $R_{eq} = 3.75\ \Omega$
 2) $p_{R_L} = 9.112\ \text{W}$

Exercice 1.9

Calculer la valeur de la source de tension V_s de la Fig. 1.10 si le courant I_ϕ est égal à 5 A.

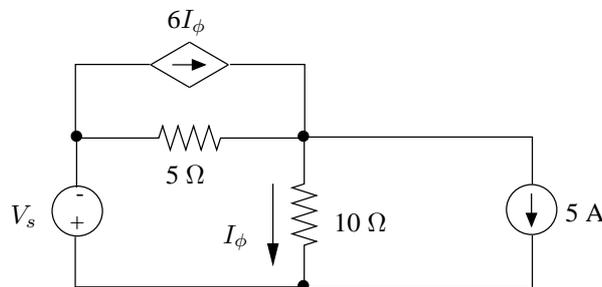


FIG. 1.10

Rép.: $V_s = 50\ \text{V}$

Exercice 1.10

Déterminer la tension V_0 aux bornes de la résistance de $3\text{ k}\Omega$ du circuit de la Fig. 1.11. Réaliser ce calcul en utilisant le théorème de superposition. Montrer ensuite que ce théorème ne peut s'appliquer au calcul des puissances consommées par les différents éléments du circuit.

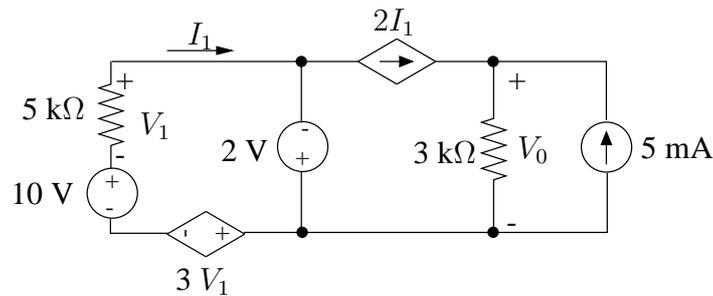


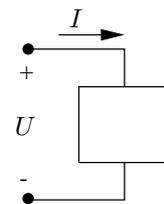
FIG. 1.11

Rép.: $V_0 = 7.8\text{ V}$

Exercice 1.11

La tension et le courant aux bornes d'un dipôle sont mesurés dans différentes situations. On relève les résultats suivants :

$U\text{ (V)}$	$I\text{ (A)}$
35	-3
50	0
65	3
80	6
95	9
110	12
125	15



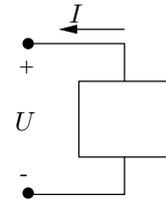
1. Construire, pour ce dipôle, un circuit équivalent constitué d'une source idéale de courant et d'une résistance.
2. Utiliser cet équivalent pour prédire la valeur du courant délivré à une résistance de $20\ \Omega$ connectée aux bornes du dipôle.

Rép.: 1) $I_{No} = 10\text{ A}$, $R_{No} = 5\ \Omega$
 2) $I = -2\text{ A}$

Exercice 1.12

La tension et le courant aux bornes d'un dipôle sont mesurés dans différentes situations. On relève les résultats suivants :

U (V)	I (A)
24	0
22	8
20	16
18	24
15	32
10	40
0	48



1. Est-il possible de construire un circuit équivalent, composé d'une source idéale de tension et d'une résistance, traduisant le fonctionnement de ce dipôle ?
2. Construire un tel équivalent valable dans la plage $0 < I < 24$ A.
3. Utiliser cet équivalent pour prédire la valeur du courant délivré à une résistance de 1Ω connectée aux bornes du dipôle. Le résultat trouvé est-il valide ?
4. Faire de même pour prédire le courant de court-circuit de ce dipôle. Le résultat trouvé est-il valide ?

Rép.: 2) $V_{Th} = 24$ V, $R_{Th} = \frac{1}{4} \Omega$
 3) $I = 19.2$ A

Exercice 1.13

Déterminer la résistance de charge R_L à connecter aux bornes AD du circuit de la Fig. 1.12 pour soutirer au circuit ci-dessous le maximum de puissance.

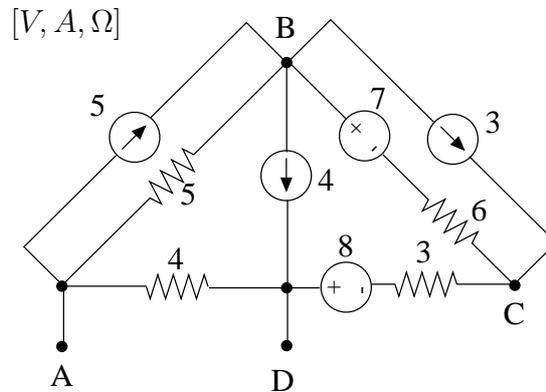


FIG. 1.12

Rép.: $R_L = 3.11 \Omega$, $p_{R_L} = 25.47$ W

Exercice 1.14

Déterminer le schéma équivalent de Thévenin du circuit de Fig. 1.13.

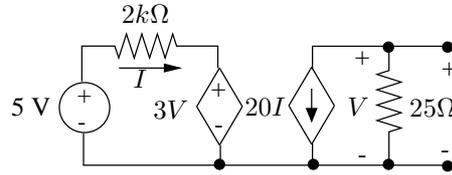


FIG. 1.13

Rép.: $V_{Th} = -5 \text{ V}$, $R_{Th} = 100 \text{ } \Omega$

Exercice 1.15

Etant donné le circuit de la Fig. 1.14 :

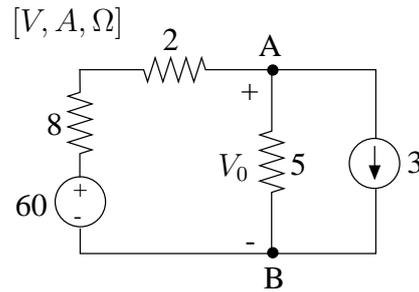


FIG. 1.14

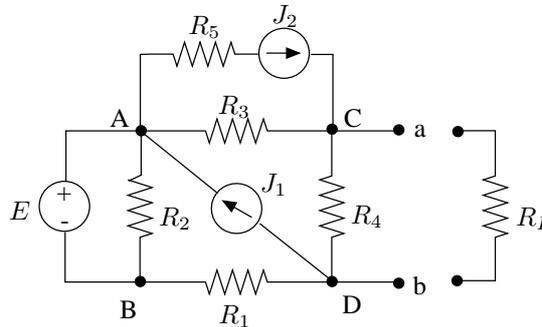
1. Déterminer la valeur de la tension V_0 aux bornes de la résistance de $5 \text{ } \Omega$. Déterminer tout d'abord pour cela le schéma équivalent de Norton du circuit vu de l'accès AB.
2. Calculer les puissances fournies par les deux sources indépendantes.
3. Si on connecte une résistance de $100 \text{ } \Omega$ en série avec la source de courant de 3 A ,
 - (a) que devient le schéma équivalent de Norton vu de l'accès AB ?
 - (b) Calculer dans ce cas, les puissances produites par les deux sources indépendantes.

Rép.: 1) $V_0 = 10 \text{ V}$
 2) $p_J = -30 \text{ W}$, $p_E = 300 \text{ W}$
 3) $p_J = 870 \text{ W}$, $p_E = 300 \text{ W}$

Exercice 1.16

Etant donné le circuit de la Fig. 1.15, on demande :

1. de déterminer la valeur de la résistance R_L à connecter à l'accès ab de manière à soutirer au circuit une puissance maximale ;
2. de calculer cette puissance ;
3. de déterminer dans ces conditions, les puissances consommées par les différentes résistances ainsi que les puissances fournies par les différentes sources indépendantes d'énergie.



$$R_1 = 40 \text{ k}\Omega \quad ; \quad R_2 = 60 \text{ k}\Omega \quad ; \quad R_3 = 25 \text{ k}\Omega \quad ; \quad R_4 = 100 \text{ k}\Omega \quad ; \quad R_5 = 10 \text{ k}\Omega$$

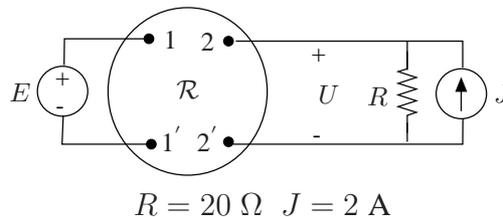
$$E = 20 \text{ V} \quad ; \quad J_1 = 5 \text{ mA} \quad ; \quad J_2 = 2 \text{ mA}$$

FIG. 1.15

Rép.: 1) $R_L = 39.4 \text{ k}\Omega$
 2) $p_{R_L} = 0.17 \text{ W}$

Exercice 1.17

Le réseau \mathcal{R} de la Fig. 1.16 est constitué d'éléments linéaires, invariants et passifs et ne comporte pas de sources indépendantes d'énergie. La tension U est égale à 10 V lorsque la f.e.m E est égale à 0. Elle atteint 15 V lorsque la f.e.m E est égale à 10 V. On demande :



$$R = 20 \text{ }\Omega \quad J = 2 \text{ A}$$

FIG. 1.16

1. de déterminer le schéma équivalent de Thévenin du circuit à gauche de 22' lorsque E est égale à 30 V ;

2. dans ces conditions, de calculer les puissances consommées ou fournies par les divers éléments du circuit qu'il est possible de déterminer.

Rép.: 1) $V_{Th} = 20 \text{ V}$, $R_{Th} = 6.67 \text{ } \Omega$
 2) $p_R = 31.25 \text{ W}$, $p_J = 50 \text{ W}$, $p_{R,E} = 18.75 \text{ W}$

Exercice 1.18

Déterminer l'état électrique complet du réseau de la Fig. 1.17 au moyen de la méthode des noeuds.

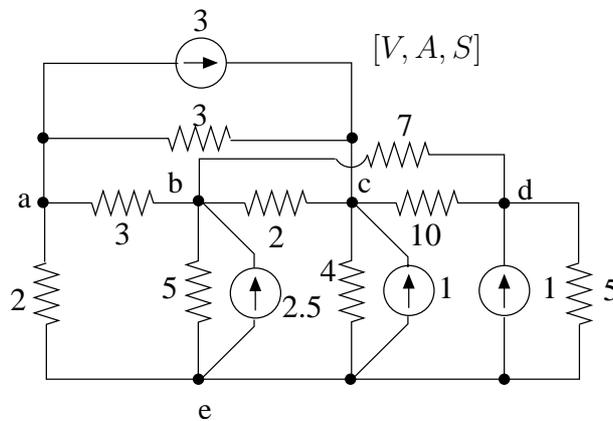


FIG. 1.17

Rép.: $\mathbf{V}_N = (-0.112, 0.306, 0.395, 0.322)^T \text{ V}$
 noeud de référence : e

Exercice 1.19

Déterminer l'état électrique complet du réseau de la Fig. 1.18 au moyen de la méthode des mailles.

Rép.: $\mathbf{I}_M = (0.224, 0.967, -0.612, -0.111, 1.479)^T \text{ A}$
 arbre : $3(R = 1/4, E = 1/4)-5(R = 1/3)-6(R = 1/2)-7(R = 1/10)$

Exercice 1.20

Déterminer l'état électrique complet du réseau de la Fig. 1.19. Déterminer tout d'abord la matrice d'impédances réduite aux accès vue des deux sources indépendantes de tension.

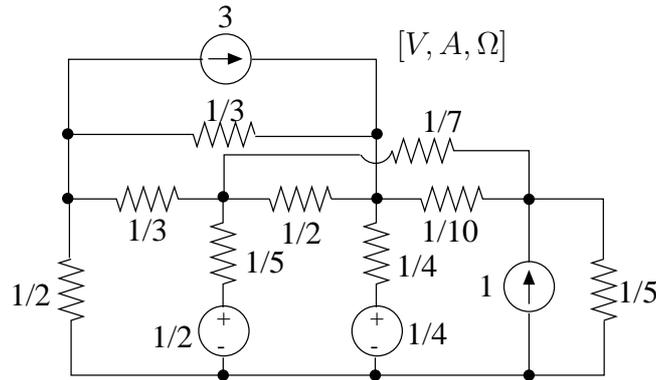


FIG. 1.18

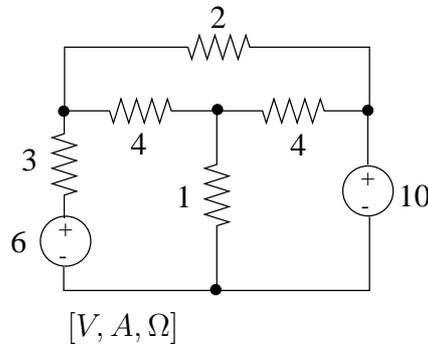


FIG. 1.19

Rép.: $(I_1, I_2) = (-0.373, 3.227) \text{ A}$

Exercice 1.21

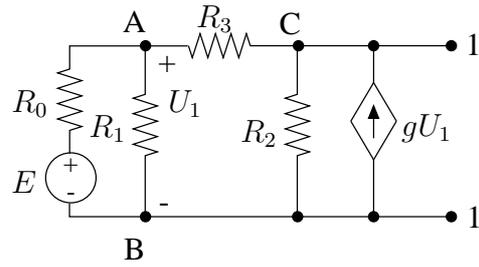
Déterminer le schéma équivalent de Norton du circuit de la Fig. 1.20 vu de l'accès $11'$. Exprimer les paramètres de cet équivalent en fonction de E . En déduire le schéma équivalent de Thévenin vu de ce même accès.

Rép.: $I_{No} = 1.89 \cdot 10^{-2} E$, $G_{No} = 7.17 \cdot 10^{-3} \text{ S}$

Exercice 1.22

Déterminer le schéma équivalent de Norton du circuit de la Fig. 1.21 vu des accès $11'$ et $22'$.

Rép.: $\mathbf{I}_{No} = \left(\frac{20}{7}, \frac{40}{7}\right)^T \text{ A}$, $\mathbf{G}_{No} = \begin{pmatrix} 7.43 & -6.14 \\ -6.14 & 8.71 \end{pmatrix} \text{ S}$



$$R_0 = 150 \text{ k}\Omega \quad ; \quad R_1 = 100 \text{ k}\Omega \quad ; \quad R_2 = 0.1 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 1000 \text{ k}\Omega \quad ; \quad g = 0.05 \text{ S}$$

FIG. 1.20

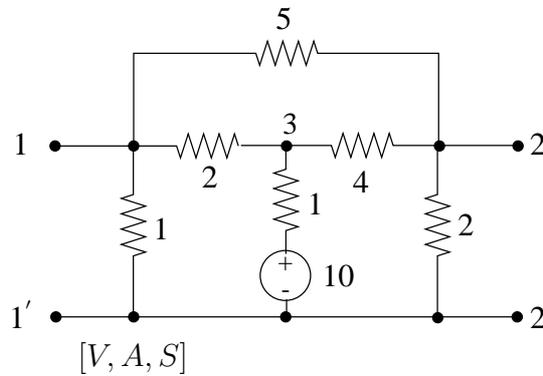


FIG. 1.21

Exercice 1.23

Soit un cube dont chaque arête est occupée par une résistance de 1Ω comme indiqué à la Fig. 1.22. Déterminer :

- la résistance équivalente R_a vue d'une arête ;
- la résistance équivalente R_d vue d'une diagonale d'une face du cube.

Rép.: $R_a = R_{18} = 0.58 \Omega$, $R_d = R_{13} = 0.75 \Omega$

Exercice 1.24

Déterminer l'expression des rapports $\frac{V_5}{E}$ et $\frac{V_5}{I}$ pour le circuit de la Fig. 1.23. Considérer le cas général et les cas particuliers :

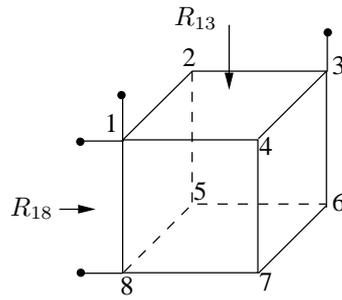


FIG. 1.22

- de la source idéale ($R_6 = 0$),
- du détecteur d'impédance infinie ($R_5 = \infty$).

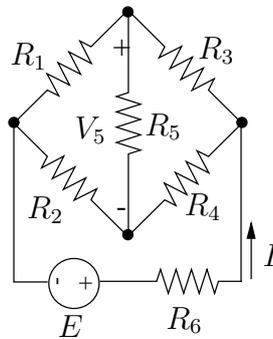


FIG. 1.23

Rép.:

Exercice 1.25

Déterminer le schéma équivalent de Thévenin du circuit de la Fig. 1.24 vu de l'accès 11'. Déterminer ensuite la puissance produite par la source de 12 V si l'accès 11' est laissé ouvert.

Rép.: $V_{Th} = 9.71 \text{ V}$, $R_{Th} = 20.85 \Omega$, $p_{12V} = 2.54 \text{ W}$

Exercice 1.26

Déterminer la valeur de la résistance R_0 du circuit de la Fig. 1.25 telle que cette résistance consomme une puissance de 1000 W.

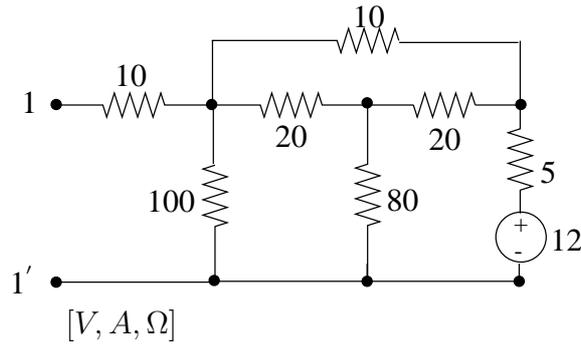


FIG. 1.24

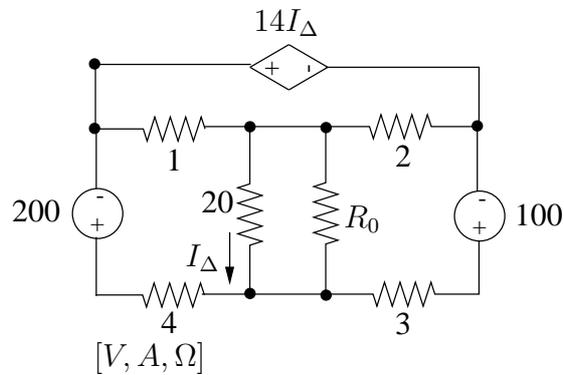


FIG. 1.25

Rép.: $R_0^{(1)} = 17.14\Omega, R_0^{(2)} = 0.37\Omega$

Exercice 1.27

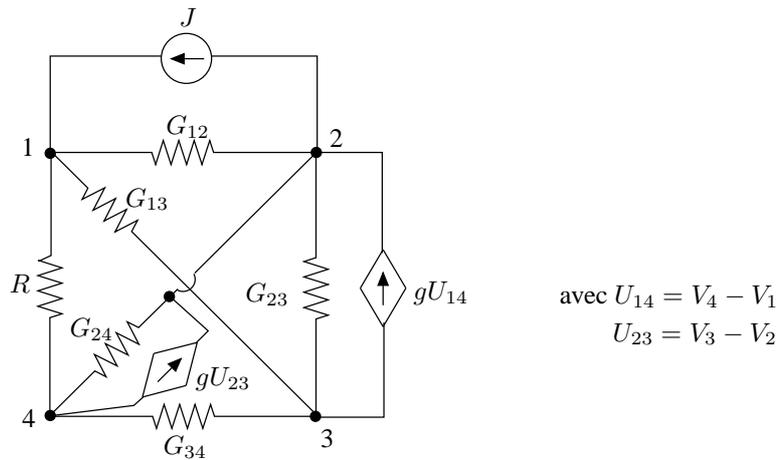
Déterminer la puissance dissipée dans la résistance R connectée aux bornes 14 du circuit de la Fig. 1.26.

Suggestion : utiliser la méthode des noeuds pour rechercher le schéma équivalent de Norton vu des bornes 14.

Rép.: $p_R = 49.16\text{ W}$

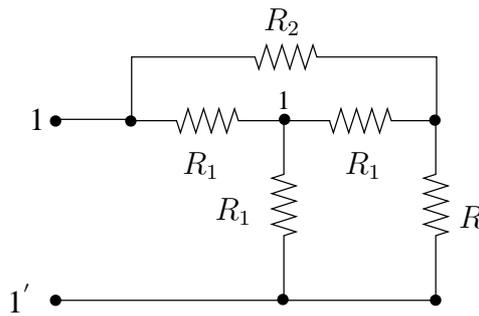
Exercice 1.28

Déterminer la valeur de la résistance R telle que la résistance d'entrée R_{in} du circuit de la Fig. 1.27 vue de l'accès 11' soit égale à R .



$G_{12} = 35 \text{ mS}$; $G_{13} = 25 \text{ mS}$; $G_{23} = 10 \text{ mS}$; $G_{24} = 80 \text{ mS}$
 $G_{34} = 75 \text{ mS}$; $g = 20 \text{ mS}$; $R = 100 \text{ } \Omega$; $J = 5 \text{ A}$
 On pose $U_{14} = U_4 - U_1$ et $U_{23} = U_3 - U_2$

FIG. 1.26



$R_1 = 20 \text{ } \Omega$, $R_2 = 5 \text{ } \Omega$

FIG. 1.27

Rép.: $R = 11.55 \text{ } \Omega$

Exercice 1.29

Déterminer la valeur de la source de courant J de façon à ce que la source de tension $E = 10 \text{ V}$ fournisse au reste du circuit de la Fig. 1.28 une puissance de 20 W .

Etablir le bilan de puissance de ce circuit.

Suggestion : rechercher dans un premier temps le schéma équivalent de Thévenin du circuit vu des bornes AB

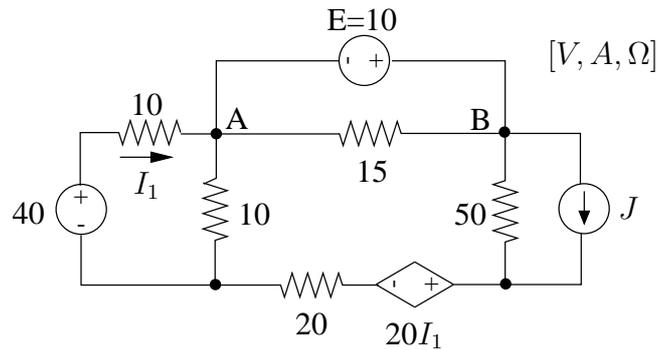


FIG. 1.28

Rép.: $J = 2.47 \text{ A}$

Exercice 1.30

Etant donné le circuit d la Fig. 1.29 on demande de déterminer son schéma equivalent de Thévenin vu des accès 11' et 22'.

On connecte ensuite une source de tension idéale $E = 20 \text{ V}$ à l'accès 11' et une résistance de charge $R_L = 30 \Omega$ à l'accès 22'. Calculer dans ces conditions les puissances consommée par R_L et fournie par E (penser à utiliser le schéma équivalent de Thévenin déterminé au préalable !).

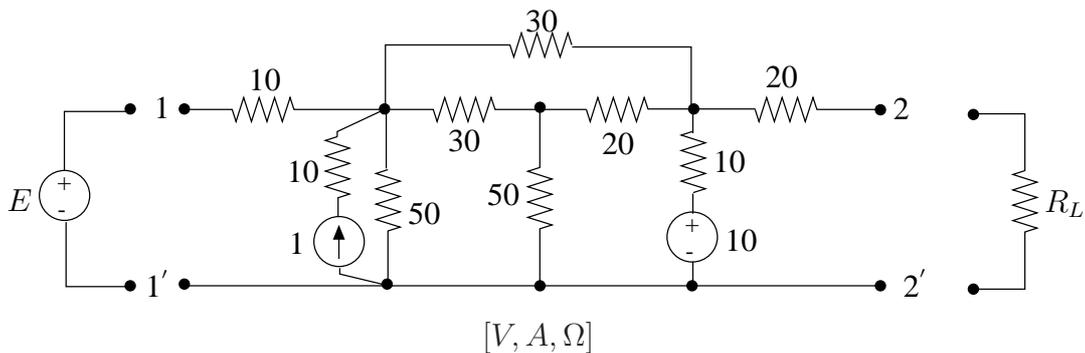
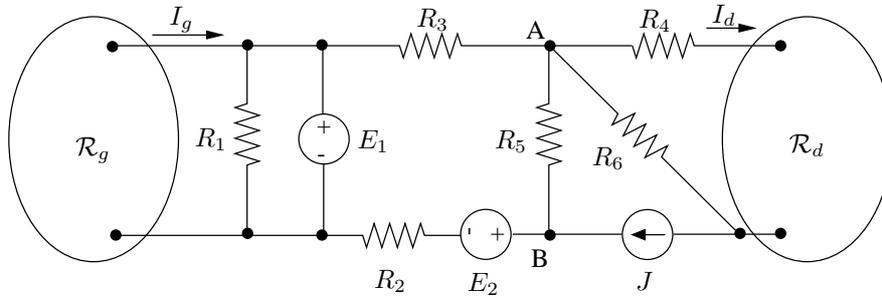


FIG. 1.29

Rép.: $\mathbf{E}_{Th} = \begin{pmatrix} 21.65 \\ 13.01 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R}_{Th} = \begin{pmatrix} 26.52 & 5.13 \\ 5.13 & 27.88 \end{pmatrix}$
 $p_{R_L} = 1.49 \text{ W}$, $p_E = -0.38 \text{ W}$

Exercice 1.31

On demande d'établir le bilan de puissance du circuit de la Fig. 1.30 sachant que $I_d = 4$ A et $I_g = 2$ A.



$$R_1 = 30 \Omega; \quad R_2 = 10 \Omega; \quad R_3 = 40 \Omega; \quad R_4 = 10 \Omega; \quad R_5 = 80 \Omega; \quad R_6 = 40 \Omega$$

$$E_1 = 60 \text{ V}; \quad E_2 = 20 \text{ V}; \quad J = 10 \text{ A}$$

FIG. 1.30

\mathcal{R}_g est un circuit résistif linéaire et invariant comportant un certain nombre de sources indépendantes d'énergie. \mathcal{R}_d est un circuit résistif linéaire et invariant ne comportant pas de source indépendante d'énergie.

Suggestion : en vue de calculer l'état électrique complet du circuit, remplacer dans un premier temps le circuit à droite de AB par son schéma équivalent de Norton.

Rép.: $U_{\mathcal{R}_g} = 60 \text{ V}, U_{\mathcal{R}_d} = 200 \text{ V}, U_J = 523.2 \text{ V}$

Exercice 1.32

Le circuit \mathcal{R} de a Fig. 1.31 est constitué d'éléments linéaires, invariants et passifs et comporte des sources indépendantes d'énergie, notamment les sources de tension E_1 et E_2 . Si $E_1 = 30 \text{ V}$ et $E_2 = 10 \text{ V}$, on relève $U_{11'} = 22 \text{ V}$. Si on double E_1 , $U_{11'}$ devient 35 V tandis que si on double E_2 , $U_{11'}$ devient 25 V .

On demande de calculer E_1 et E_2 pour que la résistance $R = 100 \Omega$ consomme une puissance de 4 W , la somme $E_1 + E_2$ devant valoir 30 V .

Rép.: $E_1 = 37.5 \text{ V}, E_2 = -7.5 \text{ V}$

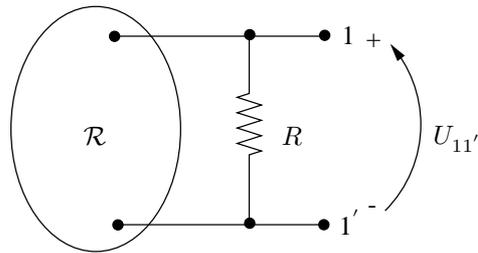


FIG. 1.31

Exercice 1.33

Etant donné le circuit de la Fig. 1.32, on cherche à déterminer la valeur de E (positive) telle que le circuit fournisse une puissance égale à 20 W à la résistance de charge $R_L = 5 \Omega$ connectée à l'accès $11'$. Pour cela :

1. utiliser la méthode des mailles pour dériver le schéma équivalent de Thévenin vu de l'accès $11'$;
2. utiliser la méthode des noeuds pour dériver le schéma équivalent de Norton vu de l'accès $11'$.

Les paramètres de ces équivalents seront exprimés en fonction de E .

3. Montrer l'équivalence des deux approches ;
4. déduire d'un des deux équivalents la valeur de E cherchée.

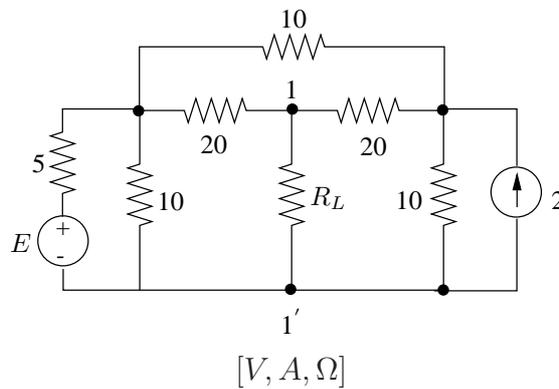


FIG. 1.32

Rép.: $E = 65.7 \text{ V}$

Chapitre 2

Régime sinusoïdal établi

Exercice 2.1

Une bobine est généralement représentée par une inductance en série avec une faible résistance, représentative des pertes inévitables de l'élément. Montrer, comme indiqué à la Fig. 2.1, que l'on peut aussi représenter cet élément par la mise en parallèle d'une résistance et d'une inductance. Déterminer l'expression des coefficients L' et R' en fonction de L et R .

De même, un condensateur est généralement représenté par la mise en parallèle d'un condensateur idéal et d'une faible conductance, représentative des pertes inévitables de l'élément. Montrer que l'on peut aussi représenter cet élément par la mise en série d'une conductance et d'un condensateur idéal. Déterminer l'expression des coefficients C' et G' en fonction de C et G .

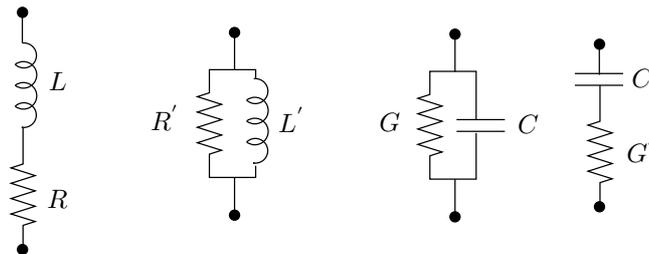


FIG. 2.1

$$\text{Rép.: } R' = R\left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}\right), L' = L\left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2}\right)$$
$$G' = G\left(1 + \frac{\omega^2 C^2}{G^2}\right), C' = C\left(1 + \frac{G^2}{\omega^2 C^2}\right)$$

Exercice 2.2

Dessiner un diagramme de phaseurs plausible représentant les grandeurs indiquées sur le circuit de la Fig. 2.2. Justifier la construction étape par étape. On prendra l'origine des phases pour la source $\vec{E} = E\angle 0$.

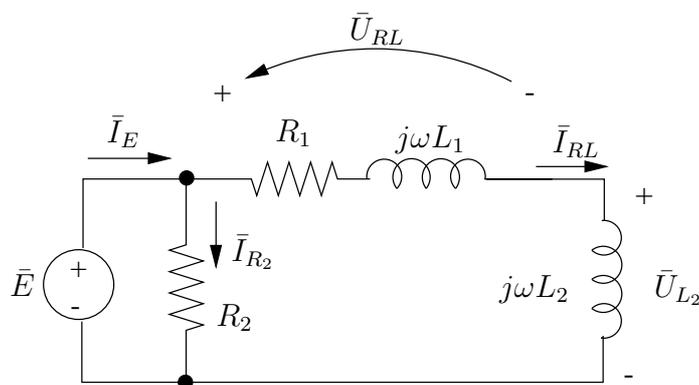


FIG. 2.2

Rép.:

Exercice 2.3

Une résistance de $5\text{ k}\Omega$ est connectée en série avec la combinaison en parallèle d'un condensateur de capacité C et d'une inductance de 20 mH . Ce dipôle d'impédance Z est inséré dans un circuit fonctionnant en régime sinusoïdal établi à la pulsation de 1000 rad/s . On demande :

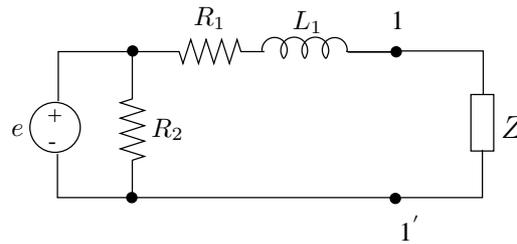
- de calculer la valeur de la capacité C du condensateur pour que le courant parcourant le dipôle soit en retard de 45° par rapport à la d.d.p. à ses bornes ;
- si on connecte ce dipôle aux bornes $11'$ du circuit de la Fig. 2.3, dessiner le diagramme de phaseurs reprenant les tensions aux bornes des éléments du circuit.

Rép.: $C = 49.8\ \mu\text{F}$, $\vec{U}_Z = 97.25 + j16.11\text{ V}$

Exercice 2.4

Etant donné le circuit de la Fig. 2.4 fonctionnant en régime sinusoïdal établi, déterminer la valeur de \vec{E}_1 pour que le circuit vu des bornes AA' se réduise à un schéma équivalent de Thévenin avec $\vec{V}_{Th} = 50\angle 45^\circ$.

Rép.: $\vec{E}_1 = 175.06 + j72.12\text{ V}$



$R_1 = 2 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$; $L_1 = 10 \text{ mH}$; $\bar{E} = 120\angle 0 \text{ V}$, valeur efficace

FIG. 2.3

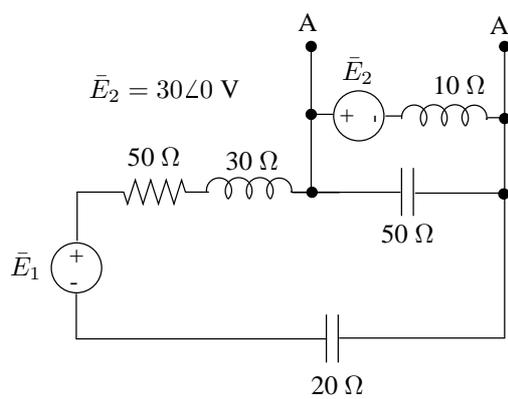
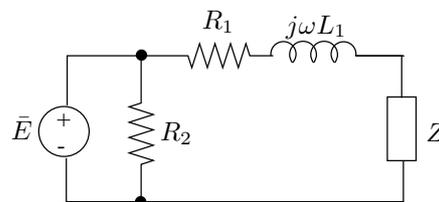


FIG. 2.4

Exercice 2.5

Calculer les puissances actives et réactives consommées ou produites par les divers éléments du circuit de la Fig. 2.5. Etablir les bilans de puissances correspondants. Donner les expressions des puissances instantanées et fluctuantes dans les divers éléments du circuit.



$R_1 = 2 \text{ k}\Omega$; $R_2 = 4 \text{ k}\Omega$; $L_1 = 10 \text{ mH}$; $Z = 5 + j5 \text{ k}\Omega$
 $\bar{E} = 120\angle 0 \text{ V}$, valeur efficace

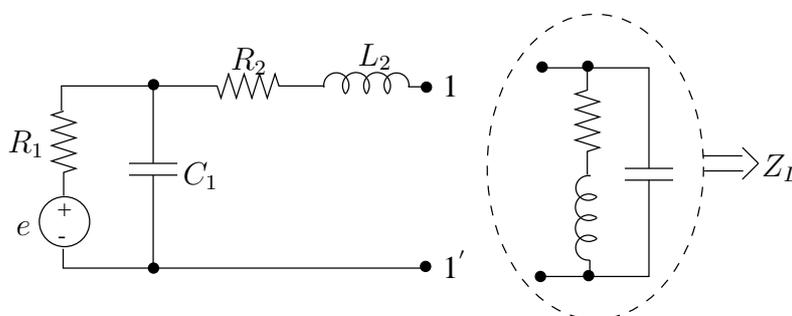
FIG. 2.5

Rép.: $S_{R_2} = 3.6 + j0 \text{ VA}$, $S_{Z_1} = 0.386 + j0.002 \text{ VA}$
 $S_Z = 0.966 + j0.966 \text{ VA}$, $S_E = 4.956 + j0.973 \text{ VA}$

Exercice 2.6

Le circuit de la Fig. 2.6 fonctionne en régime sinusoïdal établi à la pulsation ω . On demande :

- de déterminer la pulsation ω pour laquelle la puissance fournie par le circuit à la charge Z_L connectée en 11' est purement active ;
- à cette pulsation, de calculer la puissance active fournie à la charge ainsi que les puissances active, réactive, instantanée et fluctuante fournies par la source de tension à l'instant $t = 10^{-3} \text{ s}$.



$R_1 = 10 \Omega$; $R_2 = 20 \Omega$; $C_1 = 0.5 \mu\text{F}$; $L_2 = 0.1 \text{ mH}$
 $R_L = 5 \Omega$; $C_L = 0.2 \mu\text{F}$; $L_L = 0.5 \text{ mH}$; $\bar{E} = 20\sqrt{2} \text{ V}$ (valeur efficace)

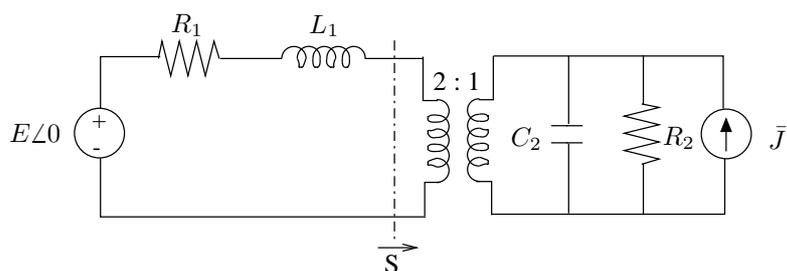
FIG. 2.6

Rép.: $\omega = 9.95 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$, $Z_L = 500 \Omega$
 $P_Z = 0.575 \text{ W}$, $S_E = 8.3 - 15.5 \text{ VA}$

Exercice 2.7

Le circuit de la Fig. 2.7 fonctionne en régime sinusoïdal établi à la fréquence de 100 Hz. On demande de déterminer la valeur de la f.e.m. E telle que le transfert de puissance à travers le transformateur idéal se réalise de la gauche vers la droite avec un facteur de puissance $\cos \Phi = 1$.

Rép.: $E = 283.5 \text{ V}$



$$R_1 = 10 \, \Omega \quad ; \quad R_2 = 100 \, \Omega \quad ; \quad L_1 = 20 \, \text{mH} \quad ; \quad C_2 = 10 \, \mu\text{F}$$

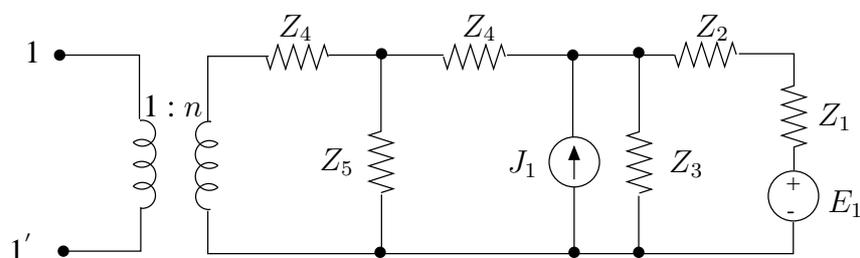
$$\bar{J} = 1 \angle 60^\circ \text{A, valeur efficace}$$

FIG. 2.7

Exercice 2.8

Le circuit de la Fig. 2.8 est vu de l'accès 11' et fonctionne en régime sinusoïdal établi. On demande de déterminer la valeur du rapport de transformation n de façon à ce que la réactance de Thévenin X_{Th} soit de $20 \, \Omega$.

On connecte ensuite à l'accès 11' un dipôle constitué de deux éléments (de type R et/ou C et/ou L). Déterminer la nature et la valeur de ces éléments de manière à soutirer au circuit une puissance maximale. Calculer dans ce cas les puissances actives et réactives consommées par ce dipôle et par l'impédance Z_5 . Donner l'expression (en fonction de t) de la puissance instantanée $p(t)$ consommée par ces éléments ainsi que de la tension aux bornes $u(t)$ et du courant $i(t)$ traversant ces éléments.



$$Z_1 = 30 - j80 \quad , \quad Z_2 = 30 + j20 \quad , \quad Z_3 = 40 + j65 \quad , \quad Z_4 = 30 + j40 \quad , \quad Z_5 = 30 + j80$$

$$\bar{E}_1 = 30 \angle 0 \quad , \quad \bar{J}_1 = 2 \angle 20 \quad [\text{V}, \text{A}, \Omega, ^\circ] \quad , \quad \omega = 10\,000 \text{ rad/s}$$

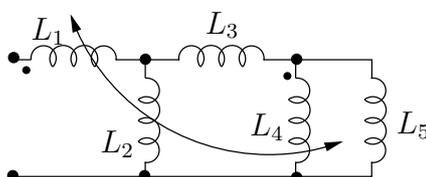
Les grandeurs sinusoïdales sont exprimées en valeur efficace.

FIG. 2.8

Rép.: $n = 1.995$, $R_L = 15.44 \, \Omega$, $C_L = 5 \, \mu\text{F}$
 $S_L = 20.6 - j26.7 \text{ VA}$, $S_{Z_5} = 13.67 + j36.45 \text{ VA}$

Exercice 2.9

Déterminer l'inductance équivalente du dipôle de la Fig. 2.9 sachant que les inductances L_1 et L_4 sont couplées avec un coefficient de couplage $k = 0.7$.



$$L_1 = 0.1 \text{ mH} ; L_2 = 0.5 \text{ mH} ; L_3 = 0.2 \text{ mH} ; L_4 = 0.4 \text{ mH} ; L_5 = 0.8 \text{ mH}$$

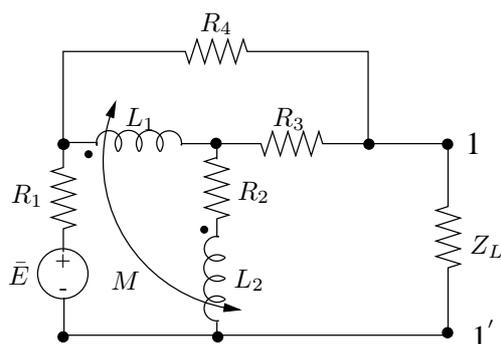
FIG. 2.9

Rép.: $L_{eq} = 0.413 \text{ mH}$

Exercice 2.10

Etant donné le circuit de la Fig. 2.10 fonctionnant en régime sinusoïdal établi :

- déterminer l'impédance Z_L à connecter aux bornes 11' pour soutirer au circuit le maximum de puissance ;
- rechercher des éléments qui pourraient réaliser cette impédance ;
- calculer la puissance complexe fournie à la charge Z_L dans ces conditions.



$$\begin{aligned} R_1 &= 10 \Omega & R_2 &= 25 \Omega \\ R_3 &= 50 \Omega & R_4 &= 50 \Omega \\ L_1 &= 20 \text{ mH} & L_2 &= 80 \text{ mH} \\ M &= 10 \text{ mH} & \omega &= 1000 \text{ rad/s} \\ \bar{E} &= 100 \angle 0^\circ \text{ V, valeur efficace} \end{aligned}$$

FIG. 2.10

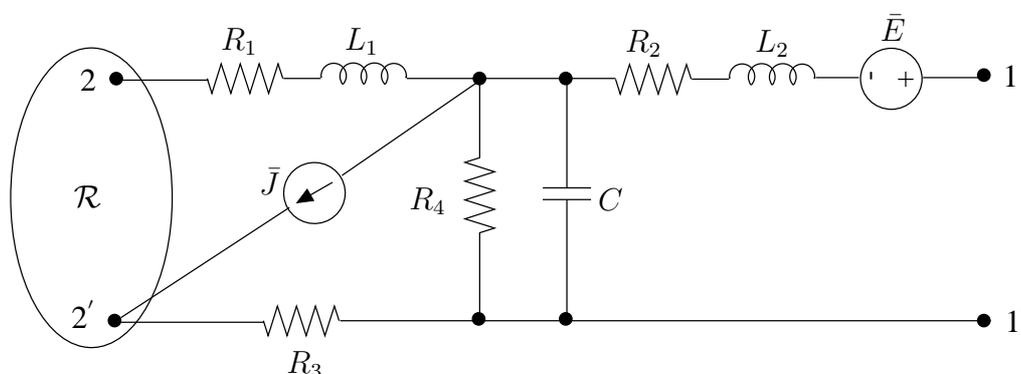
Rép.: $Z_L = 33.31 - j3.47 \Omega$, $R_L = 33.31 \Omega$, $C_L = 288 \mu\text{F}$
 $S_{Z_L} = 55.4 - j5.77 \text{ VA}$

Exercice 2.11

Le schéma équivalent de Thévenin du circuit représenté à la Fig. 2.11, vu de l'accès 11', est composé d'une f.e.m. $\bar{V}_{Th} = 100\angle 0$ V en série avec l'impédance $Z_{Th} = 500 + j500 \Omega$. Le réseau \mathcal{R} est composé d'éléments linéaires et invariants.

1. Déterminer les puissances complexes, actives et réactives, ainsi que les puissances instantanées et fluctuantes à l'instant $t = 1$ s, fournies par la source de courant \bar{J} et le réseau \mathcal{R} lorsque l'on ferme l'accès 11' sur une résistance de charge $R_L = 100 \Omega$.
2. Les données fournies permettent-elles de déterminer le schéma équivalent de Thévenin du réseau \mathcal{R} vu des bornes 22' ?

