

**Convertisseurs
Analogique-Numérique
Numérique-Analogique**

Echantillonnage des signaux

Introduction à l'automatisme

**Oscillateurs
Quasi-sinusoïdaux**

Sommaire :

1. INTRODUCTION AUX CAN ET CNA	5
2. OUTILS MATHEMATIQUES	7
2.1. DECOMPOSITION D'UN SIGNAL PERIODIQUE EN SERIE DE FOURIER	7
2.2. SIGNAUX NON PERIODIQUES ET TRANSFORMEE DE FOURIER	8
2.2.1. Calcul d'une transformée de Fourier	8
2.2.2. Fonction porte carré	8
3. NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES CONVERTISSEURS	10
3.1. CONVERSION ANALOGIQUE/NUMÉRIQUE	10
3.1.1. Principe de fonctionnement	10
3.1.2. Définitions	11
3.1.3. Exemple : CAN 3 bits	12
3.1.4. Erreur de quantification. Amélioration	13
3.1.5. Erreur de quantification linéaire	14
3.1.6. Principe de l'échantillonnage temporel	15
3.1.7. Spectre d'un signal échantillonné	16
3.1.7.1. Détermination de la transformée de Fourier de $\Psi_{T_e}(t)$	16
3.1.7.2. Détermination de la transformée de Fourier de $x^*(t)$	16
3.1.8. Théorème de Shannon	17
3.1.9. Repliement de spectre	18
3.2. CONVERSION NUMÉRIQUE/ANALOGIQUE	18
3.2.1. Principe de fonctionnement	18
3.2.2. Définitions	19
3.2.3. Exemple : CNA 3 bits	20
3.2.4. Comment reconstituer le signal d'origine	20
3.2.4.1. Interpolation idéale	20
3.2.4.2. Blocage d'ordre zéro	21
3.3. ERREURS DE CONVERSION	24
3.3.1. Erreur de gain	24
3.3.2. Erreur d'offset	24
3.3.3. Erreurs de linéarité	25
3.3.4. Monotonie (CNA)	26
3.3.5. Codes manquants (CAN)	26
3.3.6. Temps d'établissement (CNA)	27
3.3.7. Temps de conversion (CAN)	27
3.3.8. Précision du convertisseur	28
4. CONVERSION NUMÉRIQUE / ANALOGIQUE	28
4.1. ARCHITECTURE GÉNÉRIQUE	28
4.2. CNA À RÉSISTANCES PONDÉRÉES	29
4.2.1. Principe	29
4.2.2. Précision	31
4.2.3. Avantages / inconvénients	31
4.3. CNA À RÉSEAU R/2R	32
4.3.1. Principe	32
4.3.2. Précision	34
4.4. UTILISATION DES CNA	34
4.4.1. Utilisation "classique"	34
4.4.2. Amplificateurs à gain programmable	35
4.4.3. Filtres programmable	35
4.4.4. Multiplieur	35
4.4.5. Attention !!!	35

5. CONVERSION ANALOGIQUE / NUMÉRIQUE	35
5.1. ARCHITECTURE GÉNÉRIQUE	36
5.2. CAN PARALLÈLE ou FLASH	36
5.2.1. Principe	36
5.2.2. Précision	37
5.2.3. Utilisation	38
5.3. CAN À APPROXIMATIONS SUCCESSIVES	38
5.3.1. Principe	38
5.3.2. Précision	41
5.3.3. Utilisation	42
5.4. CAN À COMPTAGE D'IMPULSIONS	42
5.4.1. Convertisseur simple rampe analogique	43
5.4.2. Convertisseur double rampe analogique	44
5.4.3. Résolution. Précision	46
5.5. CAN SIGMA-DELTA	46
5.5.1. Le modulateur delta	46
5.5.2. Structure Delta sigma	47
5.6. BILAN COMPARATIFS DES CONVERTISSEURS (CHIFFRES DE 1997...)	48
6. INTRODUCTION A L'AUTOMATISME	49
7. NOTION D'ASSERVISSEMENTS	49
7.1. EXEMPLE : REGULATION DE LA TEMPERATURE DANS UN LOCAL DOMESTIQUE	49
7.1.1. Contrôle manuel	49
7.1.2. Régulation automatique	49
7.2. GENERALISATION	51
7.3. PROBLEMES TRAITES POUR METTRE AU POINT UN ASSERVISSEMENT	52
7.3.1. Modélisation des systèmes	52
7.3.2. Analyse des performances	52
7.3.3. Etude de la stabilité	52
7.3.4. Détermination du correcteur	52
8. TRANSFORMATION DE LAPLACE	53
8.1. DEFINITION DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE	53
8.2. PROPRIETES	53
8.2.1. Unicité	53
8.2.2. Linéarité	53
8.2.3. Dérivation – Intégration	53
8.2.4. Facteur d'échelle	53
8.2.5. Retard et Amortissement	53
8.2.6. Théorème des valeurs finales et initiales	53
8.2.7. Convolution	54
8.3. TRANSFORMEES USUELLES	54
9. FONCTION DE TRANSFERT	55
9.1. OPERATIONS SUR LES TRANSFERTS	55
9.1.1. Transferts en cascade	55
9.1.2. Transferts en réaction	55
9.2. REPRESENTATION DE LA REPONSE FREQUENTIELLE D'UN TRANSFERT	55
9.2.1. Diagramme de Bode	56
9.2.2. Plan de Nyquist – Abaque de Hall	56
9.2.3. Plan de Black (Nichols) – Abaque de Black	57
10. SYSTEMES LINEAIRES FONDAMENTAUX	58
10.1. DEFINITIONS GENERALES RELATIVES A LA REPONSE INDICIELLE	58
10.2. QUELS SONT ICI LES PROCESSUS ELEMENTAIRES ?	59
10.3. INTEGRATEUR	59
10.4. TRANSFERT DU 1 ^{ER} ORDRE	60

10.5. TRANSFERT DU 2 ^{EME} ORDRE	61
11. ASSERVISSEMENT	63
11.1. SCHEMA FONCTIONNEL ENVISAGE	63
11.2. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME ASSERVI	63
11.2.1. Fonction de transfert en boucle fermée ou F.T.B.F	63
11.2.2. Système asservi à retour unitaire	64
11.2.3. Fonction de transfert en boucle ouverte ou F.T.B.O.	64
12. STABILITE	65
12.1. CONDITIONS DE STABILITE	65
12.1.1. Stabilité à partir de la FTBF	65
12.1.2. Point critique & Condition de stabilité à partir de la boucle ouverte	65
12.1.3. Critère de Routh	66
12.1.4. Critère de Bode	66
12.1.5. Critère de Nyquist	66
12.1.6. Critère du revers	66
12.2. DEGRE DE STABILITE	66
12.2.1. Le facteur de résonance	66
12.2.2. Le facteur d'amortissement	67
12.2.3. Le premier dépassement	67
12.3. LES MARGES DE STABILITE	67
12.3.1. Marge de phase	67
12.3.2. Marge de gain	69
12.4. DEGRE DE STABILITE OPTIMAL	70
13. DILEMME STABILITE / PRECISION	71
13.1. PRECISION	71
13.1.1. Erreur en régime permanent	71
13.2. AMELIORATION DU COMPROMIS DEGRE DE STABILITE / PRECISION	72
13.2.1. Solution 1	72
13.2.2. Solution 2	72
14. LA CORRECTION EN CASCADE	73
14.1. SCHEMA DE CORRECTION	73
14.2. AMELIORATION DE LA PRECISION : LE FILTRE A ACTION INTEGRALE	73
14.2.1. Définition	73
14.2.2. Placement en fréquence	74
14.3. AMELIORATION DU DEGRE DE STABILITE : LE FILTRE A ACTION DERIVEE (AVANCE DE PHASE)	74
14.3.1. Définition	74
14.3.2. Placement en fréquence	75
14.4. SYNTHESE D'UN REGULATEUR DE TYPE P.I.D.	75
14.4.1. Placement de l'action intégrale	76
14.4.2. Placement de l'action dérivée	76
14.4.3. Détermination de C_0	76
15. SYSTEMES RENDUS VOLONTAIREMENT INSTABLES : LES OSCILLATEURS	77
15.1. ETUDE D'UN EXEMPLE DETAILLE : L'OSCILLATEUR A PONT DE WIEN	77
15.2. LES AMELIORATIONS INDISPENSABLES POUR UN TEL MONTAGE	80
16. MULTIPLEXAGE - DEMULTIPLEXAGE	81
16.1. LE MULTIPLEXAGE	81
16.2. LE DEMULTIPLEXAGE	81
16.3. EXEMPLE D'APPLICATION	82
16.4. LES MULTIPLEXEURS ET LES DEMULTIPLEXEURS ANALOGIQUES	82
16.5. EXEMPLES DE CIRCUITS LOGIQUES	83
17. CODEUR ET DECODEUR BINAIRE	84

1. INTRODUCTION AUX CAN ET CNA

L'électronique est divisée en deux domaines distincts :

- le **domaine analogique**, où les variables peuvent prendre une infinité de valeurs différentes ; les signaux varient continûment. Tous les signaux issus des capteurs sont analogiques, et traduisent des phénomènes physiques qui varient continûment.
- le **domaine numérique**, où les variables prennent uniquement deux états, un état haut et un état bas.

Le domaine numérique est maintenant prédominant. Il s'est beaucoup développé grâce aux progrès faits par les microprocesseurs. Beaucoup de signaux naguère traités de façon analogiques le sont aujourd'hui par programmation de microprocesseurs.

Le gros avantage apporté par la numérisation des signaux est la possibilité de stockage, de transformation et de restitution des données sans qu'elles ne soient altérées. On peut par exemple faire transiter un signal sonore de qualité HI-FI par une ligne téléphonique sans que la bande passante réduite ni le bruit de cette ligne ne soient gênants, ce qui aurait été impensable avec le signal analogique de départ !

Le traitement des données par programmation introduit aussi une souplesse dans la conception de produits à base d'électronique : un même circuit électronique à base de µP pourra traiter des signaux différents ; seul le programme va changer. Cela permet de réduire les coûts par standardisation, la même carte étant utilisée pour plusieurs fonctions différentes. L'électronique analogique nécessitait au mieux un changement des composants, au pire, la conception d'une nouvelle carte.

Mais, à la base, les signaux ont toujours une nature analogique ! Il faut donc les amplifier et éventuellement les extraire de signaux parasites (tension de mode commun par exemple). Le domaine analogique va donc toujours exister au moins en amont de toute chaîne de traitement. Parfois, on a aussi besoin d'un signal analogique en sortie de cette chaîne de traitement : il faudra alors reconvertis les données numériques en signal analogique.

Le passage d'un type de donnée à l'autre se fera par des convertisseurs, composants " mixtes " qui vont manipuler des tensions analogiques en entrée et des signaux logiques en sortie ou vice versa.

Il existe deux catégories de convertisseurs :

- les **Convertisseurs Analogique Numérique** (CAN, ADC en anglais, pour analog to digital converter), qui vont transformer les tensions analogiques en signaux logiques aptes à être traités par microprocesseur (numérisation des signaux).
- les **Convertisseurs Numérique Analogique** (CNA, DAC en anglais, pour digital to analog converter) qui vont convertir les signaux logiques en tension analogique.

Plusieurs types de convertisseurs sont disponibles dans chaque catégorie, qui se différencient par leur précision, leur vitesse de traitement de l'information, leur prix....

Il n'y a pas " le " convertisseur à tout faire qui soit bon partout : on devra faire un choix en fonction de ses besoins.

Exemple de chaîne de traitement.

Un exemple très répandu de conversion et traitement de données est la chaîne de transformation du son, de l'enregistrement de la musique à sa restitution par les enceintes acoustiques.

Le son est capté par des micros, dont la très faible tension de sortie est amplifiée. Le signal peut être numérisé directement à ce niveau, et sera alors traité de façon entièrement numérique (mixage...). Il peut aussi être stocké de façon analogique sur bande magnétique, mixé, et ensuite numérisé. L'avantage du traitement numérique réside dans le fait que les données sont inaltérables, contrairement aux données analogiques stockées sur bande magnétique : celle-ci se dégrade lors des passages répétés sur les têtes de lecture.

Le stockage est maintenant presque toujours numérique (compact disc). Le lecteur de CD contient des convertisseurs numérique analogique qui vont retransformer les informations numériques en signal analogique qui sera amplifié avant d'être envoyé aux enceintes.

2. OUTILS MATHEMATIQUES

2.1. DECOMPOSITION D'UN SIGNAL PERIODIQUE EN SERIE DE FOURIER

Soit f la fonction T -périodique. Donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = f(t+T)$

D'après Fourier, tout signal périodique se décompose en somme infinie de sinusoïde.

On a alors :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t) + b_n \sin(n \frac{2\pi}{T} t))$$

Les a_n et b_n sont appelés les coefficients de Fourier. a_0 représente la valeur moyenne du signal sur une période.

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos(n \frac{2\pi}{T} t) dt \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin(n \frac{2\pi}{T} t) dt \end{cases}$$

Nous pouvons choisir la valeur de α arbitrairement, cela dit il serait intéressant de faire un choix judicieux.

En effet si $\alpha = -\frac{T}{2}$ on est ramené à calculer une intégrale sur l'intervalle $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. Or comme la fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire, suivant la parité de f , les calculs s'avèrent simplifiés.

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) dt \\ \text{si } f \text{ est paire} \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n \frac{2\pi}{T} t) dt \quad \text{si } f \text{ est impaire} \\ \quad b_n = 0 \quad a_n = 0 \\ \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n \frac{2\pi}{T} t) dt \end{cases}$$

Les coefficients de Fourier peuvent aussi s'écrire sous forme complexe. En effet si $|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, on a : $c_n = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i \frac{2\pi}{T} nt} dt$ et $c_0 = a_0$

$$\text{Ou encore : } f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n \frac{2\pi}{T} t) + b_n \sin(n \frac{2\pi}{T} t)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi}{T} nt}$$

Nous pouvons observer le spectre de ce signal (dans le domaine fréquentiel) à l'aide des coefficients de Fourier.

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \delta(f - \frac{n}{T})$$

2.2. SIGNAUX NON PERIODIQUES ET TRANSFORMEE DE FOURIER

2.2.1. Calcul d'une transformée de Fourier

On appelle Transformée de Fourier de f la fonction $\hat{f} : IR \rightarrow C$ définie par :

$$\forall \lambda \in IR, \hat{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\lambda t} dt$$

De la même façon que précédemment, nous pouvons simplifier ces intégrales en fonction de la parité de la fonction f .

$$\text{si } f \text{ est paire } \hat{f}(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi\lambda t) dt \quad \text{si } f \text{ est impaire } \hat{f}(\lambda) = -2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\lambda t) dt$$

Nous pouvons faire établir un lien entre la transformée et la série de Fourier. En effet on peut la voir comme le cas limite de la série de Fourier. Si l'on considère la fonction f T -périodique sur l'intervalle $[-T, T]$ que l'on cherche à décomposer en harmoniques de la forme $\cos(n \frac{2\pi}{T} t)$ et $\sin(n \frac{2\pi}{T} t)$, lorsque T tend vers $+\infty$ on est amené à remplacer le paramètre discret n par un paramètre λ continu appartenant à IR .

2.2.2. Fonction porte carré

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par : } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$f \text{ est une fonction paire donc } \hat{f}(\lambda) = 2 \int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi\lambda t) dt = 2 \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(2\pi\lambda t) dt$$

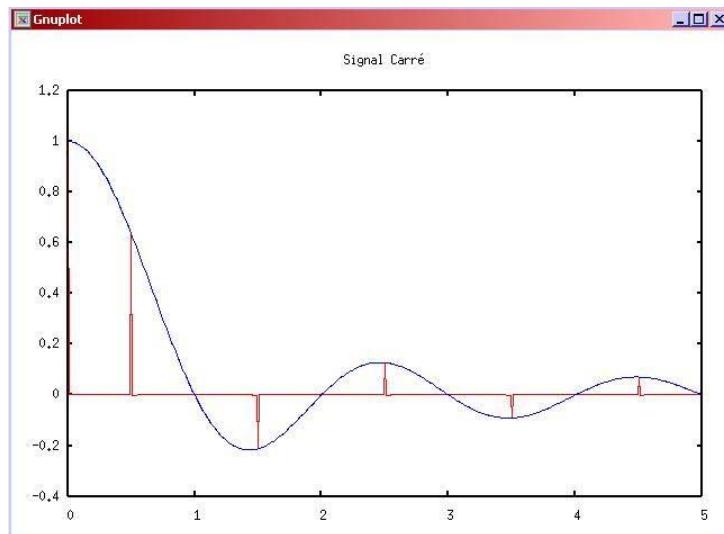
$$\text{d'où } \hat{f}(\lambda) = \frac{\sin(\pi\lambda \frac{T}{2})}{\pi\lambda} = \frac{T}{2} \cdot \sin c(\pi\lambda \frac{T}{2})$$

Afin de pouvoir comparer le spectre de cette porte avec celui d'un signal périodique comportant le même motif sur une période, nous avons calculé les coefficients de Fourier de la fonction suivante :

$$\text{Soit } f \text{ la fonction de période } T \text{ définie par : } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{4}, \frac{T}{4}\right] \\ 0 & \text{si } t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{4}\right] \cup \left[\frac{T}{4}, \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

$$f \text{ étant une fonction paire on a : } b_n = 0 \text{ et } \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{1}{2} \\ a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(2n \frac{\pi}{T} t) dt = (-1)^n \frac{2}{n\pi} \end{cases}$$

Voici les spectres de ces deux signaux avec $T=2$:



Nous constatons que les coefficients de Fourier coïncident avec la transformée de Fourier du signal non périodique à l'exception de a_0 qui est la valeur moyenne du signal. De plus, l'amplitude des pics représentant le spectre du signal périodique est égale à la valeur maximale de chacun des lobs du sinus cardinal excepté pour le lob principal.

3. NOTIONS GÉNÉRALES SUR LES CONVERTISSEURS.

3.1. CONVERSION ANALOGIQUE/NUMÉRIQUE.

3.1.1. Principe de fonctionnement.

On a vu dans l'introduction que les signaux numériques ne varient pas de façon continue. En fait, quand on voudra numériser un signal analogique (donc continu), il va falloir le discréteriser sur deux dimensions : le temps et l'amplitude.

Il est impensable de décrire un signal avec une infinité de valeurs ; on va le mesurer à des instants bien déterminés : c'est ce qu'on appelle l'**échantillonnage**.

Pour ce qui est de l'amplitude, à un intervalle de tension du signal d'entrée on fera correspondre une valeur unique : c'est la **quantification** (voir figure 1). Cette valeur sera ensuite codée (binaire, binaire signé...) et restituée sous forme binaire en sortie du convertisseur pour être traitée par de l'électronique numérique.

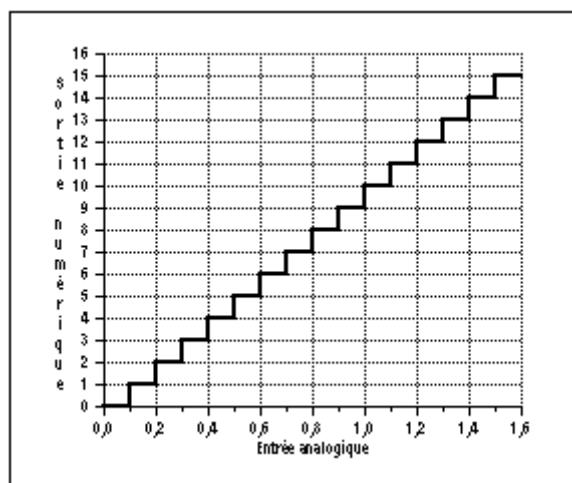


Fig. 1. Fonction de transfert d'un CAN.

La figure 1 représente la fonction de transfert d'un CAN, à savoir le code numérique de sortie en fonction de la tension d'entrée. On y voit clairement les plages de tension associées à un état numérique de sortie :

- $V_{\text{log}} = 0$ pour $0 \leq V_e < 0,1\text{V}$
- $V_{\text{log}} = 1$ pour $0,1 \leq V_e < 0,2\text{V}$
- $V_{\text{log}} = 6$ pour $0,6 \leq V_e < 0,7\text{V}$...

L'étape de quantification de la conversion analogique numérique entraîne une perte d'information.

Un résumé graphique de tout ceci est exprimé sur la figure 2 : on y voit un signal analogique en entrée (une sinusoïde), et les échantillons issus de la conversion analogique numérique, avec la double discréétisation mentionnée.

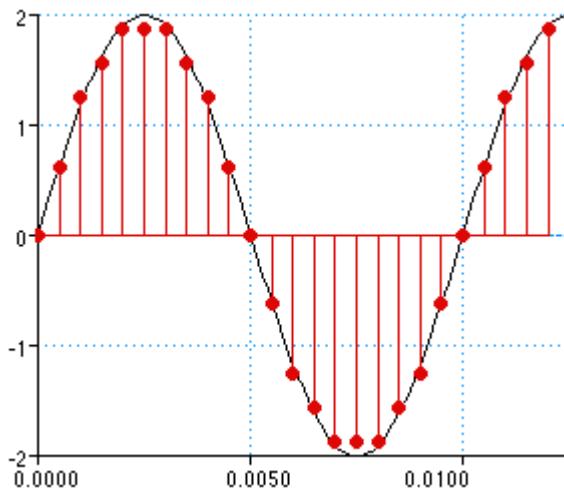


Fig. 2. Signal analogique et numérisé

3.1.2. Définitions.

Nous allons donner ci-dessous plusieurs définitions théoriques ; afin de bien comprendre à quoi elles correspondent dans la réalité, un exemple de convertisseur 3 bits est exposé plus loin. Le lecteur est invité à consulter les deux paragraphes en parallèle.

Toutes ces définitions sont données pour des convertisseurs parfaits ; en pratique, on est loin du compte, car ces composants intègrent des comparateurs différentiels, amplificateurs opérationnels et autres réseaux de résistances qui sont imparfaits. Nous allons lister ensuite les principaux défauts des convertisseurs.

Plage de conversion.

Le convertisseur délivrera en sortie un nombre fini de codes numériques, correspondant à une gamme de tension analogique d'entrée bornée : c'est la **plage de conversion** (ou tension de pleine échelle) du convertisseur. Cette plage de conversion sera couramment de 0-5V, 0-10V, ou encore $\pm 5V$ ou $\pm 10V$. Il existe aussi d'autres plages de conversion moins usitées.

Résolution.

Le signal numérisé sera d'autant plus riche en information que l'intervalle de tension qui sera codé par le même nombre binaire sera petit, et ceci à plage de conversion donnée.

La **Résolution** du CAN sera l'intervalle de tension d'entrée à laquelle correspondra un même nombre binaire.

En théorie, cet intervalle de tension est le même pour tous les codes binaires ; en pratique, ça ne sera pas toujours le cas (voir les erreurs de conversion). La résolution correspondra à la valeur théorique.

Dynamique.

La **dynamique** d'un signal est le rapport entre la tension maxi et la tension mini que pourra prendre ce signal.

Pour un CAN, ce sera le nombre binaire le plus élevé divisé par le plus faible qui est 1 (et pas 0 qui correspond à un signal nul), donc, le nombre de codes binaires différents que peut fournir le convertisseur moins un (le zéro !).

Si on prend l'exemple d'un convertisseur 8 bits, la dynamique vaut en toute rigueur $2^8 - 1 = 255$.

En pratique, on arrondira ce nombre à une puissance de 2, qui sera le nombre de bits du convertisseur. Notre convertisseur aura donc une dynamique de 256, qu'on exprimera plutôt sous la forme " 8 bits ", ou encore $48\text{db} = 20\log(256)$.

Mise en relation.

Il est possible de relier la dynamique, la résolution et la plage de conversion d'un convertisseur.

La résolution correspond à la variation d'une unité du code binaire ; cette unité est égale à la variation du bit de poids le plus faible (LSB = least significant bit en Anglais). Si on désigne par ΔV_{\max} la plage de conversion et N le nombre de bits du convertisseur, on a la relation :

$$\text{LSB} = \frac{\Delta V_{\max}}{2^N} \quad [1]$$

L'exemple suivant clarifiera cette relation.

3.1.3. Exemple : CAN 3 bits

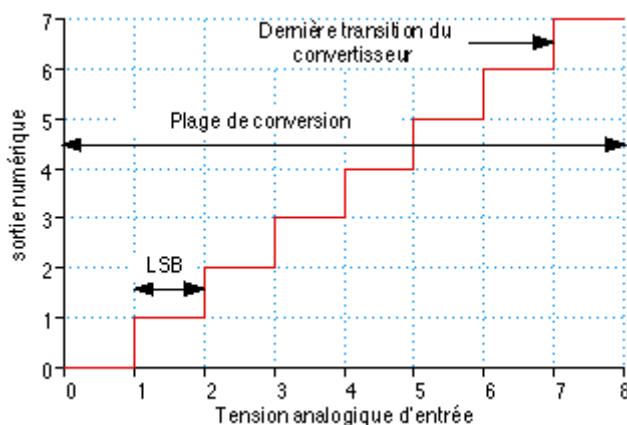


Fig. 3. Fonction de transfert d'un CAN 3 bits

Sur la figure 3, on a représenté la fonction de transfert d'un CAN à 3 bits ayant une plage de conversion de 8V. Il y a 8 états logiques, la plage de conversion est donc partagée en 8 portions égales correspondant chacune à un état logique de sortie.

On remarquera que la dernière transition du CAN se fait pour une tension d'entrée de 7V, correspondant au dernier état logique (égal à 7).

Passée cette valeur de 7V, le convertisseur ne changera donc plus d'état. Toutefois, on considère que la plage de conversion s'étend jusqu'à 8V, la dernière portion, de 7 à 8V correspondant à l'état logique " 7 ".

Dans ces conditions, la plage de conversion est de 8V, divisée en $2^3 = 8$ portions correspondant chacune à un LSB valant $8V/8=1V$. On retrouve le résultat de l'équation [1].

3.1.4. Erreur de quantification. Amélioration.

On a déjà dit que la double quantification, dans le temps et en amplitude consistait en une perte d'information du signal. Ceci nous conduit à la notion d'erreur de quantification, qui est inhérente à la conversion analogique/numérique (et inverse), et sera présente même si les convertisseurs sont considérés comme parfaits. Cette erreur systématique s'ajoute donc aux erreurs décrites plus loin.