Si oui, expliciter, sans aucun calcul numérique, la procédure permettant de déterminer les paramètres de cet équivalent. Si non, justifier.



$$\begin{aligned}
 R_1 &= 30 \Omega, & R_2 &= 40 \Omega, & R_3 &= 10 \Omega, & R_4 &= 100 \Omega \\
 L_1 &= 2 \text{ mH}, & L_2 &= 4 \text{ mH}, & C &= 80 \text{ nF} \\
 \bar{E} &= 60\angle 0 \text{ V}, & \bar{J} &= 3\angle 0 \text{ mA}, & \omega &= 1000 \text{ rad.s}^{-1}
 \end{aligned}$$

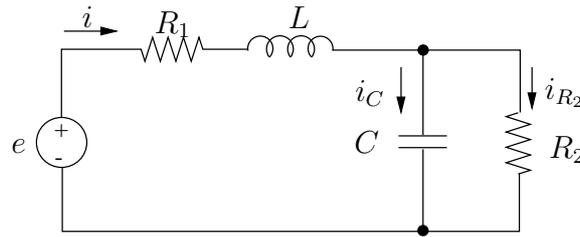
FIG. 2.11

$$\begin{aligned}
 \text{Rép.: } S_J &= 0.148 + j0.039 \text{ VA}, & p_{fJ} &= -0.091 \text{ W}, & p_J &= 0.057 \text{ W} \\
 S_{\mathcal{R}} &= 25.2 - j4.75 \text{ VA}, & p_{f\mathcal{R}} &= -23.87 \text{ W}, & p_{\mathcal{R}} &= 1.33 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Exercice 2.12

Etant donné le circuit de la Fig. 2.12 fonctionnant en régime sinusoïdal établi à la pulsation $\omega = 1000$ rad/s, on demande :

- de déterminer l'expression des courants $i(t)$, $i_C(t)$ et $i_{R_2}(t)$;
- d'établir les bilans de puissances active et réactive ;
- à l'instant $t = 0.001$ s, de calculer les puissances instantanées et fluctuantes consommées par la résistance R_2 et le condensateur C et fournies par la source e .



$$R_1 = 100 \, \Omega, \quad R_2 = 1 \, \text{k}\Omega, \quad C = 5 \, \mu\text{F} \quad L = 2 \, \text{mH}, \quad \bar{E} = 10\angle 0 \, \text{V} \text{ (valeur efficace)}$$

FIG. 2.12

$$\begin{aligned} \text{Rép.: } i(t) &= 0.06 \cos(1000t + 0.94), \quad i_C(t) = 0.0589 \cos(1000t + 1.14), \\ & \quad i_{R_2}(t) = 0.0118 \cos(1000t - 0.43) \\ S_{Z_1} &= 0.18 + j0.004 \, \text{VA}, \quad S_{Z_2} = 0.07 - j0.347 \, \text{VA} \\ p_{R_2} &= 0.098 \, \text{W}, \quad p_{fR_2} = 0.029 \, \text{W} \\ p_C &= -0.315 \, \text{W}, \quad p_{fC} = -0.315 \, \text{W} \\ p_E &= -0.166 \, \text{W}, \quad p_{fE} = -0.416 \, \text{W} \end{aligned}$$

Exercice 2.13

On désire modifier le circuit de l'exercice 2.12 de manière à ce que la puissance réactive fournie par la source e soit nulle. Pour cela, on place une impédance soit en série, soit en parallèle avec la source e . Déterminer, dans chaque cas, la nature et la valeur du ou des éléments à placer ainsi que la nouvelle répartition des puissances actives.

$$\begin{aligned} \text{Rép.: } L_s &= 190.3 \, \text{mH}, \quad P_{R_1} = 0.522 \, \text{W}, \quad P_{R_2} = 0.2 \, \text{W}, \quad P_E = 0.722 \, \text{W} \\ L_{//} &= 291 \, \text{mH}, \quad P_{R_1} = 0.18 \, \text{W}, \quad P_{R_2} = 0.07 \, \text{W}, \quad P_E = 0.25 \, \text{W} \end{aligned}$$

Chapitre 3

Régime transitoire

Exercice 3.1

Déterminer l'expression de l'inductance équivalente résultant de la mise en parallèle de la paire d'inductances couplées de la Fig. 3.1. Que devient cette inductance si la polarité magnétique de la bobine 2 est inversée ?

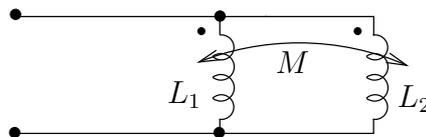


FIG. 3.1

$$\text{Rép.: } L_{eq1} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}$$
$$L_{eq2} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M}$$

Exercice 3.2

On considère le circuit de la Fig. 3.2. Déterminer l'évolution des courants i_0 , i_1 , i_2 et de la tension v_0 pour $t \geq 0$ sachant que les deux inductances sont initialement relaxées. Vérifier la plausibilité des résultats trouvés :

- vérifier les valeurs initiales et finales des différentes grandeurs ;
- vérifier les lois de Kirchhoff.

$$\text{Rép.: } i_0(t) = 16 - 16e^{-5t} \text{ A, } t \geq 0, v_0(t) = 120e^{-5t} \text{ V, } t \geq 0$$
$$i_1(t) = 24 - 24e^{-5t} \text{ A, } t \geq 0$$
$$i_2(t) = -8 + 8e^{-5t} \text{ A, } t \geq 0$$

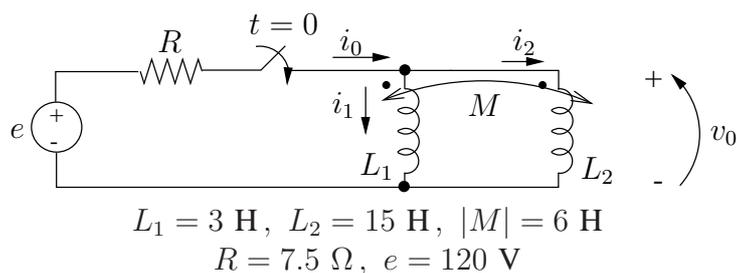


FIG. 3.2

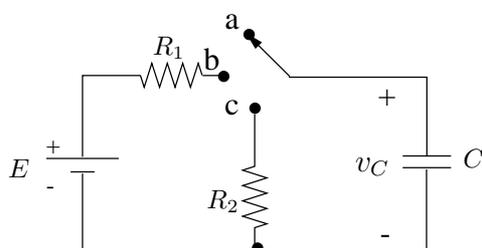
Exercice 3.3

On considère le circuit de la Fig. 3.3 et les conditions de fonctionnement suivantes :

- l'interrupteur est initialement en position a, le condensateur étant initialement relaxé ;
- à l'instant $t = 0$, l'interrupteur bascule en position b et y reste pendant 15 ms ;
- à l'instant $t = 15 \text{ ms}$, l'interrupteur bascule en position c et y reste indéfiniment.

Dans ces conditions :

1. dériver l'expression numérique de la tension v_C aux bornes du condensateur ;
2. tracer le graphe de $v_C(t)$;
3. déterminer le ou les instant(s) auxquels la tension $v_C(t)$ est égale à 200 V.



$$R_1 = 100 \text{ k}\Omega, R_2 = 50 \text{ k}\Omega, C = 0.1 \text{ } \mu\text{F}, E = 400 \text{ V}$$

FIG. 3.3

Rép.: 1. $v_C(t) = 400(1 - e^{-100t}) \text{ V}, 0 \leq t < 15 \text{ ms}$
 $v_C(t) = 310.75e^{-200(t-0.015)} \text{ V}, t \geq 15 \text{ ms}$
 3. $t_1 = 6.93 \text{ ms}, t_2 = 17.2 \text{ ms}$

Exercice 3.4

On considère le circuit de la Fig. 3.4. Le condensateur C est initialement porté au potentiel de 10 V. Déterminer l'expression de la tension v_C aux bornes du condensateur.

Comment se manifeste l'influence de la source commandée ?

On suppose que le condensateur claque (se court-circuite) lorsque la tension à ses bornes atteint 150 V. Déterminer l'instant auquel ce claquage se produit.

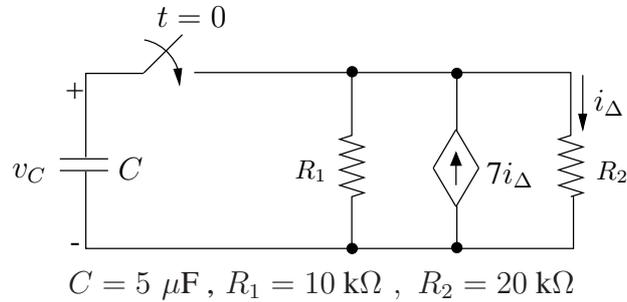


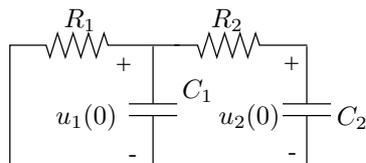
FIG. 3.4

Rép.: $v_C = 10e^{40t} \text{ V}, t \geq 0$
 $t_{cc} = 67.7 \text{ ms}$

Exercice 3.5

Déterminer la réponse libre du circuit de la Fig. 3.5 en fonction des conditions initiales :

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 2\text{V} \\ u_2(0) &= 5\text{V} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} R_1 &= 200 \text{ k}\Omega \\ R_2 &= 100 \text{ k}\Omega \\ C_1 &= 5 \mu\text{F} \\ C_2 &= 2.5 \mu\text{F} \end{aligned}$$

FIG. 3.5

Rép.: $u_1(t) = 2.9e^{-0.63t} - 0.91e^{-6.37t} \text{ V}$
 $u_2(t) = 3.46e^{-0.63t} + 1.54e^{-6.37t} \text{ V}$

Exercice 3.6

On considère le circuit de la Fig. 3.6. Si la tension aux bornes de ce circuit s'écrit :

$$v(t) = D_1 t e^{-4000t} + D_2 e^{-4000t} \text{ V}, t \geq 0$$

déterminer la valeur des deux éléments R et C ainsi que des deux coefficients D_1 et D_2 sachant que :

- le courant initial i_0 parcourant l'inductance est égal à 5 mA ;
- la tension initiale v_0 aux bornes du condensateur est égale à 25 V.

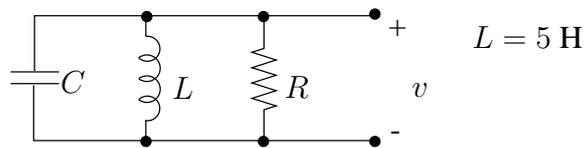


FIG. 3.6

Rép.: $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 12.5 \text{ nF}$, $D_1 = -3.2 \cdot 10^5$, $D_2 = 25$

Exercice 3.7

On considère le circuit de la Fig. 3.7. L'interrupteur k est supposé fermé depuis un temps infini. A l'instant $t = 0$ il s'ouvre. On suppose que les valeurs des éléments du circuit sont telles que la réponse est de type oscillatoire amorti. Dériver l'expression de $v_0(t)$ pour $t \geq 0$ en fonction des paramètres v_g , α et ω_d .

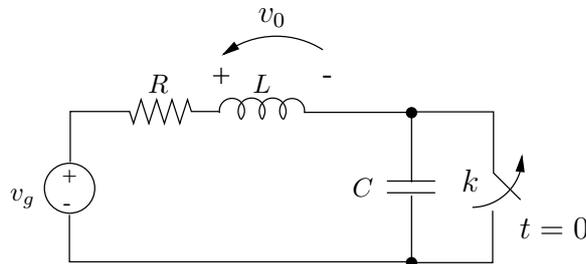


FIG. 3.7

Rép.: $v_0(t) = -v_g \left(\frac{\omega_d}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2\omega_d} \right) e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \text{ V}, t \geq 0$

Exercice 3.8

On considère le circuit de la Fig. 3.8 et on demande de déterminer l'évolution de la tension $v_{C_1}(t)$ aux bornes du condensateur C_1 si :

- le condensateur est initialement porté au potentiel v_0
- l'interrupteur k est fermé en $t = 0$.

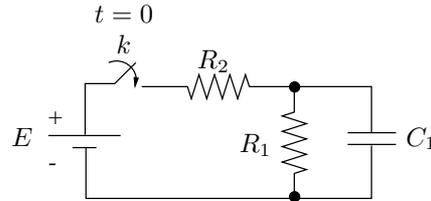


FIG. 3.8

Rép.: $v_{C_1}(t) = E \frac{R_1}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}) + v_0 e^{-t/\tau} \text{ V}, t \geq 0$

Exercice 3.9

Déterminer l'évolution du courant dans le circuit de la Fig. 3.9 lorsque la source $e(t)$ délivre le signal représenté sur la partie droite de la figure.

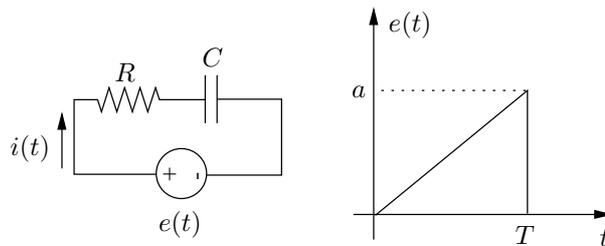


FIG. 3.9

Rép.: $i(t) = \frac{aT}{RT} (1 - e^{-t/\tau}) \text{ A}, 0 \leq t < T$
 $i(t) = e^{-t/\tau} \left(\frac{aT}{RT} (e^{T/\tau} - 1) - \frac{a}{R} e^{T/\tau} \right) \text{ A}, t \geq T$

Exercice 3.10

Un générateur délivrant une f.e.m $e(t) = E \sin \omega t$ est connecté, depuis en temps supposé infini, à un circuit \mathcal{R} linéaire et invariant par l'intermédiaire d'une ligne, comme représenté à la Fig. 3.10. Cette ligne est modélisée par la mise en série d'une résistance R et d'une inductance L . A l'instant $t = 0$, un court-circuit se produit au point de connexion F. Déterminer l'évolution du courant $i(t)$ dans l'intervalle $t > 0$.

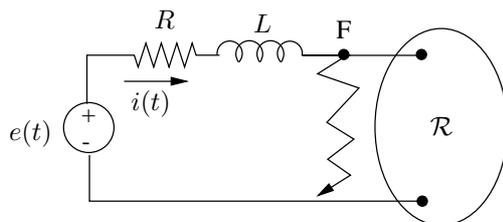


FIG. 3.10

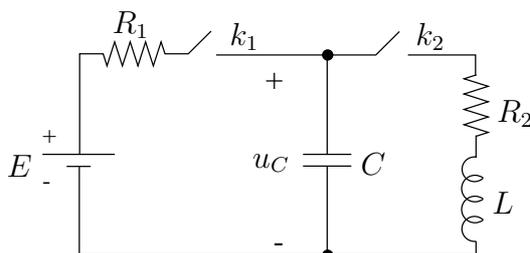
Rép.: $i(t) = i_0 e^{-t/\tau} + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-t/\tau} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R})$ A, $t \geq 0$

Exercice 3.11

Le circuit de la Fig. 3.11 est initialement relaxé, les deux interrupteurs k_1 et k_2 ouverts.

- A l'instant $t = 0$, l'interrupteur k_1 se ferme, k_2 reste ouvert.
- A l'instant où la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur atteint 90% de la valeur finale qu'elle atteindrait si on laissait le régime s'établir, l'interrupteur k_1 s'ouvre et k_2 se ferme.

On demande de déterminer l'évolution de la tension $u_C(t)$ pour $t > 0$.



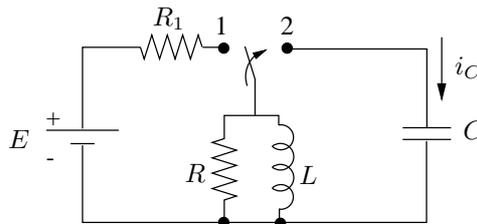
$$R_1 = 100 \text{ k}\Omega \quad ; \quad R_2 = 500 \text{ }\Omega \quad ; \quad C = 20 \text{ nF} \quad ; \quad L = 2 \text{ mH} \quad ; \quad E = 100 \text{ V}$$

FIG. 3.11

Rép.: $u_C(t) = 100(1 - e^{-500t})$ V, $0 \leq t < 4.6 \cdot 10^{-3}$ s
 $u_C(t) = 147e^{-1.25 \cdot 10^5(t - 4.6 \cdot 10^{-3})} \sin(9.68 \cdot 10^4(t - 4.6 \cdot 10^{-3}) + 0.66)$ V, $t \geq 4.6 \cdot 10^{-3}$

Exercice 3.12

On considère le circuit de la Fig. 3.12. Durant l'intervalle $t < 0$, l'interrupteur est en position 1 et la source continue E est établie depuis $t = -\infty$. A l'instant $t = 0$, l'interrupteur bascule instantanément en position 2. Déterminer l'évolution du courant i_C parcourant le condensateur dans l'intervalle $t > 0$. Le condensateur C est supposé initialement relaxé.



$$R_1 = 100 \text{ k}\Omega \quad ; \quad R = 10 \text{ k}\Omega \quad ; \quad L = 10 \text{ H} \quad ; \quad C = 0.5 \text{ }\mu\text{F} \quad ; \quad E = 100 \text{ V}$$

FIG. 3.12

$$\text{Rép.: } i_C(t) = 1.026 \cdot 10^{-3} e^{-100t} \sin(436t - 77.1^\circ) \text{ V}, t \geq 0$$

Exercice 3.13

On désire procéder au lancement d'un moteur à courant continu en insérant une résistance de démarrage R_d . Cette résistance est mise hors-circuit lorsque le courant délivré par la source devient inférieur à 15 A. On supposera un temps mort de 0.05 s pour la mise hors circuit de la résistance. Le moteur est modélisé par un schéma équivalent simplifié constitué d'une force contre-électromotrice, d'une résistance et d'une inductance comme indiqué à la Fig. 3.13. La force contre-électromotrice est supposée avoir la forme suivante :

$$e_1(t) = 100(1 - e^{-t/1.5}) \text{ V}$$

Déterminer l'évolution du courant $i(t)$ pour $t > 0$

$$\begin{aligned} \text{Rép.: } i(t) &= 3.75 - 33.75e^{-4t} + 30e^{-\frac{2}{3}t} \text{ A}, 0 \leq t < 1.51 \text{ s} \\ i(t) &= 7.5 - 414.25e^{-2t} + 75e^{-\frac{2}{3}t} \text{ A}, t \geq 1.51 \text{ s} \end{aligned}$$

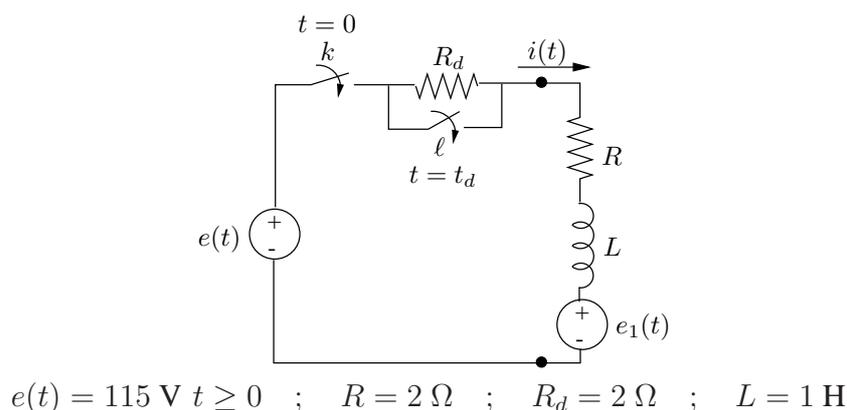


FIG. 3.13

Exercice 3.14

On considère le circuit de la Fig. 3.14 et les conditions de fonctionnement suivantes :

- depuis un temps supposé infini, le régime est établi avec l'interrupteur k_1 fermé et l'interrupteur k_2 ouvert

$$e_1 = 120 \text{ V} \quad ; \quad e_2 = 100 \text{ V}$$

- à l'instant $t = 0$, la f.e.m. e_1 commence à décroître selon

$$e_1(t) = 120e^{-10t}$$

- soit t_0 l'instant où le courant $i(t)$ s'annule ;
- après un temps mort de 0.05s, soit à l'instant $t_d = t_0 + 0.05$, l'interrupteur k_1 s'ouvre et l'interrupteur k_2 se ferme, et

$$e_3 = 120 \text{ V}$$

Déterminer dans ces conditions l'évolution du courant $i(t)$.

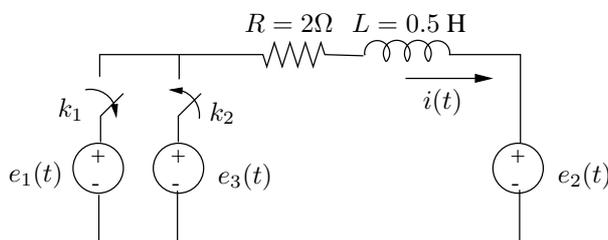


FIG. 3.14

Rép.: $i(t) = 100e^{-4t} - 50 - 40e^{-10t} \text{ A}, 0 \leq t < 0.17 \text{ s}$
 $i(t) = 10 - 32.48e^{-4t} \text{ A}, t \geq 0.17 \text{ s}$

Exercice 3.15

Le circuit de la Fig. 3.15 fonctionne en régime établi depuis en temps supposé infini. A l'instant $t = 0$, un court-circuit se produit au point A. Ce court-circuit est éliminé après 0.15 s. Déterminer l'évolution de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur C_3 .

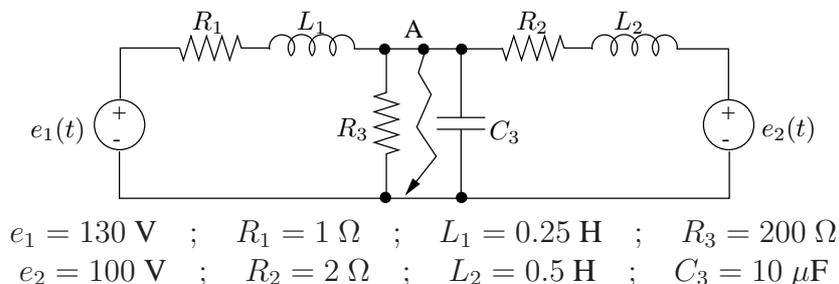


FIG. 3.15

Rép.: $u(t) = 119.6 \text{ V}, t \leq 0$
 $u(t) = 0 \text{ V}, 0 \leq t < 0.15 \text{ s}$

$$u(t) = 119.6 + 1.107 \cdot 10^4 e^{-252(t-0.15)} \sin(733.82(t-0.15) - 0.62^\circ) \text{ V}, t \geq 0.15 \text{ s}$$

Exercice 3.16

On considère le circuit de la Fig. 3.16 et les conditions de fonctionnement suivantes :

- depuis un temps supposé infini, le régime est établi avec l'interrupteur k ouvert

$$e = 60 \text{ V} \quad , \quad j = 5 \text{ A}$$

- à l'instant $t = 0$, l'interrupteur k se ferme et la f.e.m e commence à décroître selon

$$e(t) = 60e^{-5t} \text{ V}$$

j reste constant. L'inductance L est supposée initialement relaxée.

Déterminer l'évolution de la tension $v_C(t)$ aux bornes du condensateur C pour $t \in [-\infty, +\infty]$.

Vérifier les valeurs initiale ($t = 0$) et finale ($t = \infty$) de v_C et justifier par un raisonnement physique.

Quelles sont les fréquences naturelles du circuit ?

Rép.: $v_C(t) = 440 \text{ V}, t < 0$

$$v_C(t) = -60e^{-5t} + 707.06 e^{-5000t} \sin(5000t + \frac{\pi}{4}) \text{ V}, t \geq 0$$

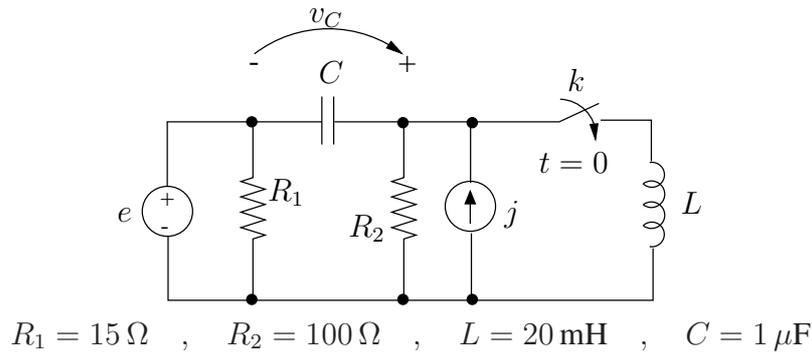


FIG. 3.16

Exercice 3.17

On donne le circuit de la Fig. 3.17. On considère la tension u_2 et on demande de déterminer :

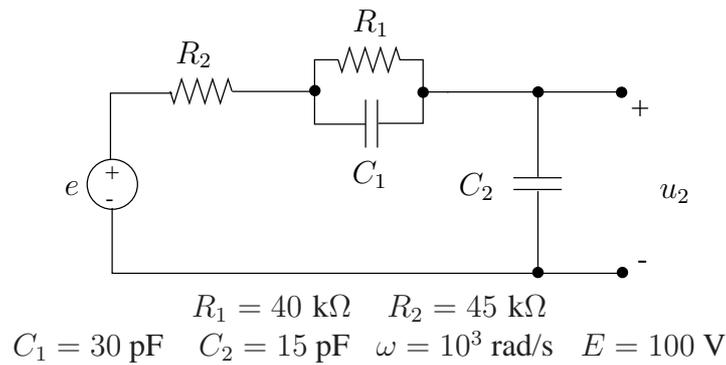


FIG. 3.17

- l'expression générale de la réponse libre du circuit ;
- l'expression de $u_2(t)$ lorsque $e(t) = E(1 + \cos \omega t)\mathbf{1}(t)$, le circuit étant initialement relaxé.

Rép.: Réponse libre :

$$u_2(t) = (0.522e^{-4.792 \cdot 10^5 t} + 0.478e^{-2.577 \cdot 10^6 t})u_{C_2}(0) + 0.706(e^{-4.792 \cdot 10^5 t} - e^{-2.577 \cdot 10^6 t})u_{C_1}(0) \text{ V}$$

Réponse forcée :

$$u_2(t) = 100 + 100 \sin(10^3 t + 89.9^\circ) + -104.4e^{-4.792 \cdot 10^5 t} - 95.6e^{-2.577 \cdot 10^6 t} \text{ V, } t \geq 0$$

Chapitre 4

Quadripôles et amplificateur opérationnel

Exercice 4.1

Déterminer l'expression du gain en boucle fermée, de l'impédance d'entrée et de l'impédance de sortie du montage isolateur représenté à la Fig. 4.1 lorsque :

- le gain en boucle ouverte de l'AO $A = 10^5$;
- l'impédance d'entrée différentielle de l'AO $Z_i = R_i = 100 \text{ k}\Omega$;
- l'impédance de sortie de l'AO $Z_o = R_o = 10 \text{ }\Omega$;
- l'impédance interne de la source $Z_s = R_s = 1 \text{ k}\Omega$;
- l'impédance de charge $Z_L = R_L = 1 \text{ k}\Omega$.

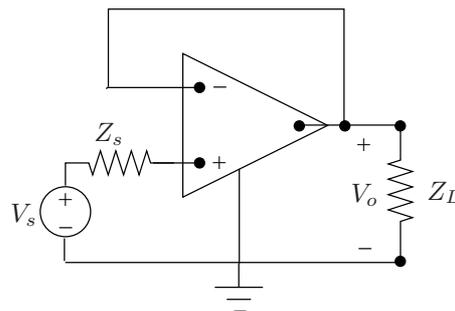


FIG. 4.1

$$\text{Rép.: } \frac{V_o}{V_i} = \frac{Z_L(Z_o + AZ_i)}{(Z_i + Z_s)(Z_o + Z_L) + Z_L(AZ_i + Z_o)}$$

$$Z_{in} = Z_i + Z_s + \frac{Z_o Z_L}{Z_o + Z_L} \left(1 + A \frac{Z_i}{Z_o} \right)$$

$$Z_{out} = \frac{Z_o(Z_i + Z_s)}{Z_o + Z_s + (1 + A)Z_i}$$

Exercice 4.2

On considère le circuit gyrateur représenté à la Fig. 4.2. Déterminer les matrices de transfert, d'impédances et d'admittances de ce quadripôle. Le quadripôle est-il

- réciproque ?
- symétrique ?
- actif ou passif ?

Montrer que terminé à l'accès 22' sur une capacité C , ce circuit se comporte, vu de l'accès 11', comme une inductance L .

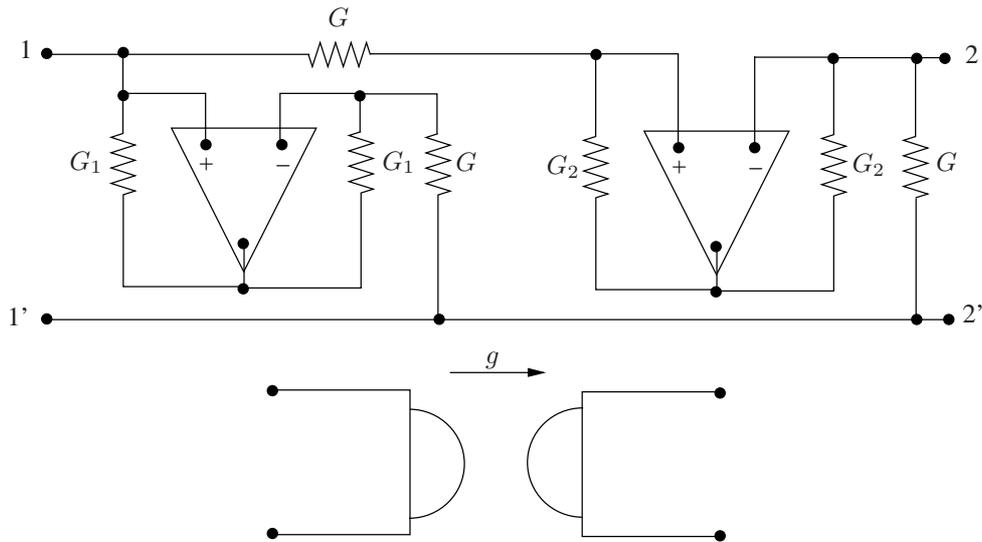


FIG. 4.2

$$\text{Rép.: } \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{G} \\ -G & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.3

Pour chacun trois des quadripôles de la Fig. 4.3, déterminer une matrice de quadripôle qui le caractérise.

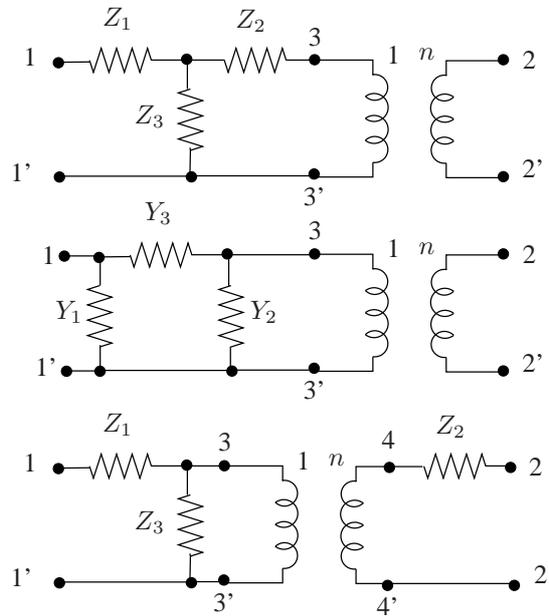


FIG. 4.3

Rép.:

Exercice 4.4

Déterminer la matrice d'admittances \mathbf{Y} du quadripôle de la Fig. 4.4.

On ferme l'accès 22' sur la résistance de charge $R_L = 4 \Omega$. On demande de déterminer dans ce cas la fonction de transfert gain en tension

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

Quelles sont les fréquences naturelles du circuit ?

Déterminer ensuite la matrice de transfert \mathbf{T} du quadripôle de la Fig. 4.5.

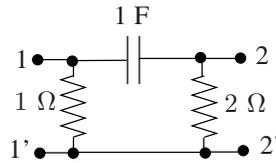


FIG. 4.4

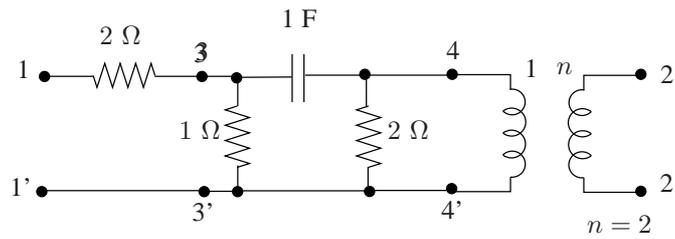


FIG. 4.5

$$\text{Rép.: } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 + s & -s \\ -s & \frac{1}{2} + s \end{pmatrix}$$

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{3}{4}}$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{0.75 + 2s}{s} & \frac{6 + 4s}{s} \\ \frac{0.25 + 0.75s}{s} & \frac{2 + 2s}{s} \end{pmatrix}$$

Exercice 4.5

Etant donné le circuit de la Fig. 4.6, on demande de déterminer la valeur des résistances R_1 et R_2 telle que

- le rapport des tensions U_1 et U_2 soit une constante supérieure à 1

$$\frac{U_1}{U_2} = \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha > 1$$

- la résistance d'entrée vue de l'accès 11' soit égale à la résistance de charge R_0

$$R_{in} = R_0$$

$$\text{Rép.: } R_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} R_0$$

$$R_2 = \frac{R_0}{\alpha - 1}$$

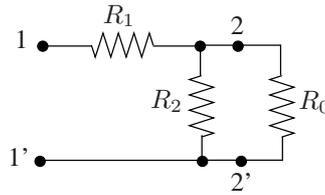


FIG. 4.6

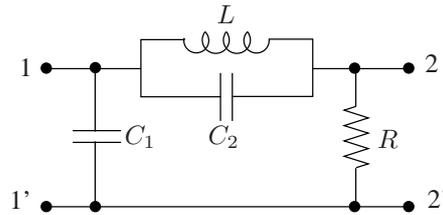
Exercice 4.6

On considère le quadripôle de la Fig. 4.7. On demande de déterminer :

- la fonction de transfert

$$H(s) = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

- ses pôles et zéros de transmission.



$$C_1 = 15 \text{ nF}; C_2 = 5 \text{ nF}; L = 0.1 \text{ mH}; R = \frac{4}{3} 10^2 \Omega$$

FIG. 4.7

Rép.: $H(s) = \frac{s^2 + 2 \cdot 10^{12}}{15 \cdot 10^{-9} (s^3 + 2 \cdot 10^6 s^2 + 2 \cdot 10^{12} s + 10^{18})}$

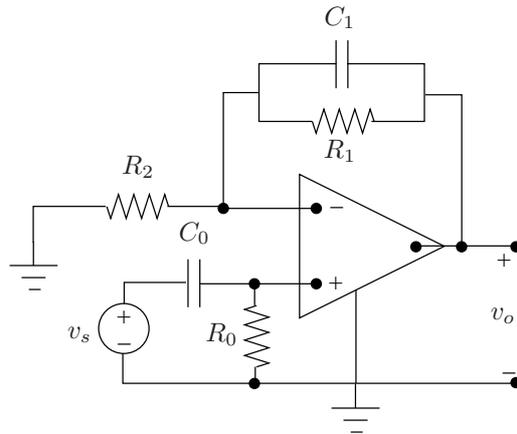
Exercice 4.7

On considère le circuit de la Fig. 4.8. Déterminer

- la fonction de transfert gain en tension à circuit ouvert :

$$H(s) = \left. \frac{V_0}{V_s} \right|_{I_2=0}$$

- l'expression de $v_0(t)$ si $v_s(t) = 2 \cos 100t$



$$R_0 = 1 \text{ k}\Omega, R_1 = 100 \text{ }\Omega, C_0 = 10 \text{ }\mu\text{F}, C_1 = 1 \text{ }\mu\text{F}, R_2 = 10 \text{ k}\Omega$$

FIG. 4.8

Rép.:
$$H(s) = \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1}}{s + \frac{1}{R_1 C_1}} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{R_0 C_0}}$$

Exercice 4.8

On considère un quadripôle dont la matrice d'impédances \mathbf{Z} s'écrit :

$$\mathbf{Z}(s) = \begin{pmatrix} 15 \cdot 10^3 + \frac{10^{12}}{20s} & \frac{10^{12}}{20s} \\ \frac{10^{12}}{20s} & 10 \cdot 10^3 + \frac{10^{12}}{20s} \end{pmatrix}$$

- Déterminer un schéma équivalent de ce quadripôle.
- A l'instant $t = 0$, on connecte à l'accès 11' une source de tension $e(t) = E \mathbf{1}(t)$. Quel type de dipôle peut-on connecter à l'accès 22' pour que la tension aux bornes de ce dipôle décroisse exponentiellement sans terme oscillant en régime transitoire et soit nulle en régime établi ?

Rép.:

Exercice 4.9

Déterminer la fonction de transfert gain en tension à circuit ouvert

$$H(s) = \left. \frac{U_2}{U_1} \right|_{I_2=0}$$

du quadripôle de la Fig. 4.9. Discuter sa stabilité en fonction du paramètre k .

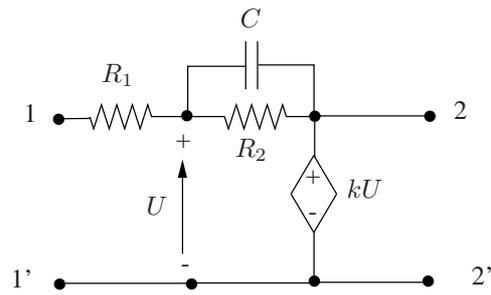


FIG. 4.9

$$\text{Rép.: } H(s) = \frac{k}{(1-k)R_1C \left(s + \frac{1}{(1-k)R_1C} + \frac{1}{R_2C} \right)}$$

Partie II

SOLUTIONS

Chapitre 1

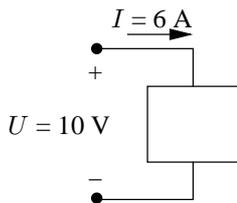
Régime continu

Notation : en régime continu, nous représenterons les diverses grandeurs (courants et tensions) par des lettres majuscules :

$$u(t) = U, \quad i(t) = I \quad \forall t$$

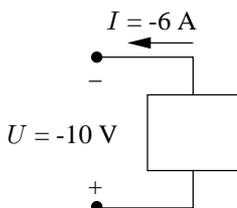
Sens des courants et tensions.

Avant d'écrire toute loi de Kirchhoff, il importe tout d'abord de définir, sur le circuit étudié, les sens associés aux différents courants et aux différentes tensions. Le choix du sens des courants et des tensions est totalement arbitraire et n'est pas imposé par des raisons physiques. Le signe trouvé pour la grandeur correspondante indique le sens réel du courant et de la tension.



- La valeur $U = 10 \text{ V}$ indique que le potentiel de la borne repérée “+” est effectivement supérieur au potentiel de la borne repérée “-”.
- La valeur $I = 6 \text{ A}$ indique que le courant (les charges positives) entre effectivement par la borne repérée “+”.

Si l'on choisit les sens opposés pour U et I , leur valeur respective présente un signe opposé :

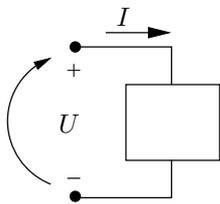


- $U = -10 \text{ V}$, valeur négative qui indique que le potentiel de la borne repérée “+” est inférieur au potentiel de la borne repérée “-”.
- $I = -6 \text{ A}$ indique que le courant (les charges positives) sort par la borne repérée “-” et donc entre par la borne “+”.

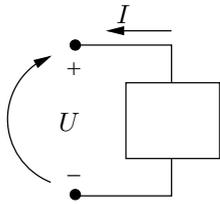
On remarque que le sens physique des courants et tensions est le même quel que soit les sens de référence choisis.

Sens conventionnels de référence et calcul des puissances.

Rappelons les sens conventionnels associés au calcul des puissances.



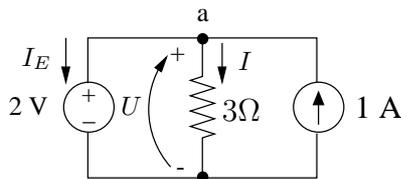
Les sens relatifs du courant et de la tension adoptés ci-contre correspondent aux *sens conventionnels de référence* : le courant entre par la borne “+” de la tension. Selon ce choix, le produit UI représente la puissance *absorbée (consommée)* par le dipôle. Cette puissance est fournie par le monde extérieur, c’est-à-dire le reste du circuit auquel le dipôle est connecté.



Si les sens du courant et de la tension sont choisis selon les sens de référence *non conventionnels*, le courant sort par la borne “+” de la tension, le produit UI représente la puissance *fournie par le dipôle* au reste du circuit.

Exercice 1.1

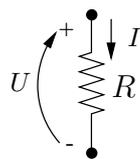
Circuit 1



Choisissons le sens des courants I , I_E et de la tension U comme indiqué ci-contre. Vu la présence de la source de tension, on a directement $U = 2$ V.

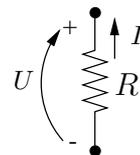
La loi d’Ohm aux bornes d’une résistance s’écrit :

avec les sens conventionnels de référence



$$U = R.I$$

avec les sens non conventionnels de référence



$$U = -R.I$$

L’application de cette loi à la résistance $R = 3 \Omega$ donne directement :

$$I = \frac{U}{3} = \frac{2}{3} \text{ A}$$

La première loi de Kirchhoff (PLK) au noeud a s’écrit :

$$I + I_E - 1 = 0 \quad \text{on déduit} \quad I_E = 1 - I = \frac{1}{3} \text{ A}$$

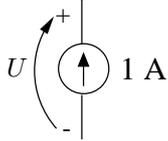
L’état électrique complet du circuit est connu. On en déduit les puissances consommées ou fournies par les différents éléments.

- Résistance $R = 3 \Omega$: les sens adoptés pour U et I sont les sens conventionnels de référence

$$p_R = UI = RI^2 = \frac{4}{3} \text{ W}$$

est la puissance consommée par cette résistance.

- Source $J = 1 \text{ A}$:

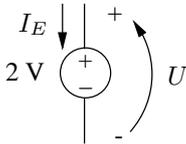


le courant et la tension aux bornes de cet élément sont orientés selon les sens de référence non conventionnels,

$$p_J = U \cdot 1 = 2 \text{ W}$$

est la puissance fournie par la source J .

- Source $E = 2 \text{ V}$:

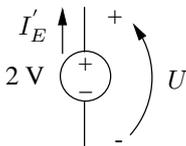


le courant et la tension aux bornes de cet élément sont orientés selon les sens de référence conventionnels,

$$p_E = U \cdot I_E = \frac{2}{3} \text{ W}$$

est la puissance consommée par la source. La valeur trouvée est positive, cette source consomme effectivement de la puissance.

Si l'on avait adopté les sens non conventionnels de référence, on aurait :



$I'_E = -I_E$ et $p'_E = U \cdot I'_E = -\frac{2}{3} \text{ W}$ est la puissance fournie par la source. Elle est négative indiquant que E consomme de la puissance. Quels que soient les sens adoptés pour U et I , on constate que les résultats sont cohérents.

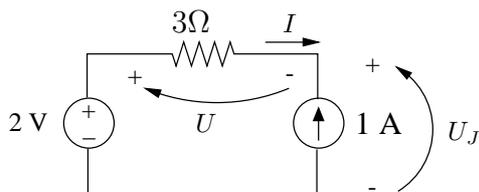
Le bilan de puissance s'établit comme suit :

$$\Sigma p \text{ consommées} = 0 \quad p_E + p_R - p_J = 0$$

ou

$$\Sigma p \text{ consommées} = \Sigma p \text{ fournies} \quad p_E + p_R = p_J$$

Circuit 2



Choisissons le sens des courants I , I_E et des tensions U et U_J comme indiqué ci-contre.

Vu la présence de la source de courant, on a directement $I = -1 \text{ A}$.

Par application de la loi d'Ohm : $U = 3 \cdot I = -3 \text{ V}$.

La seconde loi de Kirchhoff (SLK) s'écrit :

$$U + U_J - 2 = 0 \Rightarrow U_J = 5 \text{ V}.$$

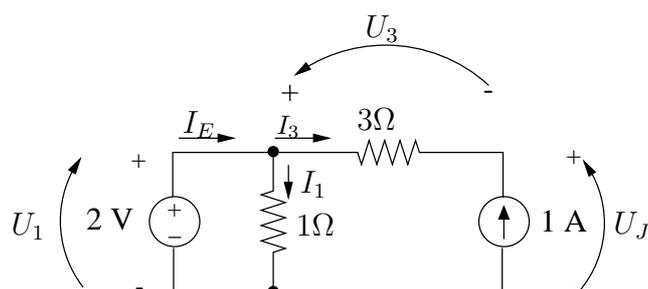
On calcule les puissances relatives aux différents éléments :

- $p_R = RI^2 = 3 \text{ W}$, est la puissance consommée par la résistance de 3Ω .
- $p_J = 1.U_J = 5 \text{ W}$ est la puissance fournie par la source J .
- $p_E = 2.I = -2 \text{ W}$ est la puissance fournie par E . Puisque la valeur est négative, E est en fait consommatrice de puissance.

Le bilan de puissance s'écrit :

$$p_R = p_J + p_E$$

Circuit 3



On trouve :

$$\begin{aligned} U_1 = 2 \text{ V} \quad U_3 = -3 \text{ V}, \quad U_J = 5 \text{ V} \\ I_1 = 2 \text{ A} \quad I_3 = -1 \text{ A} \quad I_E = 1 \text{ A} \end{aligned}$$

Puissances consommées par les résistances :

$$p_{1\Omega} = R_1 I_1^2 = 4 \text{ W}, \quad p_{3\Omega} = R_3 I_3^2 = 3 \text{ W}$$

Puissances fournies par les sources :

$$p_E = U_1 \cdot I_E = 2 \text{ W}, \quad p_J = U_J \cdot 1 = 5 \text{ W}$$

Bilan de puissance :

$$p_{1\Omega} + p_{3\Omega} = p_E + p_J$$

Exercice 1.2

Adoptant les sens des courants et tensions de la Fig. 1.1, on trouve successivement :

- par application de la PLK au noeud b ou c :

$$I_1 - I_0 - 6 = 0$$

- par application de la SLK à la maille abca :

$$120 - V_0 - V_1 = 0$$

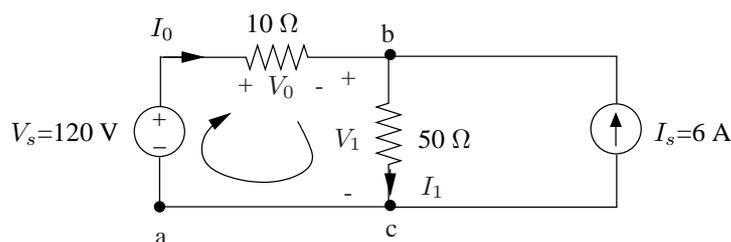


FIG. 1.1

– ou en appliquant la loi d’Ohm :

$$120 - 10I_0 - 50I_1 = 0$$

On trouve finalement : $I_0 = -3$ A et $I_1 = 3$ A On vérifie le bilan de puissance : puissance totale produite par les deux sources = puissance totale consommée par les résistances

- puissance consommée par la résistance de $10\ \Omega$: $p_{10\Omega} = 10I_0^2 = 90$ W
- puissance consommée par la résistance de $50\ \Omega$: $p_{50\Omega} = 50I_1^2 = 450$ W
- puissance produite par la source de tension de 120 V : $p_{120V} = 120I_0 = -360$ W
cette source absorbe de la puissance !
- puissance produite par la source de courant de 6 A : $p_{6A} = 6V_1 = 6 \cdot 50 \cdot I_1 = 900$ W

On vérifie bien : $p_{10\Omega} + p_{50\Omega} = p_{120V} + p_{6A}$

Exercice 1.3

Equivalence entre deux dipôles

Deux dipôles sont équivalents si pour une même d.d.p aux bornes v , ces dipôles sont parcourus par un même courant i et inversement si, pour un même courant injecté i , il apparaît une même d.d.p. v aux bornes des deux dipôles.

On ne change rien à l’état électrique d’un circuit si l’on remplace un des dipôles le constituant par un dipôle équivalent.

Nous appliquons ici ce principe au cas particulier de dipôles résistifs.

1. Association en série

Alimentées par une source de tension V_s , les résistances R_1, R_2, \dots, R_n connectées en série sont parcourues par le même courant I_s .