Si on numérise une rampe de tension, l'erreur entre la tension d'entrée et la tension de sortie "reconstituée" (reconvertie en analogique par passage dans un CNA) aura la forme suivante :

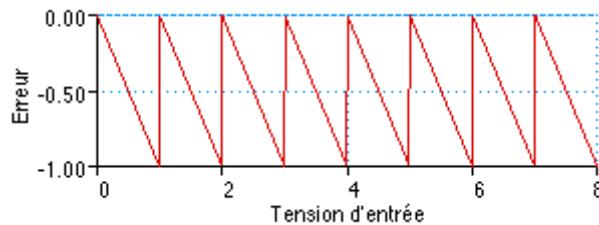


Fig. 4. Erreur de quantification d'un CAN.

L'erreur est toujours négative (valeur par défaut), et oscille entre 0 et -1 LSB (0 à -1V ici).

Il serait souhaitable d'avoir plutôt une erreur centrée autour de 0, de manière à quantifier tantôt par excès, tantôt par défaut ; en effet, en quantifiant systématiquement par défaut, on introduit un offset dans le signal numérisé.

Pour pallier cet inconvénient, on introduit un décalage au niveau du premier LSB du convertisseur, comme indiqué sur la figure 5 : la première transition n'a pas lieu pour 1 LSB, mais pour $1/2$ LSB seulement, ce qui fait que jusqu'à une valeur d'entrée inférieure à $1/2$ LSB, on quantifie par défaut, et entre $1/2$ et 1 LSB, on quantifie par excès.

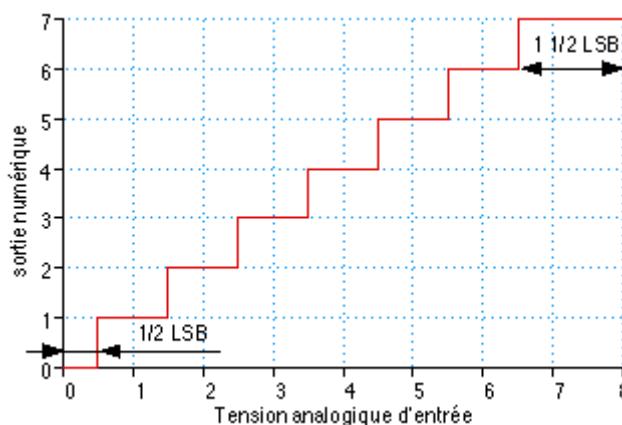


Fig. 5. Fonction de transfert d'un CAN 3 bits corrigé.

L'erreur obtenue devient celle de la figure 6 : elle est symétrique par rapport à 0 et égale à $\pm 1/2$ LSB.

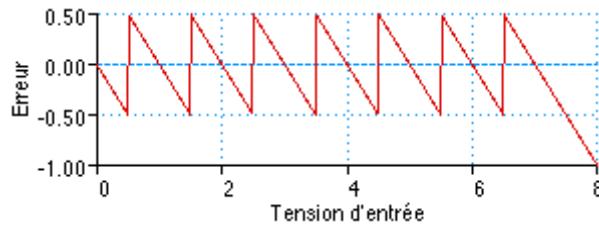


Fig. 6. Erreur de quantification symétrique

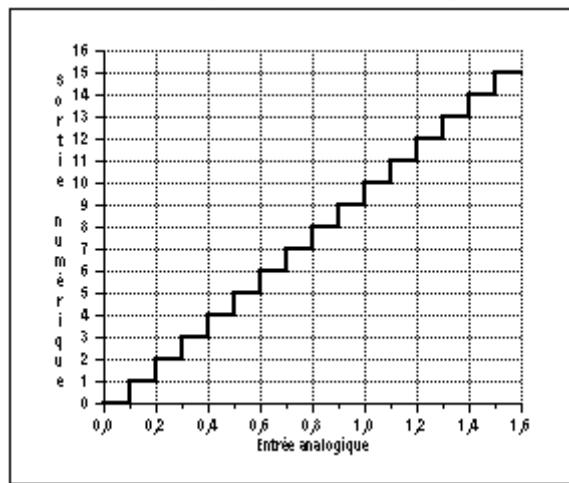
Il y a juste une exception : le $1/2$ LSB tronqué au début va se retrouver en bout d'échelle (voir figure 5) : le dernier état numérique correspondra à une plage d'entrée analogique valant $1,5$ LSB. L'erreur de quantification sera plus grande sur cette plage, ce qui n'est d'ailleurs pas très grave !

En pratique, la majorité des CAN ont une fonction de transfert décalée pour assurer une erreur de quantification symétrique. Il faudra toutefois s'en assurer en lisant la spécification du constructeur.

Ce détail pourra être important si on fait de la mesure précise avec une carte d'acquisition de donnée (comprenant un CAN). Pour régler le gain et l'offset de la chaîne de conversion, il faudra observer la première et la dernière transition, et la calibration sera différente si le convertisseur est décalé ou pas ; un biais d' $1/2$ LSB pourra fausser les mesures si on se trompe !

3.1.5. Erreur de quantification linéaire

Le CAN réalise fonctionnellement une opération non linéaire de quantification en tension de la tension d'entrée analogique discrétisée temporellement ($x^*(t)$).

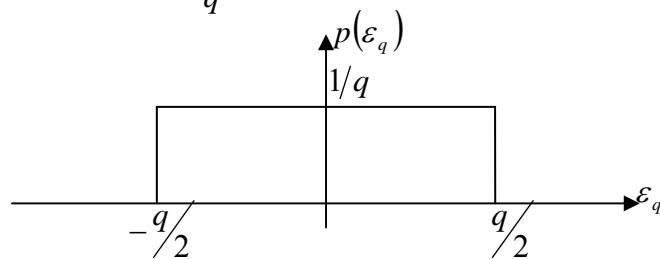


L'intervalle de tension d'entrée pour laquelle la valeur numérique de sortie ne change pas est appelé « pas de quantification ». Nous le noterons q . Ce quantum est défini par

$$q = \frac{\Delta V_{\max}}{2^N} \quad \text{où } N \text{ est le nombre de bits du convertisseur et } \Delta V_{\max} \text{ l'étendue de la mesure.}$$

Cette opération produit une erreur ε_q qui est un signal à temps discret, dite **bruit de quantification**. Cette erreur ε_q est comprise entre $-\frac{q}{2}$ et $\frac{q}{2}$ et est a priori (pour un signal à convertir quelconque) également distribué entre ces extréma.

On considère généralement cette erreur ε_q comme une variable aléatoire de densité de probabilité constante égale à $\frac{1}{q}$ entre $-\frac{q}{2}$ et $\frac{q}{2}$.



On en déduit que la valeur moyenne de l'erreur $\overline{\varepsilon_q} = E(\varepsilon_q) = 0$ (erreur dite centrée) et que la puissance moyenne totale (ou variance) $\overline{\varepsilon_q^2} = E(\varepsilon_q^2) = \int_{-q/2}^{q/2} \frac{1}{q} \varepsilon_q^2 d\varepsilon_q = \frac{q^2}{12}$.

On montre que pour un signal harmonique $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$ le rapport signal à bruit de quantification est :

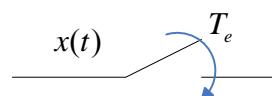
$$SNR_{db} = 10 \log \left(\frac{P_s}{P_b} \right) = 10 \log \left(\frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{q^2}{12}} \right) \approx 6,02N + 1,76db$$

Remarque :

- Nous voyons que le bruit de quantification est indépendant de l'amplitude et de la distribution du signal, P_b diminue quand les intervalles de quantification diminuent
- Le rapport signal/Bruit diminue si amplitude du signal diminue.

3.1.6. Principe de l'échantillonnage temporel

Le but de cette opération est discréteriser le signal ou encore de changer la variable t réelle en une variable k entière. Echantillonner un signal consiste à ne considérer que certains points régulièrement répartis temporellement ; cette opération s'accompagne donc d'une perte d'informations que l'on souhaite nulle, ou tout du moins la plus faible possible.

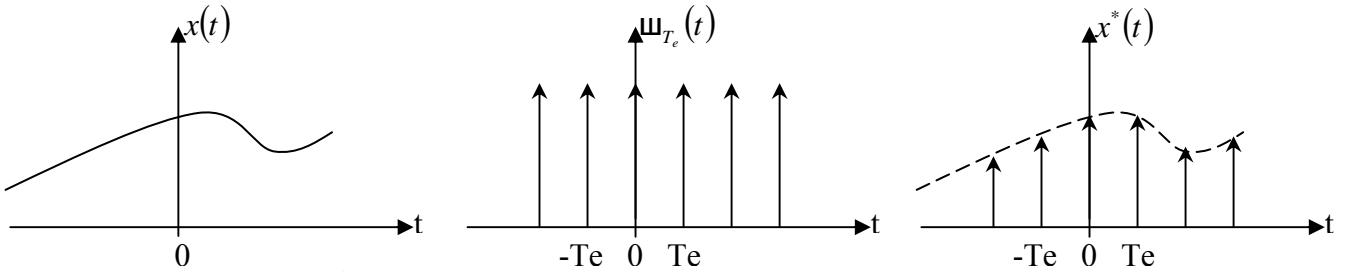


Pour cela nous pouvons prendre en considération des instants $t_e = kT_e$ (où T_e est la période d'échantillonnage, k est le numéro de l'échantillon et t_e le temps d'échantillonnage). L'échantillonnage consiste à représenter un signal analogique continu $x(t)$ par un ensemble de valeurs $x(kT_e)$.

Il suffit pour cela de multiplier ce signal par un peigne de Dirac (que l'on notera $\mathbb{W}_{T_e}(t)$) :

$$\mathbb{W}_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$$

Si $x(t)$ est infini, on obtient une suite infini d'échantillons ; $x^*(t)$ est discret selon t et continu d'amplitude



Ainsi si $x^*(t)$ est le signal échantillonné de $x(t)$ on a :

$$x^*(t) = x(t) \cdot \mathbb{W}_{T_e}(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

3.1.7. Spectre d'un signal échantillonné

Pour cela, nous devons déterminer la transformée de Fourier du signal $x^*(t)$.

Nous rappelons que : $g(t) \cdot h(t) \xrightarrow{TF} G(f) * H(f)$

$$X^*(f) = TF[x^*(t)] = TF[x(t) \cdot \mathbb{W}_{T_e}(t)] = X(f) * TF[\mathbb{W}_{T_e}(t)] = X(f) * TF\left[\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)\right]$$

Reste à déterminer la transformée de Fourier du peigne de Dirac : $TF[\mathbb{W}_{T_e}(t)] = ?$

3.1.7.1. Détermination de la transformée de Fourier de $\mathbb{W}_{T_e}(t)$

$\mathbb{W}_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_e)$ est un signal T_e -périodique, par conséquent il est possible de

le décomposer en série de Fourier :

$$c_n = \frac{1}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \mathbb{W}_{T_e}(t) e^{-2i\pi n F_e t} dt = F_e \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta(t) e^{-2i\pi n F_e t} dt = F_e \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} \delta(t) dt = F_e$$

$$\text{par conséquent : } S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \delta(f - \frac{n}{T_e}) = F_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n F_e) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T_e})$$

On peut constater ici que le spectre d'un peigne de Dirac de période T_e est également un peigne mais de période F_e et amplifié de F_e .

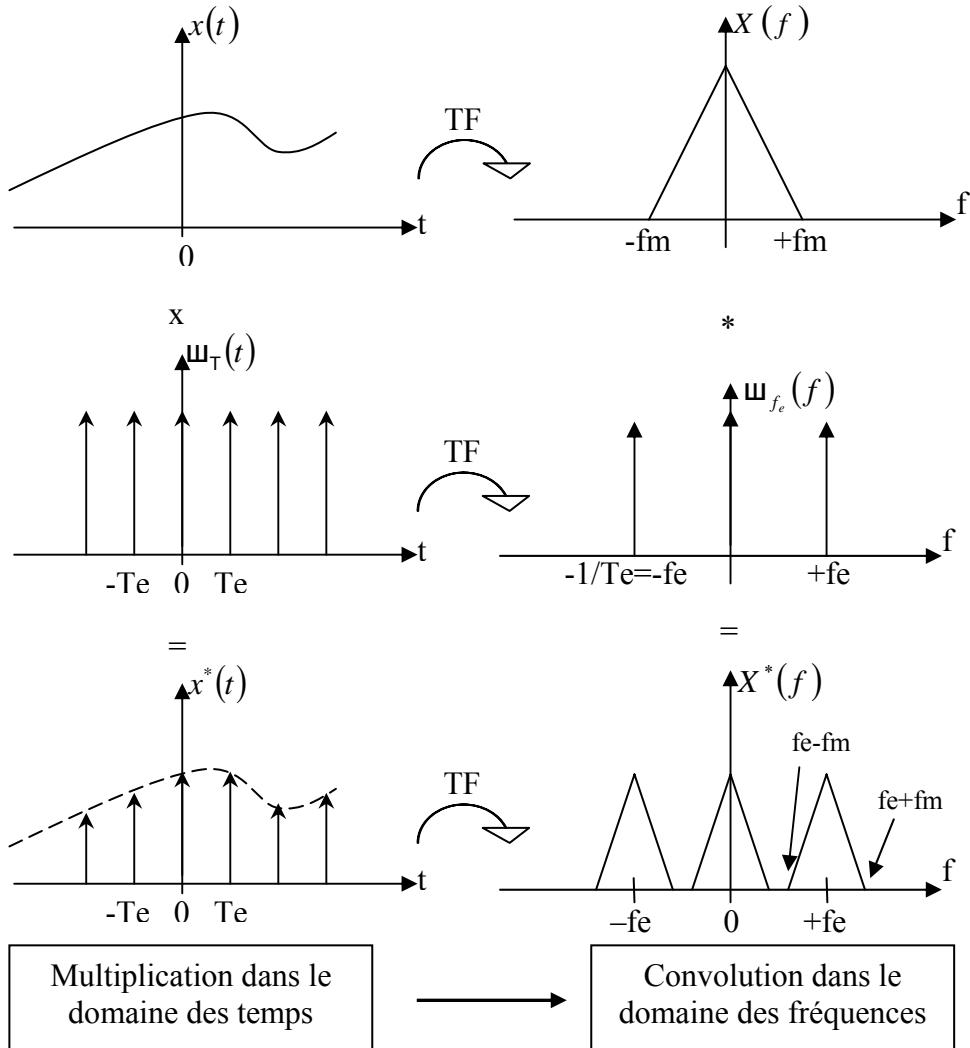
3.1.7.2. Détermination de la transformée de Fourier de $x^*(t)$

On arrive donc sur le résultat suivant :

$$X^*(f) = TF[x^*(t)] = X(f) * TF[\mathbb{W}_{T_e}(t)] = X(f) * \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \frac{n}{T_e}) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) * \delta(f - \frac{n}{T_e})$$

et donc :
$$X^*(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - \frac{n}{T_e})$$

Le spectre d'un signal échantillonné est donc périodique et de période Fe . Le spectre de base $X(f)$ est décalé et recopié tous les Fe .



Nous voyons dès à présent que pour que le spectre ne soit pas déformé il suffit que $fe \geq 2fm$ (théorème de Shannon)

$$fe \text{ est } \left\{ \begin{array}{l} \text{fréquence de Shannon} \\ \text{fréquence d'anti-repliement} \end{array} \right.$$

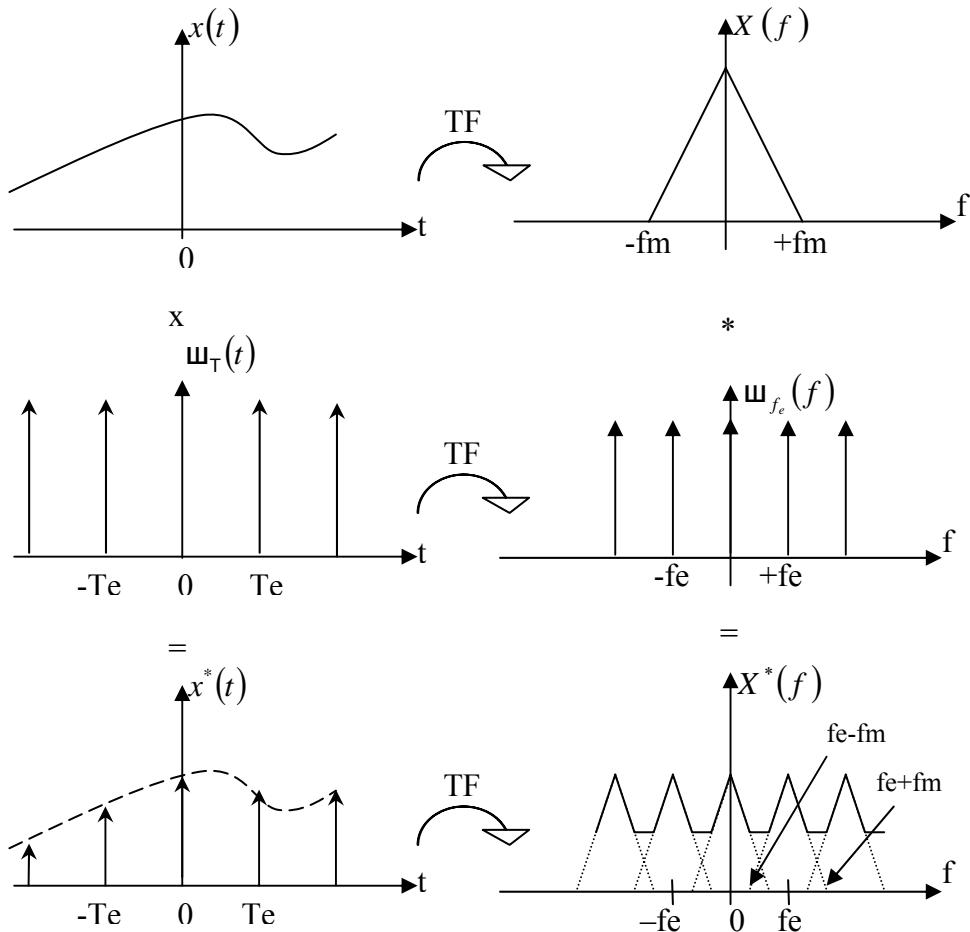
Dans les conditions du théorème de Shannon le signal est complètement déterminé par les valeurs qu'il prend à des instants régulièrement espacés de $Te = 1/fe$.

3.1.8. Théorème de Shannon

Une condition nécessaire pour que le spectre ne soit pas déformé est donc que $\frac{fe}{2} \geq f_m \Leftrightarrow fe \geq 2f_m$: c'est le théorème de Shannon. Nous pouvons affirmer que plus la fréquence d'échantillonnage est importante, plus les motifs sont espacés. Nous verrons par la suite que le spectre doit également être borné (ou presque) pour pouvoir reconstituer le signal convenablement.

3.1.9. Repliement de spectre

Le repliement de spectre : si Shannon n'est pas respecté, il y a un effet de repliement de spectre.



⇒ il y a un recouvrement spectrale.

⇒ ce recouvrement spectrale met en évidence la perte d'information du motif de base ; dans ces conditions, on ne peut plus reconstruire le signal $x(t)$.

Pour éviter ces effets, il faut utiliser un filtre anti-repliements (filtre passe-bas) dont la fréquence de coupure est : $f_c \leq f_e$. Ce filtre doit être placé avant la numérisation du signal. Il est bien évident que ce filtre évite le repliement du spectre, mais la perte d'information est toujours présente car ce filtre supprime les hautes fréquences de $x(t)$.

Il faut échantillonner suffisamment vite pour respecter la limitation de Shannon.

Mais il est inutile d'échantillonner trop rapidement : une bonne connaissance des caractéristiques spectrales du signal analogique à traiter est essentielle pour faire un choix intelligent de la fréquence d'échantillonnage. Une fréquence d'échantillonnage beaucoup plus élevée (que la fréquence théorique de Shannon) assure une meilleure séparation des motifs périodisés de $X(f)$ mais générera plus d'échantillon (problème de stockage).

3.2. CONVERSION NUMÉRIQUE/ANALOGIQUE.

3.2.1. Principe de fonctionnement.

Si on fait l'opération inverse (conversion numérique analogique), à chaque valeur numérique, on fera correspondre une valeur analogique (et une seule) ; la tension analogique de sortie variera par " bonds ", et non plus continûment comme dans le signal d'origine. La fonction de transfert sera la même que celle de la figure 1 mais inversée. La tension de sortie aura une forme d'escalier. En pratique, on va filtrer cette tension pour lisser ces discontinuités et essayer de se rapprocher au mieux du signal d'origine (Figure 7).

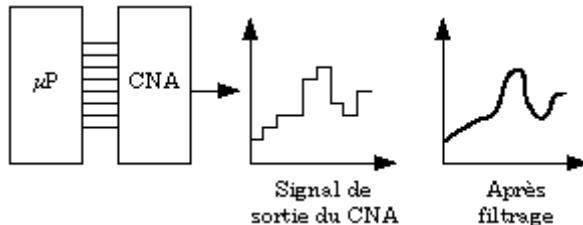


Fig. 7. Conversion numérique analogique.

3.2.2. Définitions.

Résolution.

La **Résolution** du CNA sera la variation de tension de sortie correspondant à la variation d'une unité du nombre binaire en entrée. La définition est équivalente à celle du CAN.

Plage de conversion.

Il y a ici une petite différence avec le CAN (voir figure 8) : la plage de conversion numérique va de 0 à $2^N - 1$, N étant le nombre de bits du convertisseur, et à chaque valeur numérique correspond une valeur analogique de sortie et une seule. Par rapport à celle du CAN, la plage de conversion s'arrêtera donc un LSB plus tôt (sur l'échelle analogique du CAN, ceci correspond à la dernière transition numérique).

Nous sommes ramenés ici au vieux problème des poteaux et des intervalles !

Dynamique.

La définition est équivalente à celle du CAN.

Mise en relation.

Vu ce qui a été dit sur la plage de conversion, la relation entre le pas de quantification (1 LSB), la plage de conversion ΔV_{\max} , et le nombre de bits du convertisseur sera légèrement différente de l'équation [1]. La figure 8 du paragraphe suivant va éclairer cette équation :

$$\text{LSB} = \frac{\Delta V_{\max}}{2^N - 1} \quad [2]$$

En pratique, pour un nombre de bits supérieur à 8, l'écart entre les deux formules reste très faible !

Il n'empêche que dans le cas de mesures précises, ce genre de détail a son importance pour expliquer un biais inattendu.

3.2.3. Exemple : CNA 3 bits.

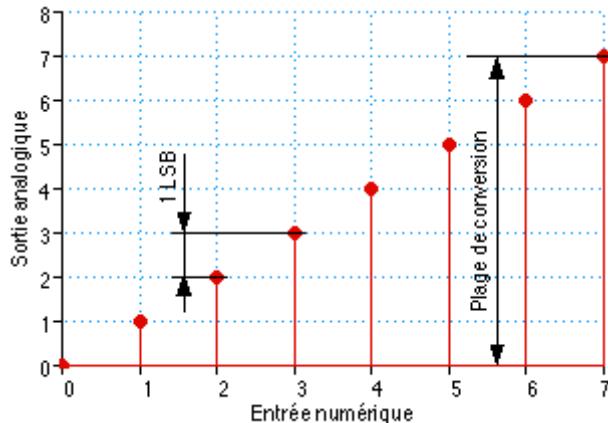


Fig. 8. Fonction de transfert d'un CNA 3 bits.

La figure 8 montre la fonction de transfert d'un CNA 3 bits ayant une résolution de 1V, comme l'exemple de CAN donné précédemment.

On voit clairement ici ce qui a été dit pour la plage de conversion : la plage s'étend de 0 à 7V, et non pas 8V comme pour le CAN, car le dernier état numérique est " 7 ".

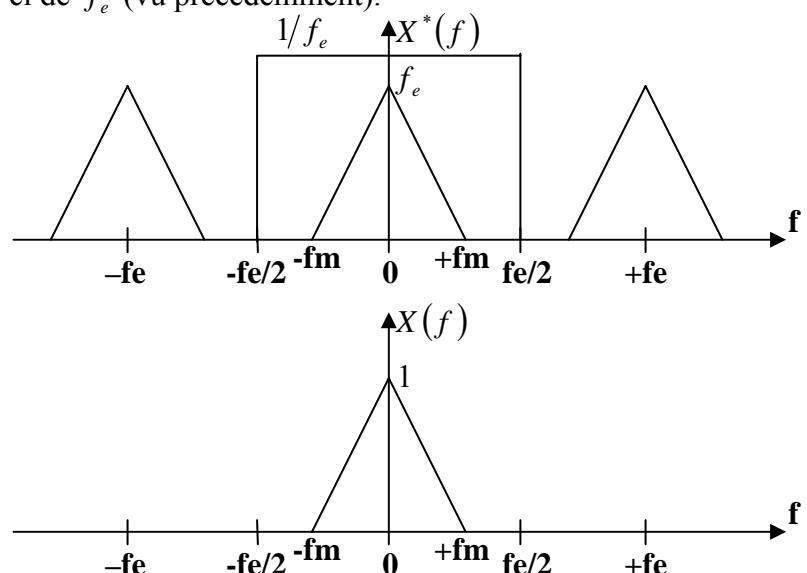
3.2.4. Comment reconstituer le signal d'origine

3.2.4.1. Interpolation idéale

Si on analyse la situation, on constate que si on arrive à filtrer, dans $X^*(f)$, la bande de fréquences contenant le spectre de $X(f)$ c'est-à-dire $[-f_e/2, f_e/2]$, on retrouve le spectre $X(f)$. Il suffit pour cela de multiplier $X^*(f)$ par une porte :

$$P_{f_e}(f) = \begin{cases} \frac{1}{f_e} & \text{si } f \in \left[-\frac{f_e}{2}, \frac{f_e}{2}\right] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Il faut que l'amplitude de la porte soit égale à $1/f_e$ car le spectre d'un peigne de Dirac amplifie celui-ci de f_e (vu précédemment).



Par conséquent, on a : $X(f) = (X^*(f) \cdot P_{Fe}(f))$

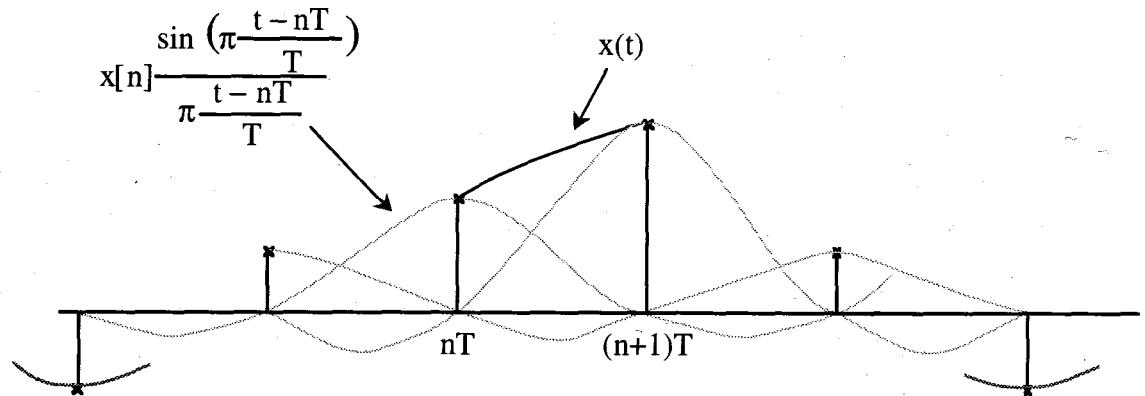
Il suffit à présent d'appliquer la transformée de Fourier inverse sur $X(f)$ pour restituer le signal $x(t)$ analogique (la transformée de Fourier inverse de cette porte est

un sinus cardinal : vu précédemment). Rappelons que $G(f) \cdot H(f) \xrightarrow{TF^{-1}} g(t) * h(t)$

$$\begin{aligned} X(f) = (X^*(f) \cdot P_{Fe}(f)) \xrightarrow{TF^{-1}} x(t) &= \left(x^*(t) * f_e \cdot \frac{\sin(\pi f_e t)}{\pi f_e t} \right) = \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) * \frac{\sin(\pi \frac{t}{T_e})}{\pi \frac{t}{T_e}} \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \frac{\sin(\pi \frac{t - kT_e}{T_e})}{\pi \frac{t - kT_e}{T_e}} \\ \Rightarrow x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \frac{\sin(\pi(\frac{t}{T_e} - k))}{\pi(\frac{t}{T_e} - k)} \end{aligned}$$

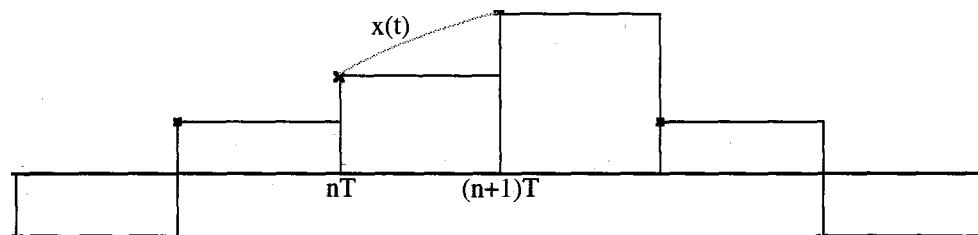
Nous pouvons remarquer que cette série est assez proche du développement en série de Fourier de la fonction carré périodique.

Ainsi l'interpolation idéale dans l'intervalle $[nT_e, (n+1)T_e]$ nécessite la connaissance de toutes les valeurs de $x(t)$ aux instants kT_e depuis $-\infty$ à $+\infty$. Bien sûr le lecteur aura noté que plus k s'éloigne de n , moins $x[k]$ ($= x(kT_e)$) influence la reconstitution dans l'intervalle $[nT_e, (n+1)T_e]$.

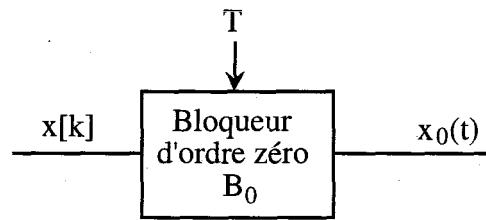


3.2.4.2. Blocage d'ordre zéro

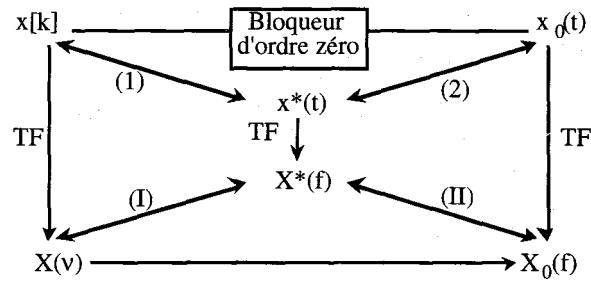
La technique habituelle d'interpolation est rudimentaire car elle consiste à maintenir constante la valeur $x[k]$ ($= x(kT_e)$) sur l'intervalle $[nT_e, (n+1)T_e]$.



Cette opération est réalisée à l'aide d'un bloqueur d'ordre zéro.

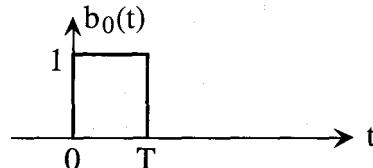


L'étude des conséquences spectrales de cette opération est menée en s'aidant ici encore du modèle $x^*(t)$.



On connaît les relations (1) et (I). Il s'agit d'établir la relation (2) (puis (II)) par TF en observant que $x_0(t)$ se déduit de $x^*(t)$ par convolution avec $b_0(t)$. En effet $x_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]b_0(t - kT_e)$ ou encore $x_0(t) = x^*(t) * b_0(t)$, où $b_0(t)$ est le signal

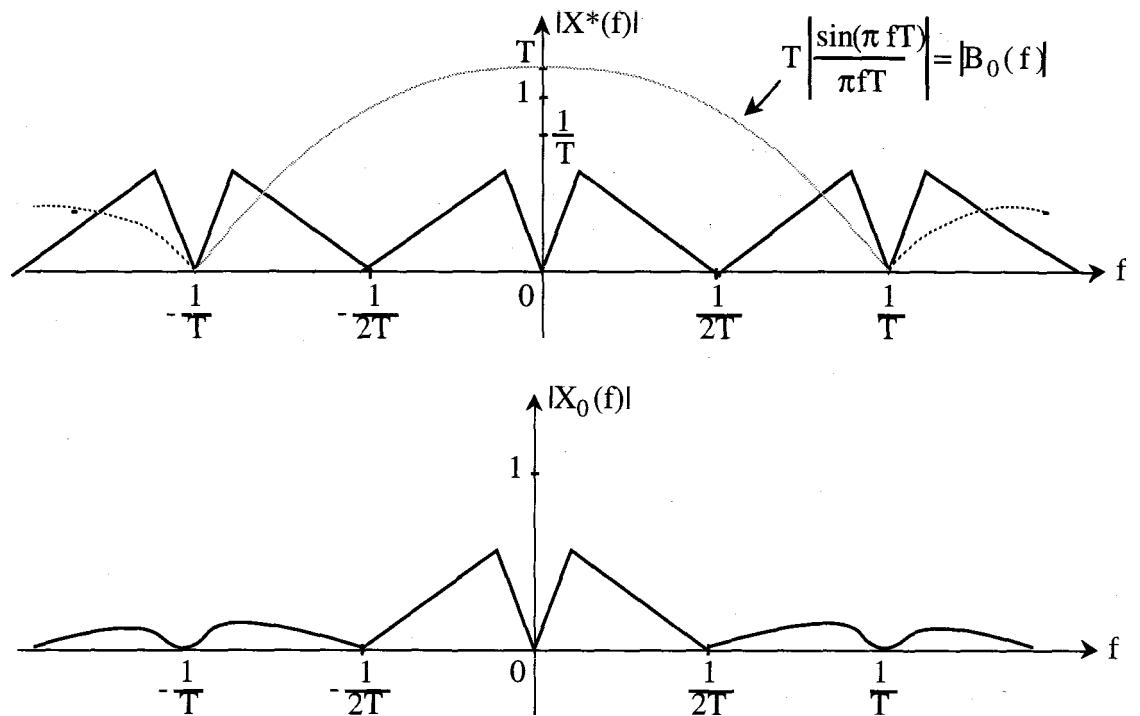
rectangulaire suivant :



On en déduit (II) :

$$X_0(f) = X^*(f) e^{-j\pi f T_e} T_e \frac{\sin(\pi f T_e)}{\pi f T_e}$$

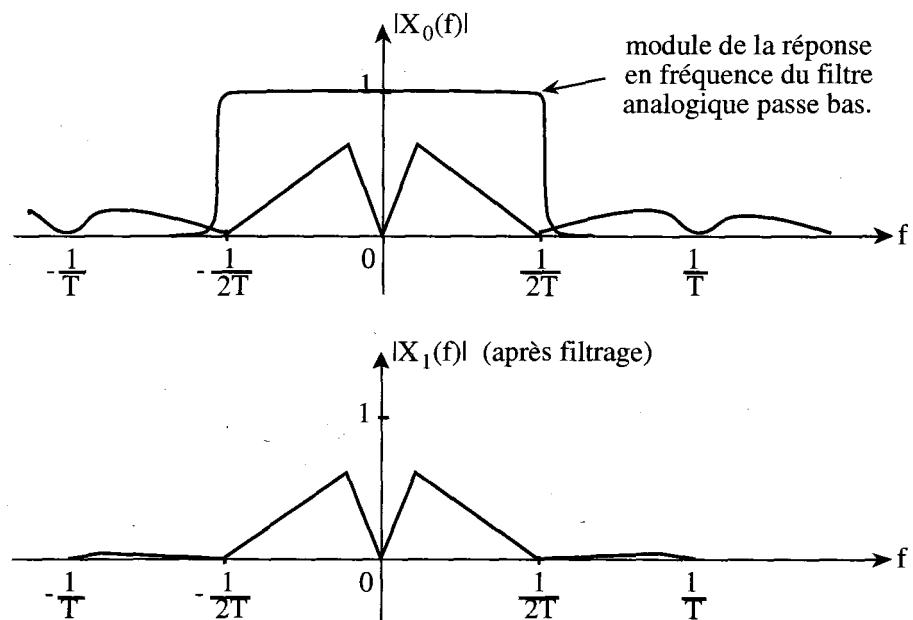
$$X_0(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_e) e^{-j\pi f T_e} T_e \operatorname{sinc}(\pi T_e f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - n f_e) \operatorname{sinc}(\pi T_e f) e^{-j\pi f T_e}$$



On observe que la "dépériodisation" spectrale a été effectuée au prix d'une légère déformation du motif utile $\left(|f| < \frac{1}{2T}\right)$ et de la subsistance de lobes secondaires

placés tous les multiples de fe et s'atténuant en $\frac{1}{f}$.

Afin de limiter l'influence de ces lobes secondaires, il est courant de réaliser un filtrage analogique passe bas, de fréquence de coupure fc voisine de $\frac{fe}{2}$ après un blocage d'ordre zéro. Ce filtrage a pour effet de lisser "les marches d'escalier" introduites par le bloqueur.



3.3. ERREURS DE CONVERSION.

Les erreurs décrites dans les paragraphes 1 à 3 sont valables pour les CAN comme pour les CNA. Les illustrations sont faites pour ces derniers, mais sont facilement transposables.

3.3.1. Erreur de gain.

La tension de pleine échelle est toujours légèrement différente de ce qui est prévu en théorie. L'écart entre les valeurs théorique et pratique est l'**erreur de gain** (figure 9).

Pratiquement, le fabricant de convertisseurs Analog Devices définit cette erreur ainsi : c'est l'écart entre la valeur théorique et la valeur réelle mesurée sur la dernière transition du convertisseur et exprimé en LSB. Cette mesure suppose que l'ajustage du zéro soit parfait.

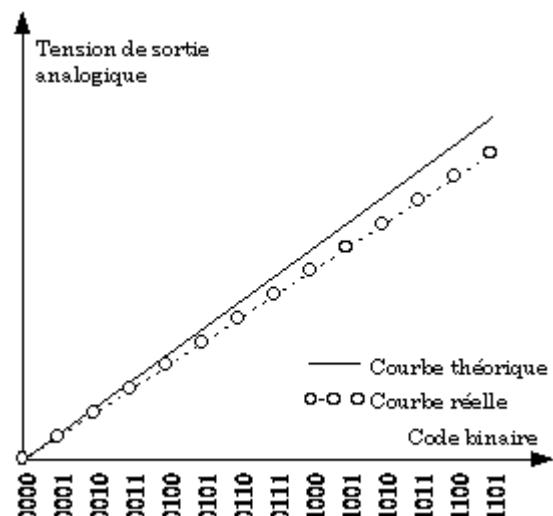


Fig. 9. Erreur de gain.

3.3.2. Erreur d'offset.

De même, le code binaire 0 ne correspond pas forcément à une tension rigoureusement nulle en sortie. Cette tension est la **tension de décalage, ou d'offset**.

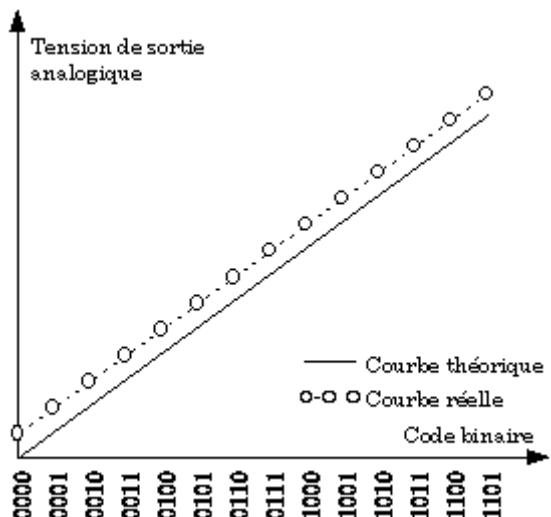


Fig. 10. Erreur d'offset.

En pratique, Analog Devices définit cette erreur comme étant l'écart entre la valeur théorique et la valeur réelle mesurée sur la première transition du convertisseur et exprimé en LSB. En pratique, pour ajuster un convertisseur, on réglera d'abord l'offset, et ensuite le gain.

3.3.3. Erreurs de linéarité.

L'erreur de linéarité est due au fait que la résolution des convertisseurs n'est pas constante.

On distingue deux formes de non linéarité :

- la non linéarité intégrale ;
- la non linéarité différentielle.

La **non linéarité intégrale**, exprimée en LSB, est la différence maximum constatée sur toute la plage de conversion entre les valeurs théoriques et les valeurs mesurées.

Cette mesure n'a évidemment de sens que si le zéro et le gain sont correctement réglés.

La fonction de transfert est représentée figure 11.

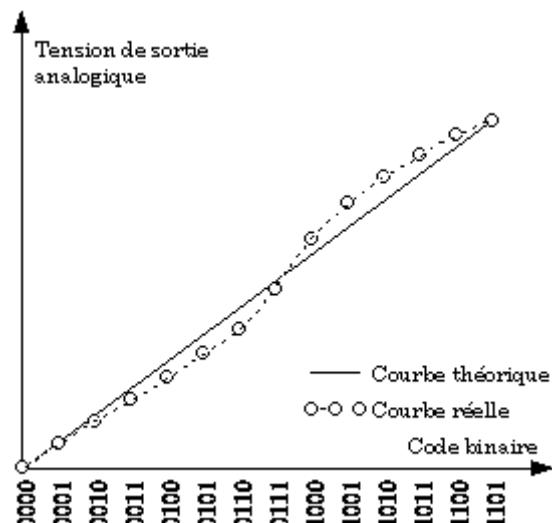


Fig. 11. Erreur de linéarité intégrale.

La **non linéarité différentielle** concerne la différence de tension obtenue lors du passage au code numérique immédiatement supérieur ou inférieur ; théoriquement, cette valeur vaut 1 LSB. La non linéarité différentielle sera la différence entre l'écart mesuré et le LSB théorique. L'illustration est donnée en figure 12.

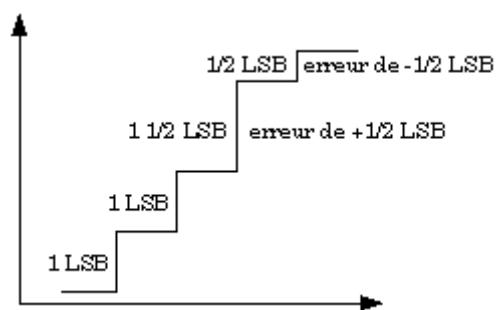


Fig. 12. Erreur de linéarité différentielle.

La valeur donnée dans les spécifications des constructeurs est la plus grande valeur constatée sur toute la plage de conversion.

La non linéarité différentielle est plus gênante que la non linéarité intégrale, surtout dans le cas de mesures comparatives effectuées sur une faible partie de la plage de conversion.

En général, et pour des causes technologiques bien identifiées, le maximum de non linéarité différentielle se trouve à la moitié de la pleine échelle (passage du MSB de 0 à 1), et ensuite à moindre degré à 1/4 et 3/4 de la pleine échelle.

On sera donc vigilant quand on fera des mesures comparatives dans ces zones là.

3.3.4. Monotonicité (CNA).

Ce phénomène est le même que le précédent, mais poussé à l'extrême : il peut arriver que la pente de la courbe de conversion change de signe. Pour une tension analogique de sortie, il ne sera pas possible d'attribuer un nombre binaire correspondant : il y aura plusieurs solutions possibles.

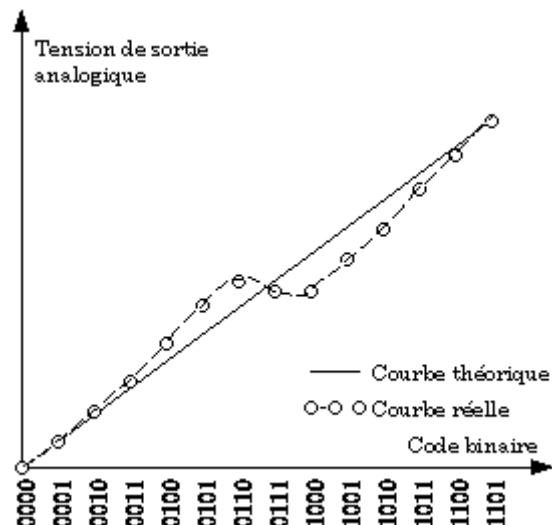


Fig. 13. Monotonicité.

3.3.5. Codes manquants (CAN).

Cette erreur pour le CAN est le pendant de la monotonicité pour le CNA.

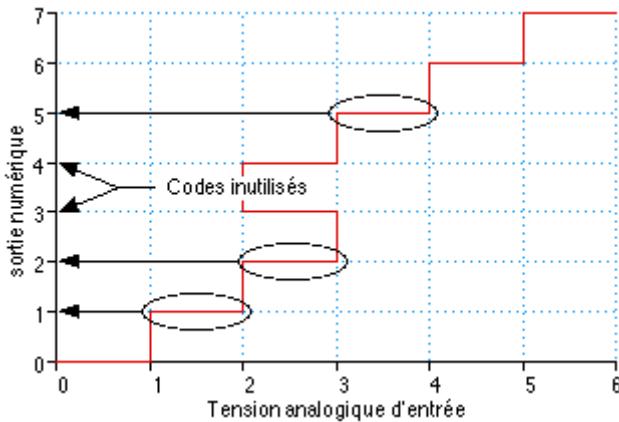


Fig. 14. Codes manquants

Lors de la conversion, la courbe donnée binaire = $f(\text{tension analogique})$ n'étant pas une fonction (plusieurs codes binaires possibles pour une même tension d'entrée), le convertisseur choisira la plus faible valeur binaire parmi celles possibles. Les autres ne seront jamais utilisées, et formeront des "trous" dans le code binaire : ce sont les codes manquants.

3.3.6. Temps d'établissement (CNA).

Les étages de sortie des CNA sont généralement des amplificateurs opérationnels. On a vu que la tension de sortie va varier "par bonds" quand le code binaire d'entrée va changer. De ce fait, l'ampli de sortie va fonctionner en mode impulsif. La stabilisation de la tension de sortie n'est pas immédiate : elle peut être du type premier ordre ou oscillatoire amortie (deuxième ordre et plus).

On appellera **temps d'établissement** (setting time en Anglais) le temps mis par la sortie pour atteindre un certain pourcentage de la tension finale stabilisée lorsque l'entrée va varier.

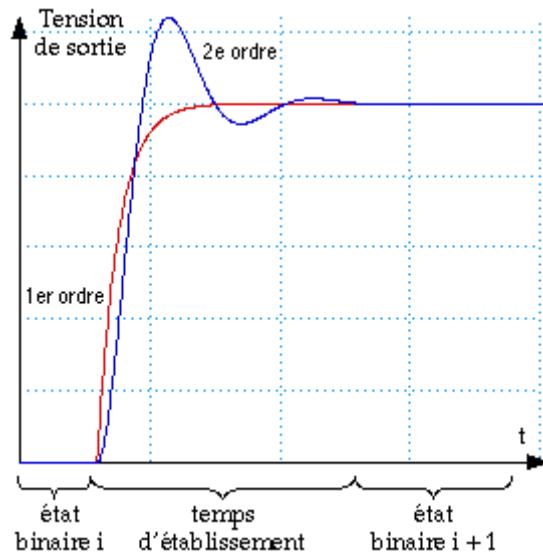


Fig. 15. Temps d'établissement.

3.3.7. Temps de conversion (CAN).

Lorsqu'on numérise un signal, on envoie au CAN un ordre de conversion, et on récupère la valeur binaire en sortie au terme d'un délai appelé **temps de conversion**.

3.3.8. Précision du convertisseur.

Pour obtenir la précision globale du convertisseur, on cumulera toutes les erreurs précédemment citées.

En général, ces erreurs sont données soit en % de la pleine échelle (% FS pour full scale), soit en fraction de quantum ($\pm 1/2$ LSB par exemple).

4. CONVERSION NUMÉRIQUE / ANALOGIQUE.

Il existe principalement deux types de convertisseurs numérique / analogique sur le marché : les convertisseurs à résistances pondérées, et les convertisseurs à réseau R/2R. Ces derniers sont prédominants.

Il existe aussi des convertisseurs à réseaux de condensateurs fonctionnant sur le même principe de base que les réseaux à résistances.

4.1. ARCHITECTURE GÉNÉRIQUE.

Quel que soit le type de convertisseur étudié, on retrouvera toujours la même structure, constituée des mêmes éléments de base ; seule la réalisation technologique des blocs de base différera d'un convertisseur à l'autre et en fera sa spécificité.

Il est donc intéressant d'étudier l'architecture générique mettant en évidence les points communs à tous les convertisseurs.

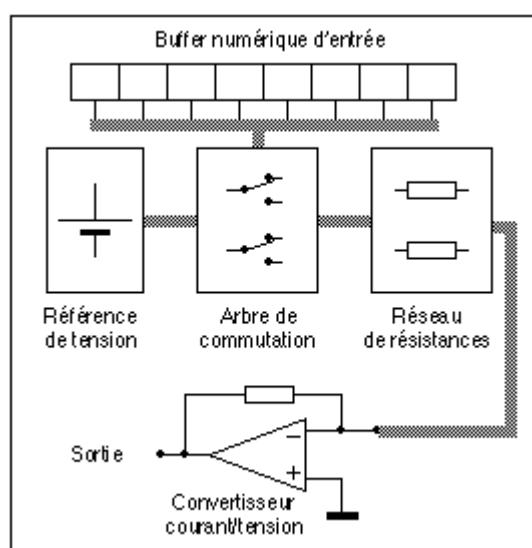


Fig. 16. Architecture des CNA.

Sur la figure 16, on distingue 5 blocs :

- un buffer numérique d'entrée : celui-ci est chargé de garder en mémoire la donnée numérique pendant le temps de conversion ; il sert aussi d'interface entre les parties numérique et analogique du convertisseur ;

- une référence de tension : son importance est capitale pour la précision de l'ensemble ; c'est elle qui donne le signal de référence servant à la détermination des tensions de sortie ;
- l'arbre de commutation (switching tree en anglais) : il est commandé par le buffer d'entrée et va déterminer les résistances qui seront alimentées par la référence de tension ;
- le réseau de résistances : c'est un ensemble de résistances, qui, alimentées par la référence de tension via l'arbre de commutation vont générer des courants très précis fonction du code binaire d'entrée ;
- le convertisseur courant/tension est un ampli servant à transformer les courants générés par le réseau de résistances en tension de sortie. Il est optionnel, certains CNA ne l'incluent pas, d'autres l'incluent, mais laissent le choix de l'utiliser ou non.

On retrouvera donc toujours ces éléments de base, la distinction entre les convertisseurs se faisant généralement dans le réseau de résistances (et par voie de conséquences dans l'arbre de commutation).

4.2. CNA À RÉSISTANCES PONDÉRÉES.

4.2.1. Principe.

Le principe de fonctionnement de ce montage est extrêmement simple : il est basé sur un amplificateur opérationnel monté en sommateur inverseur.

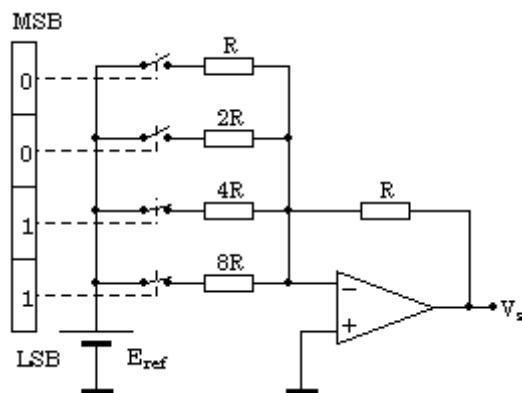


Fig. 17. Schéma de principe d'un CNA à résistances pondérées (4 bits).

Les principaux constituants sont :

- un amplificateur opérationnel.
- une référence de tension qui va définir la pleine échelle du convertisseur.
- une série de résistances dans un rapport des puissances successives de 2 (1, 2, 4, 8, 16...).
- une série de registres numériques contenant le code binaire d'entrée.
- des commutateurs analogiques (interrupteurs commandés électriquement par les signaux logiques) reliant les résistances à la référence de tension.

Le schéma de la figure 17 montre un CNA 4 bits. Par extension, on peut construire un CNA ayant un nombre de bits quelconque en augmentant les entrées logiques et en y affectant des résistances de valeur convenable (toujours dans le rapport des puissances de deux).

On remarque que le LSB est affecté à la résistance de plus grande valeur, et le MSB à celle de plus faible valeur.

Nous appellerons a_0 le MSB, a_1 le bit suivant, ..., et a_{N-1} le LSB d'un convertisseur à N bits.