Nous recherchons une résistance équivalente R_{eq} telle que

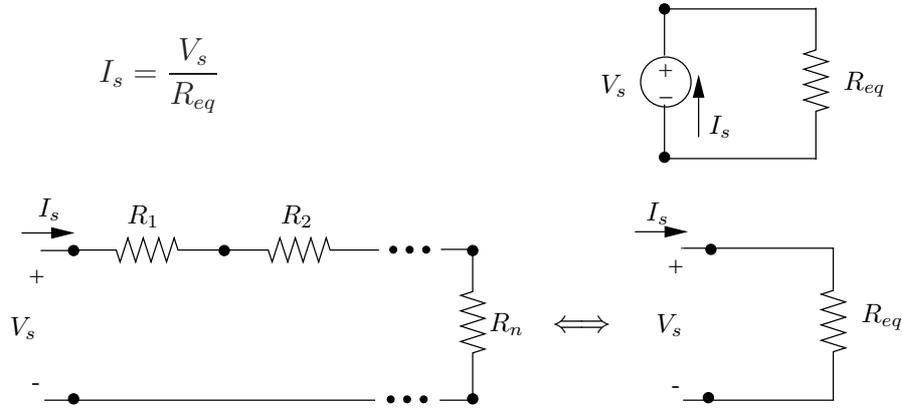


FIG. 1.2

La SLK et la loi d'Ohm appliquées dans la maille fournissent :

$$V_s = R_1 I_s + R_2 I_s + \dots + R_n I_s \quad \text{et} \quad I_s = \frac{V_s}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} = \frac{V_s}{R_{eq}}$$

Finalement la résistance équivalente est donnée par la somme des n résistances

$$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

2. Association en parallèle

Il existe une même d.d.p. aux bornes de tous les éléments. On écrit :

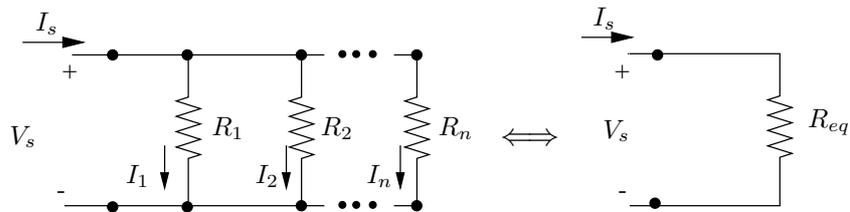


FIG. 1.3

$$V_s = R_1 I_1 = R_2 I_2 = \dots = R_n I_n$$

$$I_s = I_1 + I_2 + \dots + I_n = V_s \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right)$$

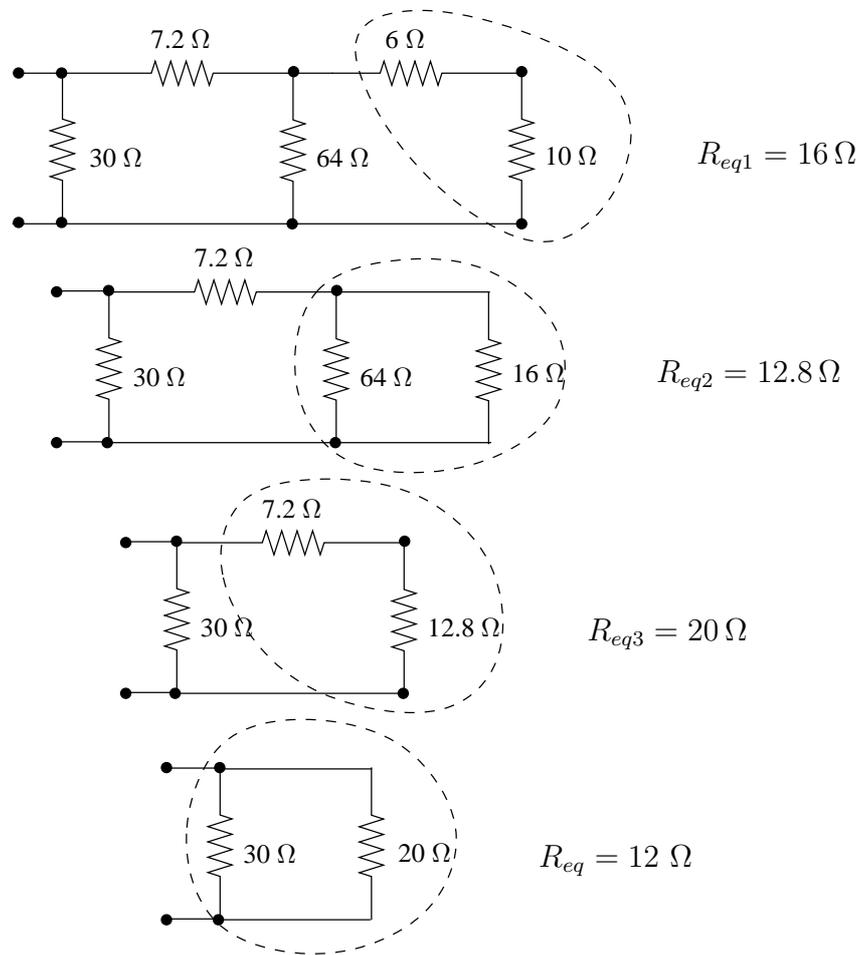
On peut représenter ce dipôle par une résistance équivalente qui vérifie :

$$\frac{I_s}{V_s} = \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

ou en termes de conductances :

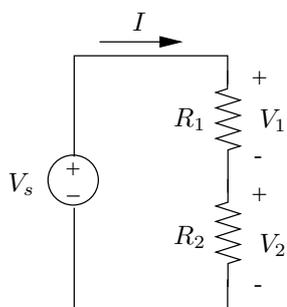
$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

3. On calcule successivement :



Exercice 1.4

1. Expression de V_1 et V_2



On dérive successivement :

$$I = \frac{V_s}{R_1 + R_2}$$

$$V_1 = R_1 I = V_s \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

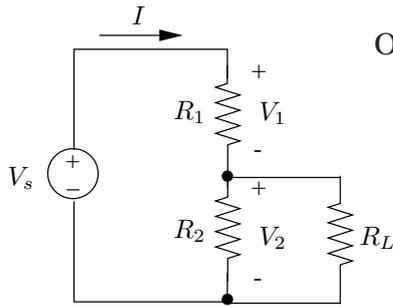
$$V_2 = R_2 I = V_s \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Le choix de R_1 et R_2 permet de varier la manière dont V_s est répartie entre V_1 et V_2 . Il existe une infinité de couples de valeurs (R_1, R_2) donnant lieu à la même répartition. Le choix

des valeurs de ces deux résistances est aussi guidé par :

- la puissance qui peut être dissipée par chaque élément ;
- la résistance de charge éventuelle que doit alimenter V_1 ou V_2 comme montré au point 2.

2. Influence de R_L



On dérive successivement :

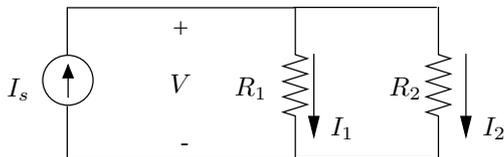
$$V_2 = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_1} V_s \quad \text{avec} \quad R_{eq} = \frac{R_2 R_L}{R_2 + R_L}$$

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 [1 + (R_2/R_L)] + R_2} V_s$$

Nous aurons donc

$$\frac{V_2}{V_s} \simeq \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{si} \quad R_L \gg R_2$$

Exercice 1.5



La tension aux bornes des deux résistances est donnée par

$$V = I_s \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

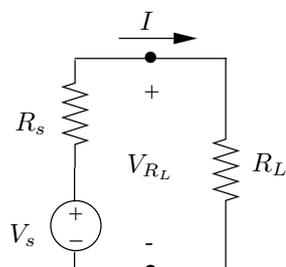
Le courant I_s se divise donc comme suit :

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = I_s \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{ou} \quad I_s \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2} = I_s \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad \text{ou} \quad I_s \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

Exercice 1.6

1. Source de tension



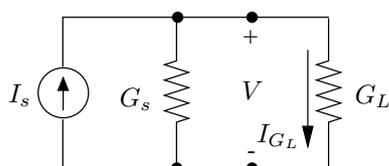
La d.d.p. aux bornes de la résistance de charge R_L est donnée par :

$$\begin{aligned} V_{R_L} &= V_s - R_s I \\ &= R_L \frac{V_s}{R_L + R_s} = \frac{V_s}{1 + (R_s/R_L)} \end{aligned}$$

On a bien

$$V_{R_L} \simeq V_s \quad \text{si} \quad R_s \ll R_L$$

2. Source de courant



Le courant débité dans la résistance de charge R_L ou conductance $G_L = \frac{1}{R_L}$ est donné par :

$$\begin{aligned} I_{G_L} &= I_s - G_s V \\ &= G_L \frac{I_s}{G_L + G_s} = \frac{I_s}{1 + (G_s/G_L)} \end{aligned}$$

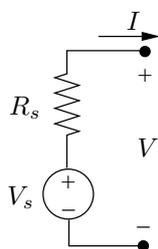
On a bien

$$I_{G_L} \simeq I_s \quad \text{si} \quad G_s \ll G_L$$

Exercice 1.7

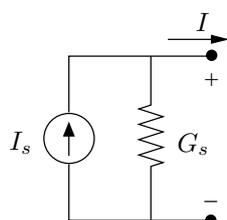
1. Equivalence source de tension \rightarrow source de courant

Les deux d' pôles sont équivalents si ils délivrent un même courant I sous une même tension V .



Le courant débité par le dipôle "source de tension" s'écrit :

$$I = \frac{V_s}{R_s} - \frac{V}{R_s}$$



Le courant débité par le dipôle "source de courant" s'écrit :

$$I = I_s - G_s V$$

La condition d'équivalence s'écrit donc :

$$\frac{V_s}{R_s} - \frac{V}{R_s} = I_s - G_s V$$

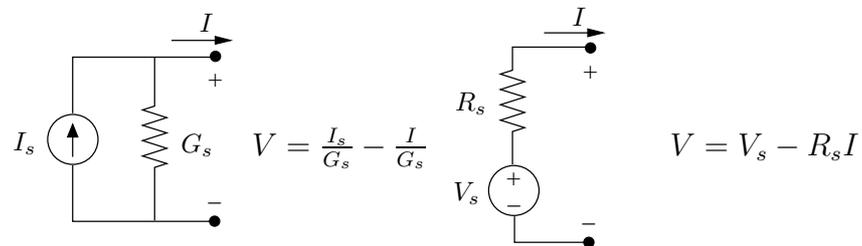
Les paramètres du dipôle "source de courant" équivalent sont :

$$I_s = \frac{V_s}{R_s}$$

$$G_s = \frac{1}{R_s}$$

2. Equivalence source de courant → source de tension

Les deux d'ôles sont équivalents si ils présentent une même tension V sous un même courant I .



La condition d'équivalence s'écrit donc :

$$\frac{I_s}{G_s} - \frac{I}{G_s} = V_s - R_s I$$

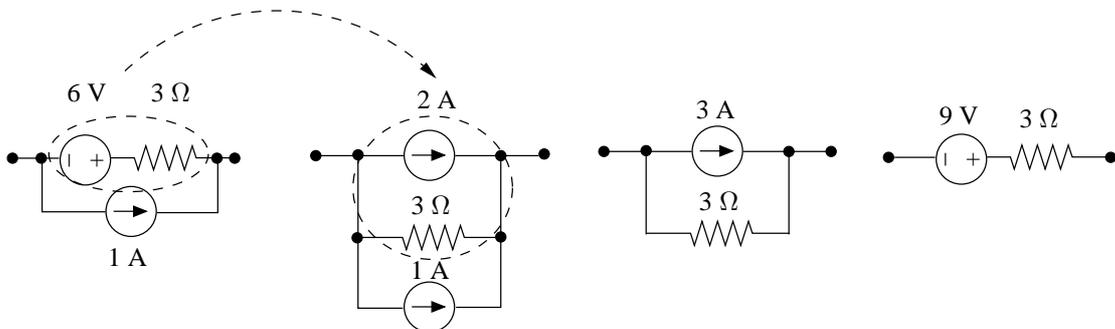
Les paramètres du dipôle "source de tension" équivalent sont :

$$V_s = \frac{I_s}{G_s}$$

$$R_s = \frac{1}{G_s}$$

3. Exemple

On transforme successivement le circuit comme suit.

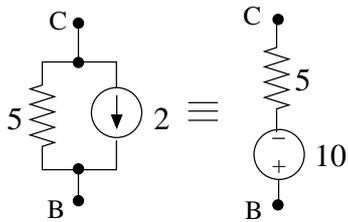


Exercice 1.8

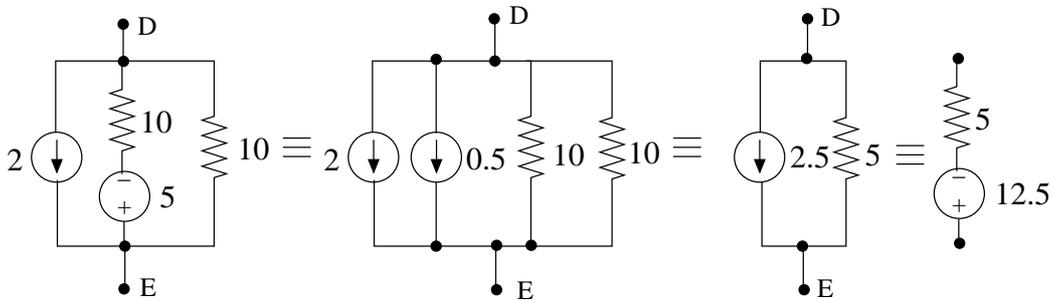
1. Source de tension équivalente

On transforme successivement :

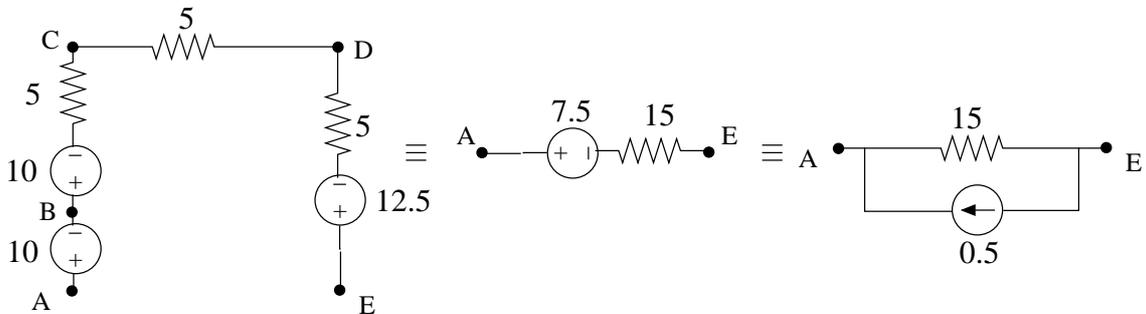
– la branche CB,



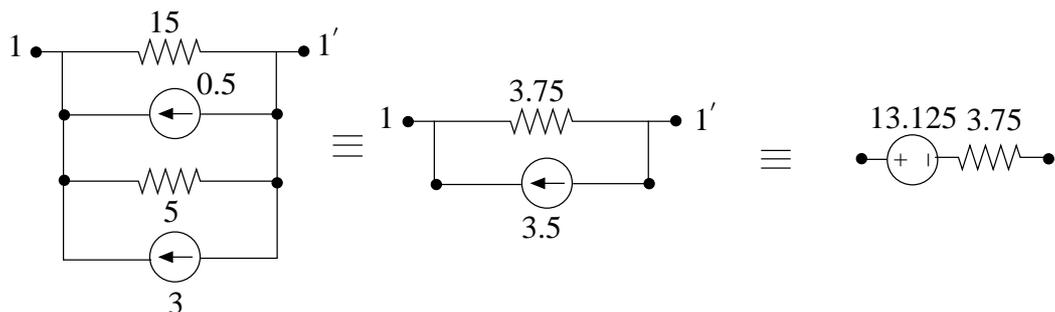
– la branche DE



La partie du circuit située au-dessus de AE se réduit ainsi en la forme



Connectant au reste du circuit, on a



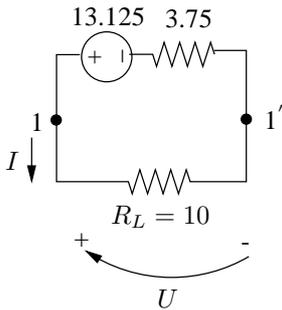
Finalement

$$V_{eq} = 13.125 \text{ V}, \quad R_{eq} = 3.75 \Omega$$

2. Accès 11' fermé sur $R_L = 10 \Omega$

Le circuit étant remplacé par son dipôle équivalent "source de tension", on connecte la résistance de charge à l'accès 11'.

On déduit le courant débité dans la résistance de charge :



$$I = \frac{V_{eq}}{R_{eq} + R_L} = 0.9545 \text{ A}$$

La tension aux bornes de cette charge vaut :

$$U = RI = 10I = 9.545 \text{ V}$$

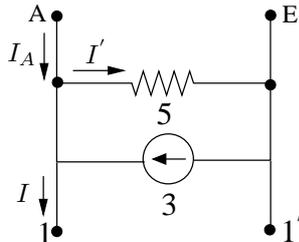
La puissance consommée par la charge vaut :

$$p_{R_L} = R_L I^2 = 9.112 \text{ W}$$

3. Etat électrique complet du circuit

Dans ce qui suit, les puissances calculées relatives aux résistances sont les puissances consommées par ces résistances. Les puissances calculées relatives aux sources de tension et de courant sont les puissances fournies par ces sources au reste du circuit.

– branche AE :



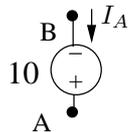
$$I' = \frac{U}{5} = 1.909 \text{ A}$$

$$I_A = I + I' - 3 = -0.1365 \text{ A}$$

$$p_{J=3} = 3U = 28.635 \text{ W}$$

$$p_{R=5} = 5I'^2 = 18.22 \text{ W}$$

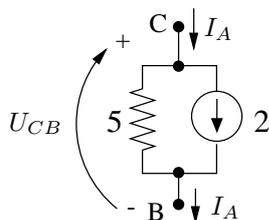
– dipôle AB :



$$p_{E=10} = 10I_A = -1.365 \text{ W}$$

Cette source consomme de la puissance.

– dipôle BC :

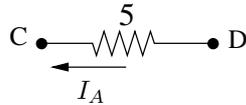


$$U_{CB} = 5(I_A - 2) = -10.682 \text{ V}$$

$$p_{R=5} = \frac{U_{CB}^2}{5} = 22.823 \text{ W}$$

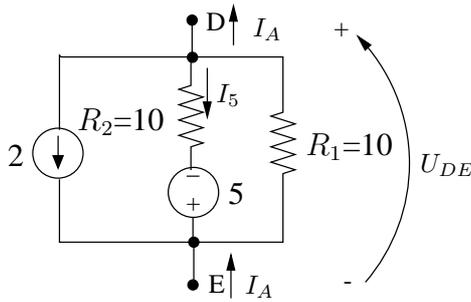
$$p_{J=2} = -2U_{CB} = 21.365 \text{ W}$$

– dipôle CD :



$$p_{R=5} = 5I_A^2 = 0.093 \text{ W}$$

– dipôle DE :



$$U_{DE} = U - 10 + U_{CB} + U_{DC} = -11.82 \text{ V}$$

$$p_{J=2} = -2U_{DE} = 23.635 \text{ W}$$

$$p_{R_1=10} = \frac{U_{DE}^2}{10} = 13.971 \text{ W}$$

$$p_{R_2=10} = \frac{(U_{DE} + 5)^2}{10} = 4.648 \text{ W}$$

$$I_5 = \frac{U_{DE} + 5}{10} = -0.682 \text{ V}$$

$$p_{E=5} = 5I_5 = -3.409 \text{ W}$$

Cette source consomme de la puissance.

Exercice 1.9

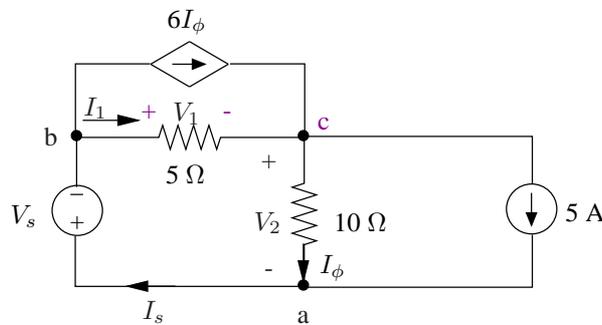


FIG. 1.4

La PLK appliquée au noeud a et b fournit :

$$I_s = I_\phi + 5 = 10$$

$$I_s = 6I_\phi + I_1 \rightarrow I_1 = I_s - 6I_\phi = -20$$

La SLK appliquée à la maille abca s'écrit :

$$V_s + V_1 + V_2 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} V_2 &= 10I_\phi = 50 \\ V_1 &= 5I_1 = -100 \end{aligned}$$

Finalement : $V_s = 50 \text{ V}$

Exercice 1.10

D'après le théorème de superposition, pour tout circuit linéaire, toute tension ou courant dans le circuit (réponse) est égale à la somme des réponses obtenues lorsque chaque source indépendante de courant ou de tension (excitation) agit seule, les autres sources ayant été rendues inactives, c'est-à-dire :

- les sources de tension court-circuitées ($v = 0$)
- les sources de courant ouvertes ($i = 0$)

La tension cherchée V_0 peut donc s'écrire :

$$V_0 = V_0^{(1)} + V_0^{(2)} + V_0^{(3)}$$

avec

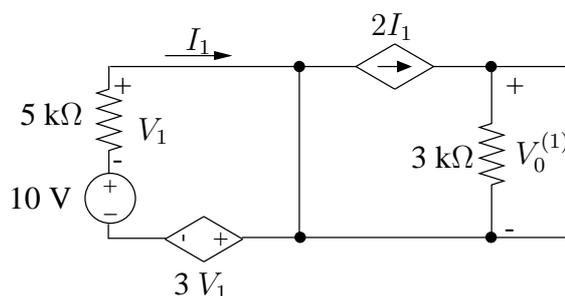
- $V_0^{(1)} = \alpha E_1$, la tension V_0 si la source $E_1 = 10$ V agit seule ;
- $V_0^{(2)} = \beta E_2$, la tension V_0 si la source $E_2 = 2$ V agit seule ;
- $V_0^{(3)} = \gamma J$, la tension V_0 si la source $J = 5$ mA agit seule.

Chaque réponse partielle est proportionnelle à la source correspondante et la réponse totale s'exprime donc comme une combinaison linéaire des sources indépendantes.

Remarquons que seules les sources indépendantes constituent des excitations pour le théorème de superposition et non les sources commandées.

1. La source $E = 10$ V agit seule

La source de tension $E_2 = 2$ V est court-circuitée et la source de courant $J = 5$ mA est remplacée par un circuit ouvert.



La SLK dans la maille gauche du circuit s'écrit :

$$10 + V_1 - 3V_1 = 0 \quad \implies \quad V_1 = 5 \text{ V}$$

On déduit :

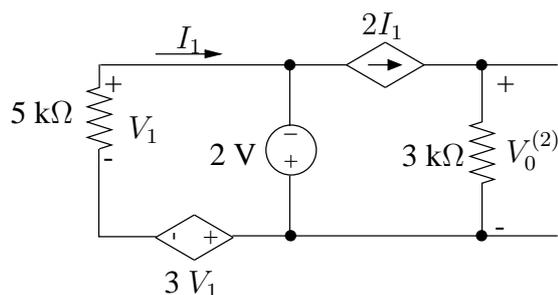
$$I_1 = -\frac{V_1}{5 \cdot 10^3} = -1 \text{ mA}$$

et :

$$V_0^{(1)} = 3 \cdot 10^3 \cdot 2I_1 = -6 \text{ V}$$

2. La source $E = 2 \text{ V}$ agit seule

La source de tension $E_1 = 10 \text{ V}$ est court-circuitée et la source de courant $J = 5 \text{ mA}$ est remplacée par un circuit ouvert.

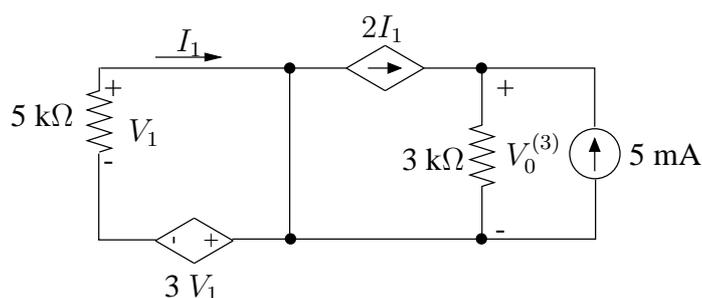


La topologie de ce circuit est identique à celle du circuit du point 1 : dans la maille gauche, on trouve une seule source indépendante de tension ; la tension imposée de 10 V du point 1 est maintenant de 2 V . On déduit directement :

$$V_0^{(2)} = \frac{2}{10} V_0^{(1)} = -1.2 \text{ V}$$

3. La source $J = 5 \text{ mA}$ agit seule

Les sources de tension $E_1 = 10 \text{ V}$ et $E_2 = 2 \text{ V}$ sont court-circuitées.



La SLK dans la maille gauche du circuit montre que $I_1 = 0$:

$$V_1 - 3V_1 = 0 \implies V_1 = 0, I_1 = 0$$

Le courant dans la résistance de $3 \text{ k}\Omega$ est donc égal à celui fourni par source de courant et

$$V_0^{(3)} = 3 \cdot 10^3 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 15 \text{ V}$$

4. Application du théorème de superposition

Finalement pour le circuit complet :

$$V_0 = V_0^{(1)} + V_0^{(2)} + V_0^{(3)} = 7.8 \text{ V}$$

5. Calcul de la puissance

Le théorème de superposition s'applique au calcul de courants et tensions dans le circuit mais ne peut être utilisé pour dériver des puissances. En effet, alors que tensions et courants dérivent de relations linéaires (lois de Kirchhoff et loi d'Ohm), les puissances s'expriment sous une forme non linéaire, le produit d'une tension et d'un courant, forme à laquelle le principe de superposition ne peut évidemment s'appliquer.

Ainsi, la puissance consommée par la résistance de charge $R_L = 3 \text{ k}\Omega$ est donnée par :

$$p_{R_L} = \frac{V_0^2}{R_L} = 20.3 \text{ mW}$$

Les puissances consommées par cette même résistance dans les trois situations intermédiaires sont respectivement :

$$p_{R_L}^{(1)} = \frac{V_0^{(1)2}}{R_L} = 12 \text{ mW}, \quad p_{R_L}^{(2)} = \frac{V_0^{(2)2}}{R_L} = 0.5 \text{ mW}, \quad p_{R_L}^{(3)} = \frac{V_0^{(3)2}}{R_L} = 75 \text{ mW}$$

Et l'on a évidemment :

$$\frac{V_0^2}{R_L} = \frac{(V_0^{(1)} + V_0^{(2)} + V_0^{(3)})^2}{R_L} \neq \frac{V_0^{(1)2}}{R_L} + \frac{V_0^{(2)2}}{R_L} + \frac{V_0^{(3)2}}{R_L}$$

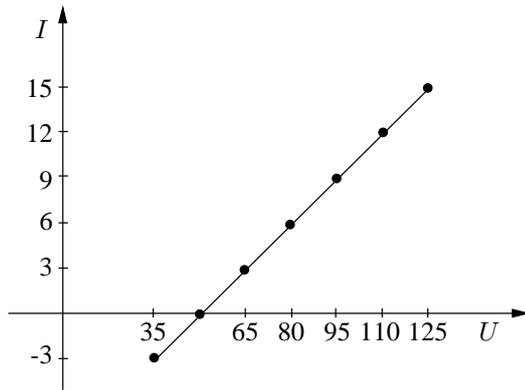
Exercice 1.11

1. Circuit équivalent

Dans la plage de fonctionnement considérée, la relation $I - U$ liant le courant à la tension aux bornes du circuit s'écrit sous la forme de l'équation d'une droite comme représenté à la Fig. 1.5.

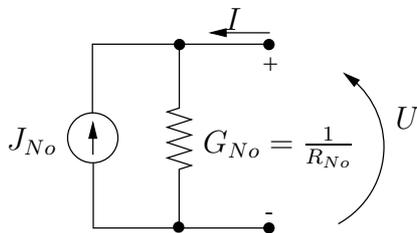
Dans la plage de fonctionnement considérée, le circuit se comporte comme un circuit linéaire.

La structure du circuit équivalent demandé correspond à celle d'un schéma équivalent de Norton.



$$I = \frac{1}{5}U - 10$$

FIG. 1.5



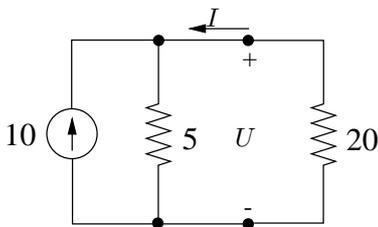
Pour cet équivalent, la relation $I - U$ aux bornes s'écrit :

$$I = -I_{No} + G_{No}U$$

On déduit :

- la source de courant : $I_{No} = 10 \text{ A}$
- la résistance : $R_{No} = \frac{1}{G_{No}} = 5 \text{ } \Omega$

2. Circuit fermé sur une résistance de 20 Ω



On déduit du schéma équivalent :

$$U = 10 \cdot (5 // 20) = 10 \frac{5 \cdot 20}{25} = 40 \text{ V}$$

$$I = -\frac{40}{20} = -2 \text{ A}$$

On vérifie que le résultat trouvé se situe dans la plage de fonctionnement considérée pour laquelle le schéma équivalent est valide.

Exercice 1.12

1. Relation $U - I$ (Fig. 1.6)

Dans toute la plage de fonctionnement considérée, la relation $U - I$ n'est pas linéaire. Le circuit ne se comporte pas comme un circuit linéaire et ne peut donc pas être remplacé par un schéma équivalent de Norton ou de Thévenin.

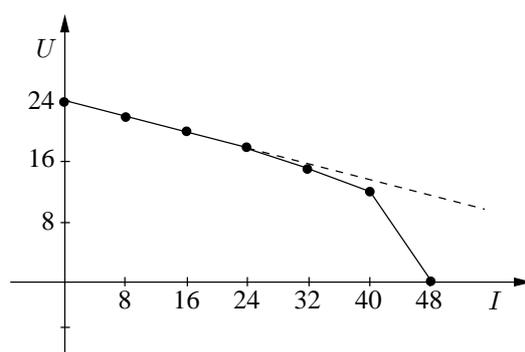


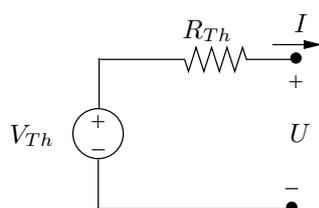
FIG. 1.6

2. Limitation de la plage de fonctionnement

Dans la plage $0 < I < 24$ A, la relation $U - I$ est linéaire. Elle s'écrit :

$$U = 24 - \frac{1}{4}I$$

Dans cette plage, le circuit peut être remplacé par un schéma équivalent de Thévenin.

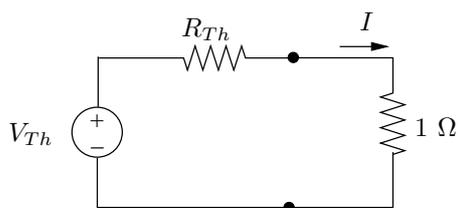


$$U = V_{Th} - R_{Th}I$$

On déduit :

$$V_{Th} = 24 \text{ V} , \quad R_{Th} = \frac{1}{4} \Omega$$

3. Circuit fermé sur une résistance de 1 Ω

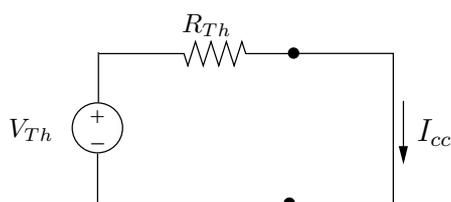


On déduit du schéma équivalent :

$$I = \frac{V_{Th}}{1 + R_{Th}} = 19.2 \text{ A}$$

Le courant obtenu se trouve dans la plage de fonctionnement linéaire du circuit ($0 < I < 24$ A), le schéma équivalent et le résultat déduit sont valides.

4. Courant de court-circuit



On déduit du schéma équivalent :

$$I_{cc} = \frac{V_{Th}}{R_{Th}} = 96 \text{ A}$$

Ce résultat est différent du courant de court-circuit mentionné dans la table de mesures

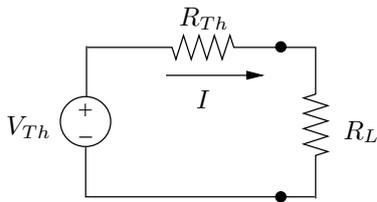
(48 A) car on se trouve en dehors du domaine de fonctionnement linéaire du dipôle et le schéma équivalent de Thévenin n'est plus valide.

Exercice 1.13

1. Le problème de l'adaptation des impédances en régime continu

Le problème consiste à déterminer la valeur de la résistance de charge R_L à connecter aux bornes d'un circuit linéaire comportant nécessairement des sources d'énergie pour que la charge soutire à ce circuit le maximum de puissance.

Puisqu'on s'intéresse à l'action du circuit sur une charge connectée à ses bornes, on peut le remplacer par son schéma équivalent de Thévenin.



Calculons la puissance transmise à la charge :

$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_L}$$

$$p_{R_L} = R_L I^2 = \frac{R_L}{(R_{Th} + R_L)^2} V_{Th}^2$$

La puissance sera maximale si :

$$\frac{d p_{R_L}}{d R_L} = 0$$

On dérive

$$\frac{d p_{R_L}}{d R_L} = \frac{R_{Th} - R_L}{(R_{Th} + R_L)^3} V_{Th}^2$$

La valeur cherchée pour R_L est par conséquent :

$$R_L = R_{Th}$$

On vérifia que l'on a bien $\frac{d^2 p_{R_L}}{d R_L^2} < 0$ pour $R_L = R_{Th}$.

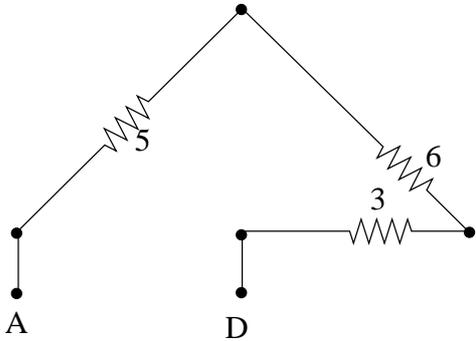
La puissance fournie par le circuit à l'adaptation vaut :

$$p_{R_L} = R_L \frac{V_{Th}^2}{4R_L^2} = \frac{V_{Th}^2}{4R_L}$$

2. Schéma équivalent de Thévenin du circuit vu des bornes AD

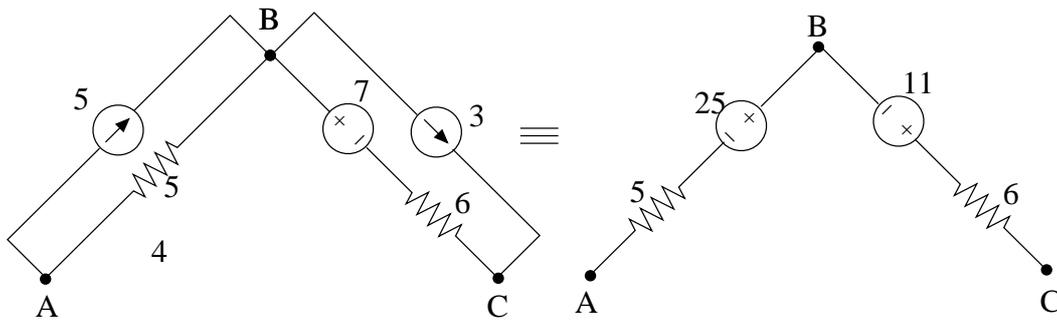
Dérivons tout d'abord le schéma équivalent de Thévenin du circuit en parallèle sur la résistance de 4Ω .

La résistance de Thévenin est donnée par la résistance équivalente vue de l'accès du circuit passif. On dérive :

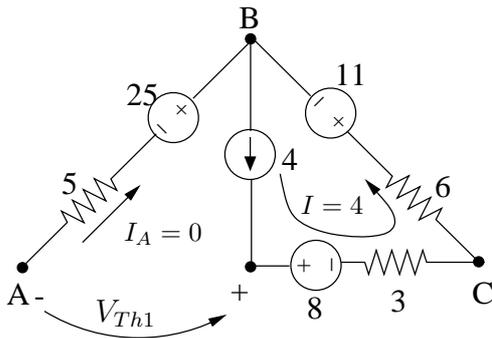


$$R_{Th1} = 5 + 6 + 3 = 14 \Omega$$

La f.e.m. de Thévenin est la tension apparaissant aux bornes du circuit à vide. Transformons tout d'abord les branches AB et BC comme suit :

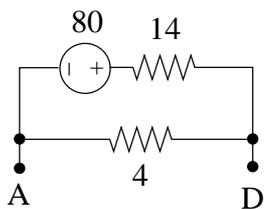


On a :



$$V_{Th1} = 25 + 11 + 8 + 4(3 + 6) = 80 \text{ V}$$

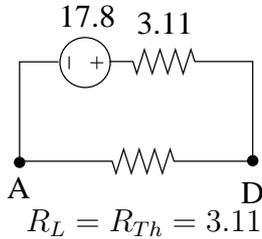
Finalement :



$$R_{Th} = 4 // 14 = 3.11 \Omega, \quad V_{Th} = 4 \frac{80}{4 + 14} = 17.8 \text{ V}$$

3. Réalisation de l'adaptation

Pour réaliser l'adaptation, on ferme le circuit sur la résistance de charge $R_L = R_{Th} = 3.11 \Omega$.

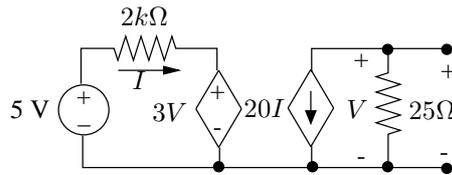


La puissance maximale qui peut être soutirée au circuit vaut :

$$p_{R_L} = R_{Th} \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}^2} = 25.47 \text{ W}$$

Exercice 1.14

La f.e.m. de Thévenin est la tension qui apparaît à vide aux bornes du circuit.



La résistance de 25Ω étant parcourue par le courant de la source commandée $20I$, on écrit :

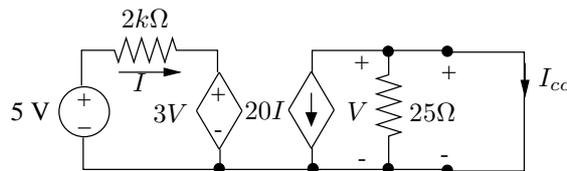
$$V_{Th} = V = (-20I).(25) = -500I$$

La SLK écrite dans la maille de la partie gauche du circuit fournit :

$$I = \frac{5 - 3V_{Th}}{2000}$$

On déduit $V_{Th} = -5 \text{ V}$.

La résistance de Thévenin peut être déduite d'un essai en court-circuit.



On dérive successivement :

$$V = 0 \rightarrow I_{cc} = -20I \quad I = 2.5 \text{ mA} \rightarrow I_{cc} = -50 \text{ mA}$$

Et nalement :

$$R_{Th} = \frac{V_{Th}}{I_{cc}} = 100 \Omega$$

Pour rechercher R_{Th} , on peut aussi rechercher la résistance d'entrée du circuit vue de l'accès mais étant donné la présence de sources commandées, on ne peut procéder par de simples réductions série/parallèle.

Il faut alors passer le circuit, injecter 1 A à l'accès et déterminer V , la tension à l'accès, ou appliquer une tension de 1 V à l'accès et déterminer I , le courant circulant dans cet accès. Vu la présence de la source commandée de type VVT dans la partie gauche du circuit, il est ici plus simple d'appliquer 1 V à l'accès et de déterminer le courant correspondant comme indiqué à la Fig. 1.7

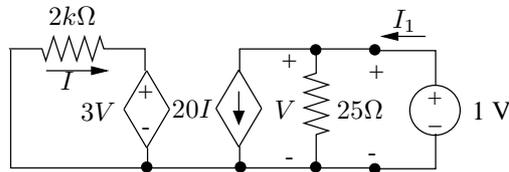


FIG. 1.7

On écrit pour la partie gauche du circuit :

$$V = 1 \text{ V} \rightarrow I_1 = \frac{-3}{2000} = -1.5 \text{ mA}$$

La PLK appliquée à la partie droite du circuit fournit :

$$I = 20I_1 + \frac{1}{25} = 10 \text{ mA}$$

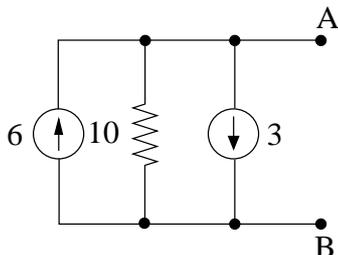
Et nalement :

$$R_{Th} = \frac{1}{i} = 100 \Omega$$

Exercice 1.15

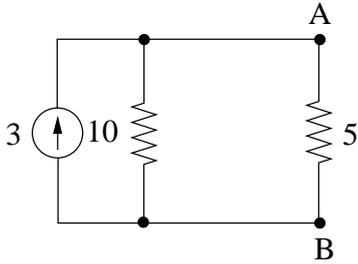
1. Schéma équivalent de Norton vu de AB et calcul de V_0

Par transformations de sources successives, on obtient :



$$I_{No} = 3 \text{ A}, \quad G_{No} = \frac{1}{10} \text{ S}$$

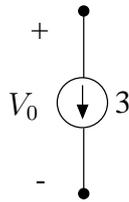
Connectant la résistance de 5Ω aux bornes AB, on dérive :



$$V_0 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} \right) = 3, \quad V_0 = 10 \text{ V}$$

2. Puissances fournies par les sources indépendantes

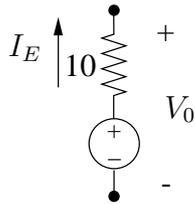
– source $J = 3 \text{ A}$:



$$p_{J=3} = -3V_0 = -30 \text{ W}$$

Cette source consomme 30 W.

– source $E = 60 \text{ V}$:

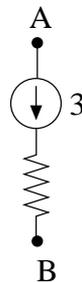


$$I_E = \frac{60 - V_0}{10} = 5 \text{ A}$$

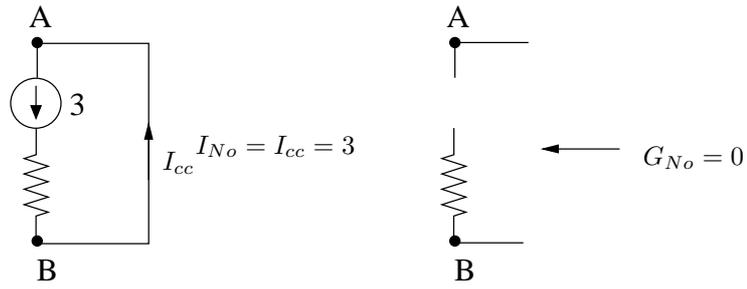
$$p_{E=60} = 60I_E = 300 \text{ W}$$

3. Ajout d'une résistance en série avec la source de courant

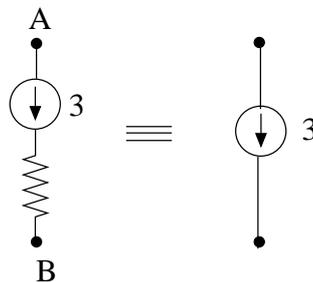
Le dipôle constitué d'une source de courant en série avec une résistance est équivalent à une source de courant pure. En effet, recherchons le schéma équivalent de Norton du dipôle :



Le courant de Norton est donné par le courant traversant l'accès court-circuité, soit 3 A, le courant injecté par la source de courant quel que soit R . La conductance de Norton est donnée par la conductance du dipôle passé é, c'est-à-dire la conductance d'un circuit ouvert, soit $G_{No} = 0$.

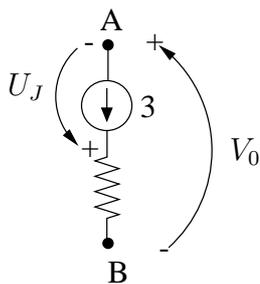


On a donc :



Il s'ensuit que le schéma équivalent de Norton ainsi que la valeur de la tension V_0 sont inchangés par rapport à la situation du point 1.

L'état électrique du circuit connecté aux bornes de la source de courant est inchangé. La puissance fournie par la source E est donc inchangée. Par contre, l'état électrique de la branche contenant la source de courant est modifié. Ainsi, la tension aux bornes de la source de courant vaut pour le circuit modifié :



$$U_J = 100.3 - V_0 = 290 \text{ V}$$

et la puissance fournie par cette source est égale à :

$$p_J = 3 U_J = 870 \text{ W}$$

La résistance de 100Ω consomme : $p_{R=100} = 100(3)^2 = 900 \text{ W}$.

On remarque que globalement, la branche $R-J$ consomme une puissance de $900-870=30 \text{ W}$, égale à la puissance consommée par la source J dans la situation initiale.

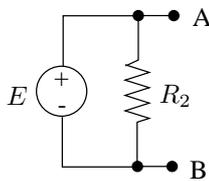
Exercice 1.16

1. Résistance équivalente de Thévenin R_{Th} vue des bornes ab et adaptation

Pour obtenir l'adaptation, il faut choisir une résistance de charge $R_L = R_{Th}$.

On détermine le schéma équivalent de Thévenin du circuit vu des bornes ab par transformations successives (équivalences de sources, schémas équivalents de Thévenin ou de Norton successifs).

1.



\equiv

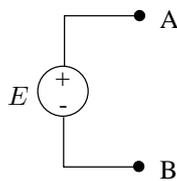
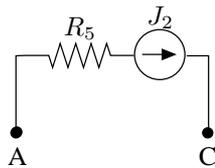


Schéma de Thévenin équivalent.

A vide, on a : $V_{BA} = E$

La résistance équivalente vue de AB si E est passé (remplacé par un court-circuit) est nulle.

2.



\equiv

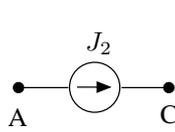
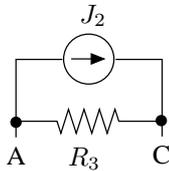


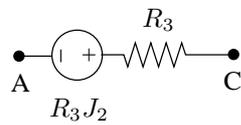
Schéma de Norton équivalent.

Si l'on court-circuite les bornes AC, on a : $I_{cc} = J_2$. La conductance équivalente vue de AC si J est passé (remplacé par un circuit ouvert) est nulle.

3.

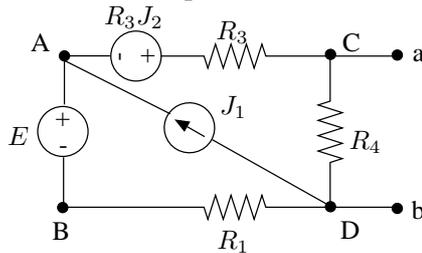


\equiv

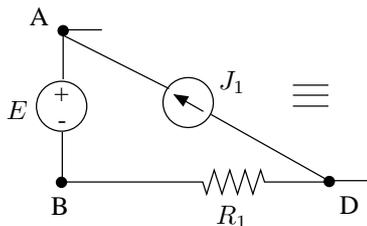


Equivalence source de courant - source de tension.

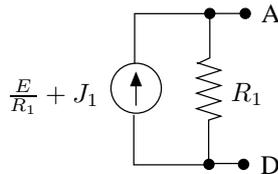
Le circuit se transforme en le circuit équivalent :



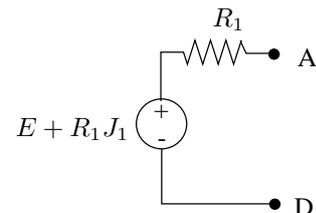
4.