Si on applique le résultat de l'ampli sommateur inverseur à ce montage, on trouve :

$$V_s = -E_{ref} R \left(\frac{a_0}{R} + \frac{a_1}{2R} + \frac{a_2}{4R} + \dots + \frac{a_{N-1}}{2^{N-1}R} \right) \quad [3]$$

soit :

$$V_s = \frac{-E_{ref}}{2^{N-1}} (2^{N-1}a_0 + 2^{N-2}a_1 + \dots + a_{N-1}) \quad [4]$$

Dans le cas de notre convertisseur 4 bits, la solution est :

$$V_s = \frac{-E_{ref}}{8} (8a_0 + 4a_1 + 2a_2 + a_3) \quad [5]$$

Le MSB est affecté du coefficient le plus fort, et les bits successifs voient leur coefficient divisé par deux par rapport au bit précédent.

On peut calculer la résolution (LSB) de ce convertisseur : c'est la variation de la tension de sortie lorsque l'entrée numérique varie d'une unité, soit :

$$LSB = \frac{E_{ref}}{8} \quad [6]$$

Dans le cas général d'un convertisseur à N bits, on aurait :

$$LSB = \frac{E_{ref}}{2^{N-1}} \quad [7]$$

L'équation [2] va nous permettre de calculer la plage de conversion. Si on injecte le résultat de [7] dans l'équation [2], on obtient :

$$\Delta V_{max} = \frac{(2^N-1) E_{ref}}{2^{N-1}} \quad [8]$$

où ΔV_{max} représente la plage de conversion, ou pleine échelle du convertisseur. Pour notre convertisseur 4 bits, cette pleine échelle vaut donc $15/8^{\text{ème}}$ de E_{ref} . Ceci est dû au

fait que le convertisseur de N bits comporte 2^N états différents, dont **zéro**, ce qui fait que le dernier état est égal à 2^N-1 , et pas 2^N .

4.2.2. Précision.

Le schéma de ce convertisseur nous permet de mieux comprendre les erreurs citées au paragraphe précédent :

- L'erreur de gain sera directement proportionnelle à l'imprécision de la référence de tension et de la résistance de contre-réaction.
- L'erreur d'offset sera due à l'offset de l'amplificateur.
- L'erreur de linéarité et la monotonie seront dues au mauvais appairage des résistances dans le rapport des puissances de 2.
- Le temps d'établissement sera donné par la réponse de l'amplificateur à un échelon de tension.

Pour revenir aux erreurs de linéarité, il faut noter que la précision relative sur chaque résistance aura un impact sur le résultat global qui va doubler tous les bits en allant du LSB vers le MSB.

En effet, une erreur de 10% de la résistance du LSB ne va fausser le résultat que de 1,1 fois le LSB.

Par contre, 10% d'erreur sur la résistance du MSB va induire une erreur égale à 1,1 fois le MSB, soit $2^{(N-1)}$ fois plus que celle faite sur le LSB dans les mêmes conditions... Cette erreur peut facilement être supérieure au LSB et entraîner des non monotonicités dans la réponse.

4.2.3. Avantages / inconvénients.

L'avantage d'un tel montage est la simplicité. C'est un bon outil pédagogique.

Malheureusement, la réalisation pratique est difficile du fait de la dynamique des résistances utilisées (2^N pour un convertisseur à N bits), et, on l'a vu, une tolérance nécessaire sur les résistances divisée par 2 à chaque bit supplémentaire. Pour un convertisseur à 8 bits, la précision de la résistance du MSB devra être meilleure que 1% pour être en limite de non monotonie, et en pratique, on prendra une résistance à 2% au minimum.

Le principal problème provient de l'intégration de ces résistances : dans les circuits intégrés, on sait tenir une telle précision, mais la proportionnalité des résistances est obtenue en leur donnant des dimensions proportionnelles à leur valeur. La dynamique élevée requise ici est vite prohibitive.

Ces défauts font que ce convertisseur n'est pas viable économiquement, surtout si on le compare au CNA à réseau R/2R, plus facile à intégrer.

4.3. CNA À RÉSEAU R/2R.

4.3.1. Principe

Ce type de convertisseur prend en compte les défauts du précédent : il est bâti autour d'un réseau de résistances composé de seulement deux valeurs, R et 2R. Il n'y a donc plus le défaut inhérent à la grande dynamique de valeurs des résistances.

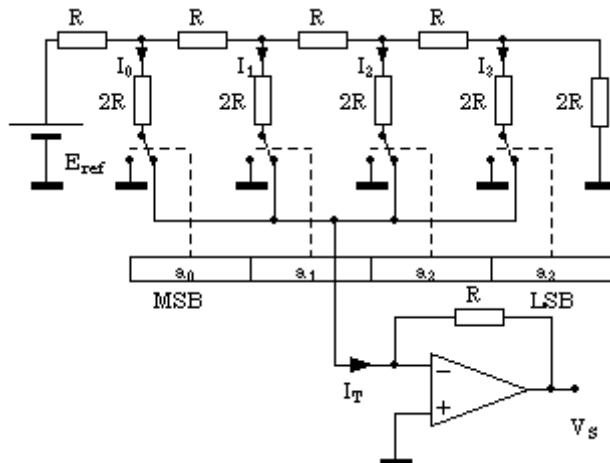


Fig. 18. Schéma de principe d'un CNA à réseau R/2R (4 bits).

Les composants sont sensiblement les mêmes que pour le CNA à résistances pondérées :

- un amplificateur opérationnel ;
- une référence de tension qui va définir la pleine échelle du convertisseur ;
- un réseau de résistances R/2R ;
- une série de registres numériques contenant le code binaire d'entrée et
- des commutateurs analogiques (interrupteurs commandés électriquement par les signaux logiques) reliant les résistances soit à la masse, soit à l'entrée - de l'ampli.

L'amplificateur va fonctionner ici en convertisseur courant/tension : en fonction du positionnement des commutateurs, le courant total I_T sera plus ou moins élevé, et sera transformé en tension par l'ampli et la résistance de contre-réaction. Certains CNA offrent d'ailleurs simplement une sortie en courant, et c'est à l'utilisateur de l'utiliser tel quel, ou de le convertir en tension.

Avant d'attaquer la mise en équation, nous allons faire un constat, et partant de là, étudier certaines propriétés du réseau R/2R.

L'entrée + de l'ampli est à la masse ; si on considère que cet ampli est parfait, l'entrée - est au même potentiel, soit 0 (masse virtuelle). La position du commutateur n'influe donc nullement sur le fonctionnement du réseau : les courants I_0 à I_3 sont dirigés soit vers le convertisseur courant/tension, soit dérivés à la masse, mais le potentiel à la borne commune des commutateurs reste le même, à savoir 0.

Pour simplifier le raisonnement, nous allons donc étudier le réseau suivant :

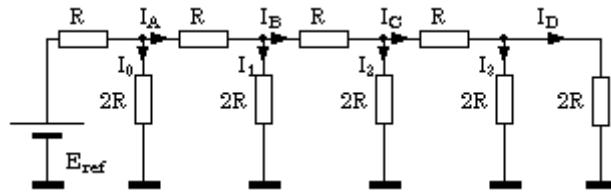


Fig. 19. Réseau R/2R.

Les courants I_3 et I_D sont égaux (diviseur de courant avec deux résistances égales).

On a donc :

$$I_3 = I_D = \frac{I_C}{2} \quad [9]$$

Les branches où circulent I_3 et I_D sont en fait deux résistances égales ($2R$) en parallèle, soit l'équivalent d'une résistance moitié, donc R . Cette résistance équivalente est en série avec celle où circule I_C . Le courant I_C circule donc dans une résistance équivalente à $2R$. Le circuit devient :

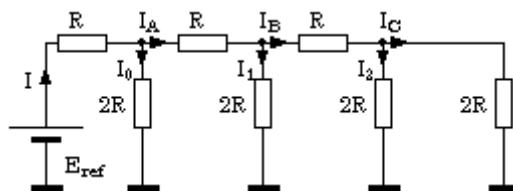


Fig. 20. Réseau réduit équivalent.

On retombe strictement sur le même type de réseau que précédemment. On en déduit facilement :

$$I_3 = I_C = \frac{I_B}{2}, \quad I_1 = I_B = \frac{I_A}{2}, \quad I_0 = I_A = \frac{I}{2} \quad [10]$$

L'étape finale du raisonnement donne le réseau suivant :

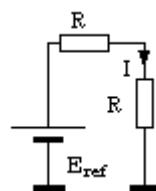


Fig. 21. Réseau final.

On en déduit la valeur des courants :

$$I_0 = \frac{E_{ref}}{4R}, \quad I_1 = \frac{E_{ref}}{8R}, \quad I_2 = \frac{E_{ref}}{16R}, \quad I_3 = \frac{E_{ref}}{32R} \quad [11]$$

Le réseau R/2R nous fournit des courant en progression géométrique de raison 2 : on retombe sur la même chose que le convertisseur à résistances pondérées.

La tension de sortie V_s du convertisseur sera égale à :

$$V_s = \frac{-E_{ref}}{4} \left(a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} \right) \quad [12]$$

Le résultat est donc du même genre que pour le CNA à résistances pondérées. On note un facteur 1/4, mais on peut remarquer qu'il suffit de mettre une résistance égale à 4R en contre-réaction pour retomber sur le même résultat.

4.3.2. Précision.

Pour ce qui est de la précision requise sur les résistances, on retrouve les mêmes défauts que pour le CNA précédent :

- la référence de tension et la résistance de contre-réaction vont engendrer la même erreur de pleine échelle.
- une erreur sur la résistance du MSB aura $2^{(N-1)}$ fois plus d'influence que la même erreur sur le LSB.

Par contre, l'intégration sera plus aisée, et on sera capables de faire des convertisseurs précis et à plus grand nombre de bits que le CNA à résistances pondérées.

En instrumentation, on rencontrera fréquemment des CNA à 12bits de ce type, notamment sur des cartes d'acquisition de données pour micro-ordinateurs.

La structure du réseau et des commutateurs autorise une vitesse de conversion assez grande, car lors du basculement du commutateur, les résistances restent au même potentiel : il n'y a donc pas d'influence des inévitables capacités parasites qui mettraient du temps à se charger et à se décharger à travers les résistances. Ceci autorise l'utilisation de résistances d'assez grande valeur, ce qui limite l'erreur due aux résistances à l'état passant des commutateurs (quelques dizaines à quelques centaines d'ohms).

4.4. UTILISATION DES CNA.

4.4.1. Utilisation " classique "

Les CNA sont bien entendu utilisables tels quels pour faire de la conversion numérique/analogique.

On les retrouvera en sortie de chaîne de traitement numérique lorsqu'un signal analogique est requis (commande d'un transducteur, contrôle de processus...).

Ils seront suivis d'un filtre plus ou moins sophistiqué destiné à supprimer les " marches d'escalier " inhérentes à la numérisation. Dans le cas de l'audio numérique, le filtrage est d'une importance fondamentale, et c'est lui qui conditionne grandement la qualité du son. Cet aspect n'est donc pas à sous estimer.

Il faudra faire attention au filtrage dans le cas où ces convertisseurs sont inclus dans une boucle d'asservissement : les escaliers peuvent être néfaste à la stabilité du système.

4.4.2. Amplificateurs à gain programmable.

Les montages étudiés peuvent se résumer tous les deux à une chose : ce sont des amplificateurs d'une tension continue (E_{ref}) dont le gain est ajustable par une entrée numérique (les codes binaires).

On peut donc penser à une autre utilisation des CNA : si on remplace E_{ref} par une tension alternative quelconque, on peut utiliser l'entrée numérique pour faire varier le gain de l'ampli, et donc le signal en sortie.

Cette application ouvre la porte aux VCA (voltage controlled amplifier), atténuateurs à commande numérique (donc télécommandables à distance)...

4.4.3. Filtres programmable

De la même manière, on peut intégrer ces réseaux dans certains schémas de filtres, et obtenir ainsi des filtres à fréquence de coupure variable et commandée par un signal numérique.

4.4.4. Multiplieur.

Une autre application importante est la multiplication de signaux : l'un sera analogique (en remplacement de E_{ref}), et l'autre numérique. Ce signal numérique pourra être un signal préalablement numérisé. La sortie va donner le produit des deux signaux.

4.4.5. Attention !!!

Toutes ces applications "spéciales" ne peuvent marcher que s'il est possible d'appliquer des tensions bipolaires sur l'entrée E_{ref} . Il faut donc pouvoir alimenter symétriquement le montage, et les commutateurs analogiques doivent être bidirectionnels, ce qui n'est pas toujours le cas. On peut toujours polariser le signal pour qu'il soit globalement unipolaire, mais ces applications perdent de leur intérêt : la tension de polarisation étant traitée comme le signal, il sera difficile de l'extraire en sortie du convertisseur.

Les fabricants de convertisseurs indiquent si leurs produits sont conçus pour fonctionner dans ces applications "dérivées". Il faudra donc se reporter à leur documentation.

5. CONVERSION ANALOGIQUE / NUMÉRIQUE.

Parmi les principes de conversion analogique / numérique disponibles, nous en avons choisis trois particulièrement représentatifs, et qui se différencient très nettement en terme de compromis vitesse / précision :

- les **convertisseurs parallèles** (ou flash en Anglais), très rapides, mais limités en précision. Leur rapidité les destine en particulier aux oscilloscopes numériques, qui se contentent de convertisseurs à 6 ou 8 bits.
- les **convertisseurs à approximations successives**, moins rapides que les précédents, mais avec des possibilités en résolution bien supérieures (8 à 16 bits). Ils couvrent un vaste champ

d'applications en mesure, de la carte d'acquisition de données pour micro ordinateur aux CAN intégrés dans des micro contrôleurs qui servent à piloter les applications les plus variées...

- les **convertisseurs à comptage d'impulsion** sont très précis, et par construction, sont aptes à filtrer des bruits importants. En contrepartie, ils sont très lents, donc destinés à faire des mesures de signaux stabilisés.

5.1. ARCHITECTURE GÉNÉRIQUE.

Comme pour le CNA, il peut être intéressant de voir les points communs aux CAN de technologies différentes (hors convertisseurs à rampe).

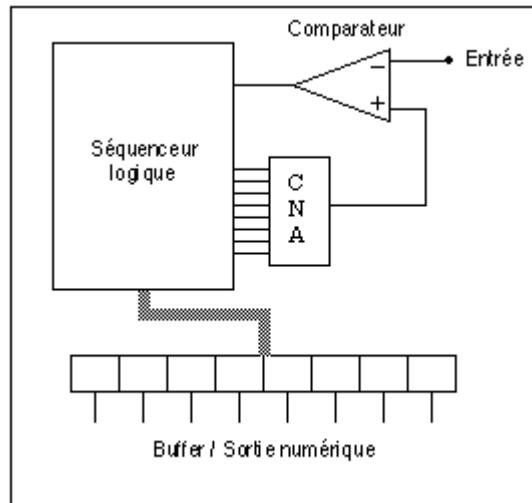


Fig. 22. Architecture d'un CAN

La pièce centrale du schéma de la figure 22 est... un CNA !

En pratique, un séquenceur logique va balayer les codes binaires (de façon plus ou moins astucieuse), ces codes vont être convertis en une tension analogique par le CNA, tension qui va être comparée à celle d'entrée. Le basculement du comparateur arrête le processus, et la donnée est basculée et mémorisée dans le buffer de sortie.

Il ne faut pas oublier ce que cache ce schéma, à savoir la composition du CNA, et en particulier la référence de tension. Cette référence peut d'ailleurs être intégrée ou non dans le CAN ; dans ce dernier cas, il faudra en mettre une à l'extérieur (la remarque est valable pour les CNA).

5.2. CAN PARALLÈLE ou FLASH.

5.2.1. Principe.

La tension à mesurer est comparée simultanément à $2^N - 1$ tensions de référence, N étant le nombre de bits du convertisseur. Le nombre $2^N - 1$ s'explique par la notion de pleine échelle vue précédemment : 0 est l'état logique supplémentaire qui fait 2^N états au total pour un convertisseur à N bits.

Ce convertisseur est composé des éléments suivants :

- une tension de référence E_{ref} .

- un réseau de 2^N résistances montées en série. Elles ont la même valeur R à l'exception notable de la première et de la dernière qui ont la valeur $3R/2$ et $R/2$: c'est l'astuce qui permet de faire basculer le premier comparateur non pas lorsque la tension d'entrée est égale à 1 LSB, mais $1/2$ LSB. Au lieu d'avoir une erreur maxi de 1LSB (toujours par défaut), on aura une erreur de $\pm 1/2$ LSB (par excès ou par défaut) : voir plus haut. La dernière résistance vaut $3R/2$ pour équilibrer le réseau, et pour que le LSB soit conforme à sa valeur donnée dans l'équation [1].

- 2^N-1 comparateurs comparent en permanence la tension à mesurer à une des tensions de référence délivrée par le pont de résistances.

- un décodeur logique permet de traduire l'état des comparateurs en code binaire de sortie.

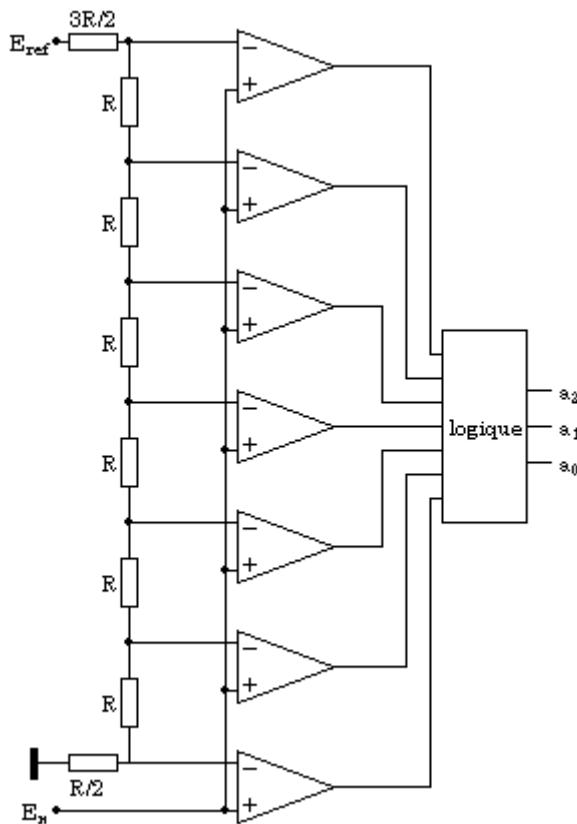


Fig. 23. CAN parallèle à 3 bits.

5.2.2. Précision.

Dans le principe, ce CAN pourrait être relativement précis. En pratique, on butte sur un inconvénient de taille : il faut 2^N-1 comparateurs pour un convertisseur à N bits, soit 63 comparateurs pour un 6 bits et 255 pour un 8 bits ! Le procédé devient donc vite limitatif.

La principale source d'erreur provient de l'offset des comparateurs qui va introduire de la non linéarité différentielle.

La rapidité va être conditionnée par la vitesse des comparateurs et du décodeur logique. La cadence de conversion est nettement supérieure au MHz, et peut atteindre des centaines de MHz pour les oscilloscopes numériques.

5.2.3. Utilisation.

De par leur principe, ces CAN sont limités à 6 ou 8 bits, ce qui est insuffisant pour de l'instrumentation.

Ce handicap est négligeable en oscilloscopie numérique : certains constructeurs utilisent des convertisseurs 6 bits, ce qui est suffisant pour décrire l'axe vertical de l'écran avec une résolution supérieure à 2%.

Pour les applications requérant des vitesses élevées mais non extrêmes, on utilise des convertisseurs semi-parallèles, qui utilisent beaucoup moins de comparateurs et conservent une vitesse de conversion intéressante, ceci avec une résolution pouvant atteindre 12 bits.

5.3. CAN À APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

Ces convertisseurs sont très répandus car performants et bon marché (tout est relatif quand même !).

5.3.1. Principe.

Un schéma de principe est donné figure 24. On y trouve principalement une référence de tension, un CNA, un comparateur et un séquenceur logique piloté par horloge.

Le séquenceur logique délivre un code binaire à l'entrée du CNA. La tension de sortie de ce CNA est comparée à la tension à mesurer, et en fonction du résultat, le code binaire est modifié de manière à approcher la valeur à trouver.

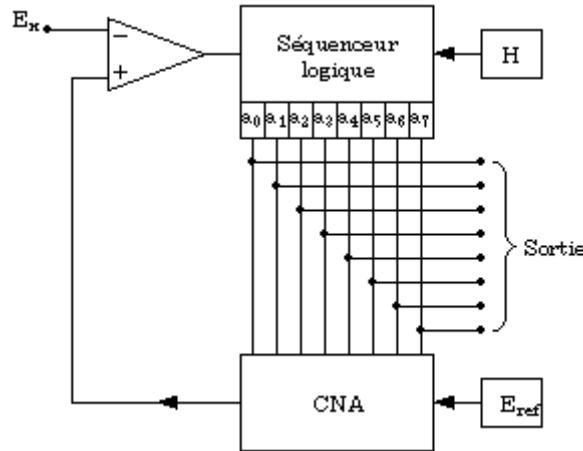


Fig. 24. CAN à approximations successives.

L'exemple le plus simple de séquenceur logique est un compteur binaire qui s'incrémenté d'une unité à chaque coup d'horloge. Tous les codes binaires sont successivement comparés à la tension d'entrée. Quand le signal de sortie du comparateur s'inverse, la tension de référence vient juste de dépasser la valeur à mesurer : la conversion est terminée, il ne reste qu'à lire la valeur binaire (donnée ici par excès).

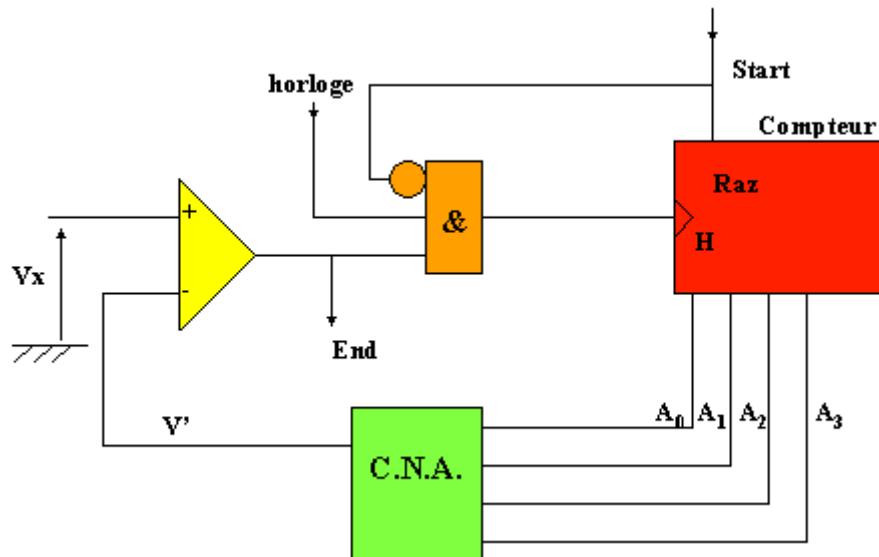


Fig. 25. Schéma du convertisseur à approximation successive « pédagogique »

L'impulsion " Start " (niveau haut) met à zéro le compteur et bloque la porte " ET ". La tension de sortie V' du C.N.A. est nulle. La sortie " End " est au niveau haut. Lorsque " Start " retrouve l'état bas, la porte " ET " est validée, le signal d'horloge arrive au compteur qui s'incrémente et fait évoluer la sortie du C.N.A. par bonds successifs de la valeur de la résolution. Quand $V' > V_x$, la sortie du comparateur passe au niveau bas (End) et bloque le compteur à la valeur numérique représentant V_x .

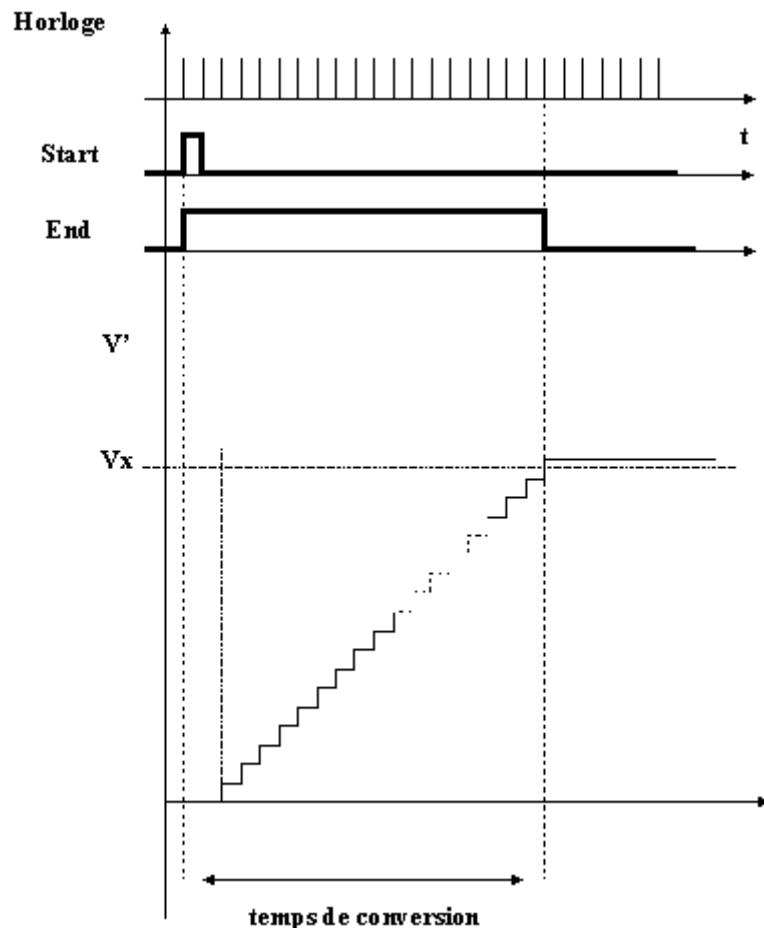


Fig 26. Chronogramme des différents signaux

Ce séquenceur ne présente en pratique aucun intérêt, si ce n'est l'aspect pédagogique. Pour un convertisseur 12bits, il faudrait entre 0 et 4095 coups d'horloge : le temps de conversion ne serait pas constant, et surtout, serait beaucoup trop long pour les fortes valeurs de tension d'entrée.

Les décodeurs fonctionnent en fait sur le principe de la dichotomie (figure 27) :

- on compare d'abord la tension à mesurer E_x à une tension de référence correspondant à tous les bits à 0 sauf le MSB à 1 (étape 1). Si cette tension de référence est inférieure à E_x , on laisse le MSB à 1, sinon, on le positionne à 0.
- tout en laissant le MSB dans l'état déterminé précédemment, on fixe le bit suivant à 1 et on applique le mode opératoire précédent (étape 2).
- on procède ainsi de bit en bit, N fois pour un convertisseur à N bits

La conversion est faite rapidement, et le temps de conversion est le même quelle que soit la tension d'entrée.

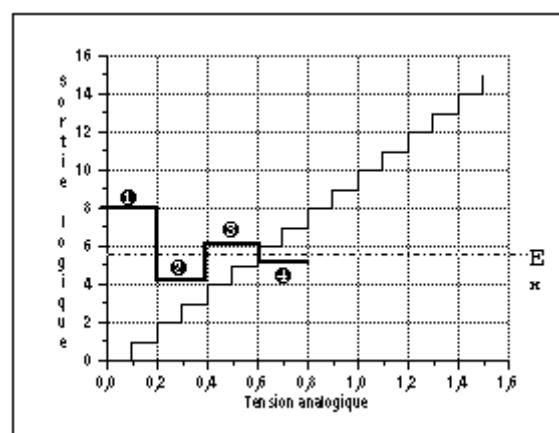


Fig. 27. Approximations par dichotomie.

Un exemple plus concret est donné à la figure 28 (principe de base réduit à 3 bits des ADC 800 et dérivés de chez National Semi-conducteurs).

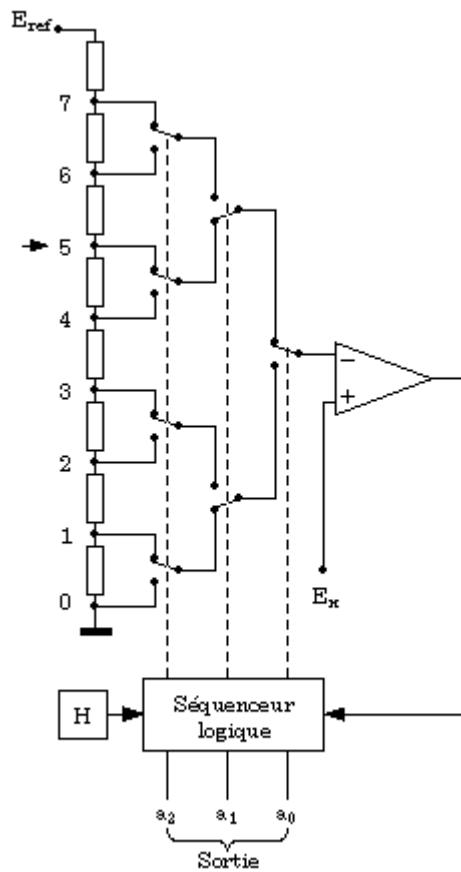


Fig. 28. Exemple de CAN à approximations successives.

On retrouve le réseau de résistances du convertisseur parallèle de la figure 23, mais chaque nœud de ce réseau est connecté non pas à un comparateur, mais à un réseau de commutateurs de connection (switching tree) dont le point final est relié à l'entrée d'un comparateur ; l'autre entrée de ce comparateur est reliée à la tension à mesurer E_x .

Chaque sortie logique du séquenceur actionne **simultanément** tous les commutateurs de même niveau (situés sur la même verticale sur le schéma).

Sur le schéma, $a_2a_1a_0$ est égal à la valeur binaire 101, soit 5. Si on suit le chemin des commutateurs fermés, on tombe bien sur la référence de tension correspondant à la valeur logique 5, soit 101 en binaire.

En appliquant la règle de séquencement précédente, on trouve le code logique en 3 approximations (CAN à 3 bits).

N.B : l'ensemble composé du réseau de résistances et des commutateurs est bien un CNA : il suffit de relier le point de sortie du réseau de connexion à un ampli suiveur pour avoir un type de CNA non étudié dans le paragraphe précédent mais parfaitement viable ! Il est seulement coûteux en résistances et en commutateurs si on le compare aux CNA à réseau R/2R ou à résistances pondérées.

5.3.2. Précision.

Ces convertisseurs sont précis : il suffit d'un bon comparateur associé à un CNA de la résolution voulue pour obtenir la précision désirée.

La rapidité sera limitée par le temps d'établissement du CNA, la vitesse de réaction du comparateur, et la complexité de la logique.

Les convertisseurs 12 bits courants (qui sont beaucoup utilisés en instrumentation) ont un temps de conversion de l'ordre de 10 à 200 μ s, ce qui fait des cadences d'échantillonnage comprises entre 5 et 100kHz environ.

Important : la conversion prend un certain temps ; de plus, vu le principe utilisé, la comparaison ne se fait pas avec des codes binaires successifs. Il est **impératif** dans ce cas de **figer la tension d'entrée pendant la conversion** .

Cette fonction va être réalisée par un **échantillonneur / bloqueur (E/B)** : lorsque l'ordre de conversion est donné par le séquenceur logique, la sortie de l'E/B prend la valeur courante du signal et se fige à cette valeur (effet mémoire).

L'E/B est nécessaire pour éviter des codes manquants et/ou des erreurs de conversion. Il est parfois intégré dans le CAN. Si ce n'est pas le cas, on le placera entre le signal à mesurer et le CAN.

Il faudra veiller à ce que sa précision (offset, erreur de gain) soit compatible avec le CAN placé en aval : inutile de mettre un CAN 16 bits ultra précis derrière un E/B de deuxième catégorie...

De même, on fera attention au temps d'établissement de ce composant.

5.3.3. Utilisation.

On retrouve ces composants un peu partout, de l'audio numérique aux cartes d'acquisition de données en passant par l'intégration dans des micro contrôleurs.

Comme les convertisseurs parallèles, ils mesurent des valeurs instantanées d'un signal ; il faudra donc s'assurer que celui-ci est exempt de bruit (du moins dans la limite de la résolution du CAN).

Cette fonction sera assurée par un câblage correct de la chaîne de mesure, et un filtrage avant acquisition (attention à la fréquence de cassure du filtre qui servira par la même occasion de filtre anti-repliement --loi de Shannon).

5.4. CAN À COMPTAGE D'IMPULSIONS.

Cette catégorie de convertisseur est très répandue : tous les multimètres "de poche" fonctionnent sur ce principe. Ils offrent une grande précision pour un faible coût, mais de par leur principe, ils ne peuvent mesurer que des tensions statiques ou faire des moyennes, contrairement aux convertisseurs précédents qui échantillonnent le signal instantané.

On trouve 4 types de convertisseurs à rampe (de simple à quadruple rampe : le principe reste globalement le même, les rampes supplémentaires venant compenser diverses erreurs), ainsi que des convertisseurs tension-fréquence.

Tous ces convertisseurs sont basés sur une opération de chronométrage (comptage d'impulsions) pendant un temps proportionnel à la tension d'entrée.

5.4.1. Convertisseur simple rampe analogique.

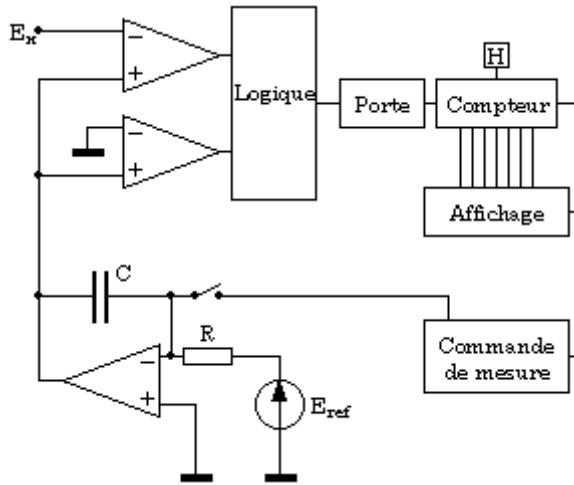


Fig. 29. Convertisseur simple rampe.

Le schéma de principe d'un tel convertisseur est donné figure 29. Les principaux éléments le constituant sont :

- un générateur de rampe (intégration d'une tension de référence).
- deux comparateurs comparant la rampe l'un au zéro, l'autre à la tension à mesurer.
- divers éléments de logique, dont un générateur de porte, une horloge, un compteur et un système d'affichage.

Lorsque la logique commande le démarrage d'une mesure, il y a remise à zéro de l'intégrateur (rampe) et des compteurs ; ensuite, la tension de rampe croît linéairement avec le temps (figure 30).

Quand le premier comparateur bascule à t_0 , la porte autorise le comptage des impulsions délivrées par l'horloge.

Quand le deuxième comparateur bascule, il ferme cette porte, et la valeur contenue dans les compteurs est verrouillée et transmise aux afficheurs.

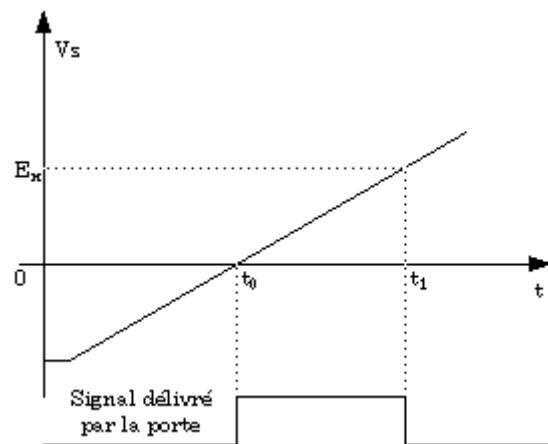


Fig. 30. Tension en sortie d'intégrateur et porte.

On a donc fait un chronométrage des impulsions de l'horloge pendant un temps proportionnel à la tension à mesurer.

Cette tension est égale à :

$$E_x = \frac{E_{ref}}{RC} (t_1 - t_0) \quad [13]$$

Si N est le nombre d'impulsions comptées et F la fréquence de l'horloge, on a :

$$E_x = \frac{E_{ref}}{RC} \frac{N}{F} \quad [14]$$

La pleine échelle sera donnée en nombre de points N_{max} , c'est à dire le comptage maximum autorisé par la dynamique des compteurs. Dans ce cas, la résolution sera l'inverse de N_{max} , et elle sera d'autant meilleure que N_{max} sera grand.

Le résultat montre qu'on aura intérêt à avoir une fréquence d'horloge élevée à rampe donnée pour avoir une bonne résolution.

Il indique aussi le plus gros défaut de ce convertisseur : la mesure dépend de la fréquence d'horloge, de la tension de référence, et des composants R et C de l'intégrateur.

Si on sait faire des horloges à quartz stables et des références de tension de précision, il en est tout autrement avec les capacités servant dans l'intégrateur : la précision initiale est moyenne (sauf tri), et les dérives (vieillissement, température...) difficiles à maîtriser.

L'autre gros défaut est une grande sensibilité au bruit : si la tension d'entrée varie sous l'effet d'une perturbation quelconque, le deuxième comparateur peut fermer la porte et arrêter le processus de comptage : la valeur lue sera fausse.

Il faut noter ici que la tension d'entrée doit impérativement être **fixe**, sinon, on mesure n'importe quoi !

Comme le comptage dure un certain temps, on voit que toutes ces conditions sont difficiles à réunir.

5.4.2. Convertisseur double rampe analogique.

Ce type de convertisseur va pallier les défauts du simple rampe. Le schéma de principe est le suivant :

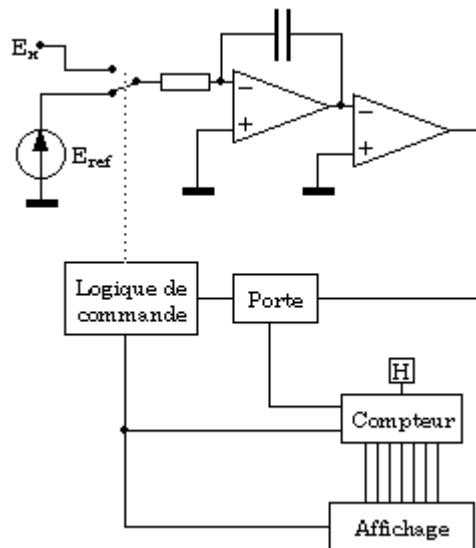


Fig. 31. Schéma de principe du convertisseur double rampe.

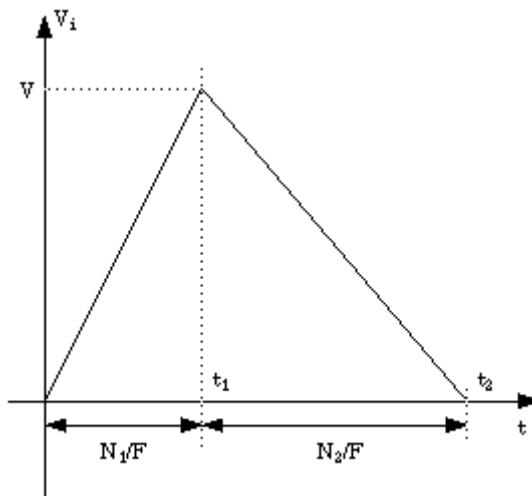


Fig. 32. Tension en sortie d'intégrateur.

La mesure se fait en deux temps :

- l'intégrateur ayant été remis à zéro, on commute son entrée sur la tension à mesurer. Le comptage démarre.

- quand il atteint un nombre N_1 déterminé, on commute l'entrée de l'intégrateur sur une tension de référence E_{ref} de polarité opposée à E_x . On compte les impulsions d'horloge jusqu'à ce que la tension de sortie de l'intégrateur s'annule, soit N_2 .

Si F est la fréquence de l'horloge, on peut écrire :

$$\frac{E_x}{RC} \frac{N_1}{F} = \frac{E_{ref}}{RC} \frac{N_2}{F} \quad [15]$$

$$E_x = E_{ref} \frac{N_2}{N_1} \quad [16]$$

La valeur affichée est directement proportionnelle au comptage, et elle est indépendante des composants R et C, et aussi de la fréquence de l'horloge. On pourrait comparer cette méthode à la double pesée avec une balance...

L'autre gros avantage du montage double rampe est son immunité au bruit : le signal étant intégré, seule la valeur moyenne du bruit sera prise en compte, soit une valeur nulle dans la plupart des cas. Si un parasite perturbe le signal lors de la mesure, seule son intégrale sera prise en compte ; s'il est bref, elle sera négligeable, et le résultat très peu modifié.

5.4.3. Résolution. Précision.

Pour ce type de convertisseurs, la dynamique n'est plus exprimée en bits, mais en points, qui correspondent à la capacité maximum du compteur.

Les multimètres de poche font 2000 ou 3000 points, les plus évolués en font 20 000 ou 30 000, et les multimètres de laboratoire dépassent allégrement les 100 000 points.

Il ne faut toutefois pas se leurrer quand à leur précision réelle, qui est souvent bien en deçà de la résolution.

Par exemple, un multimètre 2000 points (11 bits équivalent à 2048 points) ne dépasse guère une précision de 0,5% de pleine échelle, soit l'équivalent de 8bits ! Et encore, ceci est valable pour des mesures de tensions continues ; pour les mesures de courant ou de résistances, la précision peut tomber à 1 ou 2%. En fait, ce sont les composants externes au convertisseur (ampli, atténuateur) qui déterminent la précision.

Il faudra donc bien se garder de prendre pour argent comptant la valeur de l'affichage, et se rappeler que (au moins) le digit le moins significatif est faux. Dans tous les cas, il faut consulter la spécification de l'appareil pour connaître sa précision réelle, et ne pas se laisser impressionner par l'affichage...

5.5. CAN SIGMA-DELTA.

5.5.1. Le modulateur delta

Un modulateur delta se compose d'un comparateur et d'un intégrateur.

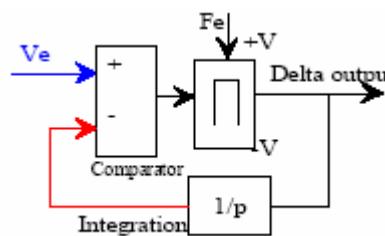


Fig. 33. Modulateur delta.

On compare le signal d'entrée (V_e) à la sortie de l'intégrateur ($V_{s.int}$). En fonction de cette comparaison, on va venir modifier le signe de la tension d'entrée de l'intégrateur. De cette manière, la tension $V_{s.int}$ va tendre à suivre l'évolution de la tension V_e :

- Si $V_e > V_{s.int}$: on va intégrer positivement de manière à « forcer » $V_{s.int}$ à se rapprocher de V_e .

- Si $V_e < V_{s.int}$: on va tendre à faire diminuer $V_{s.int}$ en appliquant une tension négative à l'entrée de l'intégrateur.

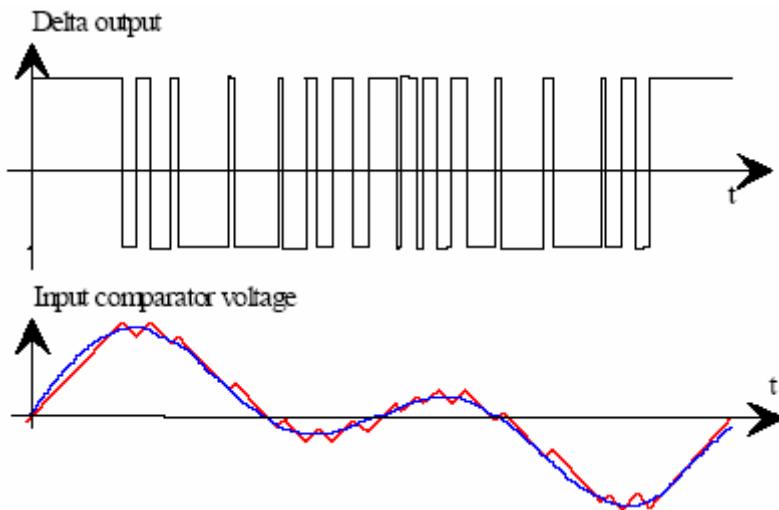


Fig. 34. Tension de sortie .

On obtient une sortie sur un bit en fréquence élevée.

Par cette modulation, on effectue un codage de la pente (dérivée) du signal. La démodulation reprend la même structure du modulateur auquel on associe un filtre passe bas.

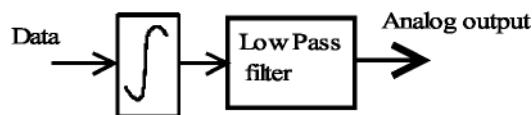


Fig. 35. Démodulateur delta .

Remarque : il existe des structures de modulateur delta qui adapte leur pente d'intégration en fonction de la nature du signal (AN1544 Motorola)

5.5.2. Structure Delta sigma

Cette structure découle du modulateur delta. En rajoutant sur l'entrée du signal un intégrateur, le modulateur delta effectue alors un codage de l'amplitude du signal d'entrée. Le comparateur voit deux intégrateurs sur ses entrées, en les faisant alors glisser en sortie du comparateur, on obtient la structure du convertisseur sigma delta :

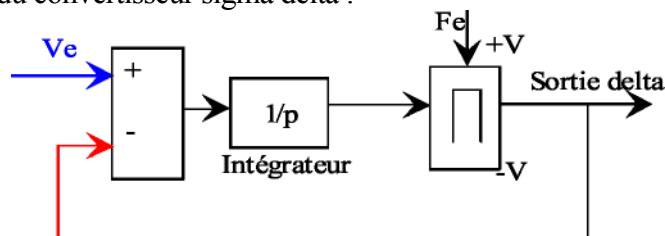


Fig. 36. Principe de convertisseur sigma delta .

De manière macroscopique, on s'assure que la valeur moyenne de la sortie delta suive la valeur moyenne de la tension d'entrée. En cas d'écart, l'intégrateur vient compenser.

$$\langle V_{s \text{ delta}} \rangle = \langle V_e \rangle$$

La sortie est dans ce cas sur un bit en très haute fréquence. On associe au convertisseur un filtre numérique décimateur qui a pour objectif de fournir un signal numérique au format désiré et à la fréquence souhaitée. De plus il élimine le bruit hors de la bande passante du signal.

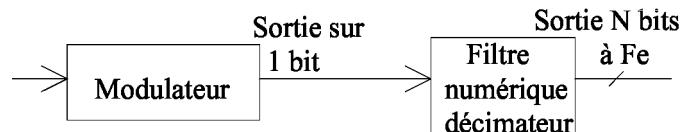


Fig. 37. Schéma de principe de CAN sigma delta .

Pour résumer, les convertisseurs sigma-delta ne traitent non plus le code binaire absolu, mais la différence avec l'échantillon précédent. Ces convertisseurs sont très répandus dans l'audio-numérique (lecteurs de disques compacts), car ils sont précis et meilleur marché que les convertisseurs traditionnels. Mais ils sont peu utilisés en mesure.

5.6. BILAN COMPARATIFS DES CONVERTISSEURS (CHIFFRES DE 1997...)

Type de CV	Fréquence	Résolution	Surface Analogique	Surface Numérique	Consommation
Compteur	100Khz	14-16 bits	300 transistors	500 portes	10 mWatts
Simple rampe	100Khz	10-12 bits	100 transistors	100 portes	10 mWatts
Double rampe	100Khz	>16 bits	150 transistors	150 portes	10 mWatts
Approx. Successives	1Mhz	14-16 bits	300 transistors	500 portes	10 mWatts
Algorithmique	1Mhz	14-16 bits	100 transistors	100 portes	1 mWatt
Flash	>100Mhz	12-14 bits	2500 transistors	5000 portes	1 Watt
Sub-ranging	50Mhz	12-14 bits	600 transistors	500 portes	100 mWatts
Pipeline	100Mhz	10-12 bits	800 transistors	200 portes	100 mWatts
Sigma-delta	1Mhz	>20 bits	1000 transistors	5000 portes	100 mWatts

Remarque :

Comparateur : 10 transistors

Ampli-op : 50 transistors

DAC (N bits) : 2^N transistors + 2^N portes

Registre : 5 portes par bit

Compteur : 6 portes par bit

6. INTRODUCTION A L'AUTOMATISME

L'automatique est la science étudiant les automatismes et traitant de la substitution de mécanismes automatiques à toutes les opérations susceptibles d'être exécutées par l'homme. Cette science était anciennement dénommée *cybernétique*. Parmi les composantes de cette science, nous allons plus particulièrement nous intéresser à *la commande (automatique) des procédés dynamiques continus*.

Dans ce cadre, on distingue *l'automatique linéaire ou non linéaire, continue (commande analogique) ou à temps discret (commande numérique)*.

Il faut savoir que la commande (ou *asservissement*) d'un procédé physique nécessite :

- l'identification (modèle de comportement) ou la modélisation (modèle de connaissance) de son comportement dynamique → *mise en équation* ;
- la synthèse d'une loi de commande → *fonction de transfert et transformation de Laplace* ;
- l'implantation physique de cette loi de commande → *correction*.

7. NOTION D'ASSERVISSEMENTS

7.1. EXEMPLE : REGULATION DE LA TEMPERATURE DANS UN LOCAL DOMESTIQUE.

7.1.1. Contrôle manuel

Ce contrôle s'effectue par une personne de la manière suivante :

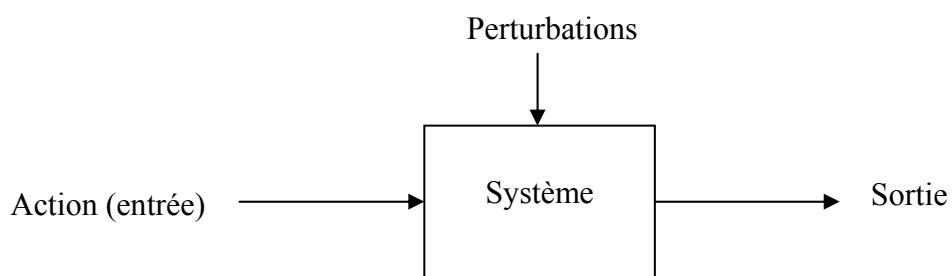
- Lecture de la température sur un thermomètre (mesure actuelle),
- Connaissant la température souhaitée (valeur de la consigne ou valeur de référence),
- Constatant la différence (ou l'écart) entre la valeur actuelle et la température souhaitée.
⇒ Réglage du chauffage plus ou moins fort

La valeur réglée a de grande chance de ne pas convenir, il faudra donc répéter les opérations ci-dessus jusqu'à obtenir la température désirée.

Par ailleurs, si les conditions extérieures varient, il faudra répéter les opérations en permanence.

7.1.2. Régulation automatique

Le système :



Ici, il s'agit d'un local dont on veut réguler la température. Les caractéristiques prises en compte sont :

- le volume,
- la surface des ouvertures,
- le type de l'isolation thermique.

On en déduit :

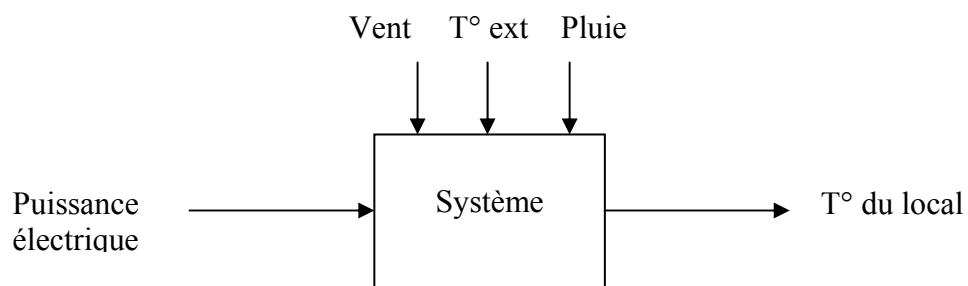
- le nombre de radiateurs,
- Leur puissance,
- leur emplacement.

Grandeurs importantes :

L'ensemble des radiateurs délivre une puissance thermique au local par l'intermédiaire d'une puissance électrique \Rightarrow *Puissance électrique = variable d'action*.

Les conditions extérieures peuvent être considérées comme des puissances thermiques négatives \Rightarrow *Conditions extérieures = variable perturbations*.

La température dans le local résulte des causes que sont l'action et les perturbations
 \Rightarrow Température du local = variable de sortie.