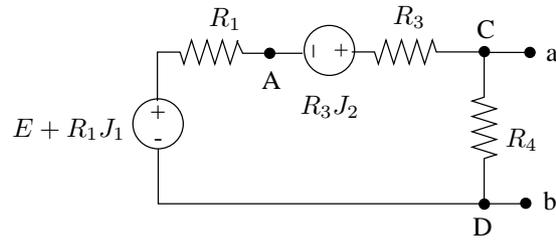
\equiv



\equiv



5. Finalement, le circuit devient :



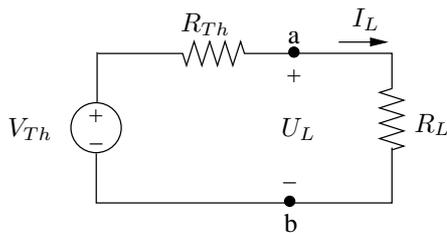
et vu de ab :

$$V_{Th} = R_4 \frac{E + R_1 J_1 + R_3 J_2}{R_1 + R_3 + R_4} = 163.6 \text{ V}$$

$$R_{Th} = R_4 // (R_1 + R_3) = \frac{R_4 (R_1 + R_3)}{R_4 + R_1 + R_3} = 39.4 \cdot 10^3 \Omega$$

Pour soutirer au circuit une puissance maximale, il faut donc connecter une résistance de charge :

$$R_L = R_{Th} = 39.4 \text{ k}\Omega$$



$$I_L = \frac{V_{Th}}{2R_{Th}} = 2.08 \text{ mA}$$

Puissance consommée par la charge :

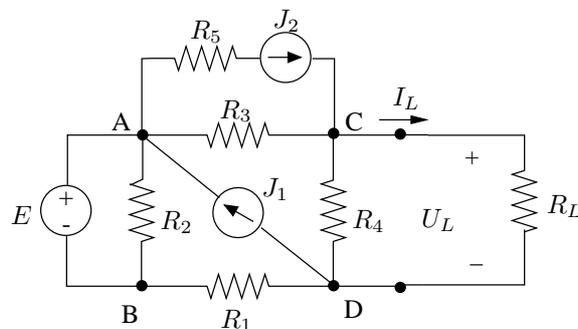
$$P_L = R_L I_L^2 = 0.17 \text{ W.}$$

2. Etat électrique complet du circuit

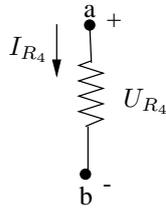
La d.d.p. aux bornes de la charge est donnée par :

$$U_L = R_L I_L = 81.8 \text{ V}$$

A partir de la connaissance de I_L et U_L , on détermine successivement, en “remontant” dans le circuit, l’état électrique des différentes branches.



1. branche R_4

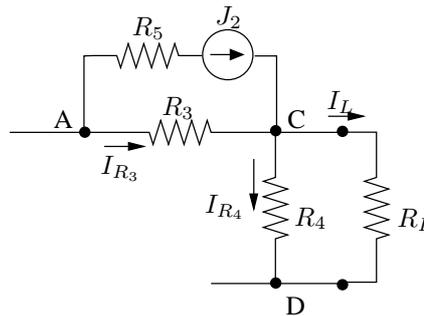


$$U_{R_4} = U_L, \quad I_{R_4} = \frac{U_{R_4}}{R_4} = 0.82 \text{ mA}$$

Puissance consommée par la résistance R_4 :

$$p_{R_4} = \frac{U_{R_4}^2}{R_4} = R_4 I_{R_4}^2 = 0.067 \text{ W}$$

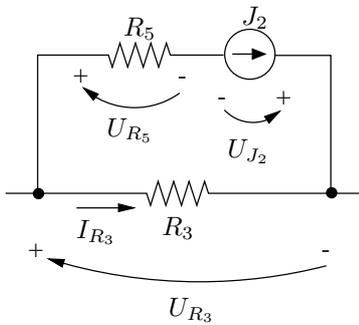
2. branche R_3



PLK au noeud C : $I_{R_3} = I_{R_4} + I_L - J_2 = 0.9 \text{ mA}$ et $U_{R_3} = R_3 I_{R_3} = 22.5 \text{ V}$
Puissance consommée par R_3 :

$$p_{R_3} = \frac{U_{R_3}^2}{R_3} = R_3 I_{R_3}^2 = 0.02 \text{ W}$$

3. branche $R_5 - J_2$



Puissance consommée par R_5 :

$$p_{R_5} = R_5 J_2^2 = 0.04 \text{ W}$$

On a : $U_{R_5} = R_5 J_2 = 20 \text{ V}$

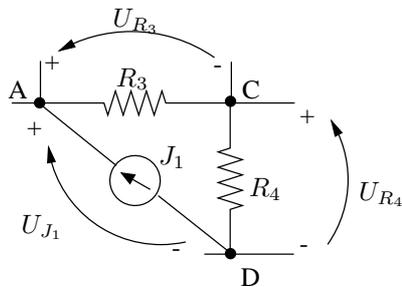
Par la SLK : $U_{J_2} = U_{R_5} - R_3 I_{R_3} = -2.5 \text{ V}$

Puissance délivrée par la source J_2 :

$$p_{J_2} = J_2 U_{J_2} = -0.005 \text{ W}$$

La source J_2 consomme de la puissance !

4. branche J_1 :



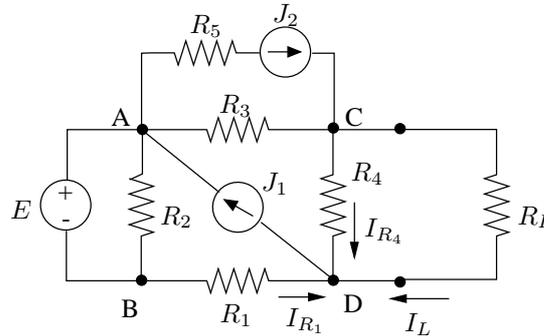
SLK dans la maille DCA :

$$U_{J_1} = U_{R_4} + U_{R_3} = 104.3 \text{ V}$$

Puissance délivrée par la source J_1 :

$$p_{J_1} = J_1 U_{J_1} = 0.52 \text{ W}$$

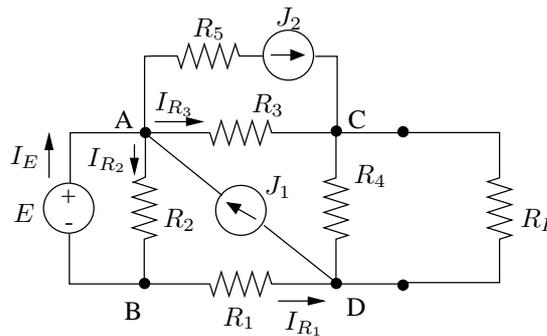
5. branche R_1 :



PLK au noeud D : $I_{R_1} = J_1 - I_{R_4} - I_L = 2.1 \text{ mA}$ et $U_{R_1} = R_1 I_{R_1} = 84 \text{ V}$
 Puissance consommée par R_1 :

$$p_{R_1} = \frac{U_{R_1}^2}{R_1} = R_1 I_{R_1}^2 = 0.176 \text{ W}$$

6. branches E et R_2 :



On a : $I_{R_2} = \frac{E}{R_2} = 0.33 \text{ mA}$ ($U_{R_2} = E$!)

Puissance consommée par R_2 :

$$p_{R_2} = R_2 I_{R_2}^2 = 0.007 \text{ W}$$

PLK au noeud B : $I_E = I_{R_2} - I_{R_1} = -1.77 \text{ mA}$

Vérification : PLK au noeud A : $I_E + J_1 = I_{R_2} + J_2 + I_{R_3}$

Puissance délivrée par la source E :

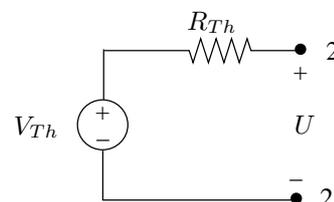
$$p_E = E I_E = -0.035 \text{ W}$$

On vérifie le bilan de puissance :

$$p_{R_L} + p_{R_4} + p_{R_3} + p_{R_5} + p_{R_1} + p_{R_2} = p_{J_2} + p_{J_1} + p_E$$

Exercice 1.17
1. Schéma équivalent de Thévenin

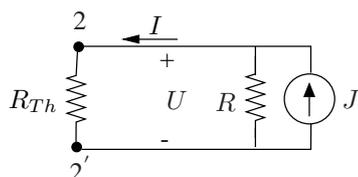
Le circuit à gauche de $22'$ est linéaire et résistif, il peut donc être remplacé par un schéma équivalent de Thévenin comprenant une source de tension V_{Th} en série avec une résistance R_{Th} .



De plus, puisque E est la seule source indépendante d'énergie présente dans le circuit à gauche de $22'$, V_{Th} est directement proportionnelle à E :

$$V_{Th} = \alpha E$$

- (a) Détermination de R_{Th} : lorsque $E = 0$, l'équivalent de Thévenin se simplifie en la seule résistance R_{Th} . Le circuit complet prend ainsi la forme :



$$\begin{aligned} \text{On a : } I_{E=0} &= J - \frac{U_{E=0}}{R} \\ &= 2 - \frac{10}{20} = 1.5 \text{ A} \end{aligned}$$

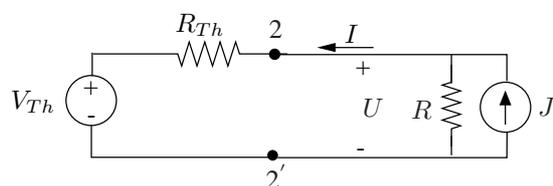
$$\text{et } R_{Th} = \frac{U_{E=0}}{I_{E=0}} = \frac{10}{1.5} = \frac{20}{3} = 6.67 \text{ } \Omega$$

- (b) Détermination de V_{Th} pour $E = 30 \text{ V}$.

Deux procédures équivalentes sont possibles.

- i. Déterminer le coefficient α sur base de la valeur de U lorsque $E = 10 \text{ V}$ et en déduire V_{Th} correspondant à $E = 30 \text{ V}$.

Si $E = 10 \text{ V}$, on a $U_{E=10} = 15 \text{ V}$



$$\begin{aligned} I_{E=10} &= J - \frac{U_{E=10}}{R} \\ &= 2 - \frac{15}{20} = 1.25 \text{ A} \\ V_{Th} &= U_{E=10} - R_{Th} I_{E=10} \\ &= \frac{20}{3} = \alpha E \quad \rightarrow \alpha = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Finalement, pour $E = 30 \text{ V}$, $V_{Th} = \alpha E = 20 \text{ V}$

- ii. Déterminer la valeur de U correspondant à $E = 30 \text{ V}$ et en déduire directement la valeur de V_{Th} pour cette valeur de E .

Le circuit étant linéaire, d'après le théorème de superposition, U peut s'écrire

$$U = \alpha' E + \beta' J = \alpha' E + \beta \quad \text{puisque } J \text{ est xé}$$

Des deux conditions

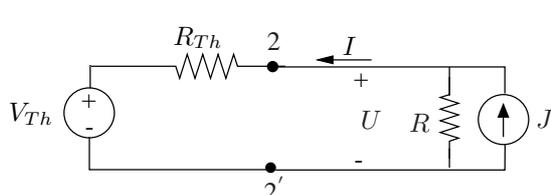
$$E = 0 \leftrightarrow U = 10 \text{ V}$$

$$E = 10 \text{ V} \leftrightarrow U = 15 \text{ V}$$

On déduit

$$U = 0.5E + 10 \quad \text{et donc pour } E = 30 \text{ V, } U = 25 \text{ V}$$

On a :



$$I_{E=30} = J - \frac{U_{E=30}}{R}$$

$$= 2 - \frac{25}{20} = 0.75 \text{ A}$$

$$V_{Th} = U_{E=30} - R_{Th} I_{E=30} = 20 \text{ V}$$

2. Calcul des puissances.

Il est possible de déterminer :

- la puissance consommée par la résistance R :

$$p_R = \frac{U_{E=30}^2}{R} = \frac{25^2}{20} = 31.25 \text{ W}$$

- la puissance fournie par la source J :

$$p_J = J \cdot U_{E=30} = 2 \cdot 25 = 50 \text{ W}$$

- il n'est par contre pas possible de déterminer la puissance fournie par la source E : la constitution du circuit résistif compris entre les accès $11'$ et $22'$ étant inconnue, le courant débité par E ne peut être déterminé ;
- la bilan de puissance pour le circuit complet permet seulement de déduire que la puissance consommée par le circuit à gauche de $22'$ est égale à :

$$p = p_J - p_R = 50 - 31.25 = 18.75 \text{ W}$$

- c'est également la puissance consommée par le schéma équivalent de Thévenin. Par contre, la puissance fournie par la source de Thévenin V_{Th} et la puissance consommée par la résistance de Thévenin R_{Th} considérées isolément n'ont pas de signification physique.

Exercice 1.18

La méthode des noeuds consiste à écrire $n - 1$ PLK en $n - 1$ noeuds du circuit, un des noeuds étant choisi comme référence des tensions. On exprime donc ces relations en fonction des potentiels de noeuds \mathbf{V}_N :

$$\mathbf{I}_{sN} = \mathbf{G}_N \mathbf{V}_N$$

avec

- \mathbf{G}_N : la matrice des conductances aux noeuds ;
- \mathbf{I}_{sN} : le vecteur des courants injectés aux noeuds par les sources indépendantes de courant.

Le calcul de l'état électrique complet comporte ainsi les étapes suivantes.

1. Choisir un noeud de référence

On choisit le noeud e.

2. Détermination de la matrice des conductances aux noeuds \mathbf{G}_N

Cette matrice est donnée par

$$\mathbf{G}_N = \mathbf{A} \mathbf{G}_B \mathbf{A}^T$$

avec \mathbf{A} la matrice d'incidence réduite du graphe orienté du circuit passif représenté à la Fig. 1.8

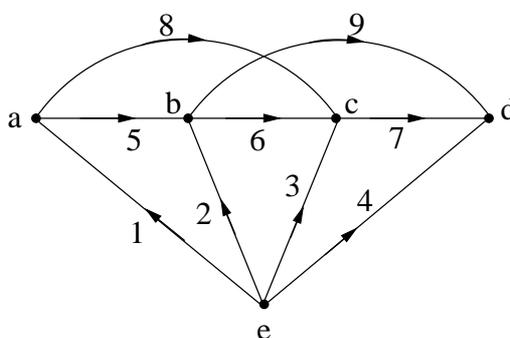


FIG. 1.8

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

\mathbf{G}_B est la matrice des conductances de branches :

$$\mathbf{G}_B = \text{diag} (2, 5, 4, 5, 3, 2, 10, 3, 7)$$

Le circuit ne comporte que des résistances linéaires et des sources indépendantes de courant. \mathbf{G}_N peut être déterminée directement par la règle d'inspection :

- élément diagonal G_{ii} = somme des conductances des branches incidentes au noeud i ;
- élément non diagonal G_{ij} = opposé de la conductance de la branche liant les noeuds i et j .

$$\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} 2 + 3 + 3 & -3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 + 5 + 2 + 7 & -2 & -7 \\ -3 & -2 & 2 + 4 + 10 + 3 & -10 \\ 0 & -7 & -10 & 10 + 7 + 5 \end{pmatrix} \mathbf{S} .$$

On remarque que \mathbf{G}_N est symétrique puisque le circuit ne comporte que des conductances linéaires et des sources indépendantes d'énergie.

3. Détermination du vecteur des courants de noeuds \mathbf{I}_{sN}

L'élément relatif au noeud i est la somme des courants injectés à ce noeud par les sources indépendantes.

$$\mathbf{I}_{sN} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2.5 \\ 1 + 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Calcul des potentiels de noeuds

De la relation $\mathbf{I}_{sN} = \mathbf{G}_N \mathbf{V}_N$, on déduit :

$$\mathbf{V}_N = \mathbf{G}_N^{-1} \mathbf{I}_{sN} = \begin{pmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \\ V_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.112 \\ 0.306 \\ 0.395 \\ 0.322 \end{pmatrix} \mathbf{V} .$$

V_a, V_b, V_c, V_d sont les potentiels des différents noeuds du circuit par rapport au noeud de référence e.

5. Tensions et courants de branches

Les tensions de branches se déduisent des SLK

$$\mathbf{U}_B = \mathbf{A}^T \mathbf{V}_N .$$

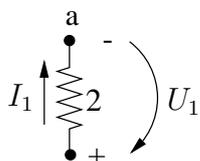
Les courants de branches se déduisent de la loi d'Ohm écrite pour chaque branche

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{G}_B \mathbf{U}_B .$$

Tensions de branches

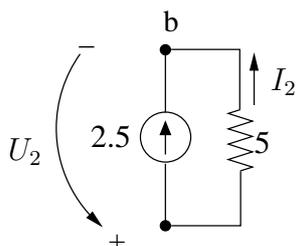
Courants de branches

- branche 1



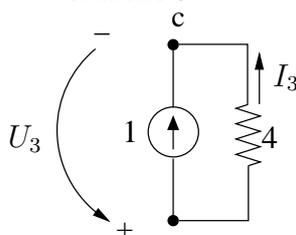
$$\begin{aligned} U_1 &= -V_a \\ &= 0.112 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_1 &= 2U_1 \\ &= 0.224 \text{ A} \end{aligned}$$

- branche 2



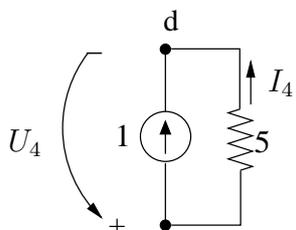
$$\begin{aligned} U_2 &= -V_b \\ &= -0.306 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_2 &= 5U_2 \\ &= -1.53 \text{ A} \end{aligned}$$

- branche 3



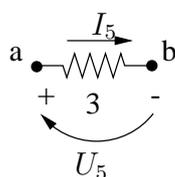
$$\begin{aligned} U_3 &= -V_c \\ &= -0.395 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_3 &= 4U_3 \\ &= -1.58 \text{ A} \end{aligned}$$

- branche 4



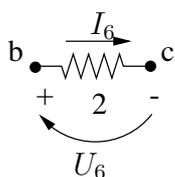
$$\begin{aligned} U_4 &= -V_d \\ &= -0.322 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_4 &= 5U_4 \\ &= -1.61 \text{ A} \end{aligned}$$

- branche 5



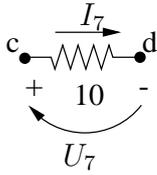
$$\begin{aligned} U_5 &= V_a - V_b \\ &= -0.418 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_5 &= 3U_5 \\ &= -1.254 \text{ A} \end{aligned}$$

- branche 6



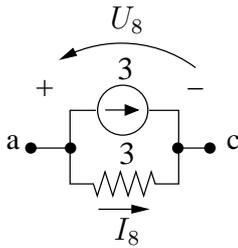
$$\begin{aligned} U_6 &= V_b - V_c \\ &= -0.089 \text{ V} \end{aligned} \quad \begin{aligned} I_6 &= 2U_6 \\ &= -0.178 \text{ A} \end{aligned}$$

• branche 7



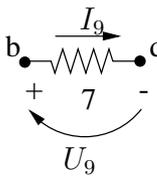
$$\begin{aligned} U_7 &= V_c - V_d & I_7 &= 10U_7 \\ &= 0.073 \text{ V} & &= 0.73 \text{ A} \end{aligned}$$

• branche 8



$$\begin{aligned} U_8 &= V_a - V_c & I_8 &= 3U_8 \\ &= -0.507 \text{ V} & &= -1.521 \text{ A} \end{aligned}$$

• branche 9



$$\begin{aligned} U_9 &= V_b - V_d & I_9 &= 7U_9 \\ &= -0.016 \text{ V} & &= -0.112 \text{ A} \end{aligned}$$

Exercice 1.19

Remarquons que ce circuit est équivalent celui de l'exercice 1.18 si toutes les branches sources de tension sont remplacées par des branches sources de courant.

La méthode des mailles consiste à écrire $b - (n - 1)$ SLK pour un ensemble de mailles fondamentales et à exprimer ces équations en fonction des courants de mailles \mathbf{I}_M . Ces relations s'écrivent :

$$\mathbf{V}_{sM} = \mathbf{R}_M \mathbf{I}_M$$

avec :

- \mathbf{R}_M : la matrice des résistances de mailles
- \mathbf{V}_{sM} : le vecteur des f.e.m. de mailles imposées par les sources indépendantes de tension.

Le calcul de l'état électrique complet comporte ainsi les étapes suivantes.

1. Transformer les branches contenant une source indépendante de courant.

Par simple équivalence de source de courant - source de tension, on transforme les branches de et ac comme indiqué à la Fig. 1.9

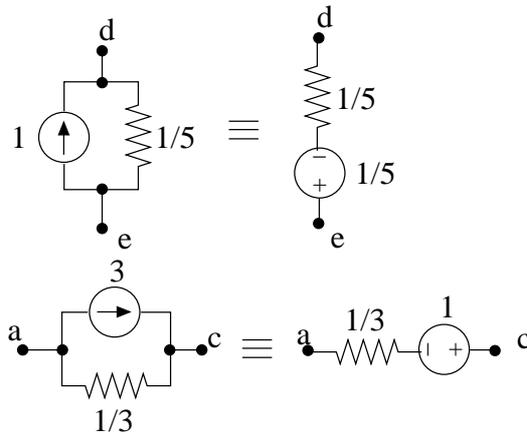


FIG. 1.9

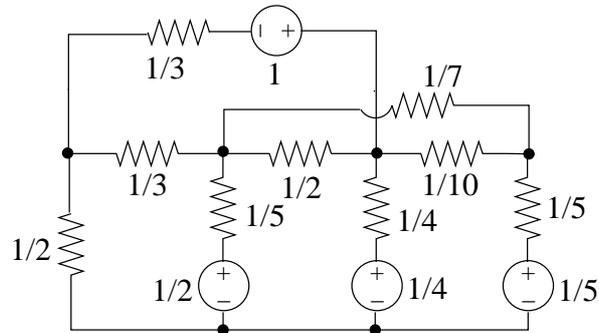


FIG. 1.10

Le circuit complet se transforme comme à la Fig. 1.10.

2. Choisir un arbre et définir les mailles fondamentales correspondantes.

Le graphe du circuit est représenté à la Fig. 1.11. Le graphe orienté du circuit comporte 5 noeuds et 9 branches. Il y a $b - (n - 1) = 9 - (5 - 1) = 5$ mailles fondamentales. On choisit par exemple l'arbre "3-5-6-7" représenté en traits discontinus sur la Fig. 1.11. Les maillons sont les branches 1,2,4,8 et 9. Chaque maille fondamentale, constituée d'un maillon et de branches de l'arbre, est orientée selon le sens de référence adopté dans le maillon.

3. Détermination de la matrice des résistances de mailles.

Cette matrice est donnée par

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{B}\mathbf{R}_B\mathbf{B}^T$$

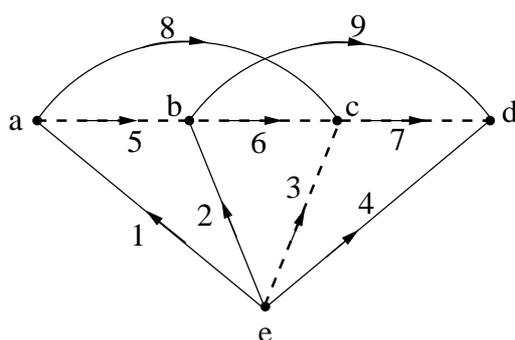


FIG. 1.11

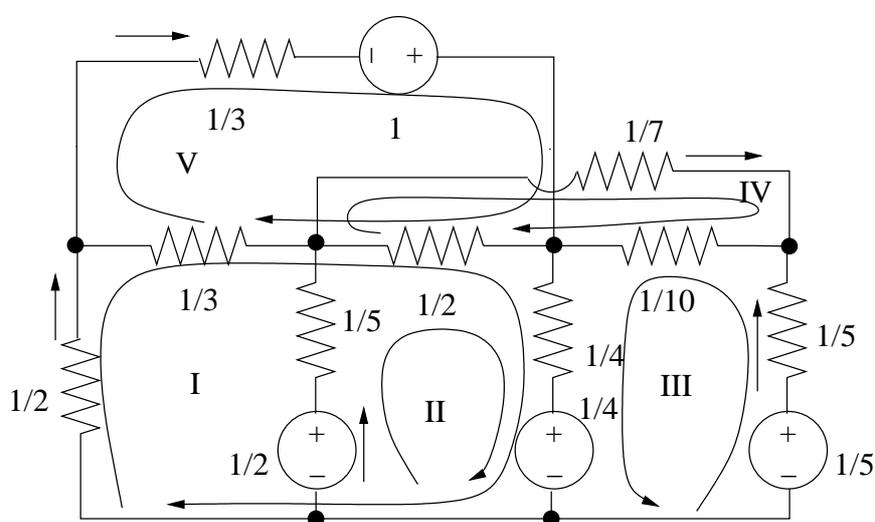


FIG. 1.12

avec \mathbf{B} la matrice des mailles fondamentales qui s'écrit :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

\mathbf{R}_B est la matrice des résistances de branches :

$$\mathbf{R}_B = \text{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{3}, \frac{1}{7}\right)$$

Le circuit ne comporte que des résistances linéaires et des sources indépendantes. \mathbf{R}_M peut être directement déterminée par la règle d'inspection :

- élément diagonal R_{ii} = somme des résistances des branches de la maille i ;

- élément non-diagonal R_{ij} = somme des résistances des branches communes aux mailles i et j , prises avec le signe + si les sens de parcours des deux mailles coïncident, avec le signe - dans le cas contraire .

$$\mathbf{R}_M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} & \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} & \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{4} & \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} + \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.5833 & 0.75 & 0.25 & 0.5 & -0.8333 \\ 0.75 & 0.05 & 0.25 & -0.5 & -0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.55 & 0.1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0.1 & 0.743 & 0.5 \\ -0.8333 & -0.5 & 0 & 0.5 & 1.1667 \end{pmatrix} \Omega .$$

Remarquons que cette matrice est symétrique puisque le circuit ne comporte que des résistances linéaires et des sources indépendantes d'énergie.

4. Détermination du vecteur des f.e.m. de mailles

L'élément relatif à la maille i est donné par la somme des f.e.m. imposées dans cette maille par les sources indépendantes comptées positivement si le sens de la d.d.p. de la source coïncide avec le sens de parcours de la maille et négativement sinon.

$$\mathbf{V}_{sM} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.25 \\ 0.25 \\ -0.05 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ V .}$$

5. Calcul des courants de mailles

Les courants de mailles sont les courants dans les maillons 1,2,4,8,9.

De la relation $\mathbf{V}_{sM} = \mathbf{R}_M \mathbf{I}_M$, on déduit :

$$\mathbf{I}_M = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_4 \\ I_8 \\ I_9 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_M^{-1} \mathbf{V}_{sM} = \begin{pmatrix} 0.2239 \\ 0.9675 \\ -0.6122 \\ -0.1114 \\ 1.4794 \end{pmatrix} \text{ A .}$$

6. Courants de branches

Les courants dans les branches restantes (les branches de l'arbre) se déduisent des PLK

$$\mathbf{I}_B = \mathbf{B}^T \mathbf{I}_M.$$

$$I_3 = -I_4 - I_2 - I_1 = -0.5792 \text{ A}$$

$$I_5 = I_1 - I_8 = -1.2555 \text{ A}$$

$$I_6 = I_1 + I_2 - I_8 - I_9 = -0.1766 \text{ A}$$

$$I_7 = -I_4 - I_9 = 0.7236 \text{ A}$$

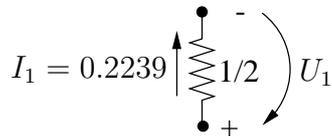
7. Tensions de branches

Elles se déduisent de la loi d'Ohm et des lois de Kirchhoff.

Courants de branches

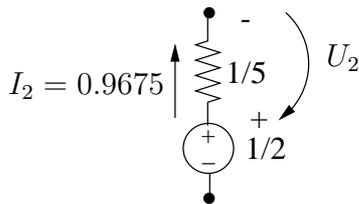
Tensions de branches

- branche 1 :



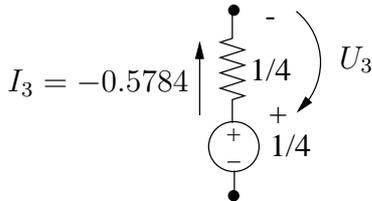
$$U_1 = \frac{0.2239}{2} = 0.112 \text{ V}$$

- branche 2 :



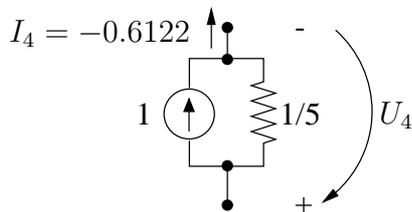
$$U_2 = 0.2 \cdot 0.9675 = 0.1935 \text{ V}$$

- branche 3 :



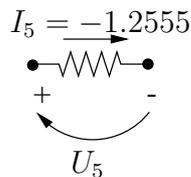
$$U_3 = 0.25 \cdot (-0.5792) = -0.1448 \text{ V}$$

- branche 4 :



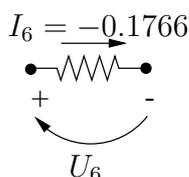
$$U_4 = -0.2 \cdot (1 + 0.6122) = -0.3224 \text{ V}$$

- branche 5 :



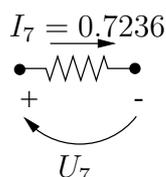
$$U_5 = -0.3333 \cdot 1.2555 = -0.4185 \text{ V}$$

- branche 6 :



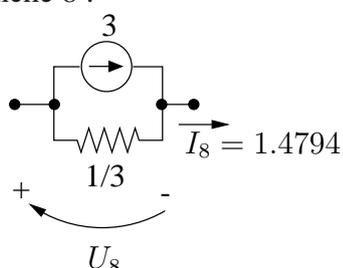
$$\begin{aligned}
 U_6 &= -0.5 \cdot 0.1766 \\
 &= -0.0883 \text{ V}
 \end{aligned}$$

- branche 7 :



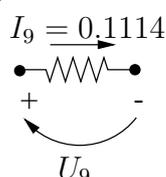
$$\begin{aligned}
 U_7 &= 0.1 \cdot 0.7236 \\
 &= 0.0724 \text{ V}
 \end{aligned}$$

- branche 8 :



$$\begin{aligned}
 U_8 &= 0.333 \cdot (1.4794 - 3) \\
 &= -0.5069 \text{ V}
 \end{aligned}$$

- branche 9 :



$$\begin{aligned}
 U_9 &= \frac{-0.1114}{7} \\
 &= -0.0159 \text{ V}
 \end{aligned}$$

Exercice 1.20

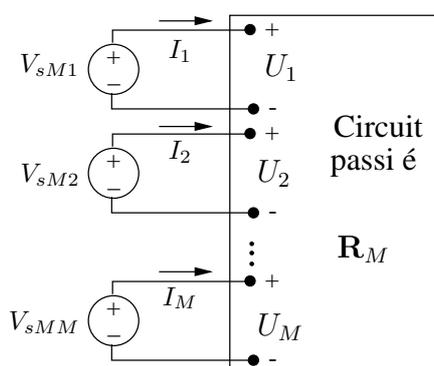
1. Réduction de la matrice de résistances de mailles \mathbf{R}_M - Elimination d'accès

Selon la méthode des mailles, un circuit est vu comme un circuit passé à M accès auquel sont connectées les sources indépendantes de tension (Fig 1.13). Le circuit passé est caractérisé par la matrice de résistances des mailles \mathbf{R}_M .

Il y a un accès dans chaque maillon.

Si certains accès sont dépourvus de source indépendante, comme indiqué à la Fig. 1.14, on a, pour ces accès, $U = 0$ (accès M ici).

Si l'on élimine l'accès auquel aucune source n'agit, c'est-à-dire si l'on élimine la variable I_M , le circuit sera caractérisé par une matrice de résistances de mailles réduite \mathbf{R}_{red} . Cette matrice s'obtient de la manière suivante :



On peut écrire

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_M \mathbf{I}$$

ou

$$\mathbf{V}_{sM} = \mathbf{R}_M \mathbf{I}$$

FIG. 1.13

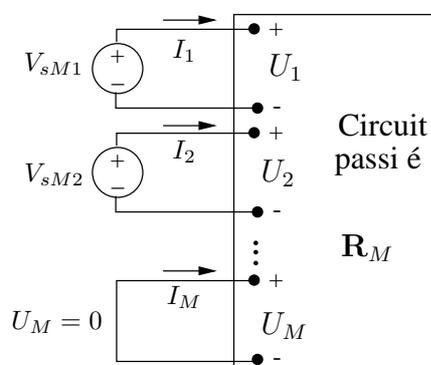


FIG. 1.14

$$\begin{pmatrix} \mathbf{V}_{sM_1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{M_{11}} & \mathbf{R}_{M_{12}} \\ \mathbf{R}_{M_{21}} & R_{M_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{M_1} \\ I_{M_2} \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

La matrice \mathbf{R}_M est partitionnée selon quatre sous-matrices. Les accès conservés sont repérés par l'indice 1, l'accès M est l'accès éliminé repéré par l'indice 2.

La dernière relation (2) fournit

$$I_{M_2} = -R_{M_{22}}^{-1} \mathbf{R}_{M_{21}} \mathbf{I}_{M_1} \quad (3)$$

Remplaçant dans (1), on trouve :

$$\mathbf{V}_{sM_1} = (\mathbf{R}_{M_{11}} - \mathbf{R}_{M_{12}} R_{M_{22}}^{-1} \mathbf{R}_{M_{21}}) \mathbf{I}_{M_1},$$

relation cherchée et

$$\mathbf{R}_{\text{red}} = \mathbf{R}_{M_{11}} - \mathbf{R}_{M_{12}} R_{M_{22}}^{-1} \mathbf{R}_{M_{21}}.$$

On a considéré ici l'élimination d'un seul accès mais la procédure peut être généralisée à plusieurs accès.

2. Mise en équation du circuit via la méthode des mailles

A. Graphe et choix de l'arbre

L'arbre est choisi de façon à ce que les maillons correspondent aux accès intéressants, en particulier les accès relatifs aux branches 1 et 2 où se trouvent les sources indépendantes d'énergie. (Fig. 1.15)

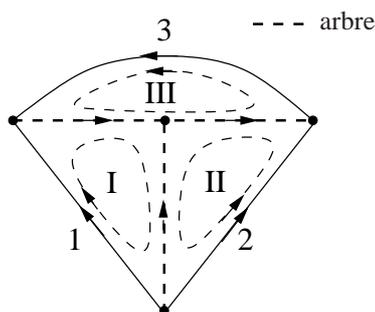


FIG. 1.15

B. Matrice de résistances de mailles

De la règle d'inspection, on déduit la matrice de résistances des mailles :

$$\mathbf{R}_M = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & -4 \\ \hline 4 & -4 & 10 \end{array} \right) \Omega .$$

Le vecteur des f.e.m. de mailles est donné par :

$$\mathbf{V}_{sM} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{V} .$$

3. Elimination de l'accès relatif à la maille III

Il n'y a pas de source indépendante agissant dans la maille III. Son élimination conduit à la matrice réduite

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\text{red}} &= \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} \frac{1}{10} (4 \quad -4) \\ &= \begin{pmatrix} 6.4 & 2.6 \\ 2.6 & 3.4 \end{pmatrix} \Omega \end{aligned}$$

On a donc, vu des deux accès 11' et 22', la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\text{red}} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Le schéma équivalent correspondant est représenté à la Fig. 1.16.

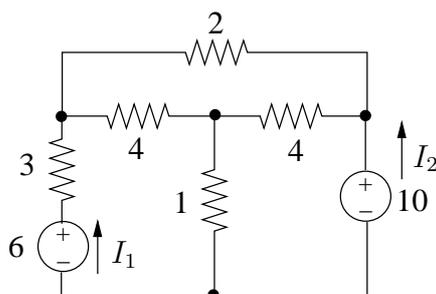


FIG. 1.16

On déduit

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = \mathbf{R}_{\text{red}}^{-1} \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.373 \\ 3.227 \end{pmatrix} \text{ A} .$$

Le courant de la maille III, I_3 peut être déterminé à partir de I_1, I_2 via la relation (3).

On trouve :

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{1}{10} (4 \quad -4) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = -0.4 I_1 + 1.4 I_2 \\ &= 1.436 \text{ A} . \end{aligned}$$

La connaissance des courants I_1, I_2, I_3 permet de déduire l'état électrique complet du réseau.

4. Détermination de \mathbf{R}_{red} par expérimentation

La matrice \mathbf{R}_{red} ne peut jamais être déterminée par inspection. Par contre, elle peut être déterminée par expérimentation :

- élément diagonal : $R_{ii} = U_i |_{I_i=1, I_j=0, j \neq i}$
- élément non-diagonal $R_{ij} = U_i |_{I_j=1, I_k=0, k \neq j}$
- les éléments R_{11} et R_{21} sont déterminés selon les conditions de la Fig. 1.17 :
 $I_1 = 1, I_2 = 0$.

$$\begin{aligned} R_{11} &= U_1 |_{I_1=1, I_2=0} \\ &= 1 + 4I'_1 + 3 \\ &= 6.4 \Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{21} &= U_2 |_{I_1=1, I_2=0} \\ &= 1 + 4I'_2 \\ &= 2.6 \Omega \end{aligned}$$

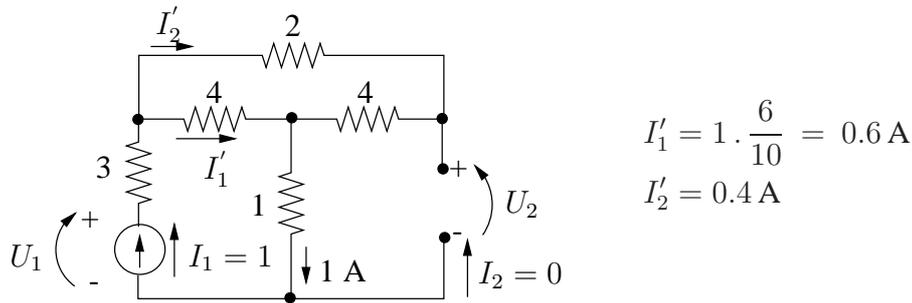


FIG. 1.17

– les éléments R_{12} et R_{22} sont déterminés selon les conditions de la Fig. 1.18 :
 $I_1 = 0, I_2 = 1$.

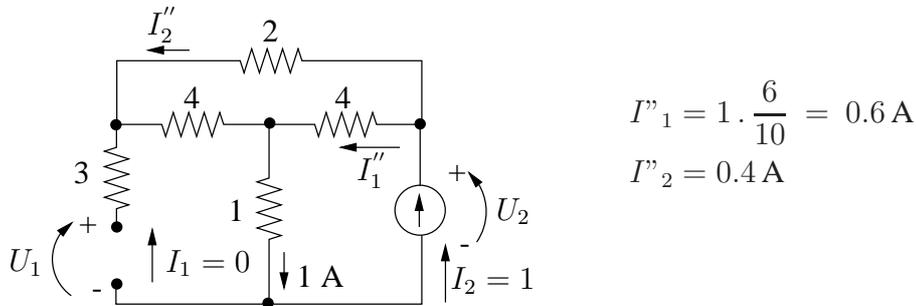


FIG. 1.18

$$\begin{aligned}
 R_{12} &= U_1|_{I_2=1, I_1=0} \\
 &= 1 + 4I''_2 \\
 &= 2.6 \Omega
 \end{aligned}$$

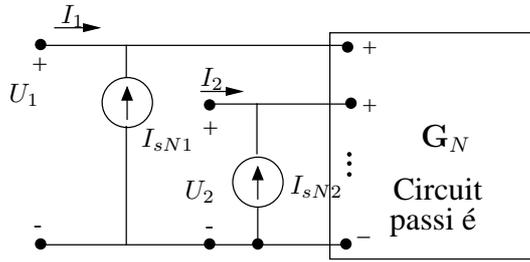
$$\begin{aligned}
 R_{22} &= U_2|_{I_2=1, I_1=0} \\
 &= 1 + 4I''_1 \\
 &= 3.4 \Omega
 \end{aligned}$$

Exercice 1.21

1. Schéma équivalent de Norton et méthode des noeuds

Selon la méthode des noeuds, comme indiqué la la Fig. 1.19, un circuit est équivalent à un circuit passé é vu de $N = n - 1$ accès, représenté par la matrice de conductances aux noeuds \mathbf{G}_N ; à chaque accès agit une source indépendante de courant représentant les courants injectés à cet accès par les sources indépendantes de courant présentes dans le circuit.

Chaque accès est défini entre un noeud et le noeud de référence.



$$\mathbf{I} = -\mathbf{I}_{sN} + \mathbf{G}_N \mathbf{U} \quad (1)$$

où $\mathbf{U} = \mathbf{V}_N$, les potentiels de noeuds

FIG. 1.19

Lorsque l'on ne s'intéresse qu'à un nombre réduit d'accès ($< N$), on peut éliminer les accès non intéressants. Soient :

- a : les accès intéressants ;
- b : les accès non intéressants.

On a : $\mathbf{I}_b = \mathbf{0}$ et en partitionnant (1), on écrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_a \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{s_a} \\ \mathbf{I}_{s_b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{a,a} & \mathbf{G}_{a,b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_a \\ \mathbf{U}_b \end{pmatrix} \quad (2)$$

De (3), on tire :

$$\mathbf{U}_b = \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{I}_{s_b} - \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{G}_{b,a} \mathbf{U}_a$$

et remplaçant dans (2), on obtient :

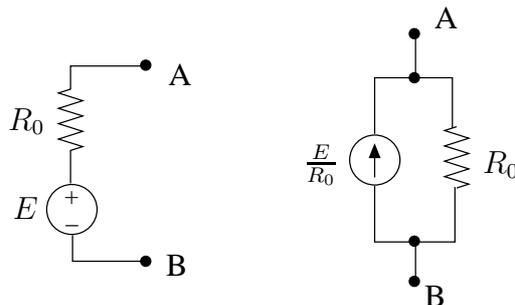
$$\mathbf{I}_a = (-\mathbf{I}_{s_a} + \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{I}_{s_b}) + (\mathbf{G}_{a,a} - \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{G}_{b,a}) \mathbf{U}_a .$$

On déduit les paramètres du schéma équivalent de Norton vu des a accès :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{No} &= \mathbf{I}_{s_a} - \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{I}_{s_b} \\ \mathbf{G}_{No} &= \mathbf{G}_{a,a} - \mathbf{G}_{a,b} \mathbf{G}_{b,b}^{-1} \mathbf{G}_{b,a} \end{aligned}$$

2. Application de la méthode des noeuds

A. Transformation de la branche contenant une source indépendante de tension



B. Choix du noeud de référence

Le circuit comporte 3 noeuds : les noeuds 1 (= C) , 2 (= A) et 1' (= B) . Choisissons le noeud 1' comme noeud de référence.

Le circuit comporte 2 accès :

1. l'accès 11'
2. un deuxième accès entre le noeud A et le noeud 1'.

C. Détermination de la matrice \mathbf{G}_N

Le circuit comporte une source commandée de type CVT. \mathbf{G}_N ne peut être entièrement déterminée par la règle d'inspection.

L'élément (1,2) de la matrice doit être déterminé par expérimentation. En effet, le CVT agit au noeud 1 et contribue donc uniquement à la PLK à ce noeud. Il impose un courant fonction de la tension U_1 qui, vu le choix du noeud de référence, représente le potentiel du noeud 2, c'est-à-dire la tension à l'accès 2.

La règle d'inspection fournit les éléments (1,1) , (2,2) et (2,1) :

$$\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & x \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \end{pmatrix}$$

La règle d'expérimentation, illustrée à la Fig. 1.20, fournit :

$$G_{12} = I_1|_{V_2=1, V_1=0}$$

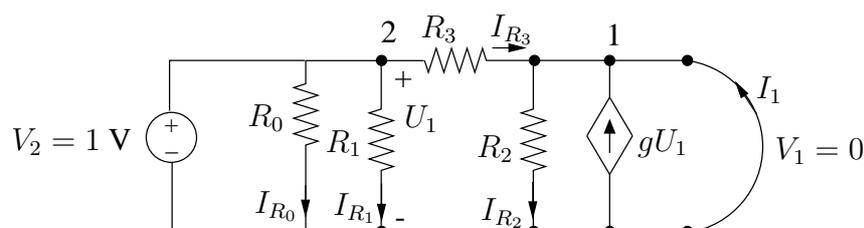


FIG. 1.20

$$\begin{aligned} U_1 &= V_2 = 1\text{ V} \\ I_{R_2} &= 0 \quad (\text{tension nulle aux bornes de } R_2) \\ I_{R_3} &= \frac{1}{R_3} \\ I_1 &= -I_{R_3} - gU_1 = -\frac{1}{R_3} - g \\ G_{12} &= -\frac{1}{R_3} - g \end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathbf{G}_N = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_3} - g \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \end{pmatrix} \mathbf{S}.$$

D. Vecteur des courants injectés aux noeuds

$$\mathbf{I}_{sN} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E}{R_0} \end{pmatrix} \text{A}.$$

Seules les sources *indépendantes* doivent être prises en compte !

3. Elimination de l'accès 2

On cherche le schéma équivalent de Norton vu de l'accès 11'. On élimine l'accès 2 et on dérive successivement :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{0}{G_0 E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_2 + G_3 & | & -g - G_3 \\ -G_3 & | & G_0 + G_1 + G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} I_{N_0} &= 0 - (-g - G_3) \cdot \frac{1}{G_0 + G_1 + G_3} \cdot G_0 E \\ &= \frac{g + G_3}{G_0 + G_1 + G_3} \cdot G_0 E = 0.019 E \text{ A} \\ G_{N_0} &= G_2 + G_3 - (-g - G_3) \frac{1}{G_0 + G_1 + G_3} (-G_3) \\ &= G_2 + G_3 - \frac{(g + G_3) G_3}{G_0 + G_1 + G_2} \\ &= \frac{G_2 G_0 + G_2 G_1 + G_2 G_3 + G_3 G_0 + G_3 G_1 - g G_3}{G_0 + G_1 + G_3} \\ &= 7.17 \cdot 10^{-3} \text{ S}. \end{aligned}$$

4. Détermination directe de I_{N_0} et G_{N_0}

Etant donné la présence de la source commandée, il n'est pas possible de procéder par simples réductions successives du circuit. La partie à gauche de la source commandée ne peut pas être réduite.

I_{N_0} est donné par le courant parcourant l'accès court-circuité. Le circuit court-circuité peut se mettre sous la forme de la Fig. 1.21.