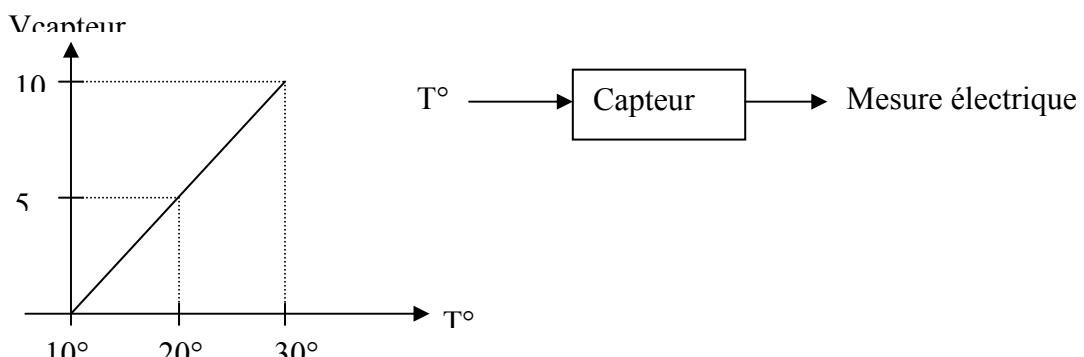


Le capteur :

La température doit être connue :

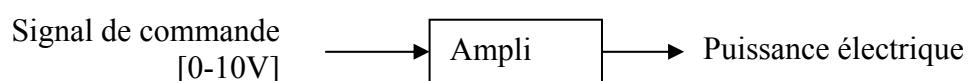
\Rightarrow Elaboration de l'information par un capteur

Le capteur est un élément sensible associé à une structure électronique de conditionnement.



L'actionneur :

Pour faire varier la puissance électrique, il faut un amplificateur dont le signal d'entrée soit une tension de 0 à 10 V dans notre exemple.



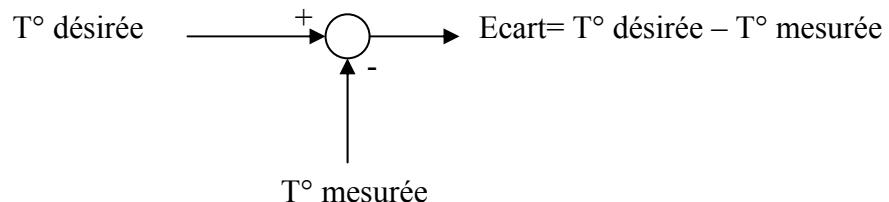
La valeur de référence :

Il faut disposer de la valeur qui correspond à la mesure que **délivrera** le capteur à la température désirée.

Exemple : si on veut une T° du local à 20°C , il faut $V_{\text{ref}}=5\text{V}$.

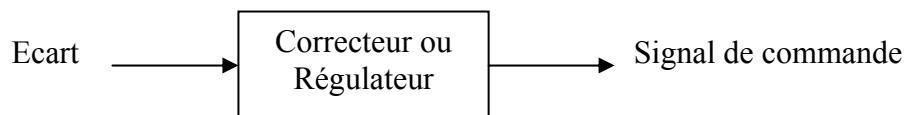
Le comparateur :

Le comparateur donne l'écart entre la valeur actuelle de la mesure et la valeur de référence.



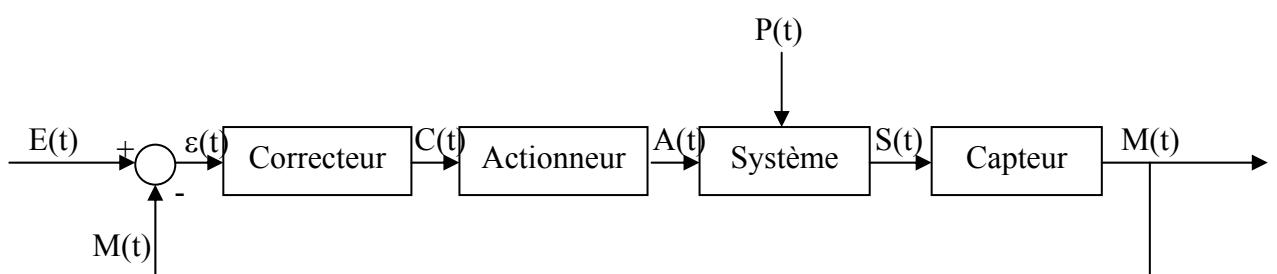
Le correcteur ou régulateur :

Le signal de commande envoyé à l'amplificateur est déterminé à partir de l'écart fourni par le comparateur. On parle de correction ou de régulation, car, c'est dans cette partie de l'asservissement qu'est décidée la valeur de la commande de l'amplificateur qui déterminera la puissance électrique à envoyer au système.



7.2. GENERALISATION

Le principe de régulation illustré précédemment se généralise :



- $E(t)$: Consigne en terme de mesure souhaitée
- $\varepsilon(t)$: Ecart entre la consigne et la mesure.
- $C(t)$: Commande calculée.
- $A(t)$: Action
- $S(t)$: Sortie.
- $M(t)$: Mesure

Structure bouclée et causalité = Asservissement

7.3. PROBLEMES TRAITES POUR METTRE AU POINT UN ASSERVISSEMENT.

7.3.1. Modélisation des systèmes

Un des problèmes pour l'automaticien est de mettre sous forme mathématique la relation entre l'entrée et la sortie du système. Il doit déterminer le *modèle mathématique* du système.

Modèle mathématique :

Ensemble des relations qui permettent de calculer la sortie du système quand on connaît les entrées appliquées.

Dans le cas des systèmes mono-entrée et mono-sorties, on obtient dans le cas général une équation différentielle non linéaire. Mais, souvent un modèle approximatif suffit, c'est pourquoi on fera une approximation linéaire locale et on sera donc amené à utiliser des modèles linéaires invariants.

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + a_{n-2} \frac{d^{n-2} s(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 \cdot s(t) \\ = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + b_{m-2} \frac{d^{m-2} e(t)}{dt^{m-2}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 \cdot e(t) \end{aligned}$$

7.3.2. Analyse des performances

Pour juger des performances d'un système asservi, on dispose principalement de trois caractéristiques : La précision, l'allure de la réponse et la rapidité ou temps de réponse.

Précision : C'est le rapport entre la valeur stabilisée en sortie par rapport à la consigne.

Allure : Elle montre de quelle façon la sortie va évoluer jusqu'à la valeur finale.

Rapidité : C'est le temps mis par le signal pour atteindre la valeur finale.

7.3.3. Etude de la stabilité

Si un asservissement est mal conçu, il peut devenir instable et osciller constamment ou bien saturer.

7.3.4. Détermination du correcteur

C'est justement le choix du correcteur qui agira sur la stabilité et les performances de l'asservissement.

8. TRANSFORMATION DE LAPLACE

La modélisation d'un système physique fait intervenir un système d'équations différentielles. Sa résolution (plus ou moins difficile) permet la détermination de régimes transitoires du système dynamique. Ces régimes peuvent aussi être déterminés en utilisant le calcul opérationnel fondé sur *la transformation de Laplace*.

8.1. DEFINITION DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

Soit $f(t)$ une fonction causale¹, alors *la transformée de Laplace* de $f(t)$ est $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$.

On dit que $F(p)$ est *l'image de $f(t)$ dans le domaine symbolique* et que $f(t)$ est *l'image de $F(p)$ dans le domaine temporel*. On appelle *transformation de Laplace* l'application L telle que $L(f) = F$.

8.2. PROPRIETES

On suppose que $F(p)$ et $G(p)$ sont les images de $f(t)$ et $g(t)$, deux fonctions causales.

8.2.1. Unicité

Toute fonction temporelle $f(t)$ possède une image unique $F(p)$; et réciproquement.

8.2.2. Linéarité

- L'image de 0 est 0.
- L'image de $k \cdot f(t)$ est $k \cdot F(p)$.
- L'image de $f(t) + g(t)$ est $F(p) + G(p)$.

8.2.3. Déivation – Intégration

- L'image de $f'(t)$, la dérivée de f est $pF(p) - f(0)$ avec le plus souvent, $f(0) = 0$.
- L'image de $\int_0^t f(u) du$, la primitive de f est $\frac{1}{p} F(p)$.

8.2.4. Facteur d'échelle

L'image de $f(a \cdot t)$ est $\frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

8.2.5. Retard et Amortissement

- L'image de $f(t - \tau)$ est $e^{-p\tau} F(p)$.
- L'image de $e^{\omega t} f(t)$ est $F(p + \omega)$.

8.2.6. Théorème des valeurs finales et initiales

¹ Nulle sur $]-\infty, 0[$

- $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p)$
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pF(p)$

8.2.7. Convolution

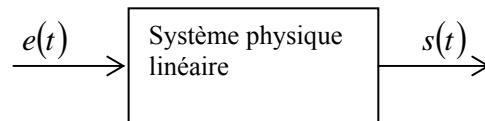
L'image du produit de convolution $f(t) * g(t)$ est $F(p) \times G(p)$.

8.3. TRANSFORMÉES USUELLES

Image symbolique	Image temporelle de fonctions causales
$\frac{1}{p}$	Échelon : $r(t)$
1	Dirac : $\delta(t)$
$\frac{1}{p^2}$	Rampe : $t \cdot r(t)$
$\frac{1}{p+a}$	$r(t)e^{-at}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$r(t)\sin(\omega t)$
$\frac{w}{p^2 - \omega^2}$	$r(t)\sinh(\omega t)$
$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$r(t)e^{-at} \sin(\omega t)$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$r(t)\cos(\omega t)$
$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$	$r(t)\cosh(\omega t)$
$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$r(t)e^{-at} \cos(\omega t)$
$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$r(t)t^n$
$\frac{1}{p(1+qp)}$	$r(t) \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$
$\frac{1}{(p+a)^2}$	$r(t)t e^{-at}$

9. FONCTION DE TRANSFERT

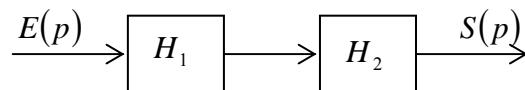
Un *transfert* est la transmittance $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ d'un système linéaire générant un signal de sortie $s(t)$ à partir d'une entrée $e(t)$.



Sachant que $s(t) = L^{-1}\{H(p)E(p)\}$, on a $s(t) = h(t) * e(t)$ où $h(t)$ est la *réponse impulsionale* du système physique.

9.1. OPERATIONS SUR LES TRANSFERTS

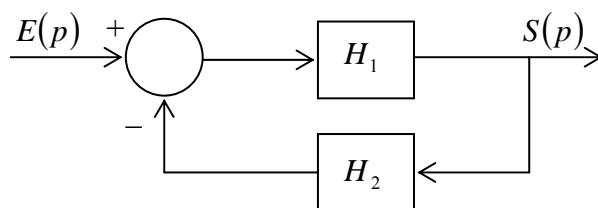
9.1.1. Transferts en cascade



Considérons le schéma suivant :

La transmittance se calcule $H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$.

9.1.2. Transferts en réaction



Considérons le schéma suivant :

La transmittance s'écrit $H(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$.

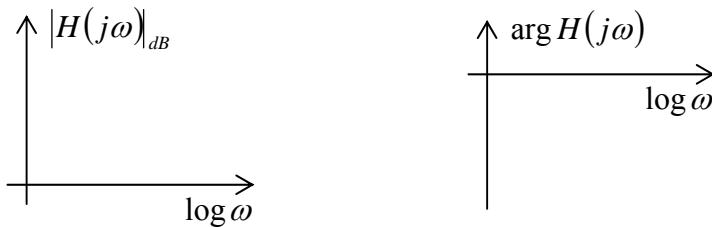
9.2. REPRESENTATION DE LA REONSE FREQUENTIELLE D'UN TRANSFERT

La *réponse fréquentielle* traduit le comportement en régime sinusoïdale, elle est obtenue en remplaçant p par $j\omega$ où ω est la *pulsation* exprimé en *rad/s*. La *fréquence* f et la *période* T sont reliés à la pulsation par les relations $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$.

Une réponse fréquentielle peut être caractérisée par son *module* et par son *argument* : $H(j\omega) = \rho(\omega)e^{j\Phi(\omega)}$. Le gain peut être exprimé en décimal ρ ou en décibel $\rho_B = 20 \log \rho$.

9.2.1. Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode consiste en un diagramme de gain en dB et un diagramme de phase en rd ou d° . Pour les tracer, on s'aide des *diagrammes asymptotiques de Bode*. Ils

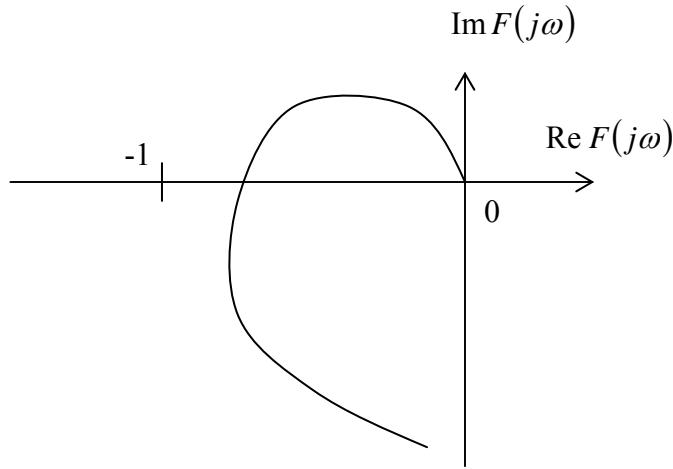


sont définis par morceaux en étudiant localement (pour des bandes de fréquence données) le comportement asymptotique de la réponse fréquentielle.

On se ramène, autant que l'on peut, à un produit de transferts du 1^{er} et 2^{ème} ordre, pour lesquels on connaît bien les diagrammes asymptotiques ; et on procède par superposition pour obtenir le diagramme de Bode final.

9.2.2. Plan de Nyquist – Abaque de Hall

Représentation fréquentielle de $F(j\omega)$ sur *le lieu de Nyquist* :



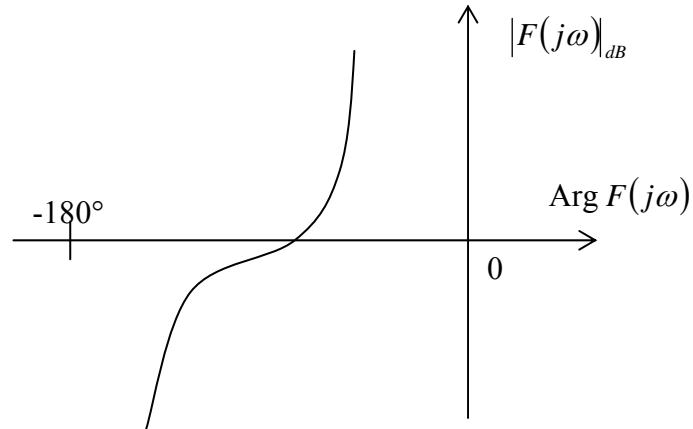
Supposons que $F(j\omega)$ désigne la FTBO d'un procédé. On a alors $FTBF(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{1 + F(j\omega)}$. Par conséquent, *le point (-1, 0) est critique* sur le lieu de Nyquist.

Par ailleurs, la distance au point critique sur le plan donne $|1 + F(j\omega)|$.

L'abaque de Hall donne les modules et arguments de $\frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)}$ pour un $F(j\omega)$ donné. On peut en déduire par la suite les modules et arguments de la *FTBF* en calculant $B(j\omega)$, et en appliquant la relation suivante : $FTBF(j\omega) = \frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)} \times B^{-1}(j\omega)$.

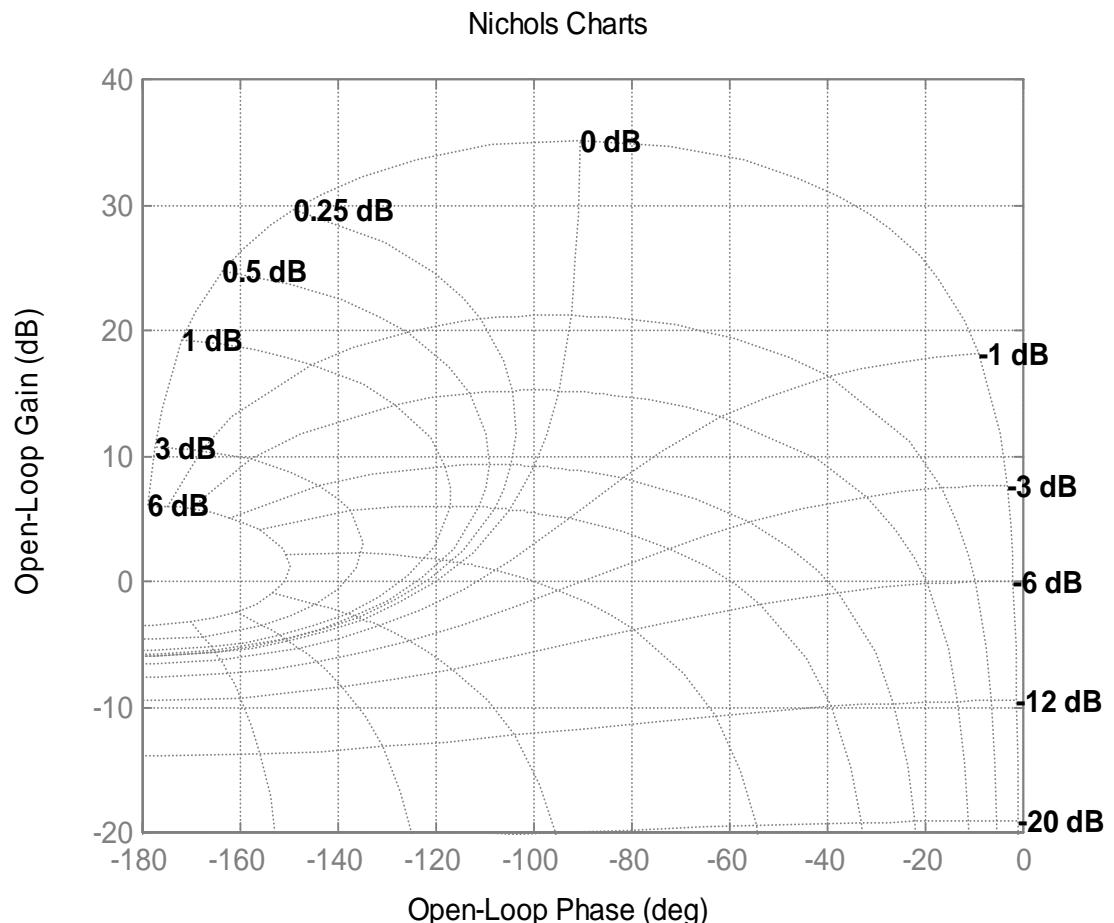
9.2.3. Plan de Black (Nichols) – Abaque de Black

Représentation fréquentielle de $F(j\omega)$ sur *le lieu de Black* :



Le point critique est maintenant (-180°, 0 dB).

Pour un $F(j\omega)$ donné, l'**abaque de Black-Nichols** donne les modules et arguments de $\frac{F(j\omega)}{1 + F(j\omega)}$.



10. SYSTEMES LINEAIRES FONDAMENTAUX

10.1. DEFINITIONS GENERALES RELATIVES A LA REONSE INDICIELLE

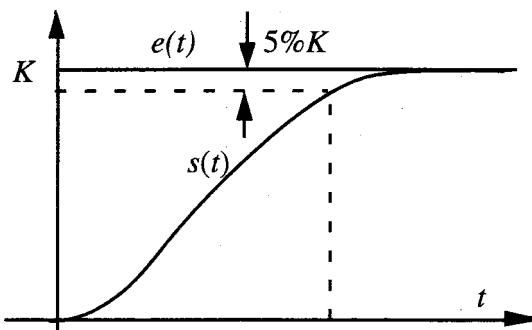
Le signal de sortie en réponse à un échelon d'entrée est appelé réponse indicielle. Suivant sa forme, on définit des paramètres caractéristiques :

a - Temps d'établissement

Si la réponse à un échelon unité tend vers une valeur finie, on peut noter que cette valeur finale K qualifie le gain statique.

$$K = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$$

Pour qualifier la durée du régime transitoire, on introduit le temps d'établissement défini comme suit :

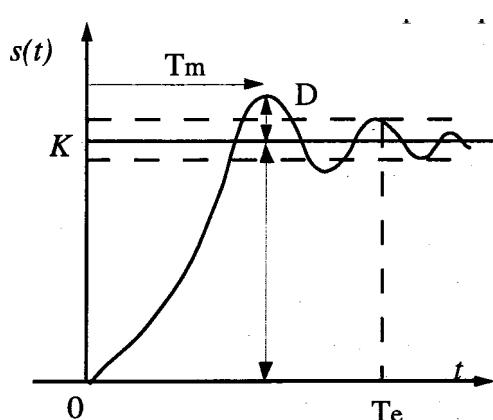


On définit le temps d'établissement à 5% comme le temps à partir duquel :

$$\frac{|s(t) - K|}{K} \leq 5\%$$

b - Dépassement

Si la réponse à un échelon est telle que temporairement elle dépasse sa valeur finale, on introduit les valeurs suivantes pour qualifier le régime transitoire :



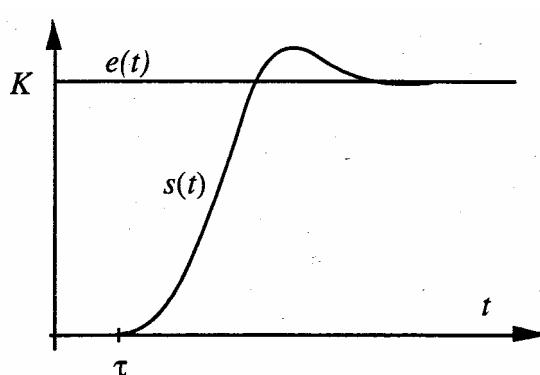
Le dépassement est égal au rapport $\frac{D}{K}$

On l'exprime en % de K

Une réponse indicielle sans dépassement sera dite **apériodique**

T_m est défini comme l'instant du premier maximum

c Système retardé



L'influence de l'entrée dans un système retardé ne se fait sentir qu'après un temps τ appelé **retard pur**.

Les systèmes retardés ont en facteur au numérateur dans leur transmittance un terme $e^{-\tau p}$

10.2. QUELS SONT ICI LES PROCESSUS ELEMENTAIRES ?

On les représente par leur fonction de transfert. Ce sont :

- le retard pur, ou délai de T seconde, de fonction de transfert est : $H(p) = e^{-\tau p}$
- l'intégrateur, $H(p) = \frac{K}{p}$ (qui possède un pôle en $p = 0$)
- le premier ordre ou «constante de temps» : $H(p) = \frac{K}{1+Tp}$ (un pôle réel négatif si $T < 0$)
- le processus du second ordre, en principe sinusoïdal amorti (à enveloppe exponentielle décroissante) : $H(p) = \frac{K}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$, 2 pôles complexes conjugués, de partie réelle négative.