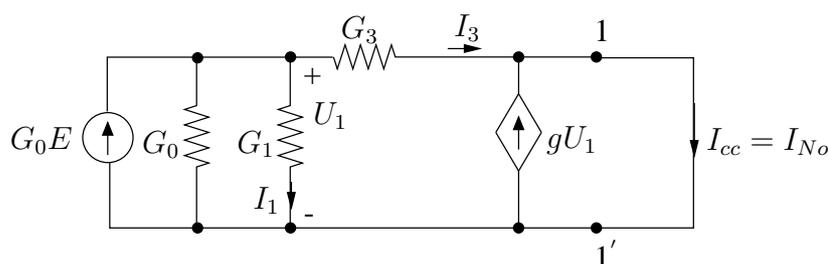


FIG. 1.21

Par application de la règle du diviseur de courant, on trouve :

$$I_3 = \frac{G_3}{G_0 + G_1 + G_3} G_0 E$$

$$I_1 = \frac{G_1}{G_0 + G_1 + G_3} G_0 E$$

et dès lors $U_1 = \frac{I_1}{G_1} = \frac{G_0 E}{G_0 + G_1 + G_3}$

Finalement :

$$I_{No} = I_{cc} = I_3 + gU_1$$

$$= \frac{G_3 + g}{G_0 + G_1 + G_3} G_0 E$$

G_{No} est la conductance équivalente vue de l'accès du circuit passif. Le circuit passif est représenté à la Fig. 1.22.

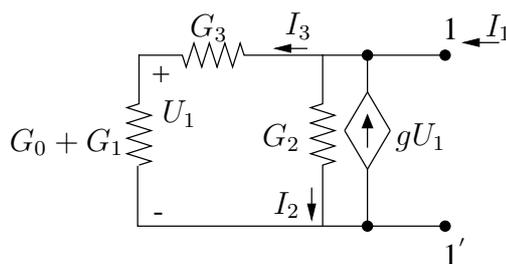


FIG. 1.22

On dérive :

$$G_{No} = \frac{I_1}{V_1} = I_1|_{V_1=1\text{V}}$$

$$I_1 = I_2 + I_3 - gU_1 = G_2 + \frac{(G_0 + G_1)G_3}{G_0 + G_1 + G_3} - gU_1$$

avec $U_1 = \frac{I_3}{G_0 + G_1} = \frac{G_3}{G_0 + G_1 + G_3}$

Finalement :

$$G_{No} = \frac{G_2G_0 + G_2G_1 + G_2G_3 + G_0G_3 + G_1G_3 - gG_3}{G_0 + G_1 + G_3}.$$

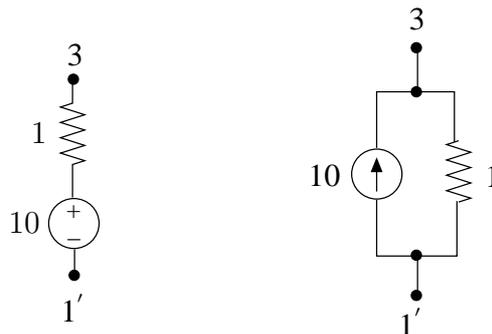
Exercice 1.22

Procédure :

1. mettre le circuit en équations via la méthode des noeuds. Il y a 3 noeuds plus le noeud de référence et donc 3 accès ;
2. élimination de l'accès inintéressant 31' et dérivation du schéma équivalent de Norton.

1. Application de la méthode des noeuds

Transformons tout d'abord la branche contenant la source de tension :



La matrice \mathbf{G}_N , dérivée par la règle d'inspection, s'écrit :

$$\mathbf{G}_N = \left(\begin{array}{cc|c} 8 & -5 & -2 \\ -5 & 11 & -4 \\ -2 & -4 & 7 \end{array} \right) \text{ S.}$$

Le vecteur des courants de noeuds est donné par :

$$\mathbf{I}_{sN} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{10}{7} \end{pmatrix} \text{ A.}$$

2. Elimination de l'accès 31'

Partitionnant les matrices, on dérive directement

$$\mathbf{I}_{No} = 0 - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \cdot 10 = \begin{pmatrix} \frac{20}{7} \\ \frac{40}{7} \end{pmatrix} \text{ A}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{No} &= \begin{pmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \frac{1}{7} (-2 \quad -4) \\ &= \begin{pmatrix} 7.43 & -6.14 \\ -6.14 & 8.71 \end{pmatrix} \text{ S.} \end{aligned}$$

3. Schéma équivalent

Le circuit peut être représenté par le schéma équivalent de la Fig. 1.23 avec :

$$\begin{aligned} G_{12} &= 6.14 \text{ S} & J_1 &= \frac{20}{7} \text{ A} \\ G_{11} &= 7.43 - 6.14 = 1.29 \text{ S} & J_2 &= \frac{40}{7} \text{ A} \\ G_{22} &= 8.71 - 6.14 = 2.57 \text{ S.} \end{aligned}$$

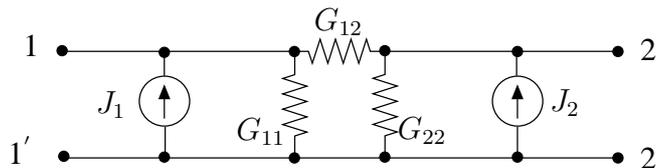
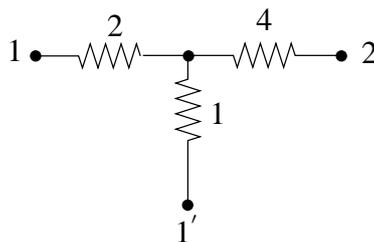


FIG. 1.23

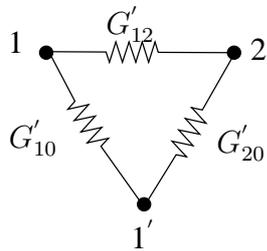
4. Détermination de \mathbf{G}_{No} par transfiguration

La détermination du schéma équivalent de Norton revient ici à éliminer le noeud 3. On ne peut pas directement appliquer la méthode de la transfiguration pour transformer le circuit car il y a une source indépendante d'énergie qui agit au centre de l'étoile. On peut par contre l'utiliser pour rechercher la matrice \mathbf{G}_{No} car pour cela il faut passer le circuit.

Ainsi, l'étoile



devient après transformation



avec

$$G'_{12} = \frac{2.4}{1 + 2 + 4} = \frac{8}{7} \text{ S}$$

$$G'_{10} = \frac{2.1}{1 + 2 + 4} = \frac{2}{7} \text{ S}$$

$$G'_{20} = \frac{4.1}{1 + 2 + 4} = \frac{4}{7} \text{ S}.$$

Le circuit passif se simplifie comme indiqué à la Fig. 1.24.

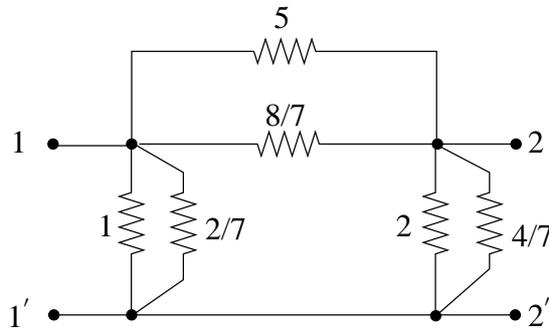


FIG. 1.24

On dérive :

$$\mathbf{G}_{No} = \begin{pmatrix} 6 + \frac{10}{7} & -5 - \frac{8}{7} \\ -5 - \frac{8}{7} & 7 + \frac{12}{7} \end{pmatrix}$$

5. Détermination de \mathbf{I}_{No} par des essais en court-circuit

Les courants de Norton J_1 et J_2 correspondent aux courants parcourant les accès lorsque ceux-ci sont *simultanément* court-circuités. (Fig. 1.25)

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} + \mathbf{G}_{No} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \mathbf{I}_{No} = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}_{V_1=V_2=0}$$

Des courants définis à la Fig. 1.25, on déduit :

$$I_3 = \frac{-2}{2 + 1 + 4} \cdot 10 = -\frac{20}{7} \text{ A} \quad \text{et} \quad J_1 = -I_3 = \frac{20}{7} \text{ A}$$

$$I_4 = \frac{-4}{2 + 1 + 4} \cdot 10 = -\frac{40}{7} \text{ A} \quad \text{et} \quad J_2 = -I_4 = \frac{40}{7} \text{ A}$$

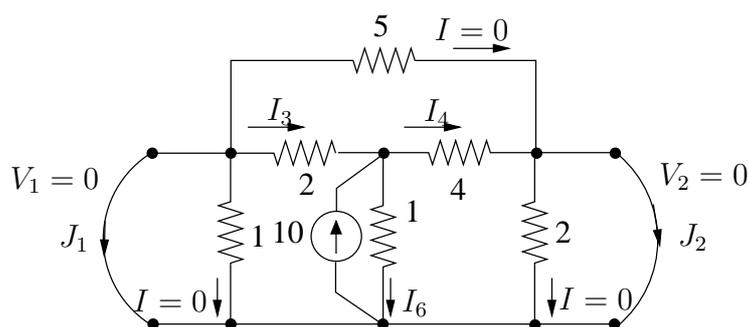


FIG. 1.25

Exercice 1.23

1. Choix de la méthode

On recherche R_{18} et R_{13} .

A. Méthode des mailles

$$b - (n - 1) = 12 - 7 + 1 = 6$$

Il faut ajouter une branche correspondant à l'accès considéré (13 ou 18).

Il faut donc construire :

- pour la recherche de R_{18} , une matrice \mathbf{R}_M de dimension 6×6 et réduire cette matrice à l'accès 18 ;
- pour la recherche de R_{13} , une nouvelle matrice \mathbf{R}_M de dimension 6×6 et réduire cette matrice à l'accès 13.

Les deux matrices \mathbf{R}_M sont différentes puisque le graphe du circuit considéré est différent :

- pour la recherche de R_{18} , on ajoute une branche correspondant à l'accès entre les noeuds 1 et 8 ;
- pour la recherche de R_{13} , on ajoute une branche correspondant à l'accès entre les noeuds 1 et 3.

B. Méthode des noeuds

$$n - 1 = 7$$

- Recherche de R_{18} : choisir 8 comme noeud de référence (ou 1) et réduire la matrice \mathbf{G}_N (7×7) à l'accès formé par le noeud 1 et le noeud 8.
- Recherche de R_{13} :

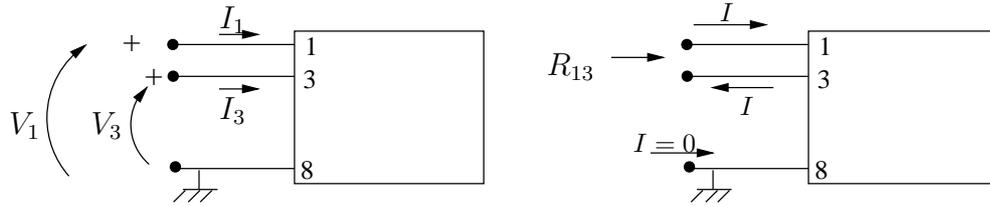
- si 1 est le noeud de référence, réduire \mathbf{G}_N à l'accès formé par le noeud 1 et le noeud 3 ;
- si 8 est le noeud de référence, réduire \mathbf{G}_N aux 2 accès $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{13} \\ G_{31} & G_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

I_1 et I_3 sont les courants aux accès 1 et 3 ;

V_1 et V_3 sont les potentiels des noeuds 1 et 3 par rapport au noeud de référence.



On a

$$R_{13} = \frac{V_1 - V_3}{I} \text{ avec } I = I_1 = -I_3$$

Soit $I = 1$ A, alors R_{13} est donné par

$$R_{13} = V_1 - V_3$$

avec V_1, V_3 solutions de

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{13} \\ G_{31} & G_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2. Méthode des noeuds

On choisit la méthode des noeuds. Elle présente l'avantage de ne devoir construire qu'une seule matrice \mathbf{G}_N pour déterminer les deux résistances demandées.

Nous allons réduire la matrice \mathbf{G}_N par étapes successives en éliminant à chaque fois un seul accès à la fois.

On montre que chaque étape est équivalente à une trans gu ration étoile \leftrightarrow triangle qui élimine le noeud correspondant à l'accès éliminé.

A. Matrice \mathbf{G}_N complète

$$\mathbf{G}_N = \begin{array}{c} \text{Noeud} \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{array} \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 3 & 6 & 2 & 4 & 5 & 7 & \\ \hline 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

B. Elimination du noeud 7

La matrice G_N réduite à 6 accès s'écrit :

$$\begin{array}{c} \text{Noeud} \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \mathbf{2.67} & 0 & \mathbf{-0.33} & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & \mathbf{-0.33} & 0 & \mathbf{2.67} & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 3 \end{array} \right)$$

On remarque que seuls les éléments G_{66} , G_{64} , G_{46} et G_{44} sont modifiés.

Cette réduction correspond à la transformation étoile-triangle de la Fig. 1.26 qui élimine le noeud 7.

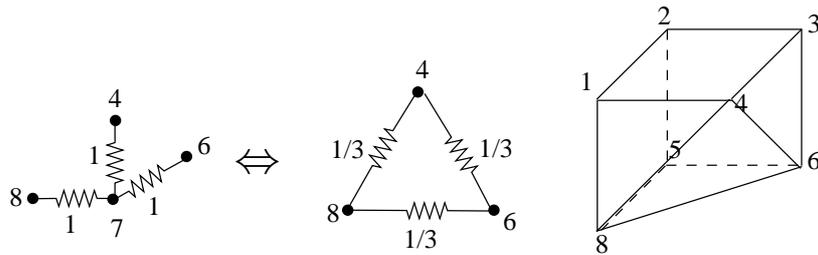


FIG. 1.26

C. Elimination du noeud 5

Matrice G_N réduite à 5 accès : seuls les éléments G_{22} , G_{66} , G_{26} et G_{62} sont modifiés.

$$\begin{array}{c} \text{Noeud} \\ 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \\ 4 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & \mathbf{2.33} & \mathbf{-0.33} & -0.33 \\ -1 & -1 & \mathbf{-0.33} & \mathbf{2.67} & 0 \\ \hline -1 & -1 & -0.33 & 0 & 2.67 \end{array} \right)$$

Cette réduction correspond à la transformation étoile-triangle de la Fig. 1.27 qui élimine le noeud 5.

D. Elimination du noeud 4

Matrice G_N réduite à 4 accès : seuls les éléments G_{11} , G_{66} , G_{33} , G_{13} , G_{16} , G_{36} , G_{31} ,

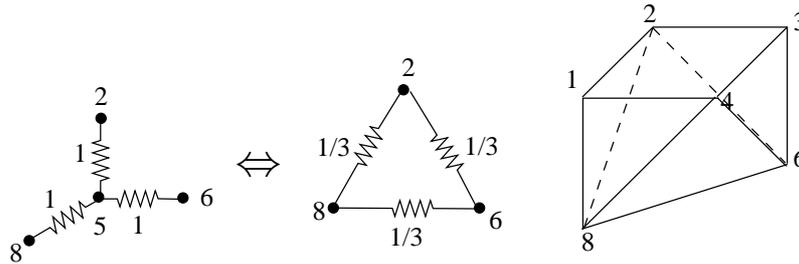


FIG. 1.27

G_{61} et G_{63} sont modifiés.

<i>Noeud</i>	1	3	6	2
1	2.63	-0.38	-0.13	-1
3	-0.38	2.63	-1.13	-1
6	-0.13	-1.13	2.29	-0.33
2	-1	-1	-0.33	2.67

L'élimination du noeud 4 résulte d'une transformation étoile \leftrightarrow triangle généralisée à une étoile à 4 branches. Chaque G_{ij} du circuit équivalent, liant les noeuds i et j , est donné par

$$G_{ij} = \frac{G_i G_j}{\sum_i G_i}$$

Cette transformation est illustrée à la Fig. 1.28.

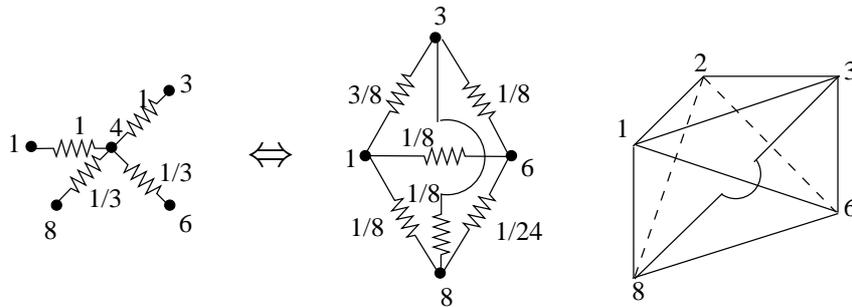


FIG. 1.28

E. Elimination du noeud 2

Matrice G_N réduite à 3 accès : tous les éléments sont modifiés.

<i>Noeud</i>	1	3	6
1	2.25	-0.75	-0.25
3	-0.75	2.25	-1.25
6	-0.25	-1.25	2.25

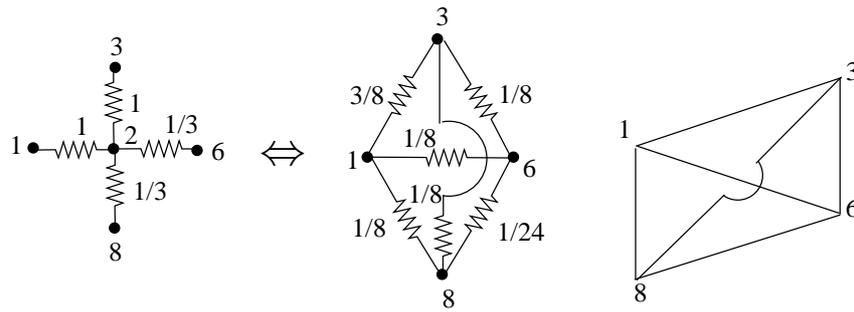


FIG. 1.29

L'élimination est illustrée à la Fig. 1.29.

F. Elimination du noeud 6

On obtient la matrice \mathbf{G}_N réduite aux 2 accès 18 et 38.

$$\mathbf{G}_{\text{red}} = \begin{array}{c} \text{Noeud} \\ 1 \quad 3 \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \\ \hline 2.22 & -0.89 & \\ -0.89 & 1.56 & \end{array} \right)$$

L'élimination du noeud 6 est illustrée à la Fig. 1.30.

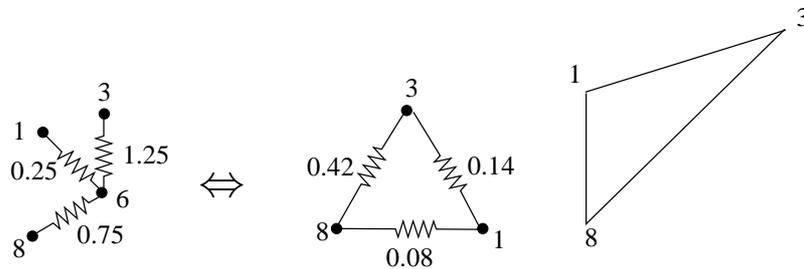


FIG. 1.30

On déduit :

$$\begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} = \mathbf{G}_{\text{red}}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} V_1 \\ V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

et $R_{13} = V_1 - V_3 = 0.75 \Omega$.

G. Elimination du noeud 3

Il reste la résistance équivalente vue de l'accès 18 :

$$G_{18} = 2.22 - \frac{0.89^2}{1.56} = 1.71 \text{ S} \quad , \quad R_{18} = 0.58 \Omega$$

Exercice 1.24

Nous allons tout d'abord déterminer le schéma équivalent de Thévenin du circuit vu du détecteur R_5 .

1. f.e.m. de Thévenin V_{Th}

V_{Th} est la tension apparaissant à vide à l'accès CD comme représenté à la Fig. 1.31.

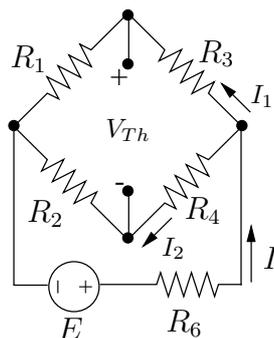


FIG. 1.31

On dérive l'expression de V_{Th} en fonction de I :

$$\begin{aligned} I_1 &= I \cdot \frac{R_2 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \\ I_2 &= I \cdot \frac{R_1 + R_3}{R_2 + R_3 + R_4 + R_1} \\ V_{Th_I} &= R_4 I_2 - R_3 I_1 \\ &= \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \cdot I \end{aligned}$$

Recherchons à présent l'expression de V_{Th} en fonction de E . On a :

$$\begin{aligned} (R_2 + R_4) \cdot I_2 + R_6 I &= E \\ \left(\frac{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} + R_6 \right) \frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}{R_1 R_4 - R_2 R_3} V_{Th} &= E \\ V_{Th_E} &= E \cdot \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3) + (\sum_{i=1}^4 R_i) R_6} \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $R_6 = 0$, V_{Th} se réduit à :

$$V_{Th_E} = E \cdot \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3)}$$

2. Résistance équivalente de Thévenin R_{Th}

a) Si $R_6 = 0$, on déduit directement de la Fig. 1.32 :

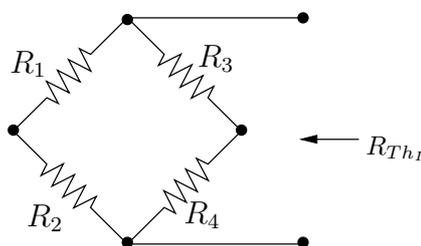


FIG. 1.32

$$R_{Th_I} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{\sum_{i=1}^4 R_i}$$

Cette résistance équivalente sera utilisée lorsque l'on recherchera la relation V_5/I .

b) Si l'on recherche la relation V_5/E , il faut tenir compte de R_6 comme indiqué à la Fig. 1.33.

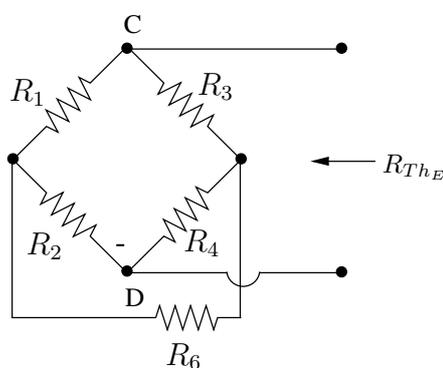


FIG. 1.33

Nous allons rechercher cette résistance équivalente en appliquant la méthode des mailles et réduisant la matrice \mathbf{R}_M trouvée à l'accès CD.

Ajoutant la branche relative à l'accès, le graphe du circuit est représenté à la Fig. 1.34.

L'arbre est choisi de façon à laisser la branche de l'accès dans un maillon. La règle d'inspection fournit la matrice de résistances de mailles \mathbf{R}_M :

$$\mathbf{R}_M = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_1 + R_2 & R_1 \\ R_1 + R_2 & R_1 + R_2 + R_3 + R_4 & R_1 + R_3 \\ R_1 & R_1 + R_3 & R_1 + R_3 + R_6 \end{pmatrix}$$

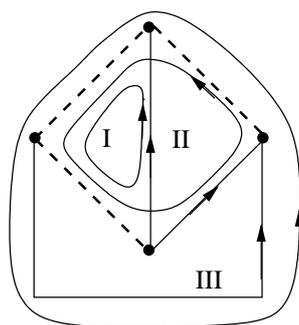


FIG. 1.34

La résistance équivalente de Thévenin, résistance équivalente vue du premier accès (branche R_5), est obtenue par réduction de \mathbf{R}_M à cet accès.

Posons :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{aa} &= (R_1 + R_2) \\ \mathbf{R}_{ab} &= \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_{ba} &= \begin{pmatrix} R_1 + R_2 \\ R_1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{R}_{bb} &= \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + R_3 + R_4 & R_1 + R_3 \\ R_1 + R_3 & R_1 + R_3 + R_6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} R_{ThE} &= \mathbf{R}_{aa} - \mathbf{R}_{ab} \mathbf{R}_{bb}^{-1} \mathbf{R}_{ba} \\ \mathbf{R}_{bb}^{-1} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_6 & -R_1 - R_3 \\ -R_1 - R_3 & R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta &= (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)(R_1 + R_3 + R_6) - (R_1 + R_3)^2 \\ &= ((R_1 + R_3) + (R_2 + R_4))((R_1 + R_3) + R_6) - (R_1 + R_3)^2 \\ &= (R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_6 \sum_{i=1}^4 R_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{bb}^{-1} \mathbf{R}_{ba} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_6 & -R_1 - R_3 \\ -R_1 - R_3 & R_1 + R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 + R_2 \\ R_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_6(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_3) \\ R_1 R_4 - R_2 R_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ab}\mathbf{R}_{bb}^{-1}\mathbf{R}_{ba} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & R_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_6(R_1 + R_2) + R_2(R_1 + R_3) \\ R_1R_4 - R_2R_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} ((R_1 + R_2)^2 R_6 + R_1^2(R_2 + R_4) + R_2^2(R_1 + R_3)) \end{aligned}$$

$$R_{Th_E} = R_1 + R_2 - \frac{1}{\Delta} ((R_1 + R_2)^2 R_6 + R_1^2(R_2 + R_4) + R_2^2(R_1 + R_3)) = \frac{N}{\Delta}$$

avec

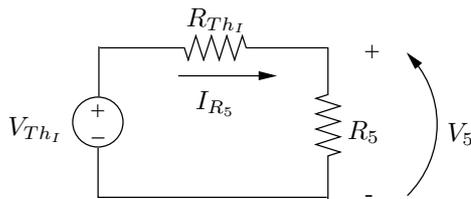
$$\begin{aligned} N &= (R_1 + R_2)(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + (R_1 + R_2)^2 R_6 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_6 \\ &\quad - (R_1 + R_2)^2 R_6 - R_1^2(R_2 + R_4) - R_2^2(R_1 + R_3) \\ &= (R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3)(R_2 + R_4) - R_2^2R_1 - R_2^2R_3 \\ &\quad + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_6 \\ &= R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4 + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_6 \\ &= R_1R_3(R_2 + R_4) + R_2R_4(R_1 + R_3) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_6 \end{aligned}$$

Finalement :

$$R_{Th_E} = \frac{R_1R_3(R_2 + R_4) + R_2R_4(R_1 + R_3) + (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)R_6}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_6 \sum_{i=1}^4 R_i}$$

Expression de $\frac{V_5}{I}$

On a le schéma équivalent de Thévenin auquel on connecte la résistance R_5 .



$$\begin{aligned} I_{R_5} &= \frac{V_{Th_I}}{R_5 + R_{Th_I}} \\ \text{et } V_5 &= R_5 I_{R_5} = R_5 \frac{V_{Th_I}}{R_5 + R_{Th_I}} \end{aligned}$$

Remplaçant V_{Th_I} et R_{Th_I} par leur expression trouvée plus haut, le rapport V_5/I s'écrit :

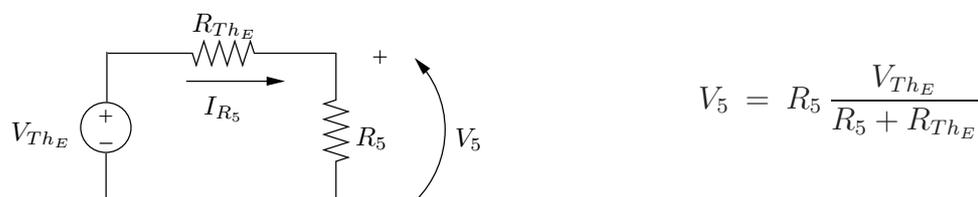
$$\frac{V_5}{I} = \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{\sum_{i=1}^4 R_i + \frac{1}{R_5}(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

Dans le cas particulier où $R_5 = \infty$:

$$\frac{V_5}{I} = \frac{R_1R_4 - R_2R_3}{\sum_{i=1}^4 R_i}$$

4. Expression de $\frac{V_5}{E}$

On connecte la résistance R_5 au schéma équivalent de Thévenin.



L'expression générale de V_5/E s'écrit :

$$\frac{V_5}{E} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_6 \sum_{i=1}^4 R_i + \frac{1}{R_5} \sum_{i \neq j \neq k}^4 R_i R_j R_k + \frac{R_6}{R_5} (R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$$

Cas particuliers :

– $R_6 = 0, R_5 = \infty$

$$\frac{V_5}{E} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

– $R_6 = 0, R_5 \neq \infty$

$$\frac{V_5}{E} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + \frac{1}{R_5} \sum_{i \neq j \neq k}^4 R_i R_j R_k}$$

– $R_6 \neq 0, R_5 = \infty$

$$\frac{V_5}{E} = \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_6 \sum_{i=1}^4 R_i}$$

Exercice 1.25

Nous allons résoudre cet exercice via deux approches :

1. par application de la méthode des mailles ;
2. par transguration étoile \leftrightarrow triangle.

1. Application de la méthode des mailles

Le graphe du circuit est donné à la Fig. 1.35. La branche 1 est relative à l'accès. L'arbre est choisi de manière à laisser cette branche dans un maillon.

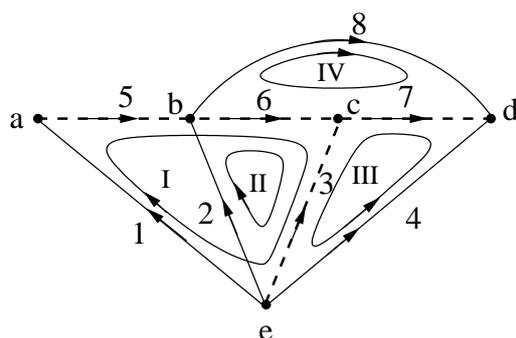


FIG. 1.35

Les relations U - I aux accès s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = -\mathbf{V}_{sM} + \mathbf{R}_M \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}.$$

Seul l'accès 1 nous intéresse et $U_2 = U_3 = U_4 = 0$. Le vecteur des f.e.m. de mailles est donné par :

$$\mathbf{V}_{sM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{V}.$$

La règle d'inspection fournit la matrice \mathbf{R}_M :

$$\mathbf{R}_M = \begin{pmatrix} 110 & 100 & 80 & -20 \\ 100 & 200 & 80 & -20 \\ 80 & 80 & 105 & 20 \\ -20 & -20 & 20 & 50 \end{pmatrix} \Omega.$$

On a :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{c|cccc} 110 & 100 & 80 & -20 \\ 100 & 200 & 80 & -20 \\ 80 & 80 & 105 & 20 \\ -20 & -20 & 20 & 50 \end{array} \right) \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix}.$$

La réduction à l'accès 1, c'est-à-dire l'élimination des variables I_2, I_3, I_4 fournit successivement :

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 200 & 80 & -20 \\ 80 & 105 & 20 \\ -20 & 20 & 50 \end{pmatrix}^{-1} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ -20 \end{pmatrix} I_1 \right)$$

et

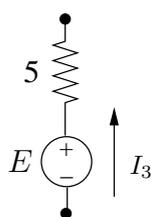
$$\begin{aligned}
 U_1 &= 110 I_1 + (100 \ 80 \ -20) \begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} \\
 &= -(100 \ 80 \ -20) \begin{pmatrix} 200 & 80 & -20 \\ 80 & 105 & 20 \\ -20 & 20 & 50 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \left(110 - (100 \ 80 \ -20) \begin{pmatrix} 200 & 80 & -20 \\ 80 & 105 & 20 \\ -20 & 20 & 50 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ -20 \end{pmatrix} \right) I_1 \\
 &= V_{Th} + R_{Th} I_1 \\
 V_{Th} &= 9.706 \text{ V} \\
 R_{Th} &= 20.846 \ \Omega
 \end{aligned}$$

Pour déterminer la puissance fournie par $E = 12\text{V}$ si l'accès 11' est à vide, il faut déterminer I_3 lorsque $I_1 = 0$.

On a, si $I_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 200 & 80 & -20 \\ 80 & 105 & 20 \\ -20 & 20 & 50 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9.705 \cdot 10^{-2} \\ 0.2118 \\ -0.1236 \end{pmatrix} \text{ A}$$

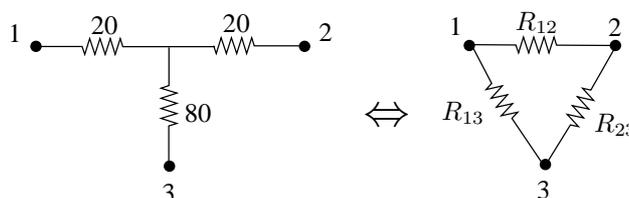
c'est-à-dire $I_3 = 0.2118 \text{ A}$ et



$$\begin{aligned}
 p_E &= 12 I_3 = 2.54 \text{ W} \\
 E &\text{ fournit } 2.54 \text{ W}
 \end{aligned}$$

2. Transfiguration

On transforme l'étoile centrale comme suit :

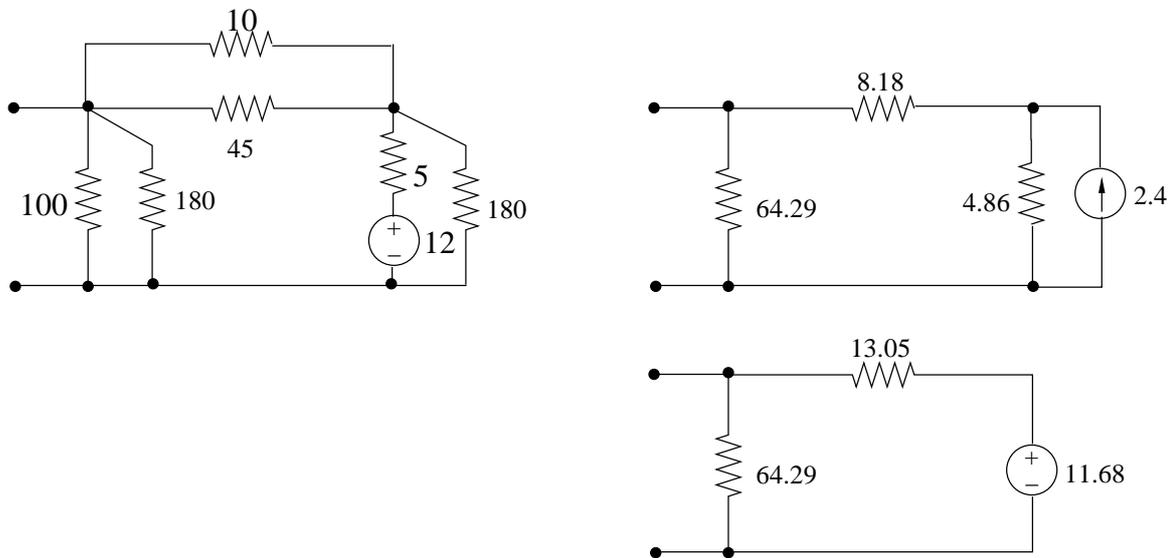


$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{20} + \frac{1}{80}} \Rightarrow R_{12} = 45 \Omega$$

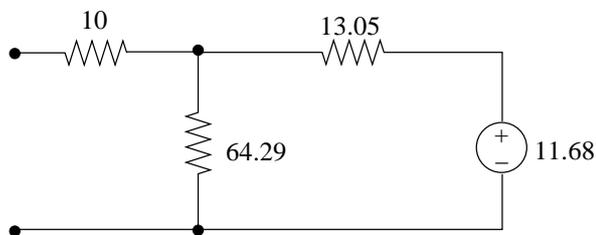
$$\frac{1}{R_{13}} = \frac{G_1 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{1}{180} \Rightarrow R_{13} = 180 \Omega$$

$$\frac{1}{R_{23}} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = \frac{1}{180} \Rightarrow R_{23} = 180 \Omega$$

Le circuit devient :



et finalement :



$$V_{Th} = 64.29 \frac{11.68}{13.05 + 64.29}$$

$$= 9.706 V$$

$$R_{Th} = 10 + 64.29 // 13.05$$

$$= 20.846 \Omega$$

Pour calculer la puissance produite par la source $E = 12V$, revenons au circuit où celle-ci apparaît, comme illustré à la Fig. 1.36.

L'accès est à vide $\Rightarrow I_1 = 0$ et $U_1 = V_{Th} = 9.706 V$.

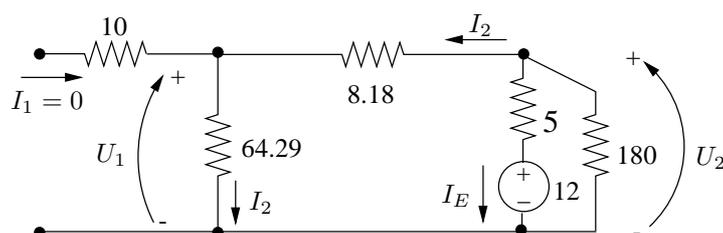


FIG. 1.36

On dérive successivement :

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{U_1}{64.29} \\
 U_2 &= U_1 + 8.18 I_2 \\
 I_E &= \frac{U_2 - 12}{5} = -0.2117 \text{ A} .
 \end{aligned}$$

Puissance fournie par E :

$$p_E = -12 I_E = 2.54 \text{ W} .$$

Exercice 1.26

Il faut tout d'abord déterminer le schéma équivalent de Thévenin du circuit vu de l'accès AB (Fig. 1.37).

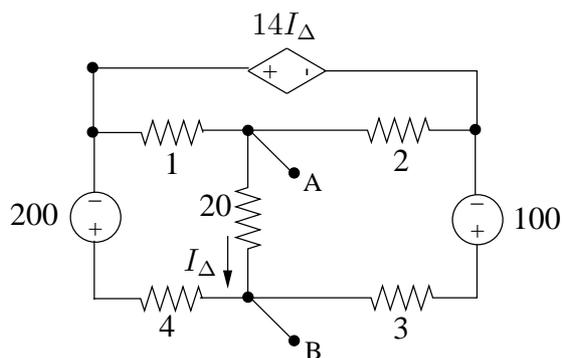


FIG. 1.37

On utilise pour cela la méthode des mailles. On réduira ensuite le système obtenu à l'accès AB.

Le graphe du circuit est donné à la Fig. 1.38. Le choix de l'arbre laisse l'accès (branche 3) dans un maillon.

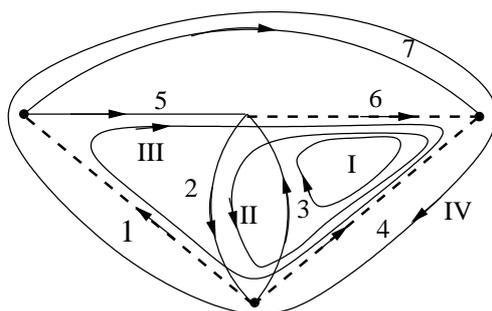


FIG. 1.38

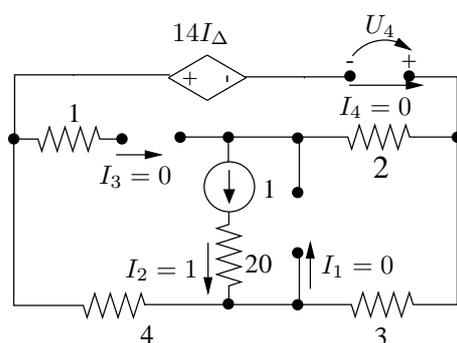
Le vecteur des f.e.m. de mailles s'écrit :

$$\mathbf{V}_{sM} = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ 100 - 200 \\ 100 - 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ -100 \\ -100 \\ -100 \end{pmatrix} \text{ V.}$$

La matrice \mathbf{R}_M ne peut être entièrement déterminée par la règle d'inspection suite à la présence de la source commandée de type CVT. La SLK dans la maille IV est affectée par cette source ; seuls les éléments de la 4ème ligne de \mathbf{R}_M doivent être déterminés par expérimentation. De plus, le CVT introduit une tension qui dépend du courant I_Δ c'est-à-dire de courant de la maille II et nalement seul l'élément 42 de \mathbf{R}_M doit être calculé par expérimentation.

On a :

$$R_{42} = U_4 |_{I_2=1, I_1=I_3=I_4=0}$$



$$U_4 = 14 I_\Delta - 3 = 14 - 3 = 11$$

$$I_\Delta = I_2 = 1$$

$$\Rightarrow R_{42} = 11 \Omega .$$

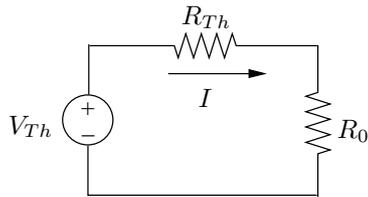
On obtient :

$$\mathbf{R}_M = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 5 & 3 \\ -5 & 25 & -5 & -3 \\ 5 & -5 & 10 & 7 \\ 3 & 11 & 7 & 7 \end{pmatrix} \Omega .$$

L'élimination des accès 2,3,4 fournit :

$$\begin{aligned} V_{Th} &= -100 - (-5 \ 5 \ 3) \begin{pmatrix} 25 & -5 & -3 \\ -5 & 10 & 7 \\ 11 & 7 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} \\ &= -150 \text{ V} \\ R_{Th} &= 5 - (-5 \ 5 \ 3) \begin{pmatrix} 25 & -5 & -3 \\ -5 & 10 & 7 \\ 11 & 7 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= 2.5 \Omega . \end{aligned}$$

On connecte R_0 à l'accès :



$$I = \frac{V_{Th}}{R_{Th} + R_0}$$

La puissance dissipée par R_0 vaut :

$$P_{R_0} = \left(\frac{150}{R_{Th} + R_0} \right)^2 \cdot R_0 = 1000 \text{ W} .$$

On déduit l'équation dé nissant R_0 :

$$\begin{aligned} (150)^2 R_0 &= 1000 (2.5 + R_0)^2 \\ &= 10^3 R_0^2 + 5000 R_0 + 6250 . \end{aligned}$$

Cette équation fournit deux solutions pour R_0 :

$$R_0 = \begin{cases} 17.14 \Omega \\ 0.365 \Omega \end{cases}$$

Exercice 1.27

Procédure

1. mise en équations du circuit via la méthode des noeuds ;
2. réduction à l'accès 14 et dérivation du schéma équivalent de Norton vu de cet accès ;
3. insertion de la résistance R à l'accès 14 et calcul de la puissance dissipée par cette résistance.

1. Application de la méthode des noeuds au circuit de la Fig. 1.39

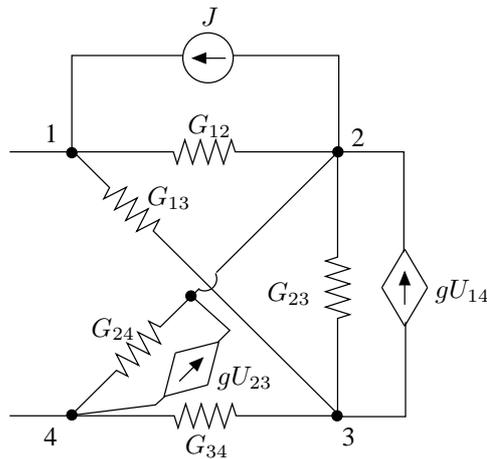


FIG. 1.39

Le circuit devra être ultérieurement réduit à l'accès 14, on peut donc choisir soit le noeud 1 soit le noeud 4 comme noeud de référence. Choisissons le noeud 4.

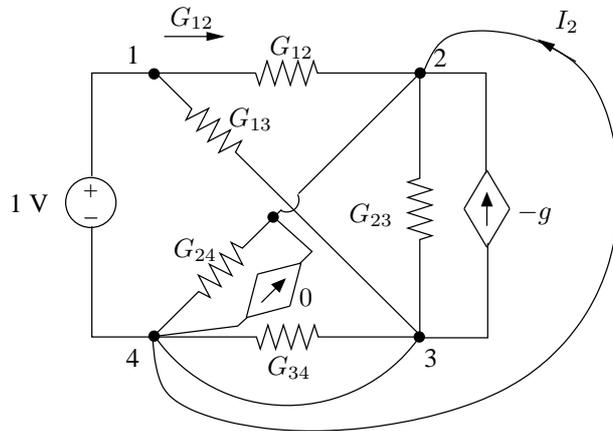
Vu la présence de sources commandées, seuls les éléments ci-dessous de la matrice de conductances aux noeuds peuvent être déterminés par la règle d'inspection.

$$\mathbf{G}_N = \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} G_{12} + G_{13} & -G_{12} & -G_{13} \\ \times & \times & \times \\ \times & -G_{23} & G_{13} + G_{23} + G_{34} \end{pmatrix}$$

Les autres éléments se déduisent

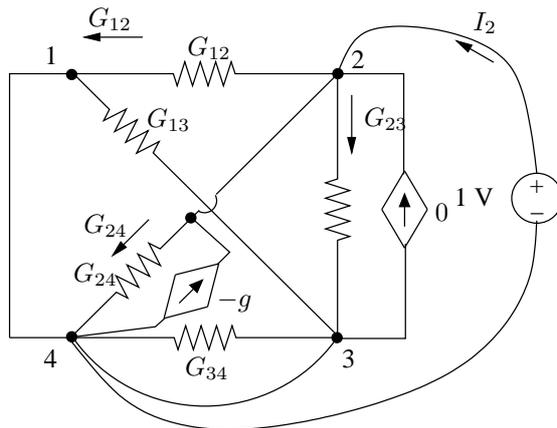
– soit par expérimentation :

– élément 21 :



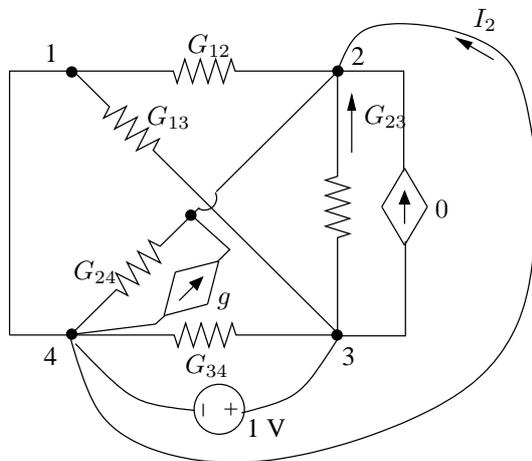
$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{N21} &= I_2 |_{V_1=1; V_2=V_3=0} \\ &= -G_{12} + g \end{aligned}$$

– élément 22 :



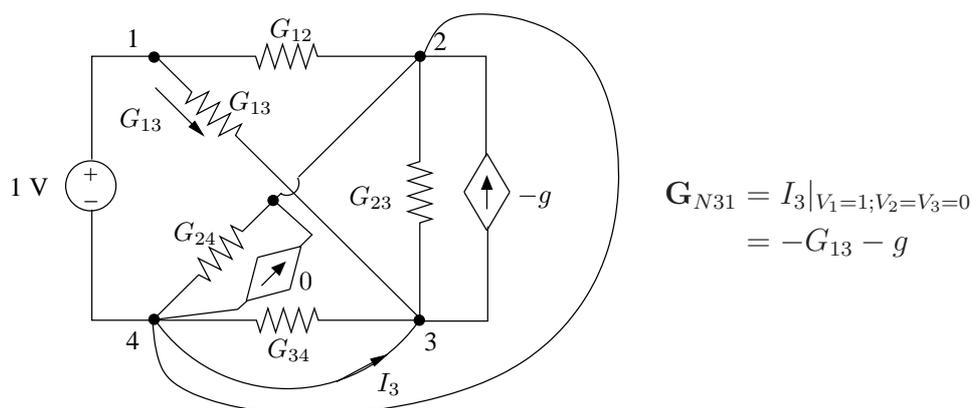
$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{N22} &= I_2 |_{V_2=1; V_1=V_3=0} \\ &= G_{12} + G_{23} + G_{24} + g \end{aligned}$$

– élément 23 :



$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{N23} &= I_2 |_{V_3=1; V_1=V_2=0} \\ &= -G_{23} - g \end{aligned}$$

– élément 31 :



$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{N31} &= I_3|_{V_1=1; V_2=V_3=0} \\ &= -G_{13} - g \end{aligned}$$

– soit en écrivant directement les PLK aux noeuds 2 et 3 :

$$\begin{aligned} G_{12}(V_2 - V_1) + G_{23}(V_2 - V_3) + G_{24}V_2 + gV_1 - g(V_3 - V_2) &= -J \\ G_{13}(V_3 - V_1) + G_{23}(V_3 - V_2) + G_{34}V_3 - gV_1 &= 0 \end{aligned}$$

Finalement, la matrice de conductances aux noeuds s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_N &= \left(\begin{array}{c|cc} G_{12} + G_{13} & -G_{12} & -G_{13} \\ \hline -G_{12} + g & G_{12} + G_{23} + G_{24} + g & -G_{23} - g \\ -G_{13} - g & -G_{23} & G_{13} + G_{23} + G_{34} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|cc} 60 & -35 & -25 \\ \hline -15 & 145 & -30 \\ -45 & -10 & 110 \end{array} \right) \text{ mS} \end{aligned}$$

Le vecteur des courants injectés aux noeuds par les sources indépendantes d'énergie est donné par :

$$\mathbf{I}_{sN} = \begin{pmatrix} \frac{J}{-J} \\ -J \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ A}$$

2. Dérivation du schéma équivalent de Norton vu de l'accès 14.

La conductance équivalente de Norton vue de d'accès 14 s'obtient par réduction de la matrice \mathbf{G}_N à cet accès :

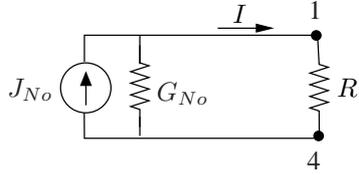
$$G_{No} = 60 - (-35 \quad -25) \begin{pmatrix} 145 & -30 \\ -10 & 110 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -15 \\ -45 \end{pmatrix} = 42.63 \text{ mS}$$

La source de courant de Norton équivalente est donnée par :

$$J_{No} = 5 - (-35 \quad -25) \begin{pmatrix} 145 & -30 \\ -10 & 110 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} = 3.69 \text{ A}$$

3. Calcul de la puissance consommée par R .

Connectant la résistance R à l'accès, on déduit :



$$I = J_{No} \frac{\frac{1}{G_{No}}}{R + \frac{1}{G_{No}}} = 0.7 \text{ A}$$

$$p = RI^2 = 49.16 \text{ W}$$

Chapitre 2

Régime sinusoïdal établi

Exercice 2.1

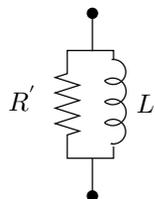
1. Schémas équivalents d'une bobine

Les deux dipôles sont équivalents s'ils présentent la même impédance Z ou la même admittance Y .