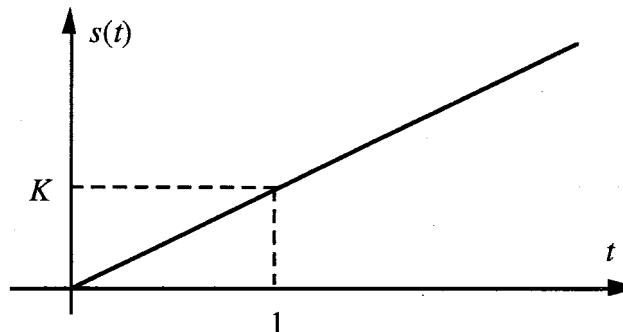
10.3. INTEGRATEUR

a - Un système intégrateur pur (un pôle) a pour transmittance :

$$H(p) = \frac{K}{p}$$

sa réponse indicielle est :

$$s(t) = Kt$$



b - Un intégrateur double a pour transmittance :

$$H(p) = \frac{K}{p^2}$$

sa réponse indicielle est :

$$s(t) = K \frac{t^2}{2}$$

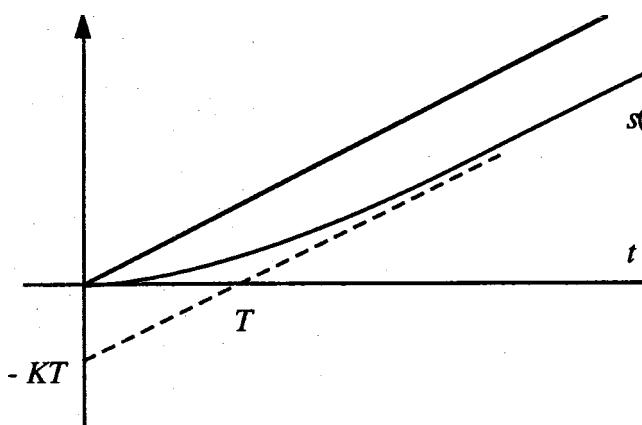


c - Un intégrateur plus une constante de temps a pour transmittance :

$$H(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$$

sa réponse indicielle est :

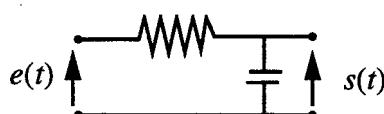
$$s(t) = K(t - T) + KTe^{-t/T}$$



10.4. TRANSFERT DU 1^{ER} ORDRE

a - Un premier ordre simple a pour transmittance : $H(p) = \frac{K}{1+Tp}$

exemple : circuit RC

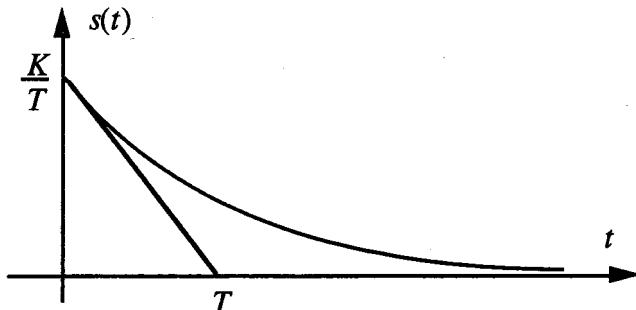


$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+RCp}$$

- réponse impulsionnelle :

$$H(p) = \frac{K}{1+Tp}$$

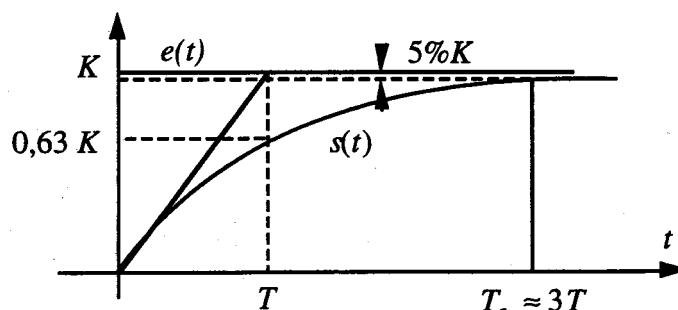
$$\Rightarrow s(t) = \frac{K}{T} e^{-t/T}$$



- réponse indicielle (échelon unité) :

$$S(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$$

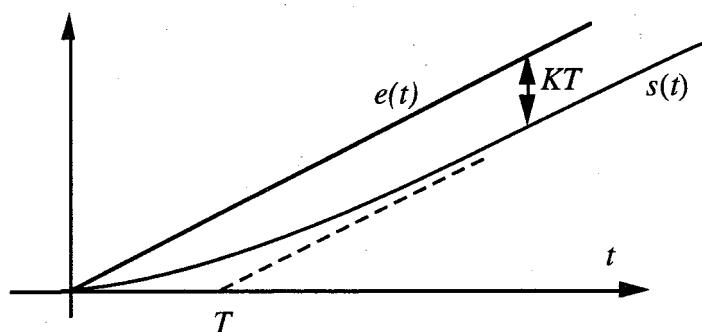
$$\Rightarrow s(t) = K(1 - e^{-t/T})$$



- réponse à une rampe :

$$S(p) = \frac{K}{p^2(1+Tp)}$$

$$\Rightarrow s(t) = K(t - T) + KTe^{-t/T}$$



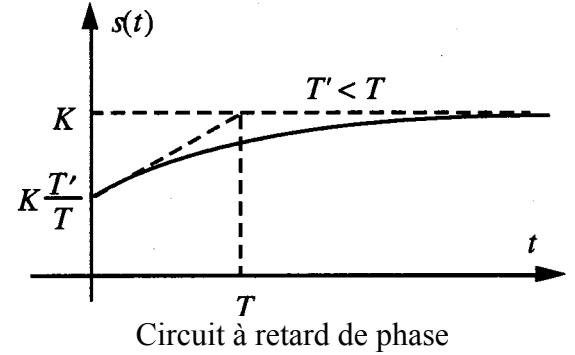
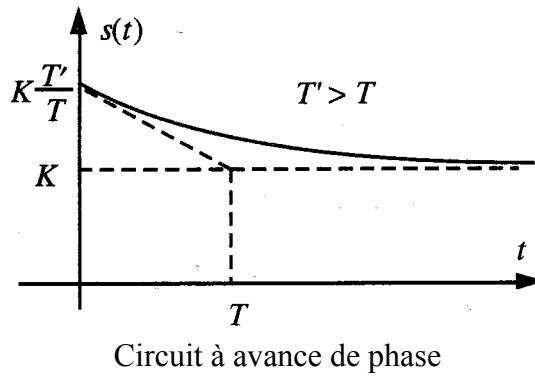
On remarquera que :

- la réponse indicielle est l'intégrale de la réponse impulsionnelle
- la réponse à une rampe est l'intégrale de la réponse indicielle

b - Un premier ordre avec zéro a pour transmittance :

$$H(p) = K \frac{1+T'p}{1+Tp} = K \frac{T'}{T} + K \frac{T-T'}{T} \frac{1}{1+Tp}$$

la réponse indicielle s'écrit alors : $s(t) = K \frac{T'}{T} + K \frac{T-T'}{T} (1 - e^{-t/T})$



10.5. TRANSFERT DU 2^{EME} ORDRE

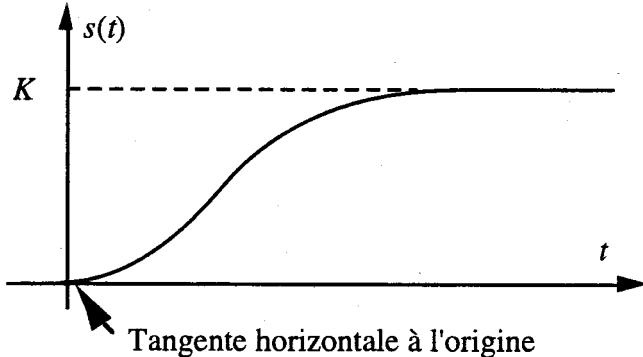
Un second ordre a pour transmittance :

$$H(p) = \frac{K}{1 + 2 \frac{\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

où $\omega_0 = \frac{1}{T_0}$ est la pulsation propre et
le ξ coefficient d'amortissement.

a - $\xi > 1 \rightarrow$ le dénominateur possède deux racines réelles. On obtient alors pour réponse à un échelon unité :

$$s(t) = K \left[1 - \frac{1}{2} \left((1-a)e^{\left\{ -\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) t/T_0 \right\}} + (1+a)e^{\left\{ -\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) t/T_0 \right\}} \right) \right] \text{ avec } a = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}}$$



Si $\xi \gg 1$, l'une des racines l'emporte nettement sur l'autre et la réponse ressemble à celle d'un premier ordre :

$$s(t) \approx K \left(1 - e^{-t/2\xi T_0} \right)$$

b - $\xi = 1 \rightarrow$ régime critique : les deux racines du dénominateur de $H(p)$ sont réelles confondues. On obtient la réponse indicelle :

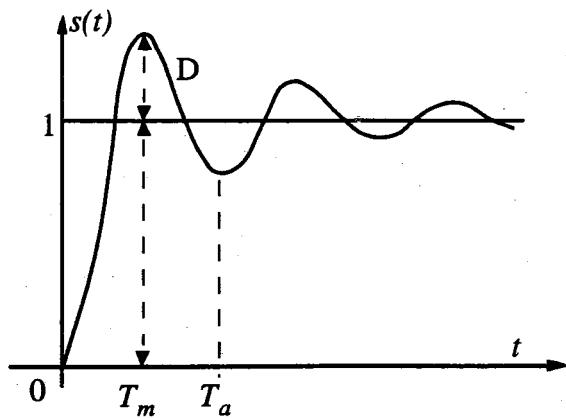
$$s(t) = K \left[1 - \left(1 + \frac{t}{T_0} \right) e^{-t/T_0} \right]$$

c - $\xi < 1 \rightarrow$ régime oscillant : les deux pôles de $H(p)$ sont complexes conjugués. On obtient la réponse indicelle :

$$s(t) = K \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cos(\omega_0 t \sqrt{1-\xi^2} - \alpha) \right] \text{ avec } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

La **pseudo période** est :

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$



L'instant du **premier maximum** est :

$$T_m = \frac{T_a}{2} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

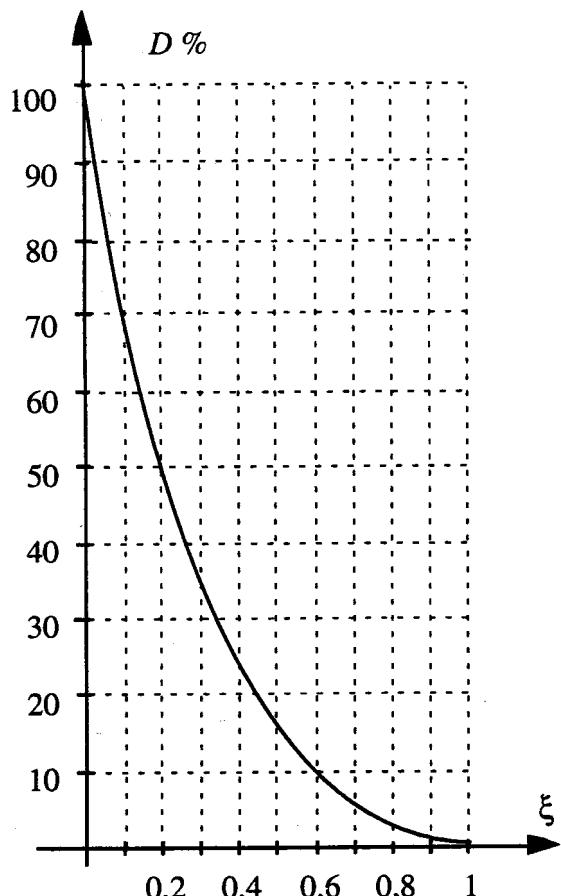
Le **dépassement** exprimé en % est :

$$D = 100 \frac{s_{\max} - s_{\infty}}{s_{\infty}}$$

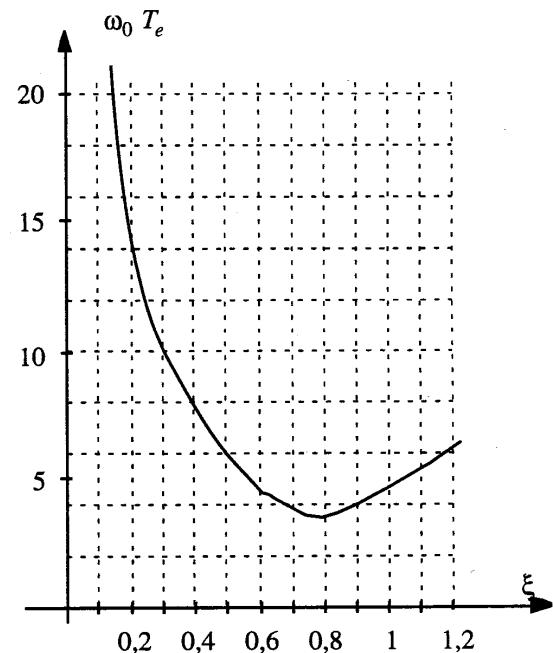
Le dépassement a pour expression : $D = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

En particulier, pour $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$, $D \approx 5\%$ (amortissement dit "optimal")

Les courbes jointes donnent le dépassement et le terme $\omega_0 T_e$ (T_e à 5%) en fonction du coefficient d'amortissement ξ .



Dépassement en régime indiciel pour un système du second ordre, en fonction de l'amortissement



Temps d'établissement à 5% en régime indiciel, en fonction du coefficient d'amortissement

On constate un temps d'établissement minimal pour l'amortissement optimal de l'ordre de 0,7.

11. ASSERVISSEMENT

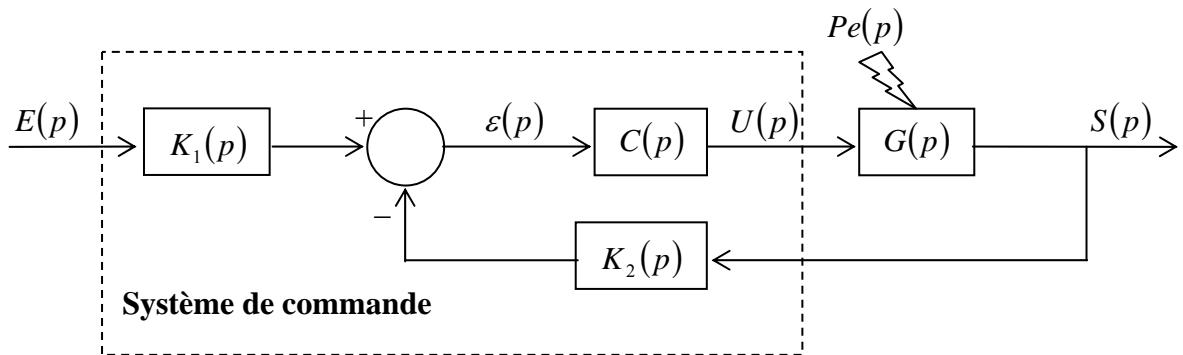
En matière d'asservissement, la notion d'asservi consiste à rendre esclave la sortie d'un système physique des variations d'une entrée de référence appelée *consigne*.

Parmi les questions à se poser sur un système asservi, trois concernent particulièrement l'utilisateur :

- Est-il *précis* ? L'écart ε entre la consigne affichée et la valeur de sortie réellement obtenue, est-il élevé ou faible, voire nul ?
- Est-il *stable* ? La valeur finale de la sortie n'est elle obtenue qu'après un grand nombre d'oscillations autour de l'équilibre, caractéristique d'un système trop faiblement amorti ? Un équilibre peut-il être atteint.
- Est-il *rapide* ? La valeur de la sortie est-elle atteinte au bout d'un temps suffisamment court pour être compatible avec les besoins de l'application ?

Comme nous le verrons par la suite, les exigences précédentes sont contradictoires et nécessiteront toujours de rechercher un compromis le meilleur : cette contradiction est nommée *dilemme stabilité – précision*.

11.1. SCHEMA FONCTIONNEL ENVISAGE

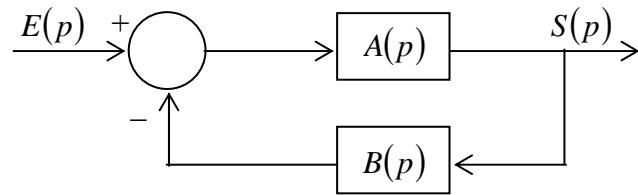


- $e(t)$: entrée de référence, ou consigne ou sortie désirée
- $\varepsilon(t)$: erreur ou écart
- $s(t)$: sortie du procédé
- $u(t)$: entrée du procédé ou commande
- $G(p)$: transmittance du modèle du procédé
- $C(p)$: correcteur ou régulateur
- $K_1(p)$: préfiltre, précompensateur, ou organe d'affichage
- $K_2(p)$: élément de la chaîne de retour
- $pe(t)$: perturbation

11.2. FONCTION DE TRANSFERT D'UN SYSTEME ASSERVI

11.2.1. Fonction de transfert en boucle fermée ou F.T.B.F.

Un système asservi est constitué d'un chaîne directe représentée par une fonction de transfert $A(p)$ et d'une chaîne de retour représentée par une fonction de transfert $B(p)$.

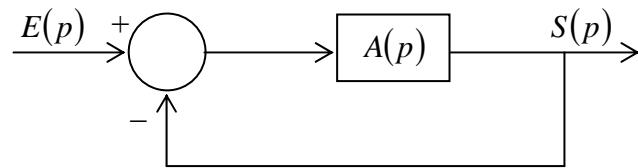


On définit *la fonction de transfert en boucle fermée* du système :

$$FTBF(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}.$$

11.2.2. Système asservi à retour unitaire

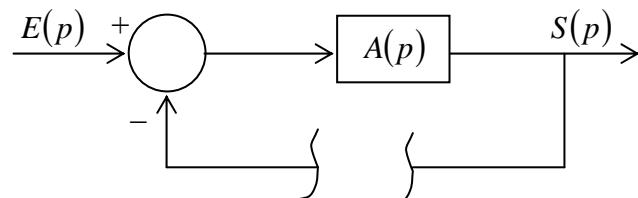
Un cas particulier important est celui où *le retour est unitaire*, c'est-à-dire $B(p) = 1$.



Dans ce cas, la *FTBF* se simplifie pour donner $FTBF(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)}$.

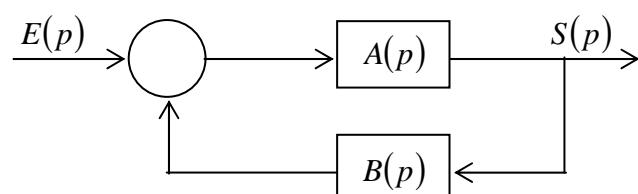
11.2.3. Fonction de transfert en boucle ouverte ou F.T.B.O.

Lorsque l'on transforme un système à retour unitaire en rompant la boucle de réaction, le système est dit *en boucle ouverte*.



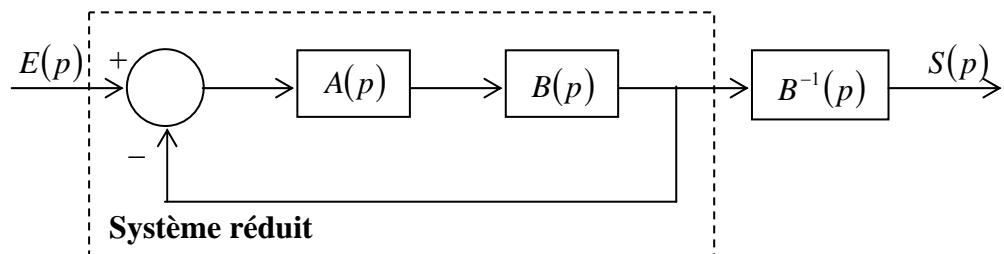
La fonction de transfert en boucle ouverte de ce système est : $FTBO(p) = A(p)$.

Considérons maintenant le schéma plus complet :



On peut le remplacer par un système équivalent à retour unitaire.

La fonction de transfert du système réduit vaut : $FTBO(p) = A(p)B(p)$.



12. STABILITE

La notion de stabilité revêt une importance particulière en Automatique. D'un point de vue qualitatif, nous dirons qu'un système est stable si, après qu'une perturbation l'ait écarté de sa position d'équilibre, il revient spontanément à cette position. Hormis quelques systèmes pour lesquels on recherche une instabilité (oscillateurs par exemple), la première condition de bon fonctionnement d'un système est la *stabilité*.

12.1. CONDITIONS DE STABILITE

12.1.1. Stabilité à partir de la FTBF

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est que les racines de l'équation caractéristique soient à partie réelle négative.

Une condition nécessaire de la stabilité est que les coefficients du polynôme caractéristique du dénominateur de la FTBF soient tous du même signe (par convention², positif). Cette condition est généralement vérifiée pour les systèmes physiques.

Remarquons :

- *Un système du premier ordre* est toujours stable.
- *Un système du deuxième ordre* est stable si tous les coefficients du dénominateur sont positifs.

12.1.2. Point critique & Condition de stabilité à partir de la boucle ouverte

Considérons la fonction de transfert en boucle fermée $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$. La condition d'auto-oscillation en mettant l'entrée à 0, $E(p) = 0$, est $A(p)B(p) = -1$, c'est-à-dire $FTBO(p) = -1$.

En régime harmonique, la condition $FTBO(j\omega) = -1$, met en évidence un point particulier, de module 1 et d'argument -180° , appelé *point critique*.

Lorsque l'on veut contrôler un processus par une boucle d'asservissement, il est nécessaire de connaître les conditions que doit respecter le système en boucle ouverte pour que le système obtenu, une fois la boucle fermée, soit stable. On donne ces conditions :

- *Un système est stable*, si pour la pulsation ω_{-180° le module de la $FTBO$ est < 1 .
L'amplitude des sinusoïdes diminue jusqu'à 0.
- *Un système est astable*, si pour la pulsation ω_{-180° le module de la $FTBO$ est > 1 .
L'amplitude des sinusoïdes augmente jusqu'à saturation.

On propose ci-après différents critères algébriques ou graphiques déterminant la stabilité d'un système automatique.

² Il suffit de changer le signe des coefficients du numérateur.

12.1.3. Critère de Routh

C'est un critère algébrique qui permet de déterminer si l'équation caractéristique de la *FTBF* comporte des pôles à partie réelle positive.

12.1.4. Critère de Bode

Un système sera stable en boucle fermée si le diagramme de Bode de la *FTBO* fait apparaître que pour la pulsation ω_{-180° , la courbe de gain passe en dessous du niveau 0 dB.

12.1.5. Critère de Nyquist

Un système est stable en boucle fermée si la réponse fréquentielle en boucle ouverte prise pour $\omega \in]-\infty, +\infty[$ entoure³ le point critique dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre de pôles à partie réelle positive de la boucle ouverte.

12.1.6. Critère du revers

Ce critère ne s'applique qu'aux systèmes ne possédant *pas de pôle à partie réelle strictement positive en boucle ouverte*. C'est un cas particulier du critère de Nyquist.

Dans le plan de Nyquist, le système est stable en boucle fermée si sa réponse fréquentielle en boucle ouverte laisse *le point critique* (-1, 0) à sa gauche pour les fréquences croissantes.

Dans le plan de Black, le système est stable en boucle fermée si sa réponse fréquentielle en boucle ouverte laisse *le point critique* (-180°, 0 dB) à droite pour les fréquences croissantes.

12.2. DEGRE DE STABILITE

Le degré de stabilité se chiffre par :

- le facteur de résonance en boucle fermée ;
- le facteur d'amortissement ;
- le premier dépassement réduit de la réponse indicielle ;
- les marges de stabilité (traitées dans la section suivante).

12.2.1. Le facteur de résonance

Le facteur de résonance en boucle fermée (en asservissement) dans l'espace des fréquences est le rapport du gain maximum obtenu à la résonance et du gain statique, soit $Q = \left| \frac{FTBF(j\omega_R)}{FTBF(j0)} \right|$, avec ω_R la pulsation de résonance.

Sur le diagramme de Black, la courbe de gain tangente la *FTBO* précisément en ω_R (maximum local), on en déduit donc la valeur de Q ; de même pour $\omega = 0$. En réalité, le Q donné à partir des abaques de Black correspond au système réduit, mais on négligera ce point.

Un grand facteur de résonance entraîne un degré de stabilité petit.

³ la *FTBO* prise pour ω négatif est symétrique par rapport à l'axe des réels de la *FTBO* prise pour ω positif.

12.2.2. Le facteur d'amortissement

Une commande est stable si son régime libre⁴ est amorti. Le facteur d'amortissement dans l'espace des temps est le taux de décroissance des oscillations du régime libre :

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{D_i}{D_{i+1}} \right), \text{ avec } D_i \text{ le } i^{\text{ème}} \text{ dépassement.}$$

Un facteur d'amortissement tendant vers 0 entraîne un degré de stabilité petit. Si le facteur d'amortissement est négatif alors $D_{i+1} > D_i$ et le système est instable.

12.2.3. Le premier dépassement

Le premier dépassement de la réponse indicielle est $D_1 = \frac{s(t_{D_1}) - s(\infty)}{s(\infty) - s(0)}$, en %.

Un premier dépassement grand entraîne un degré de stabilité petit.

12.3. LES MARGES DE STABILITE

Un système à la limite de la stabilité est mal amorti. Son bon fonctionnement n'est pas assuré car une faible modification de ses caractéristiques peut le rendre instable. Par conséquent, on ne va pas se contenter de réaliser un système théoriquement stable, mais on garantit la stabilité du système en prenant des marges de sécurité.

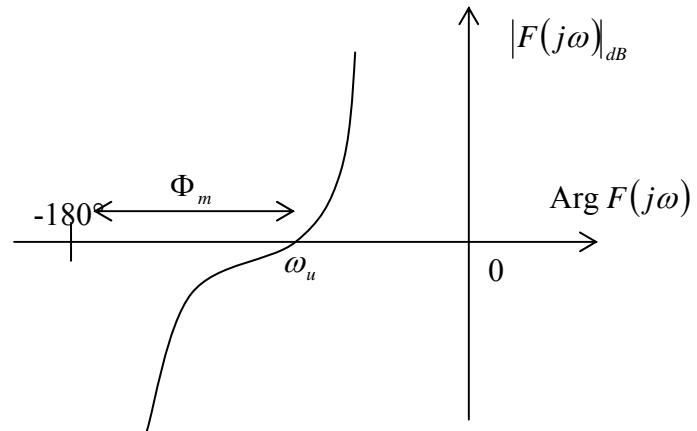
Les marges de stabilité mesurent la distance au point critique des lieux de Black, Nyquist ou Bode *du transfert en boucle ouverte*.

12.3.1. Marge de phase

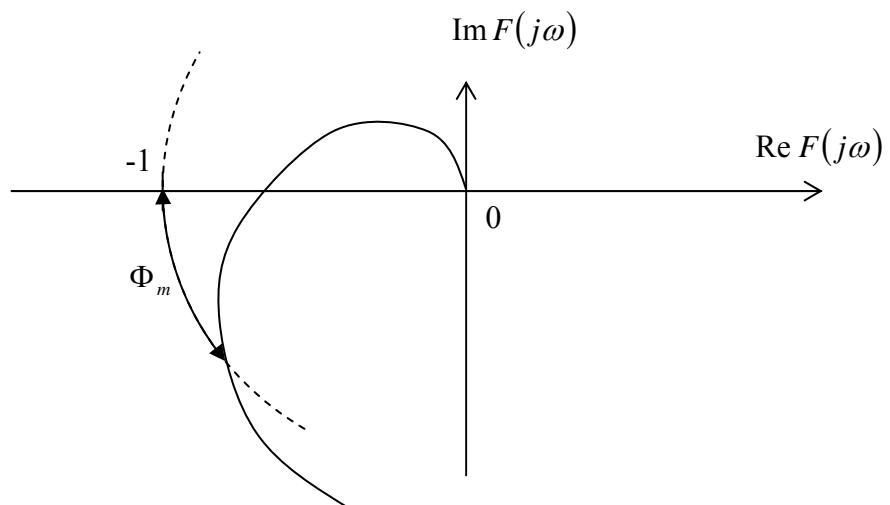
La marge de phase est $\Phi_m = 180^\circ + \arg F(j\omega_u)$ avec ω_u la fréquence au gain unité en boucle ouverte, c'est-à-dire telle $|F(j\omega_u)| = 1$ ou $|F(j\omega_u)|_{dB} = 0$.

⁴ $e(t) = 0$

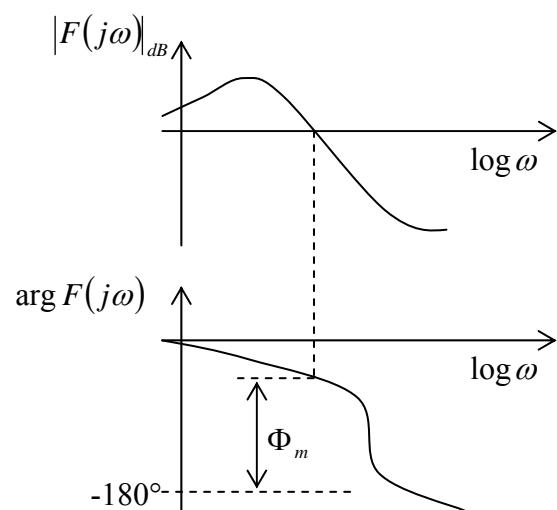
Sur le plan de Black, on mesure la distance horizontale au point critique :



Sur le plan de Nyquist :



Sur le plan de Bode :

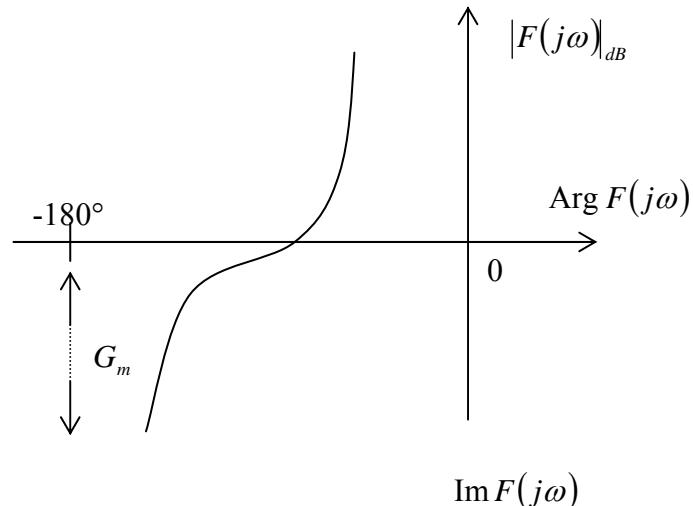


Une marge de phase petite entraîne un degré de stabilité petit. On utilise couramment une marge de phase de 45° qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.