L'impédance et l'admittance du circuit série sont données par :


$$Z(j\omega) = R + j\omega L \Rightarrow Y(j\omega) = \frac{1}{\frac{R + j\omega L}{R - j\omega L}} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

L'admittance du circuit parallèle est :


$$Y'(j\omega) = \frac{1}{R'} - \frac{j}{\omega L'}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} Y(j\omega) = Y'(j\omega) &\Rightarrow \frac{1}{R'} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ R' &= R + \frac{\omega^2 L^2}{R} \\ &= R \left(1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2} \right) = R(1 + Q^2) \end{aligned}$$

où $Q = \frac{\omega L}{R}$ est le facteur de qualité de la bobine.

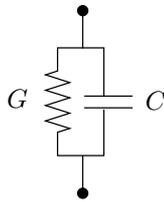
$$R' = R(1 + Q^2) \simeq Q^2 R \text{ si } Q \gg 1$$

$$L' = L \left(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2} \right) = L \left(1 + \frac{1}{Q^2} \right)$$

$$\simeq L \text{ si } Q \gg 1$$

2. Schémas équivalents d'un condensateur

Pour le circuit parallèle, on écrit :



$$Y(j\omega) = G + j\omega C$$

$$Z(j\omega) = \frac{1}{G + j\omega C} = \frac{G - j\omega C}{G^2 + \omega^2 C^2}$$

L'impédance du circuit série est :



$$Z'(j\omega) = \frac{1}{G'} - \frac{j}{\omega C'}$$

On déduit :

$$Z(j\omega) = Z'(j\omega) \Rightarrow \frac{1}{G'} = \frac{G}{G^2 + \omega^2 C^2}$$

$$G' = G \left(1 + \frac{\omega^2 C^2}{G^2} \right) = G(1 + Q^2)$$

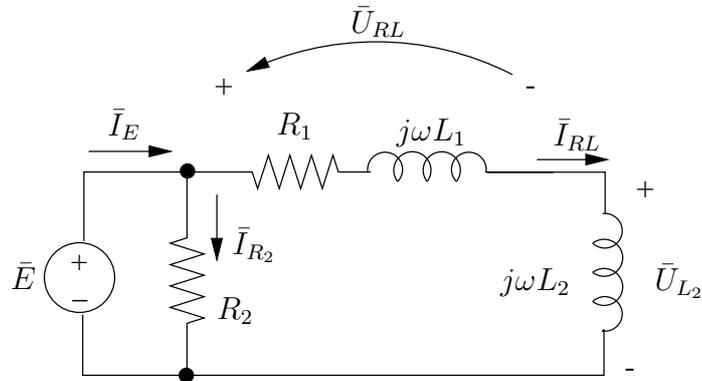
$$= G \left(1 + \frac{1}{\text{tg}^2 \delta} \right)$$

avec Q le facteur de qualité du condensateur et δ son angle de pertes.

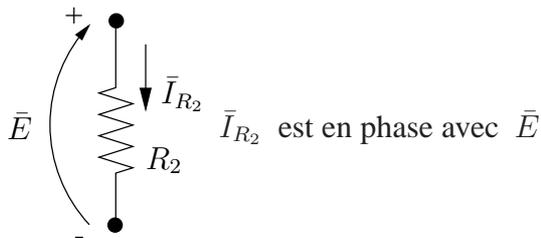
$$G' = G(1 + Q^2) \simeq Q^2 G \text{ si } Q \gg 1$$

$$C' = C \left(1 + \frac{G^2}{\omega^2 C^2} \right) = C \left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) \simeq C \text{ si } Q \gg 1$$

Exercice 2.2



1. Le courant et la tension aux bornes de la résistance R_2 sont en phase.



2. Le circuit aux bornes de \bar{E} est de type RL :

- $R_2 // (R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2) = \text{circuit RL}$
 $\rightarrow \bar{I}_E$ est en retard par rapport à \bar{E} d'un angle $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$;
- $R_1 + j\omega L_1 + j\omega L_2 = \text{circuit RL}$
 $\rightarrow \bar{I}_{RL}$ est en retard par rapport à \bar{E} d'un angle $0 < \varphi' < \frac{\pi}{2}$.

3. De la PLK au noeud A on déduit \bar{I}_E :

$$\bar{I}_E = \bar{I}_{RL} + \bar{I}_{R_2}$$

4. \bar{U}_{L_2} est la tension aux bornes d'une inductance pure ; elle est en avance de $\frac{\pi}{2}$ par rapport au courant qui la parcourt, c'est-à-dire \bar{I}_{RL}

5. La SLK fournit \bar{U}_{RL} :

$$\bar{U}_{RL} + \bar{U}_{L_2} = \bar{E}$$

Le diagramme de phaseurs correspondant est représenté à la Fig.2.1.

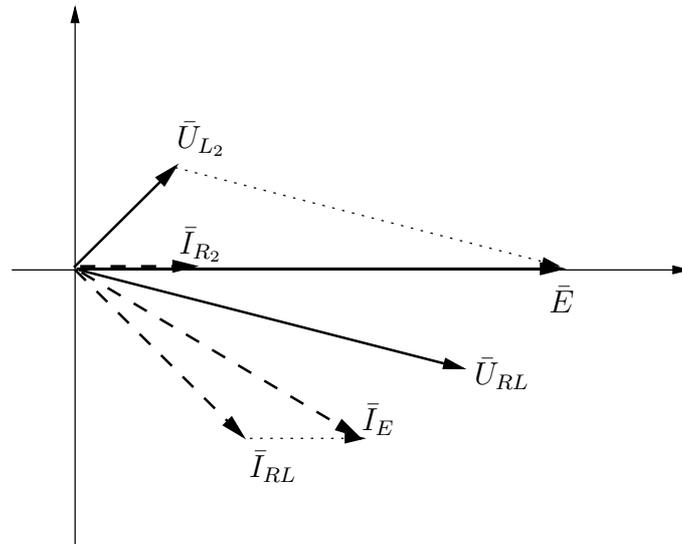
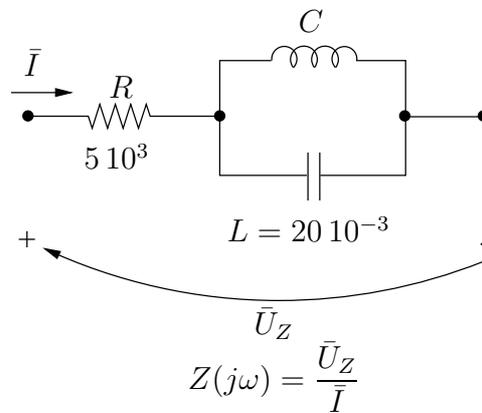


FIG. 2.1

Exercice 2.3

1. Calcul de l'impédance du dipôle



Pour que le courant \bar{I} parcourant le dipôle présente un retard de 45° par rapport à la tension \bar{U}_Z il faut que l'argument de l'impédance Z soit égal à 45° .

$$\angle Z(j\omega) = 45^\circ$$

On a :

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= R + \frac{1}{j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} \\ &= R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \angle Z &= \operatorname{arctg} \frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} \\ &= 45^\circ \end{aligned}$$

Dès lors :

$$\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC} = R .$$

On déduit :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{\omega^2 L} \left(1 - \frac{\omega L}{R} \right) \\ &= \frac{1}{10^6 \cdot 20 \cdot 10^{-3}} \left(1 - \frac{10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-3}}{5 \cdot 10^3} \right) \\ &= 4.98 \cdot 10^{-5} = 49.8 \mu\text{F} \end{aligned}$$

et

$$Z = (5 + j5) 10^3 = 7.071 \cdot 10^3 \angle 45^\circ \Omega .$$

2. Diagramme de phaseurs

On connecte le dipôle Z aux bornes du circuit comme indiqué à la Fig.2.2.

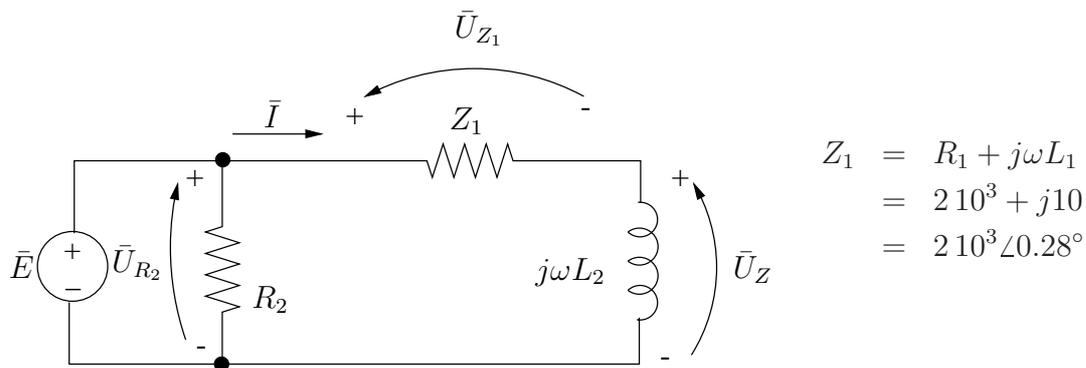


FIG. 2.2

Le courant \bar{I} est donné par :

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{E}}{Z_1 + Z} = \frac{120 \angle 0}{2 \cdot 10^3 + j 10 + 5 \cdot 10^3 + j 5 \cdot 10^3} \\ &= 11.3 \cdot 10^3 - j 8.11 \cdot 10^3 \\ &= 13.9 \cdot 10^{-3} \angle -35.6^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

et

$$\bar{U}_{R_2} = \bar{E} = 120 \angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_Z = Z\bar{I} = 97.25 + j 16.11 = 98.57 \angle 9.4^\circ \text{ V}$$

$$\bar{U}_{Z_1} = Z_1\bar{I} = 22.8 - j 16.1 = 27.9 \angle -35.3^\circ \text{ V}$$

On remarque qu'il existe bien un déphasage de 45° entre la tension \bar{U}_Z et le courant \bar{I} :

$$\angle \bar{U}_Z - \angle \bar{I} = 9.40^\circ - (-35.6^\circ) = 45^\circ .$$

Le digramme de phaseurs correspondant est représenté à la Fig.2.3.

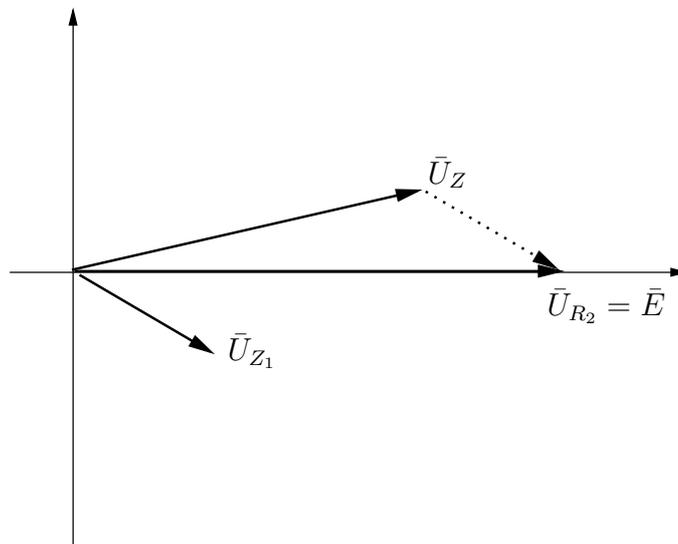


FIG. 2.3

On vérifie :

$$\bar{U}_{R_2} = \bar{E} = \bar{U}_{Z_1} + \bar{U}_Z .$$

Exercice 2.4

Dans le domaine fréquentiel, le circuit est représenté par le schéma de la Fig.2.4.

Les impédances du circuit sont données par :

$$Z_1 = 50 + j 30 \Omega$$

$$Z_{C_1} = -j 50 \Omega$$

$$Z_{C_2} = -j 20 \Omega$$

$$Z_L = j 10 \Omega$$

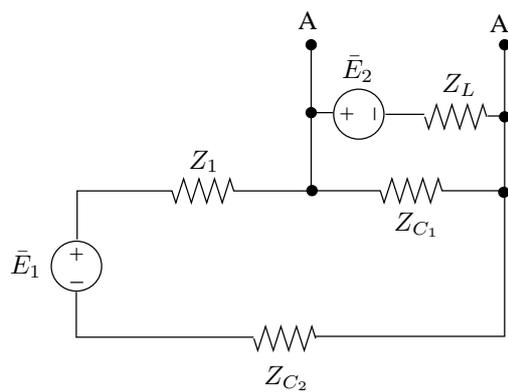


FIG. 2.4

a) Recherchons tout d'abord le schéma équivalent de Thévenin de la partie de circuit de la Fig.2.5.

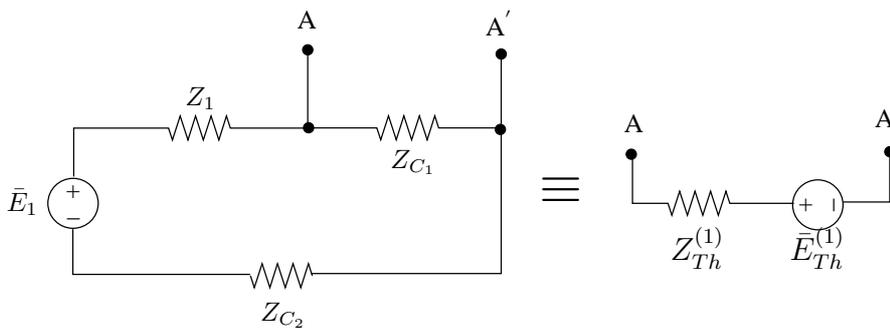


FIG. 2.5

On a :

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{E}_1}{Z_1 + Z_{C_1} + Z_{C_2}} \\ \bar{V}_{Th}^{(1)} &= \frac{Z_{C_1}}{Z_1 + Z_{C_1} + Z_{C_2}} \bar{E}_1 = \frac{-150}{50 - j40} \bar{E}_1 \\ &= (0.488 - j0.61) \bar{E}_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Z_{Th}^{(1)} &= Z_{C_1} // (Z_1 + Z_{C_2}) \\ &= \frac{Z_{C_1} (Z_1 + Z_{C_2})}{Z_{C_1} + Z_1 + Z_{C_2}} \\ &= \frac{-j50(50 + j10)}{50 - j40} \\ &= 30.5 - j25.6 \Omega \end{aligned}$$

b) Le circuit complet se réduit alors à celui de la Fig.2.6 et son schéma équivalent vu de l'accès AA' est donné par :

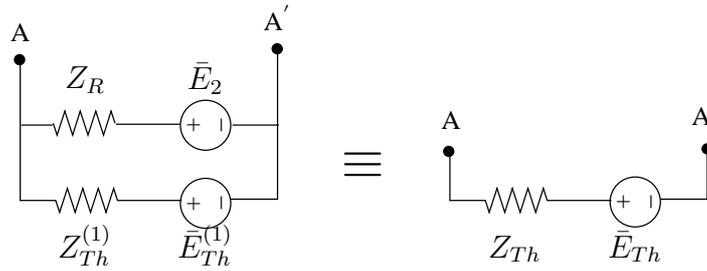


FIG. 2.6

$$\bar{I}_0 = \frac{\bar{V}_{Th}^{(1)} - \bar{E}_2}{Z_{Th}^{(1)} + Z_L} = \frac{(0.488 - j 0.61) \bar{E}_1 - 30}{30.5 - j 15.6}$$

et $\bar{V}_{Th} = \bar{E}_2 + j 10 \bar{I}_0$

$$= 30 + \frac{j 10}{30.5 - j 15.6} ((0.488 - j 0.61) \bar{E}_1 - 30) \quad (1)$$

On demande d'avoir $\bar{V}_{Th} = 50 \angle 45^\circ \text{ V}$. On déduit la valeur de \bar{E}_1 de (1) :

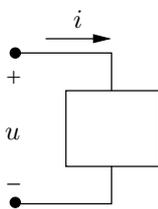
$$\bar{E}_1 = 175.06 + j 72.12 = 189.33 \angle 22.4^\circ \text{ V}.$$

La recherche de Z_{Th} n'est pas nécessaire. Elle vaut :

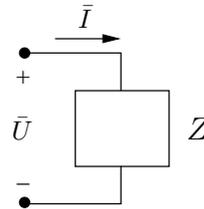
$$Z_{Th} = \frac{j 10 Z_{Th}^{(1)}}{Z_{Th}^{(1)} + j 10} = 2.6 + j 11.3 \Omega.$$

Exercice 2.5

Rappelons les définitions et les expressions des différentes puissances fournies à un dipôle en régime sinusoïdal établi :



Notations temporelles



Notations phaseurs

$$u(t) = \sqrt{2} U \cos(\omega t + \phi_u) \quad \bar{U} = U e^{j\phi_u}$$

$$i(t) = \sqrt{2} I \cos(\omega t + \phi_i) \quad \bar{I} = I e^{j\phi_i}$$

Puissance instantanée :

$$p(t) = UI \cos(\phi_u - \phi_i) + UI \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \text{ (W)} .$$

Puissance moyenne ou puissance active :

$$P = UI \cos(\phi_u - \phi_i) \text{ (W)} .$$

Puissance uctuante :

$$p_f(t) = UI \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \text{ (W)} .$$

Puissance complexe, se détermine à partir des phaseurs :

$$S = \bar{U}\bar{I}^* = P + jQ \text{ (VA)}$$

avec

$$P = UI \cos(\phi_u - \phi_i) , \text{ la puissance active (W)}$$

$$Q = UI \sin(\phi_u - \phi_i) , \text{ la puissance réactive (Var)} .$$

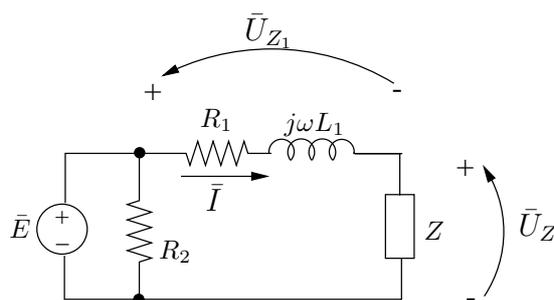


FIG. 2.7

L'état du circuit de la Fig. 2.7 est celui déterminé à l'exercice 2.3 :

$$\begin{aligned} \bar{I} &= 11.3 \cdot 10^{-3} - j 8.11 \cdot 10^{-3} = 13.9 \cdot 10^{-3} \angle -35.6^\circ \text{ A} \\ \bar{U}_Z &= 98.57 \angle -9.40^\circ = 97.25 + j 16.11 \text{ V} \\ \bar{U}_{Z_1} &= 22.8 - j 16.1 = 27.9 \angle -35.3^\circ \text{ V} \end{aligned}$$

1. Calcul des puissances consommées par les éléments R , L , C .

A. Résistance R_2 :

– puissance complexe :

$$S_{R_2} = \bar{U}_{R_2} \bar{I}_{R_2}^* = \bar{E} \cdot \frac{\bar{E}^*}{R_2} = \frac{E^2}{R_2} = 3.6 \text{ VA} .$$

On déduit :

- la puissance active $P_{R_2} = \Re(S) = 3.6 \text{ W}$
- et on vérifie $Q = 0$, une résistance ne consomme pas de puissance réactive ;
- puissances instantanée et effective :

$$\begin{aligned} p(t) &= P + |S| \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) \\ &= 3.6 + 3.6 \cos 2\omega t \\ p_f(t) &= 3.6 \cos 2\omega t \end{aligned}$$

B. Impédance $Z_1 = R_1 + j\omega L_1$

- puissance complexe :

$$\begin{aligned} S_{Z_1} &= \bar{U}_{Z_1} \bar{I}^* = Z_1 \bar{I} \bar{I}^* \\ &= Z_1 I^2 \\ &= R_1 I^2 + j\omega L_1 I^2 \\ &= 0.386 + j 0.002 \text{ VA} \end{aligned}$$

- puissance active :

$$P_{R_1} = R_1 I^2 = 0.386 \text{ W} .$$

dissipée uniquement dans R_1

- puissance réactive :

$$Q_{L_1} = \omega L_1 I^2 = 0.002 \text{ Var}$$

consommée par l'inductance L_1

- puissances instantanée et effective :

$$\begin{aligned} p(t) &= 0.386 + 0.386 \cos(2\omega t - 35.3^\circ - 35.6^\circ) \\ p_f(t) &= 0.386 \cos(2\omega t - 35.3^\circ - 35.6^\circ) . \end{aligned}$$

C. Impédance Z

A l'exercice 2.3, nous avons déduit la composition de cette impédance :

$$Z = (5 + j5) 10^3 \Omega$$

représentée à la Fig. 2.8.

- puissances complexe, active et réactive :

$$\begin{aligned} S_Z &= \bar{U}_Z \bar{I}^* \\ &= 0.966 + j 0.966 \text{ VA} \\ P_R &= 0.966 \text{ W} \\ &\text{consommée par la résistance } R \\ Q_{LC} &= 0.966 \text{ Var} \\ &\text{consommée par le dipôle } LC. \end{aligned}$$

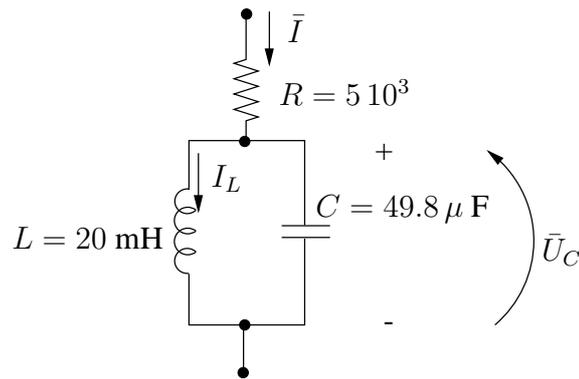


FIG. 2.8

Dans ce dipôle, L consomme de la puissance réactive et C en produit. Déterminons ces puissances réactives. On a pour L :

$$Q_L = \omega L I_L^2$$

avec \bar{I}_L le courant parcourant l'inductance ;
et pour C :

$$Q_C = -\omega C U_C^2$$

avec \bar{U}_C la tension aux bornes du condensateur C .

On calcule :

$$\begin{aligned} \bar{U}_C &= \bar{U}_{LC} = j5 \cdot 10^3 \bar{I} \\ \text{et } \bar{I}_L &= \frac{\bar{U}_{LC}}{j\omega L} = \frac{5 \cdot 10^3}{\omega L} \bar{I} = 250 \bar{I} . \end{aligned}$$

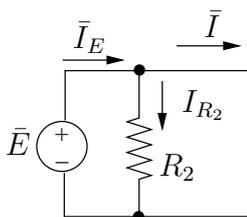
Dès lors :

$$\begin{aligned} Q_L &= \omega L I_L^2 = \omega L (250)^2 I^2 = 241.513 \text{ Var} \\ Q_C &= -\omega C U_C^2 = -\omega C 25 \cdot 10^6 I^2 = -240.546 \text{ Var} . \end{aligned}$$

L consomme 241.513 Var et C produit 240.546 Var . On vérifie :

$$Q_L + Q_C = Q_{LC} .$$

2. Puissances fournies par la source \bar{E}



$$\begin{aligned} \bar{I}_E &= \bar{I} + \bar{I}_{R_2} = \bar{I} + \frac{\bar{E}}{R_2} \\ &= 41.3 \cdot 10^{-3} - j 8.11 \cdot 10^{-3} \\ &= 42.1 \cdot 10^{-3} \angle -11.1^\circ \end{aligned}$$

– puissances complexe, active et réactive :

$$S_E = \bar{E} \bar{I}_E^* = 4.956 + j 0.973 \text{ VA}$$

$$P_E = 4.956 \text{ W}$$

$$Q_E = 0.973 \text{ Var}$$

E produit 0.973 Var et 4.956 W

– puissances instantanée et uctuante :

$$p(t) = 4.956 + 5.05 \cos(2\omega t - 11.1^\circ)$$

$$p_f(t) = 5.05 \cos(2\omega t - 11.1^\circ) .$$

3. Bilans de puissances

– Puissance active :

$$P_E = P_{R_1} + P_{R_2} + P_R$$

– Puissance réactive :

$$Q_E = Q_{L_1} + Q_L + Q_C .$$

Exercice 2.6

1. Détermination de la pulsation ω

La puissance fournie à la charge Z_L sera purement active si l'impédance Z_L (et donc aussi son inverse Y_L) est purement réelle. On a :

$$Z_L = \frac{1}{j\omega C_L + \frac{1}{R_L + j\omega L_L}}$$

$$Y_L = j\omega C_L + \frac{1}{R_L + j\omega L_L}$$

$$= j\omega C_L + \frac{R_L - j\omega L_L}{R_L^2 + \omega^2 L_L^2}$$

Il faut :

$$\text{Im}(Y_L) = 0 \Leftrightarrow \omega C_L - \frac{\omega L_L}{R_L^2 + \omega^2 L_L^2} = 0$$

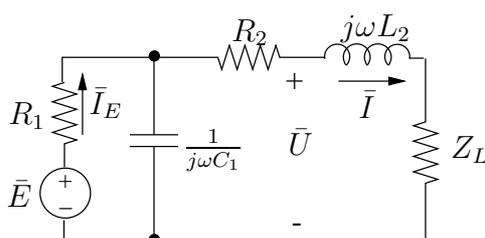
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{L_L C_L} - \frac{R_L^2}{L_L^2}} = 9.95 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

A cette pulsation, l'impédance Z_L se réduit à la résistance :

$$Z_L = \frac{R_L^2 + \omega^2 L_L^2}{R_L} = 500 \Omega$$

2. Puissances consommées par Z_L

Dans le domaine fréquentiel à la pulsation ω , le circuit est représenté par le schéma suivant

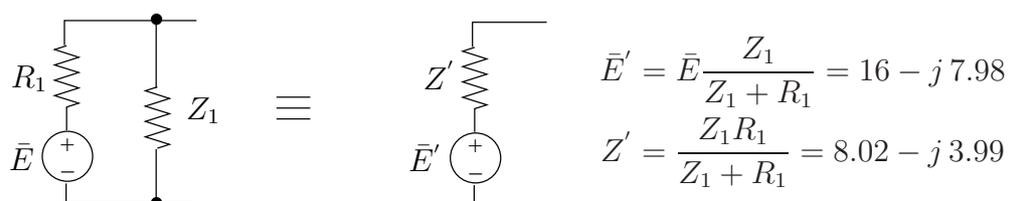


Posons :

$$Z_1 = \frac{1}{j\omega C_1} = -j 20.1$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega L_2 = 20 + j 9.95$$

Transformant la partie gauche du circuit comme suit :



on dérive :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}'}{Z' + Z_2 + Z_L} = (30.2 - j 15.4) 10^{-3}$$

La puissance complexe consommée par la charge Z_L est purement active et est donnée par :

$$S_L = P_L = Z_L I^2 = 0.575 \text{ W}$$

Détermination du courant débité par la source de tension \bar{E} :

$$\bar{U} = (Z_L + Z_2) \bar{I} = 15.9 - j 7.73$$

$$\bar{I}_E = \frac{\bar{E} - \bar{U}}{R_1} = 0.415 + j 0.773$$

Les puissances complexe, active et réactive fournies par \bar{E} sont données par :

$$\text{puissance complexe : } S_E = \bar{E}\bar{I}_E^* = 8.3 - j 15.5 \text{ VA}$$

$$\text{puissance active : } P_E = \text{Re}(S_E) = 8.3 \text{ W}$$

$$\text{puissance réactive : } Q_E = \text{Im}(S_E) = -15.5 \text{ var}$$

La puissance uctuante en $t = 10^{-3}$ s s'exprime par :

$$p_f = |S_E| \cos(2\omega t + \angle \bar{E} + \angle \bar{I}_E) \text{ avec } \angle \bar{E} = 0 \quad \angle \bar{I}_E = 1.078 \text{ rad}$$

$$= 17.55 \cos(2 \times 9.95 \cdot 10^4 \times 10^{-3} + 1.078)$$

$$= 9.72 \text{ W}$$

On déduit la puissance instantanée en $t = 10^{-3}$ s :

$$p_E = p_f + P_E = 18.02 \text{ W}$$

Exercice 2.7

Le transfert de puissance à travers la section S du circuit de la Fig. 2.9 est donné par

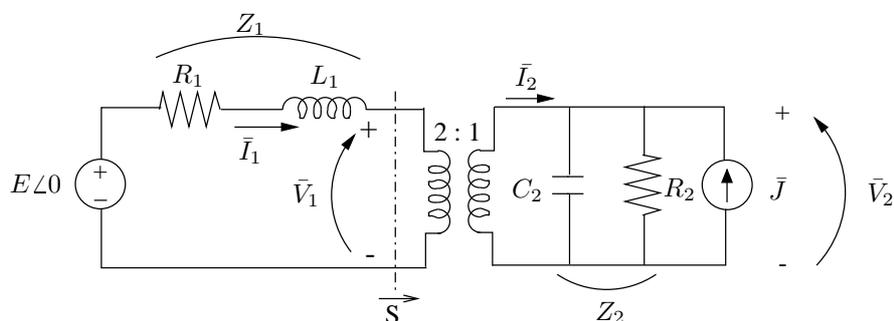


FIG. 2.9

$$S = \bar{V}_1 \bar{I}_1^* .$$

On a :

$$Z_1 = R_1 + j\omega L_1 = 10 + j 12.566 \Omega$$

$$Z_2 = \frac{1}{j\omega C_2 + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{10^{-2} + j 6.283 \cdot 10^{-3}} \Omega .$$

1. Schéma équivalent de Thévenin vu de l'accès gauche du transformateur

Pour la partie du circuit à droite du transformateur, on écrit :

$$\bar{V}_2 = \bar{J}Z_2 + Z_2\bar{I}_2 .$$

Tenant compte des contraintes imposées par le transformateur idéal, on dérive :

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= 2\bar{V}_2 \\ \bar{I}_1 &= \frac{1}{2}\bar{I}_2 \\ \text{soit } \bar{V}_1 &= 2\bar{J}Z_2 + 4Z_2\bar{I}_1 . \end{aligned}$$

- $2\bar{J}Z_2$ représente la f.e.m. de Thévenin équivalente vue de l'accès 1 (gauche) du transformateur.
- $4Z_2$ est l'impédance équivalente de Thévenin correspondante.

2. Puissance traversant la section S

La SLK dans la partie gauche du circuit s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{E} &= Z_1\bar{I}_1 + \bar{V}_1 \\ &= Z_1\bar{I}_1 + 2\bar{J}Z_2 + 4Z_2\bar{I}_1 . \end{aligned}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \frac{\bar{E} - 2\bar{J}Z_2}{Z_1 + 4Z_2} \\ &= \alpha\bar{E} + \beta \\ \text{avec } \alpha &= (2.555 + j 1.4428) 10^{-3} \\ \beta &= -(2.683 + j 4.182) 10^{-1} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{V}_1 &= 2\bar{J}Z_2 + 4Z_2\bar{I}_1 \\ &= \alpha'\bar{E} + \beta' \\ \text{avec } \alpha' &= 0.993 - j 0.0465 \\ \beta' &= -2.572 + j 7.553 . \end{aligned}$$

La puissance traversant la section S de la gauche vers la droite est égale à :

$$\begin{aligned} S &= \bar{V}_1\bar{I}_1^* \\ &= (\alpha'\bar{E} + \beta')(\alpha\bar{E} + \beta)^* \\ &= \alpha'\alpha^*E^2 + (\beta'\alpha^* + \alpha'\beta^*)\bar{E} + \beta'\beta^* \\ &= (2.468 10^{-3} E^2 - 0.2425 E - 2.4685) + j(-1.551 10^{-3} E^2 + 0.4506 E - 3.1019) . \end{aligned}$$

Le transfert de puissance se réalise avec un $\cos \phi = 1$ si $S = P + j0$, c'est-à-dire si la puissance complexe est réelle et se réduit à la puissance active.

Il faut donc :

$$-1.551 \cdot 10^{-3} E^2 + 0.4506 E - 3.1019 = 0$$

soit

$$E = \begin{cases} 7.055 & \text{V} \\ 283.5 & \text{V} \end{cases}$$

On détermine, pour chaque valeur de E , la puissance active qui transite de la gauche vers la droite

– pour $E_1 = 7.055 \text{ V}$, on trouve :

$$\begin{aligned} P(E_1) &= 2.468 \cdot 10^{-3} E_1^2 - 0.2425 E_1 - 2.4685 \\ &= -4.06 < 0 \end{aligned}$$

le signe négatif de cette puissance indique qu'elle transite en réalité de la droite vers la gauche. La solution $E_1 = 7.055 \text{ V}$ est donc à rejeter ;

– pour $E_2 = 283.5 \text{ V}$, on trouve :

$$P(E_2) = 127.1 \text{ W} > 0$$

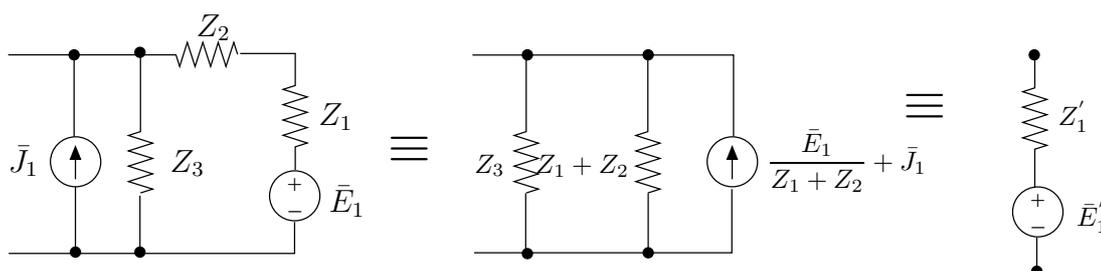
puissance qui transite effectivement de la gauche vers la droite. La solution est donc :

$$E = 283.5 \text{ V} .$$

Exercice 2.8

1. Schéma équivalent de Thévenin vu du secondaire du transformateur

Par transformation de source successives, on dérive :



avec

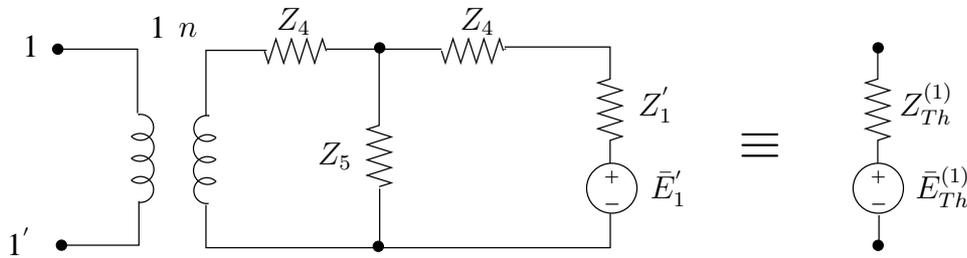
$$Z'_1 = \frac{Z_3(Z_1 + Z_2)}{Z_3 + Z_1 + Z_2} \Omega$$

$$\bar{E}'_1 = \frac{Z'_1}{Z_1 + Z_2} \bar{E}_1 + Z'_1 \bar{J}_1 \text{ V.}$$

On calcule les paramètres du schéma équivalent de Thévenin :

$$Z_{Th}^{(1)} = Z_4 + \frac{Z_5(Z_4 + Z'_1)}{Z_5 + Z_4 + Z'_1} = 61.44 + j 79.63 \Omega$$

$$\bar{E}_{Th}^{(1)} = Z_5 \cdot \frac{\bar{E}'_1}{Z_5 + Z_4 + Z'_1} = 38.93 + j 59.51 \text{ V.}$$



2. Schéma équivalent de Thévenin vu du primaire du transformateur

Le circuit se réduit au schéma de la Fig. 2.10.

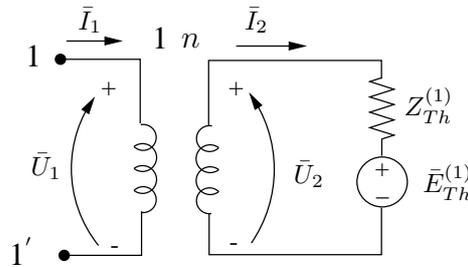


FIG. 2.10

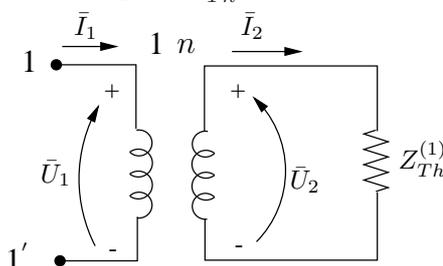
– La f.e.m. de Thévenin est la tension qui apparaît à vide à l'accès 11' :

$$\text{accès à vide} \Rightarrow \bar{I}_1 = 0 \Rightarrow \bar{I}_2 = 0 \Rightarrow \bar{U}_2 = \bar{E}_{Th}^{(1)}.$$

Le transformateur impose la relation suivante entre les tensions \bar{U}_1 et \bar{U}_2 :

$$\bar{U}_1 = \frac{1}{n} \bar{U}_2 \Rightarrow \bar{E}_{Th} = \frac{\bar{E}_{Th}^{(1)}}{n}$$

- L'impédance équivalente de Thévenin est l'impédance vue de l'accès 11' lorsque le circuit est passif, c'est-à-dire lorsque $\bar{E}_{Th}^{(1)} = 0$.



Par définition, $Z_{Th} = \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1}$, or

$$\begin{aligned} \bar{U}_1 &= \frac{1}{n} \bar{U}_2 \\ \text{et } \bar{I}_1 &= n \bar{I}_2 \end{aligned}$$

On déduit :

$$Z_{Th} = \frac{1}{n^2} \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} = \frac{Z_{Th}^{(1)}}{n^2}$$

puisque le rapport $\frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2}$ représente l'impédance $Z_{Th}^{(1)}$.

3. Détermination du rapport de transformation n

On impose que la réactance de Thévenin soit de 20Ω . Il faut donc

$$X_{Th} = \text{Im}(Z_{Th}) = \frac{79.63}{n^2} = 20 \Omega.$$

On déduit :

$$n = \sqrt{\frac{79.63}{20}} = 1.995.$$

L'impédance équivalente de Thévenin vaut :

$$Z_{Th} = \frac{61.44}{n^2} + j 20 = 15.44 + j 20 \Omega$$

et la f.e.m. de Thévenin :

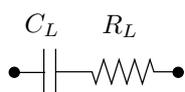
$$\bar{E}_{Th} = \frac{38.93 + j 59.51}{n} = 19.51 + j 29.83 \text{ V}.$$

4. Réalisation de l'adaptation

Pour soutirer au circuit une puissance maximale, on connecte une impédance de charge

$$Z_L = Z_{Th}^* = 15.44 - j 20 \Omega.$$

Cette impédance peut être réalisée au moyen d'un dipôle RC série :



$$\text{avec } R_L = 15.44 \Omega$$

$$C_L = \frac{1}{20\omega} = 5 \mu\text{F}.$$

5. Puissances consommées par Z_L

On connecte l'impédance de charge Z_L à l'accès 11' comme indiqué à la Fig. 2.11.

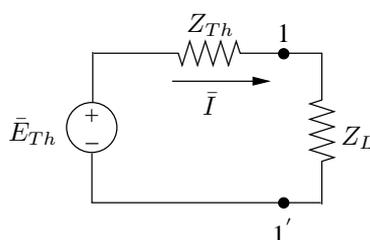


FIG. 2.11

– Impédance Z_L

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}_{Th}}{Z_{Th} + Z_L} = \frac{\bar{E}_{Th}}{2R_{Th}} = 0.632 + j0.966 = 1.155 \angle 56.8^\circ \text{ A}$$

$$\bar{U}_{Z_L} = Z_L \bar{I} = 29.08 + j2.27 = 29.17 \angle 4.46^\circ \text{ V}$$

La puissance complexe consommée par Z_L vaut :

$$S_{Z_L} = Z_L I^2 = Z_{Th}^* \frac{E_{Th}^2}{4R_{Th}^2} = 20.6 - j26.7 = 33.7 \angle -52.3^\circ \text{ VA}.$$

– puissance active : $P_{Z_L} = 20.6 \text{ W} = P_{R_L}$

– puissance réactive : $Q_{Z_L} = -26.7 \text{ Var} = Q_{C_L}$.

La puissance instantanée s'écrit :

$$p_{Z_L}(t) = P_{Z_L} + |S_{Z_L}| \cos(2\omega t + 4.46^\circ + 56.8^\circ)$$

$$= 20.6 + 33.7 \cos(2\omega t + 61.26^\circ) \text{ W}.$$

Les tension et courant s'écrivent :

$$u_{Z_L}(t) = \sqrt{2} \cdot 29.17 \cos(\omega t + 4.46^\circ)$$

$$= 41.25 \cos(\omega t + 4.46^\circ) \text{ V}$$

$$i_{Z_L}(t) = \sqrt{2} \cdot 1.155 \cos(\omega t + 56.8^\circ)$$

$$= 1.633 \cos(\omega t + 56.8^\circ) \text{ A}.$$

– Résistance R_L

$$\begin{aligned}\bar{I}_{R_L} &= \bar{I} & S_{R_L} &= 20.6 + j0 \text{ VA} \\ i_{R_L} &= i_{Z_L} & P_{R_L} &= 20.6 \text{ W} & Q_{R_L} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{U}_{R_L} &= R_L \bar{I} = 9.75 + j 14.9 \text{ V} \\ u_{R_L} &= R_L i_{R_L} = 25.197 \cos(\omega t + 56.8^\circ) \text{ V}\end{aligned}$$

Le courant i_{R_L} et la tension u_{R_L} sont bien évidemment en phase.

$$\begin{aligned}p_{R_L} &= 20.6 + 20.6 \cos(2\omega t + 56.8^\circ + 56.8^\circ) \\ &= 20.6 + 20.6 \cos(2\omega t + 113.6^\circ) \text{ W}.\end{aligned}$$

– Capacité C_L

$$\begin{aligned}S_{C_L} &= 0 - j 26.7 \text{ VA} \\ P_{C_L} &= 0 \\ Q_{C_L} &= -26.7 \text{ Var} \\ \bar{I}_{C_L} &= \bar{I} \\ i_{C_L} &= i_{Z_L} \\ \bar{U}_{C_L} &= \frac{-j}{\omega C_L} \bar{I} = 19.37 - j 12.64 \text{ V} \\ u_{C_L}(t) &= \frac{1.633}{\omega C_L} \cos(\omega t + 56.8^\circ - 90^\circ) = 32.66 \cos(\omega t - 33.2^\circ) \text{ V}\end{aligned}$$

La tension est en retard de 90° par rapport au courant.

$$\begin{aligned}p_{C_L} &= 26.7 \cos(2\omega t + 56.8^\circ - 33.2^\circ) \\ &= 26.7 \cos(2\omega t + 23.6^\circ) \text{ W}\end{aligned}$$

6. Puissances consommées par l'impédance Z_5

Il faut déterminer le courant \bar{I}_{Z_5} et la tension \bar{U}_{Z_5} comme indiqué à la Fig. 2.12.

Connaissant \bar{I} , on déduit

$$\bar{I}'_2 = \frac{1}{n} \bar{I} = 0.317 + j 0.484 \text{ A}$$

De \bar{U}_{Z_L} , on déduit :

$$\bar{U}_2 = n \bar{U}_{Z_L} = 58.03 + j 4.53 \text{ V}$$

et

$$\begin{aligned}\bar{U}_{Z_5} &= \bar{U}_2 + Z_4 \bar{I}'_2 = 48.16 + j 31.73 = 57.67 \angle 33.38^\circ \text{ V} \\ \bar{I}_{Z_5} &= \frac{\bar{U}_{Z_5}}{Z_5} = 0.546 - j 0.397 = 0.675 \angle -36.1^\circ \text{ A}.\end{aligned}$$

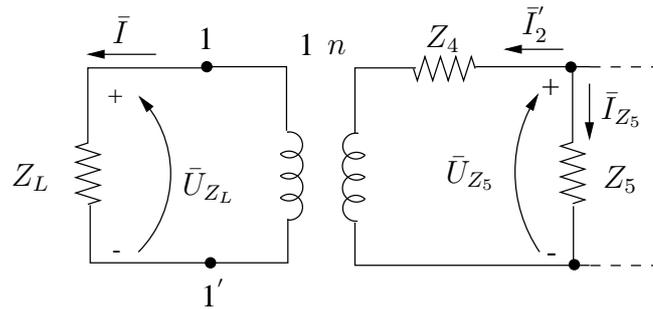


FIG. 2.12

On calcule successivement :

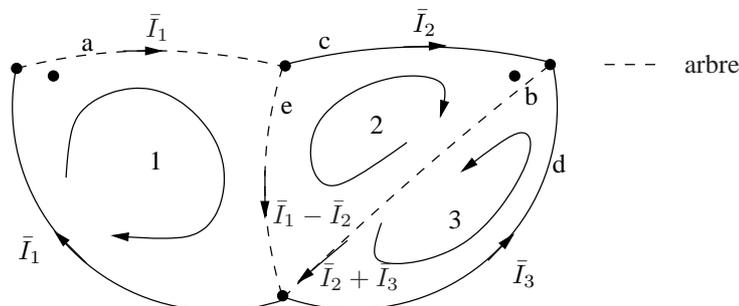
$$\begin{aligned}
 u_{Z_5}(t) &= 81.56 \cos(\omega t + 33.38^\circ) \text{ V} \\
 i_{Z_5}(t) &= 0.954 \cos(\omega t - 36.1^\circ) \text{ A} \\
 S_{Z_5} &= \bar{U}_{Z_5} \bar{I}_{Z_5}^* = 13.67 + j 36.45 = 38.93 \angle -69.4^\circ \text{ VA} \\
 P_{Z_5} &= 13.67 \text{ W} \\
 Q_{Z_5} &= 36.45 \text{ Var} \\
 p_{Z_5}(t) &= 13.67 + 38.93 \cos(2\omega t - 2.68^\circ) \text{ W} .
 \end{aligned}$$

Exercice 2.9

Le coef cient d'inductance mutuelle entre les inductances L_1 et L_4 est donné par

$$M = k\sqrt{L_1 L_4} = 0.14 \text{ mH}$$

On applique la méthode des mailles. L'arbre est choisi de manière à laisser l'accès du dipôle dans un maillon.



Les relations de branches relatives aux branches occupées par les deux inductances couplées s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 + \bar{I}_3 \end{pmatrix}$$

Les tensions de couplage s'ajoutent vu les sens choisis pour les courants (entrant par les points aux deux branches).

Les SLK dans chaque maille s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{U}_a + \bar{U}_e \\ &= j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M(\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + j\omega L_2(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) \\ 0 &= \bar{U}_c - \bar{U}_e + \bar{U}_b \\ &= j\omega L_3 \bar{I}_2 - j\omega L_2(\bar{I}_1 - \bar{I}_2) + j\omega L_4(\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + j\omega M \bar{I}_1 \\ 0 &= \bar{U}_d + \bar{U}_b \\ &= j\omega L_5 \bar{I}_3 + j\omega L_4(\bar{I}_2 + \bar{I}_3) + j\omega M \bar{I}_1 \end{aligned}$$

\bar{U} est la tension à l'accès du dipôle. La matrice des impédances de mailles est donnée par :

$$\mathbf{Z}_M = j\omega \begin{pmatrix} L_1 + L_2 & -L_2 + M & M \\ -L_2 + M & L_3 + L_2 + L_4 & L_4 \\ M & L_4 & L_4 + L_5 \end{pmatrix} = j\omega \left[\begin{array}{c|cc} 0.6 & -0.36 & 0.14 \\ \hline -0.36 & 1.1 & 0.4 \\ 0.14 & 0.4 & 1.2 \end{array} \right] 10^{-3} \Omega.$$

La réduction de cette matrice à l'accès 1 fournit l'impédance équivalente du dipôle, soit :

$$\begin{aligned} Z_{eq} &= j\omega L_{eq} \\ L_{eq} &= 0.6 - (-0.36 \quad 0.14) \begin{pmatrix} 1.1 & 0.4 \\ 0.4 & 1.2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -0.36 \\ 0.14 \end{pmatrix} = 0.413 \text{ mH} \end{aligned}$$

Exercice 2.10

1. Application de la méthode des mailles

On utilise la méthode des mailles pour déterminer le schéma équivalent de Thévenin vu de l'accès 11'. Le graphe du circuit passif est représenté à la Fig. 2.13.

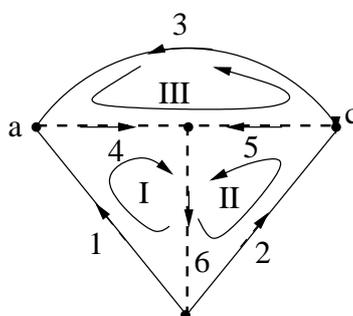


FIG. 2.13

Choisissons l'arbre représenté en pointillés en prenant soin de placer la branche 2 relative à l'accès auquel on va réduire le circuit dans un maillon. Les mailles fondamentales correspondantes sont les mailles I, II, III.

Adoptant les sens des courants et tensions de la Fig. 2.14, les relations de branches relatives à la paire d'inductances couplées s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} u_4 \\ u_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{di_4}{dt} \\ \frac{di_6}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_4 \\ i_6 \end{pmatrix}$$

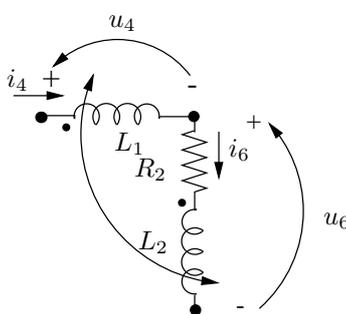


FIG. 2.14

ou, en termes de phaseurs :

$$\begin{pmatrix} \bar{U}_4 \\ \bar{U}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & R_2 + j\omega L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_4 \\ \bar{I}_6 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient d'inductance mutuelle \$M\$ est positif puisque, avec les sens choisis pour les courants, ils entrent tous les deux par la borne repérée par le point \$\bullet\$.

Les courants de branches se déduisent à partir des courants de mailles :

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix}$$

comme indiqué à la Fig. 2.15.

Les SLK pour les 3 mailles s'écrivent alors en fonction des courants de mailles :

– maille I :

$$\begin{aligned} \bar{E} = & R_1 \bar{I}_1 + j\omega L_1 (\bar{I}_1 + \bar{I}_3) + j\omega M (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + \\ & + j\omega L_2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + j\omega M (\bar{I}_1 + \bar{I}_3) + R_2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) \end{aligned}$$

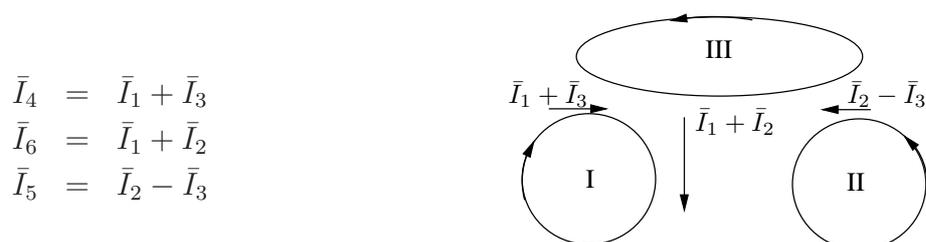


FIG. 2.15

– maille II :

$$0 = R_3 (\bar{I}_2 - \bar{I}_3) + R_2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + j\omega L_2 (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + j\omega M (\bar{I}_1 + \bar{I}_3)$$

– maille III :

$$0 = j\omega L_1 (\bar{I}_1 + \bar{I}_3) + j\omega M (\bar{I}_1 + \bar{I}_2) + R_3 (\bar{I}_3 - \bar{I}_2) + R_4 \bar{I}_3 .$$

On déduit :

– la matrice d'impédances de mailles :

$$\mathbf{Z}_M = \left(\begin{array}{c|c|c} R_1 + j\omega L_1 + j\omega M + j\omega L_2 & j\omega M + j\omega L_2 + R_2 & j\omega L_1 + j\omega M \\ +j\omega M + R_2 & & \\ \hline \times & R_3 + R_2 + j\omega L_2 & -R_3 + j\omega M \\ \hline \times & \times & j\omega L_1 + R_3 + R_4 \end{array} \right)$$

matrice symétrique ;

– le vecteur des f.e.m. de mailles :

$$\bar{\mathbf{V}}_{sM} = \begin{pmatrix} \bar{E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On peut aussi déterminer \mathbf{Z}_M par calcul à partir de l'expression

$$\mathbf{Z}_M = \mathbf{B} \mathbf{Z}_B \mathbf{B}^T$$

avec

– \mathbf{B} : la matrice des mailles fondamentales du graphe du circuit passé é ;

– \mathbf{Z}_B : la matrice des impédances de branches.

		branche					
		1	2	3	4	5	6
$\mathbf{B} =$	maille						
	I	$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right)$					
	II						
III							

$$\mathbf{Z}_B = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega L_1 & 0 & j\omega M \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j\omega M & 0 & R_2 + j\omega L_2 \end{pmatrix}$$

2. Réduction à l'accès 11' et détermination du schéma équivalent de Thévenin

Le schéma équivalent du circuit et les accès résultant du choix de l'arbre sont donnés à la Fig. 2.16.

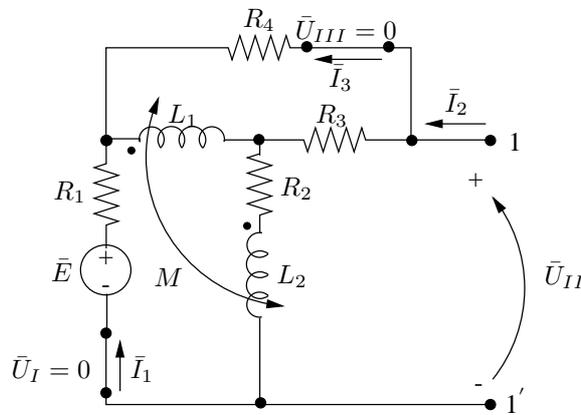


FIG. 2.16

Les relations $U - I$ pour les 3 accès s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{U}_{11'} \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{E} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbf{Z}_M \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix}$$

avec $\bar{U}_I = \bar{U}_{III} = 0$ pour les 2 accès à éliminer.

L'élimination des courants \bar{I}_1, \bar{I}_3 fournit la relation cherchée à l'accès 11' :

$$\bar{U}_{11'} = \bar{V}_{Th} + Z_{Th} \bar{I}_2$$

avec

$$-\bar{V}_{Th} = 0 + \mathbf{Z}_{a,b} \mathbf{Z}_{b,b}^{-1} \begin{pmatrix} \bar{E} \\ 0 \end{pmatrix} :$$

$$\mathbf{Z}_{a,b} = (j\omega M + j\omega L_2 + R_2 \quad -R_3 + j\omega M)$$

$$\mathbf{Z}_{b,b} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 + j\omega L_1 + j\omega L_2 + 2j\omega M & j\omega L_1 + j\omega M \\ j\omega L_1 + j\omega M & j\omega L_1 + R_3 + R_4 \end{pmatrix}$$

on trouve :

$$\bar{V}_{Th} = 85.73 + j 5.63 = 85.91 \angle 3.76^\circ \text{ V}$$

$$- Z_{Th} = \mathbf{Z}_{a,a} - \mathbf{Z}_{a,b} \mathbf{Z}_{b,b}^{-1} \mathbf{Z}_{b,a} :$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{a,a} &= R_3 + R_2 + j\omega L_2 \\ \mathbf{Z}_{b,a} &= \begin{pmatrix} j\omega M + j\omega L_2 + R_2 \\ -R_3 + j\omega M \end{pmatrix} \end{aligned}$$

on trouve :

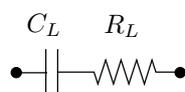
$$Z_{Th} = 33.31 + j 3.47 = 33.49 \angle 5.94^\circ \Omega .$$

3. Réalisation de l'adaptation

Pour soutirer au circuit une puissance maximale, il faut choisir une impédance de charge :

$$\begin{aligned} Z_L = Z_{Th}^* &= 33.31 - j 3.47 \Omega \\ &= R_L - jX_L \\ &= R_L - \frac{j}{\omega C_L} . \end{aligned}$$

Cette impédance peut être réalisée au moyen d'un circuit RC série

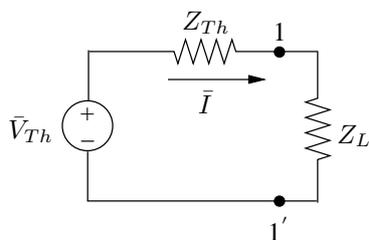


avec

$$\begin{aligned} R_L &= 33.31 \Omega \\ \text{et } C_L &= \frac{1}{3.47 \cdot \omega} = \frac{1}{3.47 \times 10^3} = 288 \mu\text{F} . \end{aligned}$$

4. Puissance fournie à Z_L

Connectant Z_L à l'accès 11', on dérive :



$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{\bar{V}_{Th}}{2R_{Th}} \\ S_{Z_L} &= Z_L I^2 \\ &= Z_L \frac{V_{Th}^2}{4R_{Th}^2} \\ &= 55.4 - j5.77 \text{ VA} . \end{aligned}$$

La charge Z_L consomme une puissance active

$$P = 55.4 \text{ W}$$

et fournit une puissance réactive

$$Q = 5.77 \text{ Var .}$$

Chapitre 3

Régime transitoire

Exercice 3.1

a) Soient i_1 et i_2 les deux courants parcourant les 2 inductances, comme indiqué à la Fig. 3.1. Celles-ci sont soumises à une même tension u et le dipôle est alimenté par le courant i .

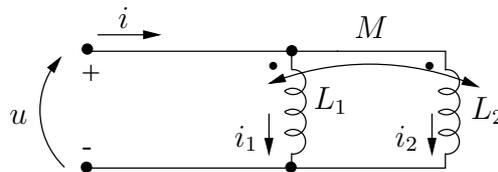


FIG. 3.1

Etant donné les sens choisis pour les courants i_1 , i_2 , entrant tous deux par la borne repérée par le point \bullet , on écrit :

$$\begin{aligned}u_1 &= u = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\u_2 &= u = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}\end{aligned}$$

On déduit la relation suivante entre i_1 et i_2 :

$$\begin{aligned}L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} &= M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \\ \frac{di_1}{dt} &= \frac{L_2 - M}{L_1 - M} \frac{di_2}{dt}\end{aligned}$$

D'autre part, la PLK écrite au noeud 1 fournit :

$$i = i_1 + i_2$$

et donc

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}.$$

On dérive successivement :

$$u = \left(L_1 \frac{L_2 - M}{L_1 - M} + M \right) \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \left(\frac{L_2 - M}{L_1 - M} + 1 \right) \frac{di_2}{dt}$$

et finalement, la relation $u - i$ aux bornes du dipôle s'écrit :

$$u = \left(L_1 \frac{L_2 - M}{L_1 - M} + M \right) \frac{1}{\frac{L_2 - M}{L_1 - M} + 1} \frac{di}{dt}$$

$$= \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \frac{di}{dt}.$$

Le dipôle est donc représenté par une inductance équivalente :

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}.$$

b) Si la polarité magnétique de la bobine 2 est inversée comme indiqué à la Fig. 3.2, on écrit :

$$u = L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

$$u = -M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}.$$

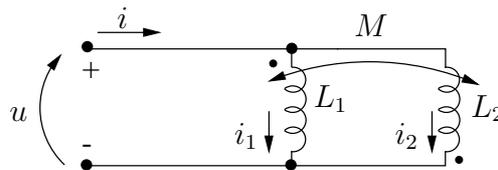


FIG. 3.2

On dérive successivement :

$$\frac{di_1}{dt} = \frac{L_2 + M}{L_1 + M} \frac{di_2}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = \left(\frac{L_2 + M}{L_1 + M} + 1 \right) \frac{di_2}{dt}$$

$$u = \left(L_1 \frac{L_2 + M}{L_1 + M} - M \right) \frac{di_2}{dt}$$

et nalement :

$$\begin{aligned}
 u &= \left(L_1 \frac{L_2 + M}{L_1 + M} - M \right) \frac{1}{L_1 \frac{L_2 + M}{L_1 + M} + 1} \frac{di}{dt} \\
 &= \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \frac{di}{dt} .
 \end{aligned}$$

L'inductance équivalente du dipôle est donc donnée par :

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} .$$

Exercice 3.2

1. Expression de i_0

Les deux inductances couplées, connectées en parallèle, peuvent être remplacées par l'inductance équivalente (voir exercice 3.1) :

$$L_{eq} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} = \frac{45 - 36}{18 - 12} = 1.5 \text{ H} .$$

On aboutit donc au circuit RL de la Fig. 3.3.

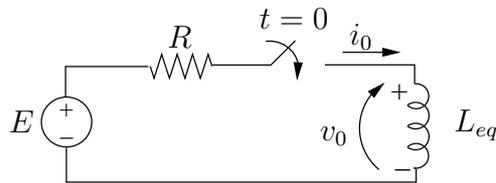


FIG. 3.3

La constante de temps de ce circuit est :

$$\tau = \frac{L_{eq}}{R} = \frac{1.5}{7.5} = 0.2 \text{ s} .$$

La courant d'établissement de ce circuit est donné par :

$$i_0(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau}) = 16 - 16 e^{-5t} \text{ A} , t \geq 0$$

étant donné qu'il est supposé qu'aucune énergie n'est initialement stockée dans l'inductance ($i_0(0) = 0$) .

2. Expression de v_0

La tension v_0 s'obtient en appliquant la SLK dans la maille. On déduit :

$$\begin{aligned} v_0 &= E - Ri_0 \\ &= 120 - 7.5 i_0 \\ &= 120 e^{-5t} \text{ V} , t \geq 0^+ . \end{aligned}$$

3. Expression de i_1 et i_2

Les courants i_1 et i_2 se déduisent des relations de branches relatives aux deux inductances couplées. Ainsi, on a :

$$v_0 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}$$

soit

$$\begin{aligned} 3 \frac{di_1}{dt} + 6 \frac{di_2}{dt} &= 6 \frac{di_1}{dt} + 15 \frac{di_2}{dt} \\ \text{ou} \quad \frac{di_1}{dt} &= -3 \frac{di_2}{dt} . \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} i_0 &= i_1 + i_2 \\ \text{ou} \quad \frac{di_0}{dt} &= \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \\ &= -2 \frac{di_2}{dt} . \end{aligned}$$

Remplaçant $\frac{di_0}{dt}$ par son expression, on dérive :

$$\begin{aligned} 80 e^{-5t} &= -2 \frac{di_2}{dt} \\ \text{soit} \quad i_2(t) &= \int_0^t -40 e^{-5x} dx \\ &= -8 + 8 e^{-5t} \text{ A} , t \geq 0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} i_1(t) &= i_0(t) - i_2(t) \\ &= 24 - 24 e^{-5t} \text{ A} , t \geq 0 . \end{aligned}$$

4. Vérification des valeurs limites

a) i_0 :

$t = 0^+$: $i_0(0^+) = 0$
 on a bien $i_0(0^+) = i_0(0^-)$, continuité du courant dans une inductance.

$t = \infty$: $\lim_{t \rightarrow \infty} i_0(t) = 16 = \frac{E}{R}$
 lorsque le régime est établi, l'inductance ne joue plus aucun rôle ; elle ne s'oppose plus au passage du courant.

b) v_0, i_1, i_2 :

– Remarquons tout d'abord que les expressions trouvées pour i_1 et i_2 sont compatibles avec celles de v_0 .

On vérifie en effet que :

$$\begin{aligned} v_0 &= 3 \frac{di_1}{dt} + 6 \frac{di_2}{dt} = 360 e^{-5t} - 240 e^{-5t} \\ &= 120 e^{-5t} \text{ V , } t \geq 0^+ \end{aligned}$$

ou que

$$\begin{aligned} v_0 &= 6 \frac{di_1}{dt} + 15 \frac{di_2}{dt} = 720 e^{-5t} - 600 e^{-5t} \\ &= 120 e^{-5t} \text{ V , } t \geq 0^+ . \end{aligned}$$

– Les valeurs nales de i_1 et i_2 peuvent être vérifiées en utilisant les flux totaux embrassés par chacune des deux bobines :

– pour la bobine 1 :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= L_1 i_1 + M i_2 \\ &= 3 i_1 + 6 i_2 \end{aligned}$$

– pour la bobine 2 :

$$\begin{aligned} \phi_2 &= M i_1 + L_2 i_2 \\ &= 6 i_1 + 15 i_2 . \end{aligned}$$

On trouve :

$$\phi_1 = \phi_2 = 24 - 24 e^{-5t} \text{ Wb .}$$

On remarque que l'on a bien :

$$v_0 = \frac{d\phi_1}{dt} = \frac{d\phi_2}{dt} = 120 e^{-5t} \text{ V , } t \geq 0^+ .$$

Les valeurs finales des flux sont :

$$\phi_1(\infty) = \phi_2(\infty) = 24 \text{ Wb} .$$

Ces valeurs sont compatibles avec les valeurs finales des courants. On vérifie en effet :

$$i_1(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (24 - 24 e^{-5t}) = 24 \text{ A}$$

$$i_2(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-8 + 8 e^{-5t}) = -8 \text{ A}$$

et

$$\phi_1(\infty) = L_1 i_1(\infty) + M i_2(\infty) = 3 \times 24 + 6 \times (-8) = 24 \text{ Wb}$$

$$\phi_2(\infty) = M i_1(\infty) + L_2 i_2(\infty) = 6 \times 24 + 15 \times (-8) = 24 \text{ Wb}$$

Il faut remarquer qu'il n'était pas possible de vérifier directement les valeurs finales de i_1 et i_2 sans recourir au calcul des flux. En effet, pour $t \rightarrow \infty$, les 2 bobines se comportent comme des court-circuits, et il n'est pas possible de déterminer comment le courant total de c.c, i_0 , se divise entre les deux bobines.

Exercice 3.3

1. Période $0 \leq t \leq 15 \text{ ms}$

L'interrupteur bascule en position b .

Le condensateur est initialement non chargé : $v(0) = 0 \text{ V}$.

Le circuit se réduit à un simple circuit RC série comme indiqué à la Fig. 3.4.

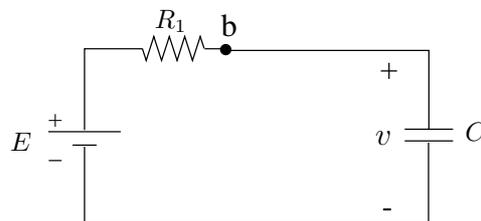


FIG. 3.4

Si on laissait l'interrupteur en position b indéfiniment, le condensateur se chargerait à la valeur de $E = 400 \text{ V}$.

La constante de temps du circuit vaut :

$$\tau_1 = R_1 C = 10^5 \cdot 10^{-7} = 0.01 \text{ s} = 10 \text{ ms} .$$

L'expression de $v(t)$ est donc :

$$v(t) = E (1 - e^{-t/\tau_1}) = 400 (1 - e^{-100t}) \text{ V} , \quad 0 \leq t \leq 15 \text{ ms} .$$

La valeur de la tension en $t = 15 \text{ ms}$ est :

$$v(t = 15 \cdot 10^{-3}) = 400 (1 - e^{-1.5}) = 310.75 \text{ V} .$$

2. Période $t \geq 15 \text{ ms}$

L'interrupteur bascule en position c . Le circuit devient celui de la Fig. 3.5 avec le condensateur C initialement chargé à la tension $v_0 = 310.75 \text{ V}$.

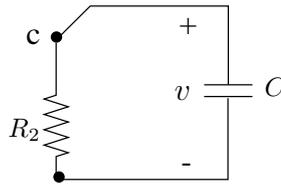


FIG. 3.5

Le condensateur se décharge dans la résistance R_2 . La constante de temps caractérisant cette décharge est :

$$\tau_2 = R_2 C = 50 \cdot 10^3 \cdot 10^{-7} = 0.005 \text{ s} = 5 \text{ ms} .$$

La tension v aux bornes de C s'écrit alors :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 e^{-(t-0.015)/\tau_2} \\ &= 310.75 e^{-200(t-0.015)} , \quad t \geq 15 \text{ ms} . \end{aligned}$$

Remarquons qu'il importe de changer l'origine des temps dans l'expression de v ; la valeur initiale $v_0 = 310.75$ se produisant à l'instant $t = 15 \text{ ms}$. On remplace donc dans l'expression générale de la tension de décharge du condensateur t par $t' = t - 0.015$.

3. Tracé de $v(t)$

L'évolution de la tension v est représentée à la Fig. 3.6.

4. Instants auxquels $v = 200 \text{ V}$

D'après le diagramme de la Fig. 3.6, on remarque que v atteint 200 V à la fois dans la période de charge ($0 \leq t \leq 0.015$) et dans la période de décharge ($t \geq 0.015$).

– période de charge : il faut

$$\begin{aligned} 400 - 400 e^{-100t_1} &= 200 \\ e^{-100t_1} &= 0.5 \\ t_1 &= \frac{\ln 0.5}{-100} = 6.93 \text{ ms} \end{aligned}$$

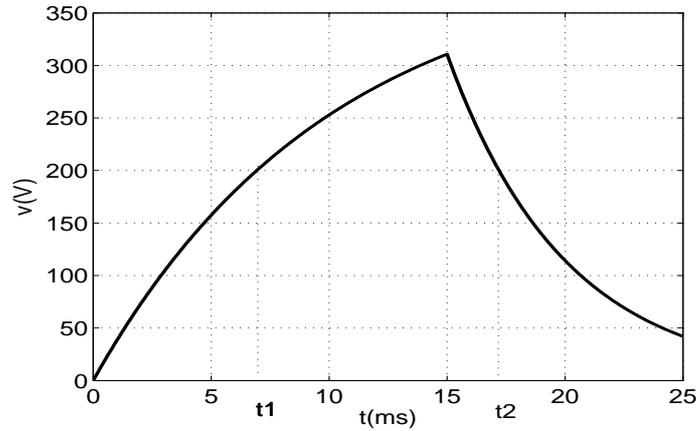


FIG. 3.6

– période de décharge : il faut

$$\begin{aligned}
 310.75 e^{-200(t_2-0.015)} &= 200 \\
 e^{-200t_2} &= \frac{200}{310.75 e^3} = 0.03204 \\
 t_2 &= 17.2 \text{ ms} .
 \end{aligned}$$

Exercice 3.4

1. Schéma équivalent de Thévenin vu des bornes de la capacité

Réduisons tout d'abord le circuit à droite de la capacité à son schéma équivalent de Thévenin. Ce circuit ne comporte pas de source indépendante et donc le schéma équivalent de Thévenin se réduit à la seule résistance de Thévenin.

On impose une tension de 1V à l'accès comme indiqué à la Fig. 3.7 et on dérive successivement :

$$\begin{aligned}
 i_1 &= \frac{1}{R_1} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4} \text{ A} \\
 i_\Delta &= \frac{1}{2 \cdot 10^4} = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ A}
 \end{aligned}$$

et par application de la PLK :

$$\begin{aligned}
 i &= 10^{-4} + 0.5 \cdot 10^{-4} - 7 \cdot (0.5) \cdot 10^{-4} \\
 &= -2 \cdot 10^{-4} \text{ A} .
 \end{aligned}$$

On déduit :

$$R_{Th} = \frac{1}{-2 \cdot 10^{-4}} = -5 \text{ k}\Omega .$$

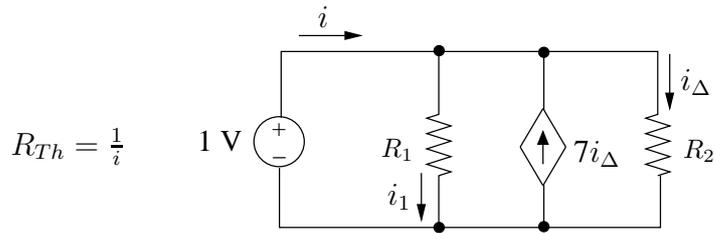


FIG. 3.7

2. Expression de $v(t)$ aux bornes de condensateur

Le circuit se réduit au circuit RC de la Fig. 3.8 avec $v(0) = v_0 = 10 \text{ V}$.

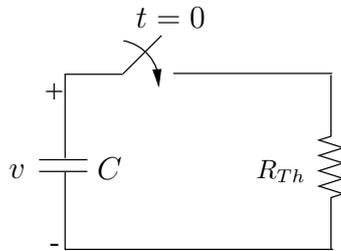


FIG. 3.8

La résistance équivalente de Thévenin présente une valeur négative suite à la présence de la source commandée. Le circuit est un circuit actif qui n'est pas nécessairement stable. En conséquence, la constante de temps du circuit sera elle aussi négative, ce qui implique que la tension v aux bornes de C sera croissante.

Ecrivons l'équation différentielle qui gouverne la tension v , dérivée de l'expression de la PLK. :

$$\begin{aligned}
 C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R_{Th}} &= 0 \\
 (5.10^{-6}) \frac{dv}{dt} - \frac{v}{5.10^3} &= 0 \\
 \frac{dv}{dt} - 40v &= 0.
 \end{aligned}$$

La solution de cette équation s'écrit :

$$\begin{aligned}
 v &= v_0 e^{40t} \text{ avec } v_0 = v(0) = 10 \text{ V} \\
 &= 10 e^{40t} \text{ V}, t \geq 0.
 \end{aligned}$$

3. Instant où l'on court-circuite C

La capacité court-circuite lorsque v atteint 150 V soit pour $t = t_1$ tel que :

$$10 e^{40t_1} = 150$$

$$t_1 = \frac{\ln 15}{40} = 67.7 \text{ ms}$$

4. Tracé de $v(t)$

L'évolution de la tension v est représentée à la Fig. 3.9.

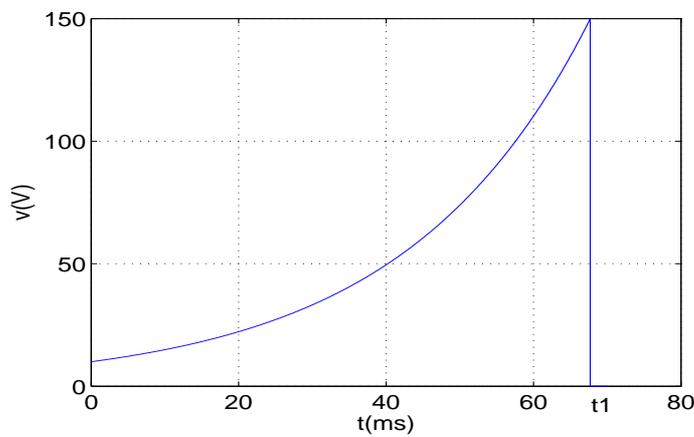


FIG. 3.9

Exercice 3.5

On recherche la réponse libre avec les conditions initiales :

$$u_1(0) = u_{10} = 2 \text{ V}$$

$$u_2(0) = u_{20} = 5 \text{ V}$$

comme indiqué à la Fig. 3.10.

La PLK écrite aux noeuds a et b fournit :

$$C_1 \frac{du_1}{dt} + \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_1 - u_2}{R_2} = 0 \tag{3.1}$$

$$C_2 \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2 - u_1}{R_2} = 0 \tag{3.2}$$

Il faut résoudre cet ensemble de 2 équations différentielles à 2 inconnues u_1 et u_2 . De (3.2), on tire :

$$u_1 = R_2 C_2 \frac{du_2}{dt} + u_2 \tag{3.3}$$

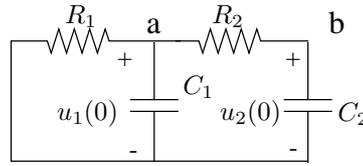


FIG. 3.10

Remplaçant dans (3.1), on déduit l'équation différentielle pour u_2 :

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \frac{du_2}{dt} + \frac{u_2}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 0 .$$

La solution générale de cette équation différentielle à coefficients constants s'écrit :

$$u_2(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

avec s_1, s_2 les solutions de l'équation caractéristique :

$$s^2 + \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) s + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2} = 0 .$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right)^2 - \frac{4}{R_1 R_2 C_1 C_2} .$$

Il peut aussi s'écrire :

$$\Delta = \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_2 C_1} - \frac{1}{R_1 C_1} \right)^2 + \frac{4}{R_1 R_2 C_1^2} > 0 .$$

On remarque que ce discriminant ne peut être négatif. Les solutions de l'équation caractéristique sont donc 2 nombres réels quelles que soient les valeurs des éléments R_1, R_2, C_1, C_2 . La réponse libre de tout circuit RC est donc toujours de type apériodique ; elle ne peut être de forme oscillante.

Les racines de l'équation caractéristique, ou fréquences naturelles du circuit, sont donc :

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2 C_2} + \frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4}} .$$

On remarque que lorsque les éléments sont passifs ($R_1, R_2, C_1, C_2 > 0$), ces racines sont 2 nombres négatifs, la réponse libre s'atténue donc avec le temps (circuit stable).

Remplaçant par les valeurs numériques, on trouve :

$$s_1 = -0.63 \quad \text{et} \quad s_2 = -6.37 .$$

De (3.3), on déduit l'expression de la tension u_1 :

$$\begin{aligned} u_1 &= (R_2 C_2 s_1 + 1) K_1 e^{-0.63t} + (R_2 C_2 s_2 + 1) K_2 e^{s_2 t} \\ &= 0.84 K_1 e^{-0.63t} - 0.59 K_2 e^{-6.37t} . \end{aligned}$$

Les constantes K_1 et K_2 se déduisent des conditions initiales pour u_1 et u_2 . On a :

$$\begin{aligned} u_1(0) &= u_{10} = 2 = 0.84 K_1 - 0.59 K_2 \\ u_2(0) &= u_{20} = 5 = K_1 + K_2 . \end{aligned}$$

On trouve :

$$K_1 = 3.46 \quad \text{et} \quad K_2 = 1.54 .$$

Finalement, les expressions de u_1 et u_2 sont :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 2.9 e^{-0.63t} - 0.91 e^{-6.37t} \text{ V} \\ u_2(t) &= 3.46 e^{-0.63t} - 1.54 e^{-6.37t} \text{ V} . \end{aligned}$$

Exercice 3.6

De l'expression de $v(t)$:

$$v(t) = D_1 t e^{-4000t} + D_2 e^{-4000t} , \quad t \geq 0 ,$$

on déduit que :

- le régime est un régime apériodique critique
- l'équation caractéristique relative à l'équation différentielle qui caractérise v admet une racine double :

$$s_1 = -4000 .$$

Recherchons cette équation différentielle. La PLK écrite pour le circuit de la Fig. 3.11 fournit :

$$\begin{aligned} i_R + i_L + i_C &= 0 \\ \frac{v}{R} + \frac{1}{L} \int_0^t v(x) dx + i_0 + C \frac{dv}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

Dérivant cette relation, on trouve :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v = 0 .$$

L'équation caractéristique correspondante est :

$$s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC} = 0 .$$

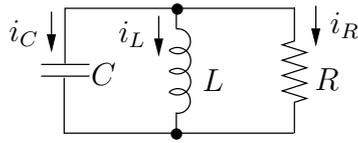


FIG. 3.11

Ses racines peuvent se mettre sous la forme :

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{2RC}, \text{ le coefficient d'amortissement}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \text{ la fréquence de résonance du circuit.}$$

Dans le cas considéré ici, nous avons :

$$s_1 = s_2 = -\alpha .$$

soit

$$4000 = \frac{1}{2RC} .$$

Nous savons que le discriminant de l'équation caractéristique est nul et donc que :

$$\alpha^2 - \omega_0^2 = \left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0$$

ou en remplaçant les valeurs numériques connues :

$$(4000)^2 - \frac{1}{5C} = 0 .$$

On déduit la valeur de la capacité :

$$C = \frac{1}{5 \cdot (4000)^2} = 12.5 \text{ nF}$$

et comme

$$\frac{1}{2RC} = 4000 ,$$

on déduit la valeur de la résistance

$$R = \frac{1}{2 \cdot 12.5 \cdot 10^{-9} \cdot 4000} = 10 \text{ k}\Omega .$$

Les conditions initiales fournissent :

$$v(0) = v_0 = v(t)|_{t=0} = D_2 .$$

Dès lors,

$$D_2 = 25 \text{ V} .$$

D'autre part, la continuité du courant dans l'inductance impose :

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = i_0 = 5 \text{ mA} .$$

Or

$$i_C(0^+) = -i_R(0^+) - i_L(0^+)$$

avec

$$i_C(0^+) = C \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = C (D_1 - 4000 D_2)$$

$$i_R(0^+) = \frac{v_0}{R}$$

$$i_L(0^+) = i_0$$

$$\begin{aligned} D_1 &= -\frac{v_0}{RC} - \frac{i_0}{C} + 4000 v_0 \\ &= -3.2 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

et nalement

$$v(t) = -3.2 \cdot 10^5 t e^{-4000t} + 25 e^{-4000t} .$$

Exercice 3.7

1. Période $t < 0$

Le circuit considéré se réduit à celui de la Fig. 3.12

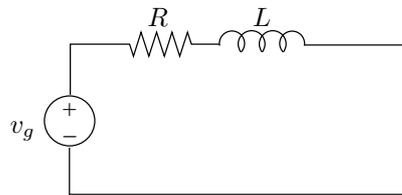


FIG. 3.12

Le régime est établi et l'inductance est parcourue par un courant :

$$i_{L0} = \frac{v_g}{R} .$$

La tension à ses bornes est nulle.

2. Période $t \geq 0$

Le circuit devient celui de la Fig. 3.13.

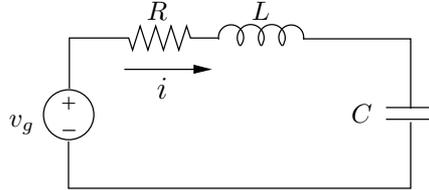


FIG. 3.13

Les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned} v_{C0} &= 0 \\ i_{L0} &= \frac{v_g}{R}. \end{aligned}$$

La réponse du circuit est oscillatoire amortie. Le courant i parcourant le circuit peut donc s'écrire :

$$i(t) = A e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \text{ A}, \quad t \geq 0$$

avec α , l'amortissement, égal à $R/2L$ et ω_d , la fréquence d'oscillation.

Les constantes A et B sont xées par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} i(t=0) &= i_{L0} = \frac{v_g}{R} = A \\ v_C(t=0) &= 0. \end{aligned}$$

Par application de la SLK, on écrit :

$$v_C(t) = v_g - Ri - L \frac{di}{dt}.$$

En $t = 0$, on a :

$$v_g = Ri + L \frac{di}{dt}$$

soit

$$\begin{aligned} v_g &= RA - A\alpha L + BL\omega_d \\ &= v_g - \frac{v_g}{R} \alpha L + BL\omega_d. \end{aligned}$$

On déduit :

$$B = \frac{v_g}{R} \cdot \frac{R}{2L} \cdot L \cdot \frac{1}{L\omega_d} = \frac{v_g}{2L\omega_d}$$

et

$$i(t) = \frac{v_g}{R} e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + \frac{v_g}{2L\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \text{ A}, \quad t \geq 0.$$

On déduit finalement l'expression de $v_0(t)$:

$$\begin{aligned}
 v_0(t) &= L \frac{di}{dt} \\
 &= -\frac{v_g}{R} \cdot \frac{R}{2L} \cdot L e^{-\alpha t} \cos \omega_d t - \frac{v_g}{R} L \omega_d e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \\
 &\quad - \frac{v_g}{2L\omega_d} L \alpha e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + \frac{v_g L}{2L\omega_d} \omega_d e^{-\alpha t} \cos \omega_d t \\
 &= -v_g \left(\frac{L\omega_d}{R} + \frac{\alpha}{2\omega_d} \right) e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \\
 &= -v_g \left(\frac{\omega_d}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2\omega_d} \right) e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \text{ V, } t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Exercice 3.8

Rappel. Formalisme opérationnel

1. Schéma opérationnel du circuit

Appliquant les transformations rappelées ci-dessus, le circuit peut être représenté par le schéma opérationnel de la Fig. 3.14. L'interrupteur k se ferme en $t = 0$, le signe temporel $e(t)$ est donc de la forme $e(t) = E \cdot 1(t)$ et sa transformée de Laplace est $E(s) = E/s$.

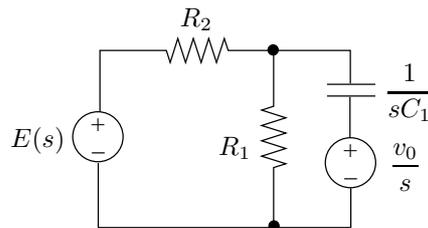
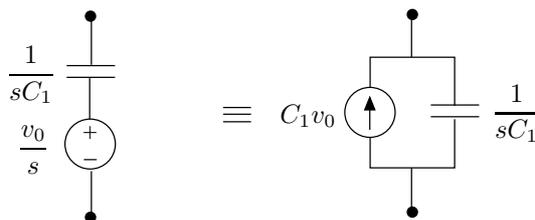


FIG. 3.14

Par la transformation de source



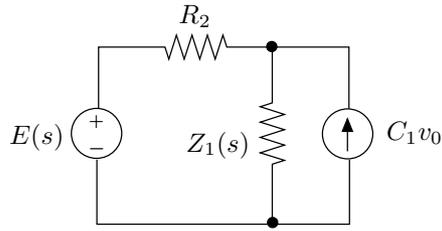


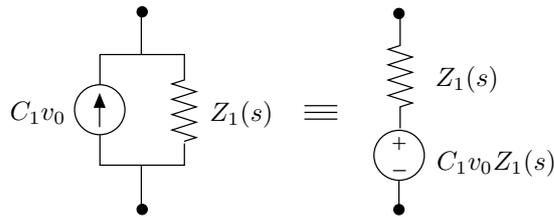
FIG. 3.15

le circuit se transforme comme indiqué sur la Fig. 3.15.

$Z_1(s)$ représente l'impédance du dipôle parallèle $R_1 C_1$:

$$Z_1(s) = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + sC_1} = \frac{R_1}{1 + sC_1 R_1}$$

Finalement, par la transformation de source suivante



le circuit devient celui de la Fig. 3.16.

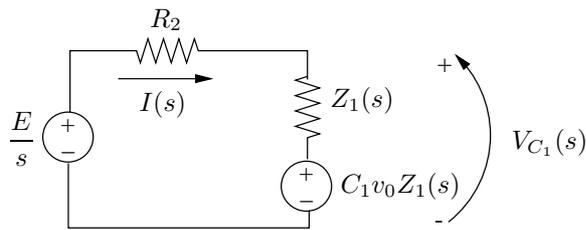


FIG. 3.16

2. Détermination de $V_{C_1}(s)$

On déduit le courant $I(s)$:

$$I(s) = \left(\frac{E}{s} - C_1 v_0 Z_1(s) \right) \frac{1}{R_2 + Z_1(s)}$$

et la tension $V_{C_1}(s)$:

$$\begin{aligned} V_{C_1}(s) &= (I(s) + C_1 v_0) Z_1(s) \\ &= \frac{E}{s} \cdot \frac{Z_1}{R_2 + Z_1} + \frac{v_0 R_2 C_1 Z_1}{R_2 + Z_1}. \end{aligned}$$

Après quelques manipulations, on trouve :

$$\begin{aligned} V_{C_1}(s) &= \frac{E}{s} \cdot \frac{R_1}{s C_1 R_1 R_2 + R_1 + R_2} + \frac{v_0 C_1 R_1 R_2}{s C_1 R_1 R_2 + R_1 + R_2} \\ &= \frac{E}{C_1 R_2} \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{R_1 + R_2}{C_1 R_1 R_2} \right)} + \frac{v_0}{s + \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1}}. \end{aligned}$$

Ce circuit possède une fréquence naturelle :

$$s_1 = -\frac{R_1 + R_2}{C_1 R_1 R_2} = -\frac{1}{\tau}.$$

τ est la constante de temps de ce circuit. Elle peut s'exprimer par :

$$\tau = (R_1 // R_2) \cdot C = R_{eq} \cdot C.$$

A ce stade, on peut vérifier les valeurs initiale et finale de la tension $v_{C_1}(t)$.

– *Valeur initiale* :

par application du théorème de la valeur initiale :

$$v_{C_1}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s V_{C_1}(s) = v_0.$$

Ce résultat était bien évidemment attendu puisque la tension aux bornes du condensateur ne peut subir de discontinuité.

– *Valeur finale* :

par application du théorème de la valeur finale (applicable puisque $s V_{C_1}(s)$ possède tous ses pôles à gauche de $j\omega$) :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} v_{C_1}(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} s V_{C_1}(s) \\ &= E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \end{aligned}$$

Lorsque le régime transitoire est amorti, le circuit fonctionne en régime continu établi. C_1 s'oppose au passage du courant ; il peut être vu comme un "circuit ouvert" comme indiqué à la Fig. 3.17

3. Détermination de $v_{C_1}(t)$

On décompose $V_{C_1}(s)$ en fractions simples :

$$V_{C_1}(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{v_0}{s + \frac{1}{\tau}}$$

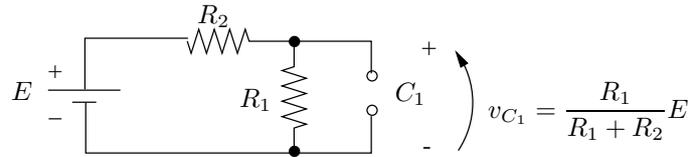


FIG. 3.17

avec

$$A = V_{C_1}(s)s|_{s=0} = E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$B = V_{C_1}(s) \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \Big|_{s=-\frac{1}{\tau}} = -E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Finalement :

$$v_{C_1}(t) = \left[E \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} (1 - e^{-t/\tau}) + v_0 e^{-t/\tau} \right] \mathbf{1}(t).$$

Exercice 3.9

Remplaçons le circuit par son schéma opérationnel, représenté à la Fig. 3.18.

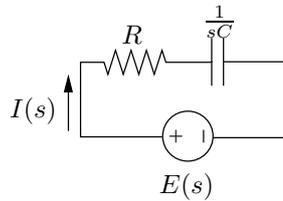
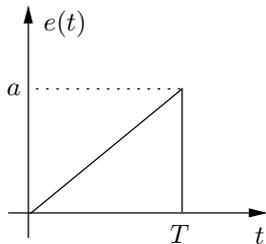


FIG. 3.18

Il faut rechercher la transformée de Laplace de la fonction $e(t)$.



$$e(t) = \frac{at}{T} \text{ pour } 0 \leq t \leq T$$

$$= 0 \text{ ailleurs}$$

$$e(t) = \frac{at}{T} (\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - T))$$

$$e(t) = \frac{at}{T} \mathbf{1}(t) - \frac{a(t - T)}{T} \mathbf{1}(t - T) - a \cdot \mathbf{1}(t - T)$$

et donc, en appliquant le théorème de décalage temporel de la transformée de Laplace :

$$E(s) = \frac{a}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{a}{T} \frac{1}{s^2} e^{-sT} - \frac{a}{s} e^{-sT}.$$

Le courant $I(s)$ est donné par :

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{E(s)}{R + \frac{1}{sC}} \\ &= E(s) \frac{1}{R} \cdot \frac{s}{s + \frac{1}{RC}} = E(s) \frac{1}{R} \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}} \end{aligned}$$

avec $\tau = RC$ la constante de temps du circuit.

Remplaçant $E(s)$ par son expression, on peut écrire :

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{R} \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}} \frac{a}{T} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{R} \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}} \frac{a}{T} \frac{1}{s^2} e^{-sT} - \frac{1}{R} \frac{s}{s + \frac{1}{\tau}} a \frac{1}{s} e^{-sT} \\ &= I_1(s) - I_2(s) - I_3(s). \end{aligned}$$

Considérons tout d'abord la fonction

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{1}{RT} \frac{a}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{\tau}} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= I_1(s) s|_{s=0} = \frac{a\tau}{RT} \\ B &= I_1(s) \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \Big|_{s=-\frac{1}{\tau}} = \frac{-a\tau}{RT}. \end{aligned}$$

L'expression temporelle de i_1 est donc :

$$i_1(t) = \frac{a\tau}{RT} (1 - e^{-t/\tau}) \mathbf{1}(t).$$

Considérons $I_2(s)$. On a :

$$I_2(s) = I_1(s) e^{-sT}.$$

Par application de la propriété de décalage temporel, on déduit :

$$\begin{aligned} i_2(t) &= i_1(t - T) \\ &= \frac{a\tau}{RT} (1 - e^{-(t-T)/\tau}) \mathbf{1}(t - T). \end{aligned}$$

Considérons en n $I_3(s)$:

$$I_3(s) = \frac{a}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} e^{-sT} .$$

Soit

$$I'_3(s) = \frac{a}{R} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} .$$

On a

$$i'_3(t) = \frac{a}{R} e^{-t/\tau} \mathbf{1}(t) .$$

Or,

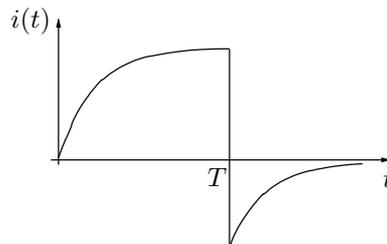
$$I_3(s) = I'_3(s) e^{-sT} .$$

Par application de la propriété de décalage temporel :

$$\begin{aligned} i_3(t) &= i'_3(t - T) \\ &= \frac{a}{R} e^{-(t-T)/\tau} \mathbf{1}(t - T) . \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{a\tau}{RT} \left((1 - e^{-t/\tau}) \mathbf{1}(t) - (1 - e^{-(t-T)/\tau}) \mathbf{1}(t - T) \right) - \frac{a}{R} e^{-(t-T)/\tau} \mathbf{1}(t - T) \\ i(t) &= \frac{a\tau}{RT} (1 - e^{-t/\tau}) \quad , \quad 0 < t \leq T \\ &= e^{-t/\tau} \left(\frac{a\tau}{RT} (e^{T/\tau} - 1) - \frac{a}{R} e^{T/\tau} \right) \quad , \quad t > T \end{aligned}$$



Exercice 3.10

Il faut distinguer deux périodes temporelles :

- durant la période $t < 0$, le circuit fonctionne en régime sinusoïdal établi ;
- durant la période de court-circuit, $t \geq 0$, le régime est transitoire et le circuit se transforme en celui de la Fig. 3.19.

Soit i_0 , la valeur du courant circulant dans le circuit à l'instant précis du court-circuit ($t = 0$) .

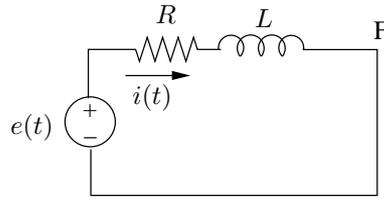


FIG. 3.19

Nous recherchons l'expression du courant $i(t)$ durant la période $t \geq 0$.

1. Recherche de $I(s)$

Durant cette période, le circuit peut être représenté par le schéma opérationnel de la Fig. 3.20 qui à son tour, par transformation de source, se transforme en celui de la Fig. 3.21.

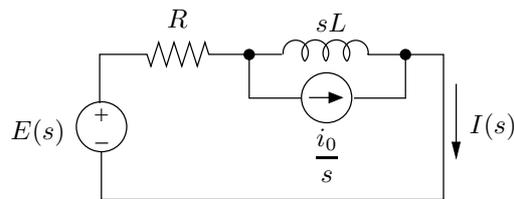


FIG. 3.20

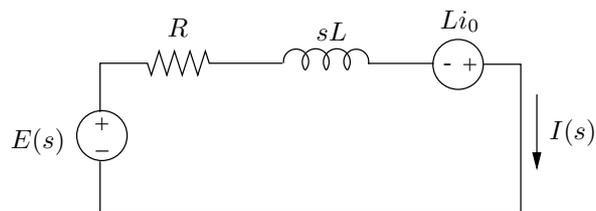


FIG. 3.21

On déduit l'expression du courant :

$$I(s) = \frac{E(s) + Li_0}{R + sL}.$$

Durant la période $t > 0$, le signal $e(t)$ prend la forme :

$$e(t) = E \sin \omega t \cdot \mathbf{1}(t)$$

et

$$E(s) = \mathcal{L}(e(t)) = \frac{\omega E}{s^2 + \omega^2}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{1}{R + sL} \frac{\omega E}{s^2 + \omega^2} + \frac{1}{R + sL} Li_0 \\ &= I_1(s) + I_2(s) \end{aligned}$$

2. Détermination de $i(t)$

- Contribution de $I_2(s)$:
on trouve directement :

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{1}{s + \frac{R}{L}} i_0 \\ \text{et } i_2(t) &= i_0 e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

avec $\tau = \frac{L}{R}$ la constante de temps du circuit ;

- contribution de $I_1(s)$:

$$I_1(s) = \frac{\omega E}{L} \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right) (s^2 + \omega^2)}$$

$I_1(s)$ possède 3 pôles :

- un pôle réel $s_0 = -\frac{1}{\tau}$
- une paire de pôles complexes conjugués

$$s_{1,2} = \pm j\omega .$$

Son développement en fractions simples s'écrit :

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{A}{s + \frac{R}{L}} + \frac{B}{s - j\omega} + \frac{C}{s + j\omega} \\ &= I_{11}(s) + I_{12}(s) \end{aligned}$$

Pour le pôle simple en $s = 0$:

$$\begin{aligned} A &= I_1(s) \left(s + \frac{R}{L} \right) \Big|_{s = -\frac{R}{L}} = \frac{\omega E}{L} \frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \\ &= \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} . \end{aligned}$$

La contribution temporelle correspondante s'écrit :

$$i_{11}(t) = \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-t/\tau} \cdot \mathbf{1}(t) .$$

Pour la paire de pôles complexes conjugués :

$$\begin{aligned} B &= I_1(s) \cdot (s - j\omega) \Big|_{s = j\omega} \\ C &= I_1(s) \cdot (s + j\omega) \Big|_{s = -j\omega} . \end{aligned}$$

$I_1(s)$ étant une fonction rationnelle à coefficients réels, on a nécessairement : $C = B^*$. La contribution temporelle correspondante s'écrit :

$$i_{12}(t) = (B e^{j\omega t} + B^* e^{-j\omega t}) \mathbf{1}(t).$$

Cette forme est correcte mais peu pratique. Il est en effet préférable de faire apparaître ces termes sous forme de signaux cosinusoidaux ou sinusoidaux. Pour cela, on adoptera la procédure générale suivante permettant de calculer directement la contribution temporelle totale d'une paire de pôles complexes conjugués.

2. Détermination de la contribution d'une paire de pôles complexes conjugués

Soit

$$s_{12} = -\alpha \pm j\omega$$

la paire de pôles complexes conjugués et soit une fonction $F(s)$ possédant cette paire de pôles complexes conjugués. Cette fonction peut s'écrire :

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \cdot F_1(s) \\ &= \frac{F_1(s)}{(s + \alpha - j\omega)(s + \alpha + j\omega)} \end{aligned}$$

ou encore

$$F(s) = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + F_1'(s).$$

$F_1'(s)$ regroupe les autres pôles de la fonction. On a :

$$\begin{aligned} A_1 &= F(s)(s - s_1)|_{s=s_1} \\ &= F(s)(s + \alpha - j\omega)|_{s=-\alpha+j\omega} \\ &= \frac{F_1(s)}{(s + \alpha + j\omega)} \Big|_{s=-\alpha+j\omega} \\ &= \frac{F_1(-\alpha + j\omega)}{2j\omega} = \frac{B_1}{2j\omega} = \frac{|B_1| e^{j\angle B_1}}{2j\omega} \\ A_2 &= A_1^* \\ &= \frac{F_1^*(-\alpha + j\omega)}{-2j\omega} = \frac{B_1^*}{-2j\omega} = \frac{|B_1| e^{-j\angle B_1}}{-2j\omega} \end{aligned}$$

La transformée inverse de $f(t)$ comprendra les termes correspondants :

$$\begin{aligned} A_1 e^{-\alpha t} e^{j\omega t} + A_1^* e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} &= \frac{|B_1|}{2j\omega} e^{-\alpha t} \left(e^{j\angle B_1} e^{j\omega t} - e^{-j\angle B_1} e^{-j\omega t} \right) \\ &= \frac{|B_1|}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \angle B_1) \end{aligned}$$

Pour calculer la contribution temporelle de la paire de pôles complexes conjugués, il suffit donc de calculer le nombre complexe

$$B_1 = F_1(s_1) = F_1(-\alpha + j\omega)$$

3. Expression de $i_{12}(t)$

Revenons à la fonction $I_1(s)$. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{\omega E}{L} \frac{1}{\left(s + \frac{R}{L}\right)(s^2 + \omega^2)} \\ &= F_1(s) \frac{1}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

avec

$$F_1(s) = \frac{\omega E}{L} \frac{1}{s + \frac{R}{L}}.$$

On calcule donc :

$$\begin{aligned} B_1 &= F_1(j\omega) \\ &= \frac{\omega E}{L} \frac{1}{j\omega + \frac{R}{L}} \\ &= \frac{\omega E}{L} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2} e^{j \arctg \frac{\omega L}{R}}} \end{aligned}$$

et la contribution temporelle de la paire de pôles $\pm j\omega$ s'écrit :

$$\begin{aligned} i_{12}(t) &= \frac{\omega E}{\omega L \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right) \cdot \mathbf{1}(t) \\ &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right) \cdot \mathbf{1}(t). \end{aligned}$$

Finalement, regroupant tous les termes, on a :

$$\begin{aligned} i(t) &= i_0 e^{-t/\tau} + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-t/\tau} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right), \quad t \geq 0 \\ &= i_{\text{libre}} + i_{\text{forcée}} \\ &= i_{\text{transitoire}} + i_{\text{établi}} \end{aligned}$$

On distingue :

- la réponse libre

$$i_{\text{libre}} = i_0 e^{-t/\tau},$$

réponse du circuit à la condition initiale i_0 ;

- la réponse forcée

$$i_{\text{forcée}} = \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-t/\tau} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right),$$

réponse du circuit à la source sinsusoïdale ;

– le régime transitoire

$$i_{\text{transitoire}} = i_0 e^{-t/\tau} + \frac{E\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} e^{-t/\tau}$$

qui s'amortit puisque le circuit est stable ;

– le régime permanent ou établi :

$$i_{\text{établi}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right) .$$

Le régime permanent ou établi est le régime sinusoïdal établi. Son expression peut être déterminée par une analyse en régime sinusoïdal établi, analyse réalisée à l'aide des phaseurs.

On a, d'après la Fig. 3.22 :

$$\bar{I} = \frac{\bar{E}}{R + j\omega L} = \frac{\bar{E}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j\arctg \frac{\omega L}{R}} \quad \text{avec} \quad \bar{E} = E \angle 0$$

et

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin \left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R} \right) .$$

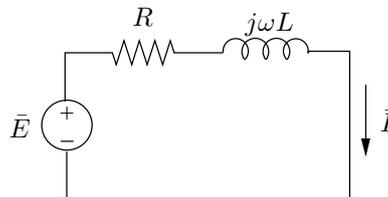


FIG. 3.22

Notons que seul le régime établi peut être calculé à partir des phaseurs. Le régime transitoire ne peut être obtenu que par une analyse transitoire réalisée soit dans le domaine temporel soit à l'aide de la transformée de Laplace.

Exercice 3.11

Il faut considérer les deux périodes temporelles suivantes :

1. $0 \leq t < t_s$, avec t_s l'instant auquel la tension $u_C(t)$ atteint 90% de la valeur nale qu'elle atteindrait si on laissait le régime s'établir, interrupteurs k_1 fermé et k_2 ouvert ;

2. $t_s \leq t < \infty$, interrupteurs k_1 ouvert et k_2 fermé.

1ère période : $0 \leq t < t_s$

Le circuit étant initialement relaxé, on a $u_C(0) = 0$. Le schéma opérationnel du circuit durant cette période est de la forme indiquée à la Fig. 3.23 avec $E(s) = \frac{E}{s}$.

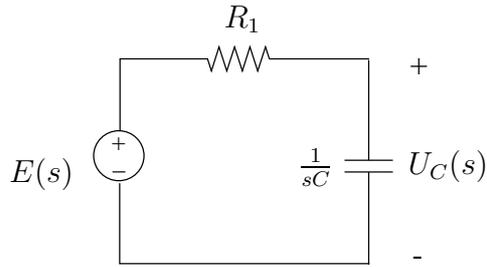


FIG. 3.23

On dérive successivement :

$$\begin{aligned} U_C(s) &= \frac{\frac{1}{sC}}{R_1 + \frac{1}{sC}} E(s) \\ &= \frac{1}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \frac{E}{s} \\ &= E \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) \end{aligned}$$

avec la constante de temps $\tau = R_1 C = 2 \cdot 10^{-3}$ s.

$$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) = 100(1 - e^{-500t})$$

Si on laissait le régime s'établir, la valeur finale atteinte par u_C serait bien entendu E . En t_s on doit donc avoir :

$$(1 - e^{-t_s/\tau}) = 0.9 \leftrightarrow t_s = -\tau \ln 0.1 = 4.6 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

2ème période : $t_s \leq t < \infty$

Appliquons le changement de variable $t' = t - t_s$.

La condition initiale du condensateur est donnée par : $u_C(t' = 0) = u_C(t_s) = 90$ V. Le schéma opérationnel du circuit durant cette période est donné à la Fig. 3.24.

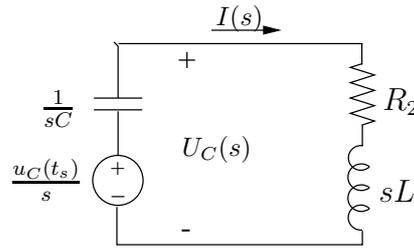


FIG. 3.24

On dérive :

$$\begin{aligned}
 I(s) &= \frac{\frac{u_C(t_s)}{s}}{R_2 + sL + \frac{1}{sC}} \\
 &= \frac{u_C(t_s)}{L} \frac{1}{s^2 + \frac{R_2}{L}s + \frac{1}{LC}} \\
 U_C(s) &= (R_2 + sL)I(s) \\
 &= u_C(t_s) \frac{s + \frac{R_2}{L}}{s^2 + \frac{R_2}{L}s + \frac{1}{LC}} \\
 &= 90 \frac{s + 2.5 \cdot 10^5}{s^2 + 2.5 \cdot 10^5 s + 25 \cdot 10^9}
 \end{aligned}$$

On vérifie les valeurs finale et initiale de $u_C(t')$:

– par application du théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t' \rightarrow 0} u_C(t') = \lim_{s \rightarrow \infty} sU_C(s) = u_C(t_s)$$

– par application du théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t' \rightarrow \infty} u_C(t') = \lim_{s \rightarrow 0} sU_C(s) = 0$$

Les pôles de $U_C(s)$ sont les racines du polynôme :

$$s^2 + 2.5 \cdot 10^5 s + 25 \cdot 10^9 = 0 \leftrightarrow s_{1,2} = -1.25 \cdot 10^5 \pm j9.68 \cdot 10^4$$

On dérive directement la contribution de ces deux pôles complexes conjugués en utilisant l'expression suivante :

$$F(s) = F_1(s) \frac{1}{(s + \alpha)^2 + \omega^2} \leftrightarrow f(t) = \frac{|F_1(s_1 = -\alpha + j\omega)|}{\omega} e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \angle F(s_1)) + f'(t)$$

où $f'(t)$ correspond à la contribution des pôles éventuels de $F_1(s)$.

On a pour $U_C(s)$

$$F_1(s) = u_C(t_s)(s + \frac{R_2}{L}) \rightarrow F(s_1) = 90(-1.25 \cdot 10^5 + j9.68 \cdot 10^4 + 2.5 \cdot 10^5) = 142.3 \cdot 10^5 \angle 0.66(\text{rad})$$

Finalement :

$$u_C(t') = 147 e^{-1.25 \cdot 10^5 t'} \sin(9.68 \cdot 10^4 t' + 0.66) \quad , \quad t' \geq 0$$

$$u_C(t) = 147 e^{-1.25 \cdot 10^5 (t - 4.6 \cdot 10^{-3})} \sin(9.68 \cdot 10^4 (t - 4.6 \cdot 10^{-3}) + 0.66) \quad , \quad t \geq t_s$$

Exercice 3.12

1ère période : $t < 0$

Le régime continu est établi. Le circuit peut se simplifier comme indiqué à la Fig. 3.25. Le courant est établi dans l'inductance, elle se comporte "comme un court-circuit" et $I_L = \frac{E}{R_1}$.

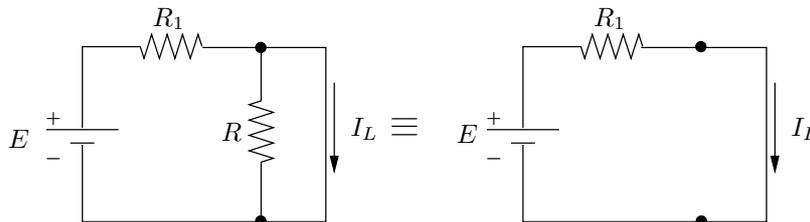


FIG. 3.25

2ème période : $t \geq 0$

En $t = 0$, l'interrupteur bascule en position 2. A cet instant, l'inductance est parcourue par un courant initial $i_0 = \frac{E}{R_1}$.

Remplaçons le circuit par le schéma opérationnel de la Fig. 3.26, valable pendant cette période temporelle. Le condensateur C est initialement relaxé.

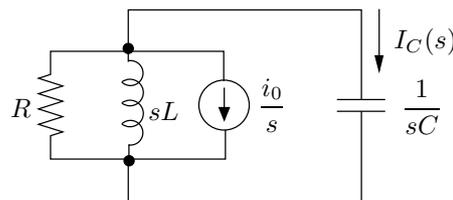


FIG. 3.26

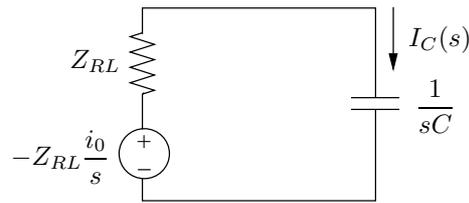


FIG. 3.27

Transformons le circuit comme indiqué à la Fig. 3.27.

Z_{RL} est l'impédance du dipôle RL parallèle.

$$\begin{aligned} Z_{RL} &= \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL}} \\ &= R \frac{s}{s + \frac{R}{L}} \end{aligned}$$

On dérive successivement :

$$\begin{aligned} I_C(s) &= -\frac{i_0}{s} Z_{RL} \cdot \frac{1}{Z_{RL} + \frac{1}{sC}} \\ &= -\frac{i_0}{s} R s \frac{sC}{RCs^2 + s + \frac{R}{L}} \\ &= -i_0 \frac{s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}} \end{aligned}$$

On peut vérifier les valeurs initiale et finale de i_C .

– Valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} i_C(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sI_C(s) = 0$$

le courant s'annule une fois le régime transitoire amorti.

– Valeur initiale :

$$i_C(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sI_C(s) = -i_0$$

le condensateur offre initialement une “résistance” nulle au passage du courant. Il se “comporte comme un court-circuit”.

Numériquement :

$$I_C(s) = \frac{-10^3 s}{s^2 + 200s + 2.10^5} \cdot$$

Cette fonction possède deux pôles :

$$s_{1,2} = -100 \pm j436.$$

La transformée inverse s'obtient en appliquant la méthode décrite aux 2 exercices précédents et permettant de calculer la contribution temporelle d'une paire de pôles complexes conjugués qui sont dans ce cas précis les seuls pôles de la fonction.

On a :

$$\begin{aligned} F_1(s) &= -10^3 s \quad \text{et} \quad s_1 = -100 + j436 \\ B_1 &= F_1(s_1) = 447.3 \cdot 10^{-3} \underline{-77.1^\circ} \end{aligned}$$

On déduit :

$$\begin{aligned} i_C(t) &= \frac{447.3 \cdot 10^{-3}}{436} e^{-100t} \sin(436t - 77.1^\circ) \mathbf{1}(t) \\ &= 1.026 \cdot 10^{-3} e^{-100t} \sin(436t - 77.1^\circ) \mathbf{1}(t) \end{aligned}$$

Exercice 3.13

Il faut distinguer les deux périodes temporelles suivantes.

1. Période de lancement du moteur $0 \leq t \leq t_d$.

Durant cette période, la résistance de démarrage R_d est insérée dans le circuit, l'interrupteur ℓ est ouvert. On observe l'évolution du courant jusqu'à ce que celui-ci tombe sous 15 A. Soit t_a cet instant. On attend 0.05 s avant de mettre la résistance R_d hors circuit et de fermer l'interrupteur ℓ . On a

$$t_d = t_a + 0.05 .$$

2. Résistance de démarrage hors service : $t > t_d$

1ère période : $0 \leq t < t_d$

Durant cette période, on remplace le circuit par le schéma opérationnel de la Fig. 3.28, avec :

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{E}{s} \\ E_1(s) &= \frac{100}{s} - \frac{100}{s + \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

On dérive successivement :

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{E(s) - E_1(s)}{R + R_d + sL} \\ &= \frac{1}{s + 4} \left(\frac{15}{s} + \frac{100}{s + \frac{2}{3}} \right) \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 4} + \frac{C}{s + \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

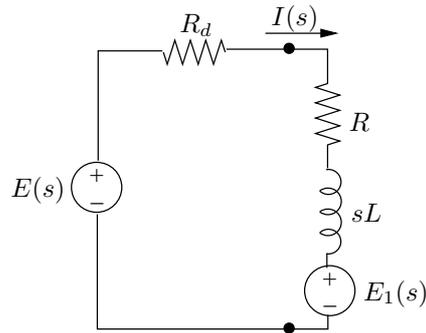


FIG. 3.28

avec

$$\begin{aligned}
 A &= I(s) s|_{s=0} = 3.75 \\
 B &= I(s) (s + 4)|_{s=-4} = -33.75 \\
 C &= I(s) \left(s + \frac{2}{3}\right) \Big|_{s=-\frac{2}{3}} = 30.
 \end{aligned}$$

On déduit :

$$i(t) = 3.75 - 33.75 e^{-4t} + 30 e^{-\frac{2}{3}t}, \quad 0 \leq t < t_a.$$

On vérifie que l'on a bien $i(0^+) = 0$ (continuité du courant dans l'inductance initialement relaxée).

On recherche t_a tel que $i(t_a) = 15 \text{ A}$. L'allure du courant $i(t)$ est représentée à la Fig. 3.29.

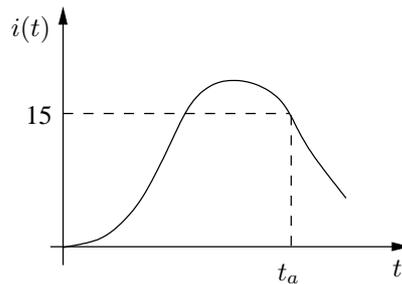


FIG. 3.29

Il faut résoudre l'équation non linéaire :

$$3.75 - 33.75 e^{-4t} + 30 e^{-\frac{2}{3}t} - 15 = 0 \equiv f(t) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} i(0) &= 0 \\ i(1) &= 18.53 \\ i(2) &= 11.65 \end{aligned}$$

La solutions cherchée se trouve entre 1 et 2. On peut soit procéder par recherche dichotomique en divisant à chaque pas l'intervalle encadrant la solution par 2, soit appliquer la méthode de Newton. Celle-ci s'consiste à calculer la suite de points

$$t^{(k+1)} = t^{(k)} - \frac{f(t^{(k)})}{f'(t^{(k)})} \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

jusqu'à ce que $|f(t^{(k)})| < \epsilon$, où ϵ est une tolérance.

Soit $t^{(0)} = 1$, on a :

$$f'(t) = 135 e^{-4t} - 20 e^{-\frac{2}{3}t}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} t^{(1)} &= t^{(0)} - \frac{f(t^{(0)})}{f'(t^{(0)})} = 1.453 \\ t^{(2)} &= t^{(1)} - \frac{f(t^{(1)})}{f'(t^{(1)})} = 1.458 \end{aligned}$$

On a $f(t^{(2)}) = 8 \cdot 10^{-4}$. On juge la précision suffisante et $t_a = t^{(2)} = 1.458$ s. Dès lors :

$$t_d = 1.458 + 0.05 = 1.508 \text{ s}$$

A cet instant, le courant parcourant le circuit vaut $i(1.508) = 14.647$ A .

2ème période : $t \geq t_d$

Durant cette période, le circuit est représenté par le schéma opérationnel de la Fig. 3.30.

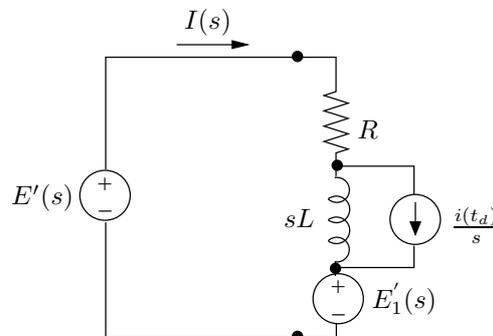


FIG. 3.30

A l'instant de basculement t_d , l'inductance est parcourue par le courant $i(t_d)$. Fixons une nouvelle origine des temps en $t = t_d$. Pour cela, on introduit le changement de variable

$$t' = t - t_d .$$

Les excitations e et e_1 s'écrivent pour la période $t > t_d$:

$$\begin{aligned} e'(t') &= e(t) \cdot \mathbf{1}(t - t_d) \\ &= 115 \cdot \mathbf{1}(t') \\ e'_1(t') &= e_1(t) \cdot \mathbf{1}(t - t_d) \\ &= e_1(t' + t_d) \mathbf{1}(t') \\ &= 100 \left(1 - e^{-(t'+t_d) \cdot \frac{2}{3}} \right) \mathbf{1}(t') \\ &= 100 \left(1 - e^{-\frac{2}{3}t'} \cdot e^{-\frac{2}{3}t_d} \right) \mathbf{1}(t') \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} E'(s) &= \frac{115}{s} \\ E'_1(s) &= \frac{100}{s} - \frac{100}{s + \frac{2}{3}} e^{-\frac{2}{3}t_d} . \end{aligned}$$

On pourra se convaincre que les opérations ci-dessus sont équivalentes à l'application de la propriété de décalage temporel vers la gauche de la transformée unilatérale de Laplace (avance temporelle) comme illustré à la Fig. 3.31.

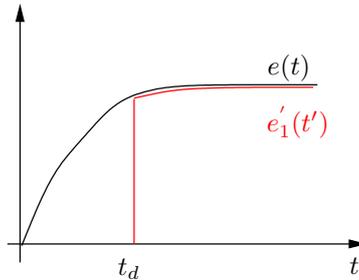


FIG. 3.31

On calcule pour cette période temporelle :

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{E'(s) + Li(t_d) - E'_1(s)}{s + 2} \\ &= \frac{1}{s + 2} \left(\frac{15}{s} + \frac{100 e^{-\frac{2}{3}t_d}}{s + \frac{2}{3}} + 14.647 \right) \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 2} + \frac{C}{s + \frac{2}{3}} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 A &= I(s) s|_{s=0} = 7.5 \\
 B &= I(s) (s + 2)|_{s=-2} = -20.297 \\
 C &= I(s) \left(s + \frac{2}{3} \right) \Big|_{s=-\frac{2}{3}} = \frac{100 e^{-\frac{2}{3}t_d}}{-\frac{2}{3} + 2} = 27.44 .
 \end{aligned}$$

Le courant, exprimé selon la nouvelle variable temporelle t' , s'écrit :

$$i(t') = 7.5 - 20.297 e^{-2t'} + 27.44 e^{-\frac{2}{3}t'} , \quad t' > 0$$

où, en fonction de t , en remplaçant t' par $t - t_d$:

$$\begin{aligned}
 i(t) &= 7.5 - 20.297 e^{-2(t-t_d)} + 27.44 e^{-\frac{2}{3}(t-t_d)} , \quad t > t_d \\
 &= 7.5 - 414.25 e^{-2t} + 75 e^{-\frac{2}{3}t} , \quad t > t_d
 \end{aligned}$$

Si la résistance de démarrage n'était pas insérée dans le circuit, le courant, pour toute la période temporelle $t \geq 0$, s'obtiendrait comme suit :

$$\begin{aligned}
 I'(s) &= \frac{1}{s + 2} \left(\frac{15}{s} + \frac{100}{s + \frac{2}{3}} \right) \\
 \text{et } i'(t) &= 7.5 - 82.5 e^{-2t} + 75 e^{-\frac{2}{3}t} , \quad t \geq 0
 \end{aligned}$$

La Fig. 3.32 compare les 2 courants $i(t)$ et $i'(t)$ et montre l'influence de la résistance R_d qui permet de limiter l'amplitude du courant dans les premiers instants qui suivent le démarrage du moteur.

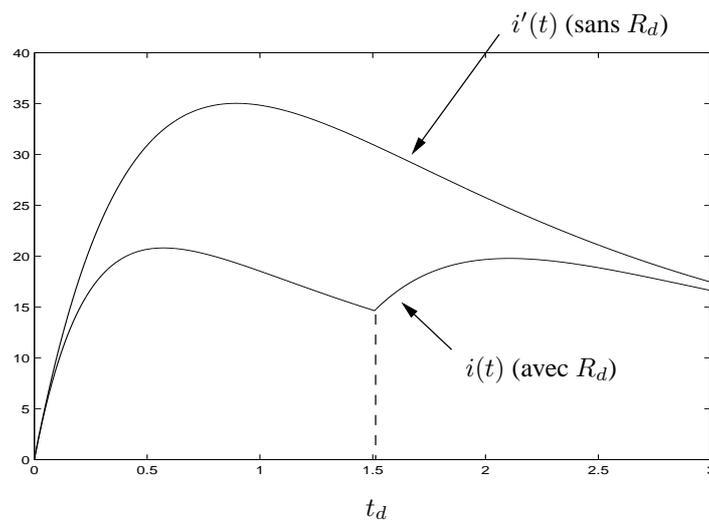


FIG. 3.32

Exercice 3.14

1ère période : $t < 0$

Le régime continu est établi. Le circuit peut se simplifier comme indiqué à la Fig. 3.33. Le courant est établi dans l'inductance et $I = \frac{20}{R} = 10$ A.

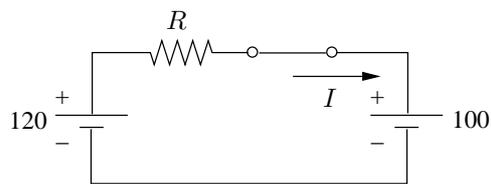


FIG. 3.33

2ème période : $0 \leq t \leq t_d$

Durant cette période :

- la valeur initiale du courant parcourant l'inductance est $i_0 = I = 10$ A ;
- la source e_2 reste constante durant toute la période et $E_2(s) = \frac{100}{s}$;
- la source e_1 décroît selon $120 e^{-10t}$ et $E_1(s) = \frac{120}{s+10}$.

Le schéma opérationnel du circuit durant cette période est représenté à la Fig. 3.34.

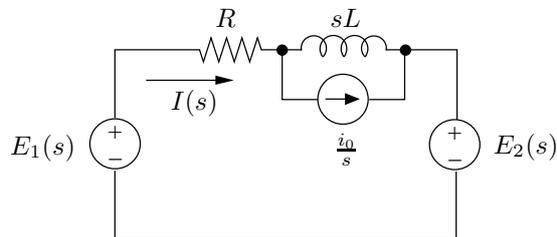


FIG. 3.34

On écrit :

$$E_1(s) = E_2(s) - Li_0 + (R + sL) I(s) .$$

On déduit :

$$\begin{aligned}
 I(s) &= \frac{E_1(s) - E_2(s) + Li_0}{R + sL} \\
 &= \left(\frac{120}{s+10} - \frac{100}{s} + 5 \right) \frac{1}{0.5s+2} \\
 &= \frac{240}{(s+4)(s+10)} - \frac{200}{s(s+4)} + \frac{10}{s+4} \\
 &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s+10}
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 A &= I(s)s|_{s=0} = -50 \\
 B &= I(s)(s+4)|_{s=-4} = 100 \\
 C &= I(s)(s+10)|_{s=-10} = -40
 \end{aligned}$$

$$i(t) = (100e^{-4t} - 50 - 40e^{-10t}) , \quad 0 \leq t < t_d$$

Soit t_0 l'instant auquel $i(t)$ s'annule. La recherche de t_0 par la méthode de Newton fournit successivement :

$$\begin{aligned}
 f(t) &= 100e^{-4t} - 50 - 40e^{-10t} \\
 f'(t) &= -400e^{-4t} + 400e^{-10t} \\
 \text{soit } t^{(0)} &= 0.1 \\
 f(t^{(0)}) &= 2.31 \\
 f'(t^{(0)}) &= -120.97 \\
 t^{(1)} &= t^{(0)} - \frac{f(t^{(0)})}{f'(t^{(0)})} = 0.119 \\
 f(t^{(1)}) &= -4.25 \cdot 10^{-2} .
 \end{aligned}$$

La précision est jugée suffisante et :

$$t_0 = 0.119 \text{ s} \quad \text{et} \quad t_d = 0.119 + 0.05 = 0.169 \text{ s}$$

3ème période : $t > t_d$

Les sources e_3 et e_2 sont constantes :

$$\begin{aligned}
 E_3(s) &= \frac{120}{s} \\
 E_2(s) &= \frac{100}{s} .
 \end{aligned}$$

La valeur initiale du courant est :

$$i(t_d) = -6.52 \text{ A} .$$

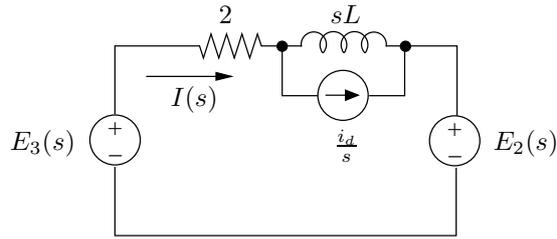


FIG. 3.35

On effectue le changement de variable $t' = t - t_d$.

Le schéma opérationnel du circuit durant cette période est celui de la Fig. 3.35.

On dérive :

$$\begin{aligned} I(s) &= 2 \frac{E_3(s) - E_2(s) + Li(t_d)}{s + 4} \\ &= \frac{1}{s + 4} \left(\frac{40}{s} - 6.52 \right) \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 4} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= I(s) s|_{s=0} = 10 \\ B &= I(s) (s + 4)|_{s=-4} = -16.52 \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} i(t') &= \left(10 - 16.52 e^{-4t'} \right), \quad t' > 0 \\ i(t) &= 10 - 16.52 e^{-4(t-t_d)}, \quad t > t_d \\ &= 10 - 32.48 e^{-4t}, \quad t > t_d \end{aligned}$$

La f.e.m. résultante appliquée au circuit ainsi que le courant i sont représentés à la Fig. 3.36.

Exercice 3.15

1ère période : $t < 0$

Le régime continu est établi :

- C_3 est chargé ; il se comporte comme "un circuit ouvert" ;

$$e(t) = e_1(t) - e_2(t) \quad 0 \leq t < t_d$$

$$e(t) = e_3(t) - e_2(t) \quad t \geq t_d$$

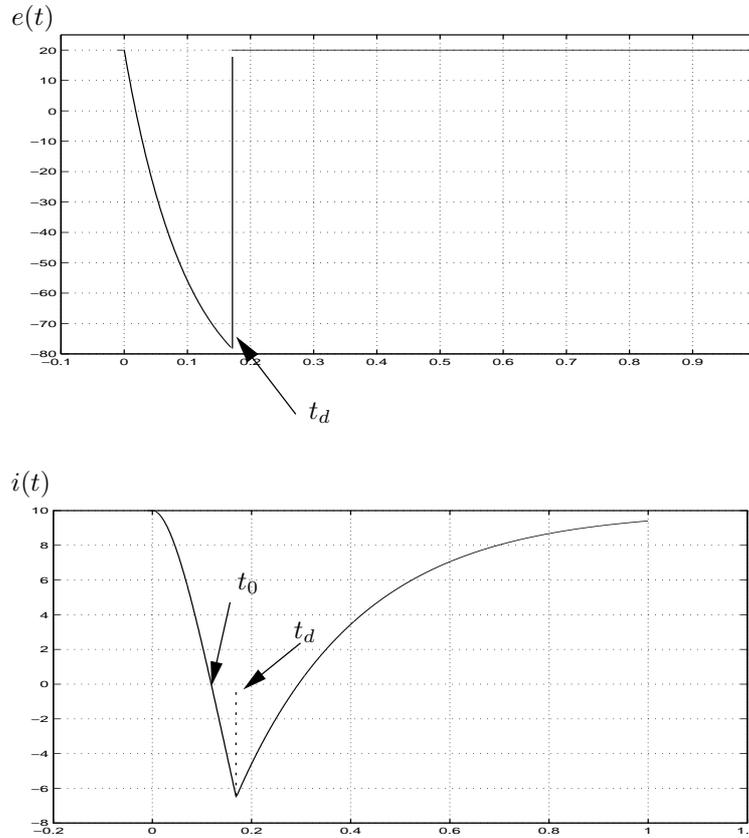


FIG. 3.36

- L_2 ne s'oppose plus au passage du courant ; elle se comporte comme "un court-circuit".

Le circuit se simplifie comme indiqué à la Fig. 3.37.

On dérive :

$$U_{C_3} = (130 + 50) \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{200} + \frac{1}{2}} = 119.6 \text{ V.}$$

Dès lors :

$$u(t) = 119.6 \quad t < 0 .$$

La valeur des courants circulant dans les inductances doit être connue pour l'étape suivante. Ils en constitueront les conditions initiales.

- Inductance L_1 :

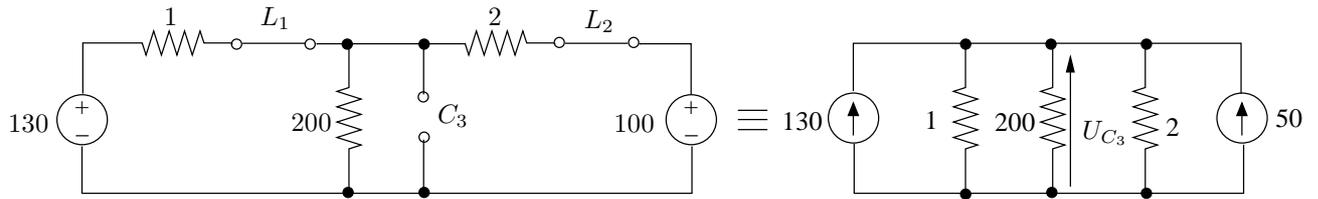
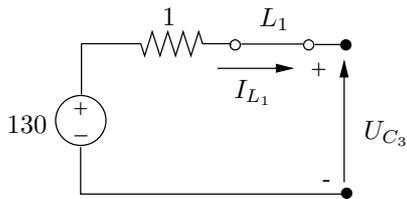
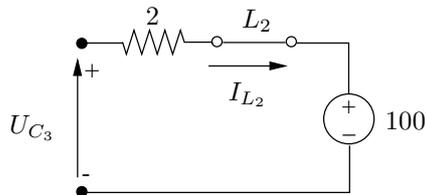


FIG. 3.37



$$I_{L_1} = \frac{130 - U_{C_3}}{1} = 10.4 \text{ A}$$

– Inductance L_2 :



$$I_{L_2} = \frac{U_{C_3} - 100}{2} = 9.8 \text{ A}$$

2ème période : $0 \leq t < 0.15 \text{ s}$

Le condensateur C_3 et la résistance R_3 sont en court-circuit. Le circuit se scinde en 3 parties.

On a évidemment durant toute cette période :

$$u(t) = 0, \quad 0 \leq t < 0.15.$$

Il est nécessaire de déterminer le régime transitoire durant le court-circuit afin de connaître les conditions initiales, en particulier le courant circulant dans les inductances, à l'instant où le court-circuit est éliminé.

A. *Partie gauche du circuit et inductance L_1*

Le schéma opérationnel de la partie gauche du circuit est représenté à la Fig. 3.38.

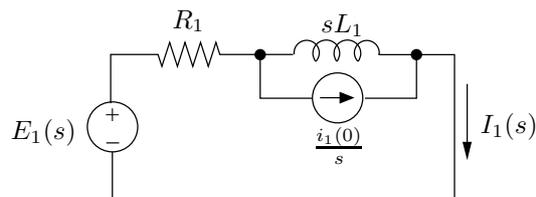


FIG. 3.38

On dérive :

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \frac{E_1(s) + L_1 i_1(0)}{R_1 + sL_1} \\ &= \left(\frac{520}{s} + 104 \right) \frac{1}{s + 4} \\ &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 4} \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= I_1(s) s|_{s=0} = 130 \\ B &= I_1(s) (s + 4)|_{s=-4} = -119.6 \end{aligned}$$

Finalement

$$i_1(t) = 130 - 119.6 e^{-4t}, \quad 0 \leq t < 0.15.$$

On vérifie que l'on a bien $i_1(0) = 10.4$ A.

A l'instant où le court-circuit est éliminé, en $t = 0.15$ s :

$$i_1(0.15) = 64.36 \text{ A}.$$

B. Partie droite du circuit et inductance L_2

Le schéma opérationnel de la partie droite du circuit est représenté à la Fig. 3.39.

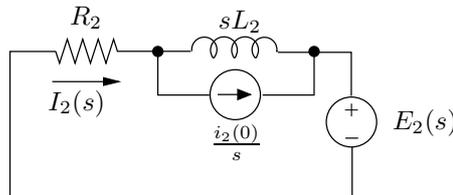


FIG. 3.39

On dérive :

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{L_2 i_2(0) - E_2(s)}{R_2 + sL_2} \\ &= \frac{-200}{s(s + 4)} + \frac{9.8}{s + 4} \\ &= \frac{-50}{s} + \frac{50}{s + 4} + \frac{9.8}{s + 4} \end{aligned}$$

et

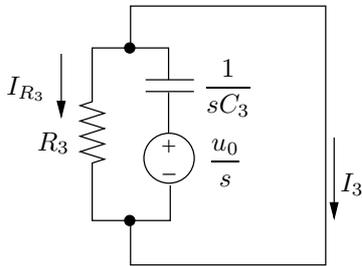
$$i_2(t) = -50 + 59.8 e^{-4t}, \quad 0 \leq t \leq 0.15.$$

On vérifie que l'on a bien $i_2(0) = 9.8 \text{ A}$. En $t = 0.15 \text{ s}$:

$$i_2(0.15) = -17.18 \text{ A} .$$

C. Partie centrale du circuit et condensateur C_3

La résolution de cette partie n'est pas strictement nécessaire pour la solution au problème demandé. Néanmoins, il est intéressant de déterminer ce qui se passe au niveau du condensateur C_3 court-circuité.



$I_{R_3} = 0$ puisque la résistance R_3 est court-circuitée.
On a :

$$I_3(s) = sC_3 \frac{u_0}{s} = u_0 C_3$$

et $i_3(t) = u_0 C_3 \delta(t)$.

Il y a décharge instantanée du condensateur due à la variation brusque de la tension à ses bornes. Si on tenait compte de la faible résistance du court-circuit, la décroissance de u ne serait plus instantanée mais très rapide.

Le courant total circulant dans le court-circuit est :

$$i_1 + i_3 - i_2 .$$

3ème période : $t \geq 0.15 \text{ s}$

Le schéma opérationnel du circuit pour cette période est donné à la Fig. 3.40.

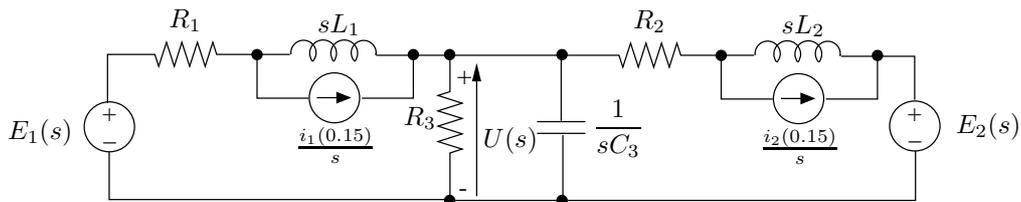


FIG. 3.40

Celui-ci se transforme aisément en celui de la Fig. 3.41 avec :

$$\begin{aligned} J_1(s) &= \frac{E_1(s) + L_1 i_1(0.15)}{R_1 + sL_1} \\ Z_1 &= R_1 + sL_1 \\ J_2(s) &= \frac{E_2(s) + L_2 i_2(0.15)}{R_2 + sL_2} \\ Z_2 &= R_2 + sL_2 \\ Z_3 &= \frac{1}{\frac{1}{R_3} + sC_3} . \end{aligned}$$

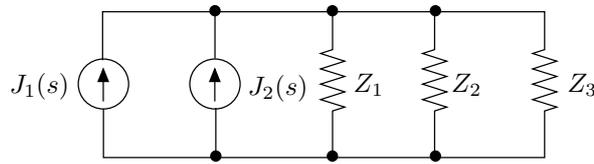


FIG. 3.41

L'admittance totale du circuit vaut :

$$\begin{aligned} Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3 \\ &= \frac{1}{R_1 + sL_1} + \frac{1}{R_2 + sL_2} + sC_3 + \frac{1}{R_3} . \end{aligned}$$

Numériquement :

$$\begin{aligned} J_1(s) &= \frac{520}{s(s+4)} + \frac{64.36}{s+4} \\ J_2(s) &= \frac{200}{s(s+4)} + \frac{17.18}{s+4} \\ Y &= 5 \cdot 10^{-3} + 10^{-5}s + \frac{6}{s+4} \\ \text{et } U(s) &= (J_1(s) + J_2(s)) \cdot \frac{1}{Y} \\ &= \frac{(720 + 81.54s) 10^5}{s(s^2 + 504s + 6.02 \cdot 10^5)} = \frac{A}{s} + U'(s) . \end{aligned}$$

Les pôles de cette fonction sont :

$$\begin{aligned} s_1 &= 0 \\ s_{1,2} &= -252 \pm j 733.82 . \end{aligned}$$

Contribution du pôle $s = 0$:

$$\begin{aligned} A &= U(s) s|_{s=0} = 119.6 \\ u_1(t') &= 119.6 \cdot \mathbf{1}(t') . \end{aligned}$$

Contribution de la paire de pôles complexes conjugués :

$$\begin{aligned}
 s_1 &= -252 + j 733.82 \\
 F_1(s) &= \frac{(720 + 81.54 s) 10^5}{s} \\
 B_1 &= F_1(s_1) = 8.12 \cdot 10^6 - j 87.8 \cdot 10^3 = 8.12 \cdot 10^6 \angle -0.619^\circ \\
 u_2(t') &= \frac{8.12 \cdot 10^6}{733.82} e^{-252t'} \sin(733.82 t' - 0.62^\circ), \quad t' \geq 0
 \end{aligned}$$

Au total :

$$\begin{aligned}
 u(t') &= 119.6 + 1.107 \cdot 10^4 e^{-252t'} \sin(733.82 t' - 0.62^\circ), \quad t' \geq 0 \\
 u(t) &= 119.6 + 1.107 \cdot 10^4 e^{-252(t-0.15)} \sin(733.82 (t - 0.15) - 0.62^\circ), \quad t \geq 0.15
 \end{aligned}$$