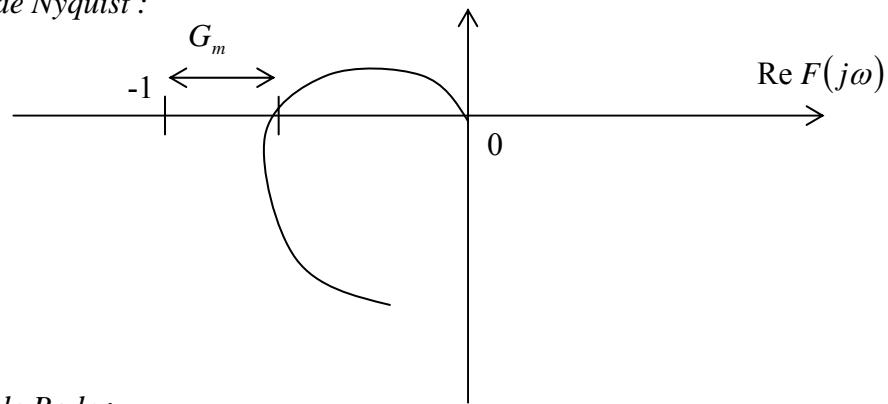
12.3.2. Marge de gain

La *marge de gain* est $G_m = \frac{1}{|F(j\omega_{-180^\circ})|}$ ou $(G_m)_{dB} = -|F(j\omega_{-180^\circ})|_{dB}$ avec ω_{-180° telle que $\text{Arg } F(j\omega_{-180^\circ}) = -180^\circ$.

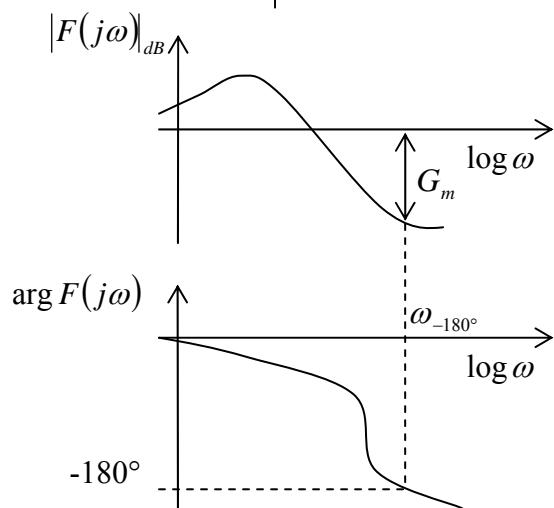
Sur le plan de Black, on mesure la distance verticale au point critique :



Sur le plan de Nyquist :



Sur le plan de Bode :



Une petite marge de gain entraîne un degré de stabilité petit. Une valeur de marge de gain utilisée habituellement est *12 dB*.

12.4. DEGRE DE STABILITE OPTIMAL

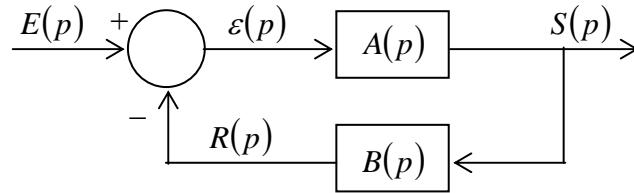
Le bon degré de stabilité est le degré de stabilité spécifié par le cahier des charges. L'amortissement et le premier dépassement réduit de la réponse indicielle étant généralement spécifiés entre 0,4 et 0,7, et 0% et 30%. Il est généralement souhaitable de garantir un facteur de résonance de l'ordre de 0,5 dB à 3 dB.

Par exemple, $D_I = 25\%$ correspond sensiblement à $Q = 2,3$, ou $\Phi_m = 45^\circ$ et $G_m = 10 \text{ dB}$.

13. DILEMME STABILITE / PRECISION

13.1. PRECISION

Considérons le système asservi de la figure ci-dessous.



Nous souhaitons que la sortie $s(t)$ évolue en fonction du temps conformément à la consigne $e(t)$. Afin d'évaluer la précision du système, nous définissons comme erreur $\varepsilon(t)$ à un instant donné $\varepsilon(t) = e(t) - r(t)$.

Après transformation de Laplace, on établit que $\varepsilon(p) = E(p) - R(p) = \frac{E(p)}{1 + A(p)B(p)}$.

13.1.1. Erreur en régime permanent

Nous nous intéressons ici à l'erreur en régime permanent, c'est-à-dire à $\varepsilon(t \rightarrow \infty)$.

En appliquant *le théorème de la valeur finale*, on obtient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p\varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pE(p)}{1 + FTBO(p)}.$$

Au voisinage de zéro, $FTBO(p)$ est équivalent à $\frac{C}{p^\alpha}$. Dans cette expression C désigne

le gain et α désigne *la classe du système en boucle ouverte*.

Ainsi $\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pE(p)}{1 + \frac{C}{p^\alpha}}$, donc pour que l'erreur en régime permanent soit faible, il faut

que les constantes C et α soient grandes. Or ces conditions s'opposent à la condition de stabilité du système (marge de phase plus petite). Par conséquent, les conditions de stabilité et de précision sont contradictoires ; c'est *le dilemme stabilité / précision*.

L'erreur indicielle ou *erreur statique* ou *erreur de position* est obtenue lorsque l'entrée du système est un échelon unitaire. *L'erreur de traînage* est obtenue lorsque l'entrée est une rampe.

Le tableau ci-dessous récapitule les différentes erreurs en fonction de la classe du système.

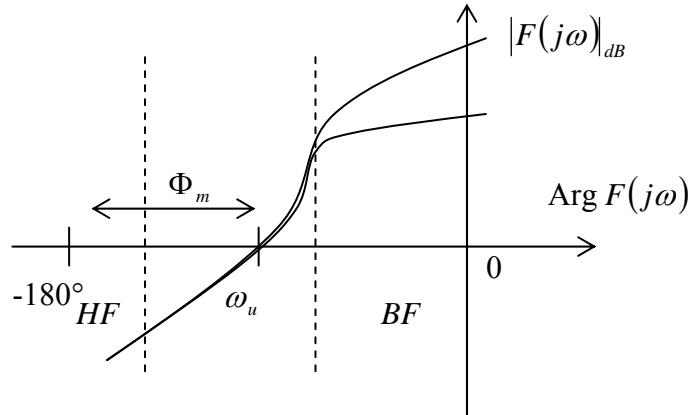
	Classe 0	Classe 1	Classe 2 et plus
<i>Erreur de position</i>	$\frac{1}{1 + C}$	0	0
<i>Erreur de traînage</i>	∞	$\frac{1}{C}$	0

13.2. AMELIORATION DU COMPROMIS DEGRE DE STABILITE / PRECISION

L'objectif est d'augmenter le gain statique du transfert en boucle ouverte sans pour autant diminuer le degré de stabilité.

13.2.1. Solution 1

Une première solution consiste à améliorer le gain de la *FTBO* en basse fréquence sans aucune action sur la réponse fréquentielle en moyenne et haute fréquences.



Un meilleur gain en basse fréquence entraîne une meilleure précision. Par contre, ω_u et la marge de phase ne sont pas modifiées, donc le degré de stabilité est inchangé. Cette solution va être satisfaisante si le degré de stabilité et la rapidité étaient déjà satisfaisants.

13.2.2. Solution 2

On propose une seconde méthode, consistant à augmenter le gain de la *FTBO* sur l'ensemble des fréquences, puis à modifier la *FTBO* en moyenne et hautes fréquences pour améliorer le degré de stabilité.

L'augmentation proportionnelle sur l'ensemble des fréquences améliore en particulier le gain en basse fréquence, donc augmente la précision. De plus, elle augmente la fréquence au gain unité ω_u , ce qui a pour effet de rendre l'asservissement plus rapide. Cependant, la marge de phase diminue. Sans toucher aux basses fréquences, on déforme la réponse fréquentielle au voisinage de la nouvelle fréquence au gain unité, pour améliorer le degré de stabilité.

Il est souvent intéressant de combiner ces deux méthodes : la première pour la précision, et la seconde pour la rapidité et le degré de stabilité.

14. LA CORRECTION EN CASCADE

14.1. SCHEMA DE CORRECTION

Le correcteur $C(p)$ est calculé de façon à satisfaire les objectifs de la boucle de commande, c'est-à-dire :

- rendre indépendante les variations de la sortie $s(t)$ vis-à-vis des perturbations ou bruit de mesure (dans les bandes de fréquence où c'est possible) → *précision* ;
- avec une bonne stabilité et un bon degré de stabilité → *rapidité et degré de stabilité* ;
- même si le modèle réel du système à commander est légèrement différent du modèle nominal $G(p)$ → *robustesse* (capacité du système approché de la réalité à fonctionner avec son modèle idéal en dépit des perturbations réelles) ;
- avec une sensibilité de l'entrée raisonnable → *sensibilité de l'entrée*.

Dans un premier temps, nous allons considérer que le régulateur $C(p)$ est de type *proportionnel* afin de conduire à une certaine rapidité de la boucle. Nous allons alors complexifier $C(p)$ afin d'améliorer la précision et le degré de stabilité.

14.2. AMELIORATION DE LA PRECISION : LE FILTRE A ACTION INTEGRALE

Ce filtre doit assurer une précision parfaite tout en étant transparent au voisinage de ω_u , la fréquence au gain unité en boucle ouverte. Il est bien sûr inutile si le gain du régulateur est suffisant pour assurer la précision demandée.

L'action intégrale a pour effet d'augmenter la classe de la *FTBO*, ce qui en général doit suffire à assurer une précision parfaite ; on s'attache également à augmenter le gain de la boucle ouverte et la rapidité du correcteur en diminuant sa constante de temps.

14.2.1. Définition

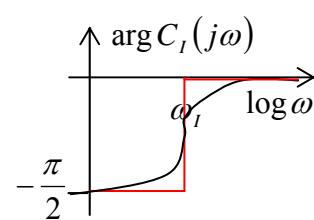
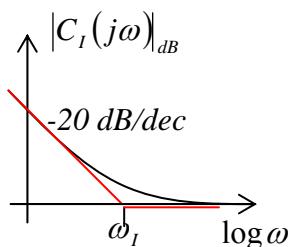
On donne la transmittance d'un filtre à action intégrale : $C_I(p) = \frac{1 + \tau_I p}{\tau_I p}$ avec τ_I la

constante de temps d'intégration. En posant $\tau_I = \frac{1}{\omega_I}$, on donne la réponse en

fréquence : $C_I(j\omega) = \frac{1 + j\left(\frac{\omega}{\omega_I}\right)}{j\left(\frac{\omega}{\omega_I}\right)}$, d'où le gain s'écrit $|C_I(j\omega)| = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_I}\right)^2}$ et

l'argument $\arg C_I(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_I}\right) - \frac{\pi}{2}$.

On donne le diagramme maintenant le diagramme de Bode du filtre à action intégrale.



14.2.2. Placement en fréquence

L'objectif est de prendre $\omega_l < \omega_u$ le plus grand possible afin d'augmenter le gain en boucle ouverte sur la plus grande bande de fréquence possible. Ce faisant, on choisit τ_l le plus petit possible, et on augmente la rapidité.

Si ω_l est choisi trop grand ou trop proche devant ω_u , alors $C_l(p)$ n'est plus transparent, notamment vis-à-vis du degré de stabilité (la marge de phase diminuée).

On donne quelques données relatives à la transparence :

Choix de ω_l	Gain de $C_l(j\omega_u)$	Argument de $C_l(j\omega_u)$	Commentaires
$\frac{\omega_u}{10}$	$1,005 \approx 0 \text{ dB}$	$-5,7^\circ$	Acceptable
ω_u	$\sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$	-45°	Inacceptable, si la marge de phase n'était pas très grande !

14.3. AMELIORATION DU DEGRE DE STABILITE : LE FILTRE A ACTION DERIVEE (AVANCE DE PHASE)

Ce filtre doit assurer un bon degré de stabilité en étant transparent aux basses fréquences. Dans ce but, on réalise *une avance de phase* Φ au voisinage ω_u , afin de garantir une marge de phase suffisante.

14.3.1. Définition

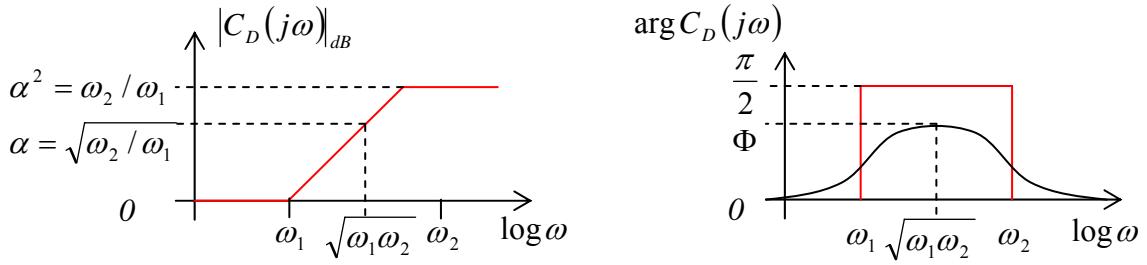
On donne la transmittance d'un filtre à action dérivée : $C_D(p) = \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{1 + \frac{p}{\omega_2}}$ avec $\omega_1 < \omega_2$.

On donne la réponse en fréquence : $C_D(j\omega) = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$, d'où le gain s'écrit

$$|C_D(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} \text{ et l'argument } \arg C_D(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right).$$

ω_1 et ω_2 permettent de tronquer fréquenciellement l'action de ce filtre afin qu'il soit transparent aux basses fréquences et qu'il n'accroisse pas exagérément la sensibilité de l'entrée.

On donne le diagramme maintenant le diagramme de Bode du filtre à action intégrale.



En basse fréquence, $\omega \ll \omega_1$, le filtre est totalement transparent. En haute fréquence $\omega \gg \omega_2$, le filtre est un gain de $\alpha^2 = \frac{\omega_2}{\omega_1}$. Si $\omega_2 \gg \omega_1$, alors en $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$, le filtre a un action dérivée $j \frac{\omega}{\omega_1}$ avec un déphasage caractéristique de 90° .

14.3.2. Placement en fréquence

L'avance de phase maximale Φ est réalisée à la fréquence centrale $\sqrt{\omega_1 \omega_2}$. Ainsi, pour augmenter la marge de phase, on choisira ω_1 et ω_2 tels que $\omega_u = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$. Par conséquent, $\Phi = \arg(C_D(j\omega_u))$. On peut relier les fréquences au gain α du filtre pris en ω_u , en écrivant $\omega_1 = \frac{\omega_u}{\alpha}$ et $\omega_2 = \alpha \omega_u$.

Si l'on désire une valeur donnée d'avance de phase Φ au voisinage ω_u , on choisit α tel

que $\alpha = \tan\left(\frac{\Phi + \frac{\pi}{2}}{2}\right)$. On peut aussi utiliser la relation $\alpha^2 = \frac{1 + \sin \Phi}{1 - \sin \Phi}$ pour calculer α ;

α^2 désigne le gain du filtre en haute fréquence.

Remarques :

- Il faut prendre en compte le gain du filtre à action dérivée en ω_u , lors de la détermination de C_0 qui fixe ω_u .
- L'introduction du filtre à action dérivée modifie aussi la valeur maximale de la fonction sensibilité de l'entrée en l'augmentant d'un facteur α^2 . Ainsi, plus l'avance de phase nécessaire sera grande, plus l'immunité de l'entrée sera détériorée.

14.4. SYNTHESE D'UN REGULATEUR DE TYPE P.I.D.

Considérons un correcteur $C(p)$ de type P.I.D., comportant une action proportionnelle, une action intégrale, et une action dérivée ; c'est-à-dire $C(p) = C_0 \cdot C_I(p) \cdot C_D(p)$.

14.4.1. Placement de l'action intégrale

L'action intégrale, qui doit garantir la précision, est de la forme $C_I(p) = \frac{1 + \tau_I p}{\tau_I p}$. Il

s'agit de déterminer $\omega_I = \frac{1}{\tau_I}$ de façon à ce que l'action intégrale $C_I(p)$ soit efficace (τ_I

le plus petit possible) sans toutefois trop diminuer la phase de la boucle ouverte au voisinage de la fréquence ω_u qui sera la fréquence au gain unité en boucle ouverte.

Suivant les cas, on prend $2 < \frac{\omega_u}{\omega_I} < 10$.

14.4.2. Placement de l'action dérivée

L'action dérivée, qui doit garantir la stabilité, est de la forme $C_D(p) = \frac{1 + \frac{p}{\omega_1}}{1 + \frac{p}{\omega_2}}$. Il s'agit

de déterminer ω_1 et ω_2 afin que l'action dérivée $C_D(p)$ apporte la marge de phase voulue Φ_m en ω_u . La marge de phase est définie par $\Phi_m = \arg FTBO(j\omega_u) + 180^\circ = \arg C_I(j\omega_u) + \arg C_D(j\omega_u) + \arg G(j\omega_u) + 180^\circ$. En posant Φ l'avance de phase du filtre à action dérivée, on a $\Phi = \Phi_m - 180^\circ - \arg C_I(j\omega_u) - \arg G(j\omega_u)$ ou encore $\alpha = \tan\left(\frac{\Phi_m - 90^\circ - \arg C_I(j\omega_u) - \arg G(j\omega_u)}{2}\right)$. On en déduit immédiatement $\omega_1 = \frac{\omega_u}{\alpha}$ et $\omega_2 = \alpha \omega_u$.

14.4.3. Détermination de C_0

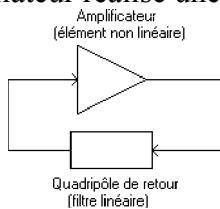
C_0 est le dernier paramètre à déterminer. Il doit assurer un gain unité à la fréquence ω_u ,

c'est-à-dire $|FTBO(j\omega_u)| = 1$ ou encore $C_0 = \frac{1}{|C_I(j\omega_u)| |C_D(j\omega_u)| |G(j\omega_u)|}$. On rappelle

que $|C_D(j\omega_u)| = \alpha$.

15. SYSTEMES RENDUS VOLONTAIREMENT INSTABLES : LES OSCILLATEURS.

- Les oscillateurs se rencontrent dans tous les domaines de la physique. Ceux qui auront le plus d'importance pour nous dans la suite sont les oscillateurs optiques (par exemple le laser) ou électroniques (horloges, génération de signaux...). Dans ce cours, nous allons nous limiter aux seconds.
- En électronique, il existe des oscillateurs délivrant différentes formes de signaux de sortie. Nous allons nous intéresser à un cas particulier, celui des oscillateurs quasi-sinusoidaux. Ce type d'oscillateur doit comporter une cellule résonante (filtre passe bande). Cette dernière comportant forcément des éléments dissipatifs, il va falloir apporter de l'énergie pour maintenir le système en oscillation. Le signal en sortie du quadripôle va donc être amplifié avant d'être à nouveau injecté dans le quadripôle résonant (ce sont donc les sources de polarisation de l'amplificateur qui apportent l'énergie nécessaire pour obtenir une sortie sinusoidale... l'oscillateur réalise une conversion continu-alternatif).



En théorie, un système de ce type peut rester en équilibre instable. Cependant, en pratique, la moindre perturbation électrique (bruit) va pousser le système hors de son état d'équilibre et les oscillations vont démarrer.

- Les oscillateurs constituent l'une des fonctions de base de l'électronique (analogique comme numérique...). Ils vont être utilisés pour cadencer le fonctionnement des systèmes (horloges de circuits numériques, montres...). Ils peuvent également être utilisés pour fabriquer directement des signaux classiques de tests en électronique (générateurs analogiques) ou pour fabriquer des porteuses en télécommunication ou en instrumentation.

15.1. CONDITION D'OACILLATION – CRITERE DE BARKHAUSEN.

Pour faire osciller un système bouclé, il faut le rendre instable. Comme nous l'avons vu précédemment, cela revient à vérifier l'équation :

$$AB(p) = -1$$

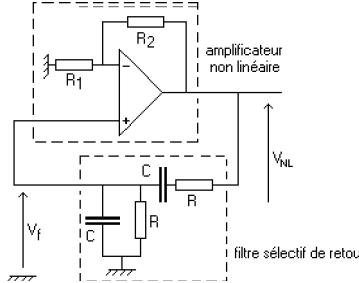
Cette relation s'appelle le critère de Barkhausen.

Remarque : Quand la chaîne de retour arrive sur un additionneur au lieu d'un soustracteur, la condition d'oscillation devient $AB(p) = 1$.

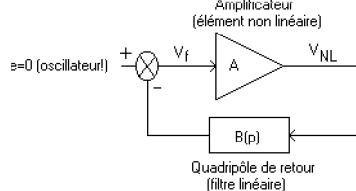
15.2. ETUDE D'UN EXEMPLE DETAILLE : L'OSCILLATEUR A PONT DE WIEN.

Nous allons désormais nous intéresser au cas particulier de l'oscillateur à pont de Wien. Cet oscillateur, quoi que peu performant, va nous permettre d'appliquer une méthode d'approche générale pour les oscillateurs de ce type. Nous allons tout d'abord faire apparaître la structure générale d'un oscillateur quasi-sinusoidal en identifiant l'amplificateur et le filtre sélectif. Ceci étant fait, nous verrons la condition à vérifier pour que les oscillations apparaissent. Nous pourrons alors calculer les principales grandeurs attendues (fréquence et amplitude des oscillations notamment).

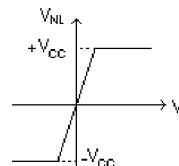
- Structure de l'oscillateur à pont de Wien. Identification des différents éléments.



On va essayer de se ramener à une symbolique de système bouclé classique (sauf qu'ici, on travaille à entrée nulle puisque l'on étudie un oscillateur...)



• Dans sa zone de fonctionnement linéaire, l'amplificateur a un gain $A=1+R_2/R_1$ (pour l'étude du démarrage, ce gain sera suffisant). Cependant la tension de sortie de l'amplificateur est limitée à la plage $[-V_{cc};+V_{cc}]$. Sa caractéristique entrée-sortie, si on suppose l'amplificateur opérationnel parfait (excepté vis à vis de la saturation) est donc la suivante:



• Le filtre de retour est un filtre passe bande dont la fonction de transfert est la suivante :

$$B(p) = \frac{-V_f}{V_{NL}} = \frac{\frac{R}{1+RCp}}{\frac{R}{1+RCp} + R + \frac{1}{Cp}} = -\frac{R}{R + R + R^2Cp + R + \frac{1}{Cp}} = \frac{-1}{3 + RCp + \frac{1}{RCp}} = \frac{-\frac{1}{3}}{1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)}$$

en posant $\omega_0 = 1/RC$ et $Q = 1/3$

Calcul des caractéristiques de sortie.

- *Le démarrage des oscillations.*

Nous avons vu, lors de l'étude de la stabilité des systèmes bouclés qu'un tel circuit sera instable lorsque l'un des pôles de sa fonction de transfert en boucle fermée a une partie réelle positive. Ces pôles sont les solutions de l'équation

$$AB(p) = -1$$

Ils peuvent être calculés en résolvant l'équation

$$p^2 + \frac{\omega_0}{Q} \left(1 - \frac{A}{3}\right) p + \omega_0^2 = 0$$

On rappelle que $Q = 1/3$.

- Le déterminant de cette équation sera positif pour $A < 1$ ou $A > 5$. Dans ce cas, les racines sont réelles et valent :

$$p_{1,2} = \frac{-3\omega_0(1-A/3) \pm \sqrt{9\omega_0^2(1-A/3)^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

Si $A < 1$ les racines sont négatives (pas d'oscillations). Si $A > 5$ elles sont positives (oscillations).

Si $1 < A < 5$, le déterminant est négatif et les racines sont complexes. On constate alors que leur partie réelle sera négative tant que $1 < A < 3$ (pas d'oscillations). En revanche, elle sera positive si $3 < A < 5$ (oscillations). Ces racines valent

$$p_{1,2} = \frac{-3\omega_0(1-A/3) \pm j\sqrt{-9\omega_0^2(1-A/3)^2 + 4\omega_0^2}}{2}$$

Le calcul des racines montre donc que le montage est instable pour $A > 3$. De plus, on peut dire que le démarrage sera pseudo-oscillant pour $3 < A < 5$ alors qu'il sera exponentiel croissant pour $A > 5$.

- *Le régime permanent: fréquence et amplitude des oscillations.*

- En régime permanent, la non linéarité de l'amplificateur se fait sentir et il n'est plus possible de raisonner aussi simplement que lors du démarrage. On va faire l'hypothèse dite du premier harmonique. Pour une amplitude de signal en entrée de l'amplificateur donnée, on regarde l'allure de la sortie (elle est affectée par la non-linéarité). De la sortie distordue, on extrait le premier harmonique. La non linéarité est alors modélisée par un gain linéaire \bar{N} équivalent, rapport du premier harmonique de la sortie sur l'entrée (ce gain remplace le gain A de l'étude du démarrage).

Une fois \bar{N} calculé, la condition d'oscillation est donnée par :

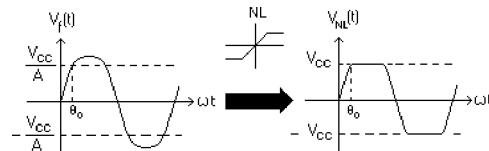
$$\bar{N}B(j\omega) = -1$$

La résolution de cette équation complexe nous donnera la fréquence des oscillations ainsi que leur amplitude.

Dans le cas de notre exemple, nous allons calculer \bar{N} .

Nous allons supposer que $V_f(t) = V \sin(\omega t)$ (V et ω sont les inconnues que nous recherchons).

$V_{NL}(t)$ vaut $A V_f(t)$ tant que $V_f(t)$ est inférieure, en valeur absolue, à V_{cc}/A . Sinon elle vaut $+V_{cc}$ ou $-V_{cc}$.



On constate que la non-linéarité n'introduit pas de déphasage (il n'y a pas d'hystérésis)

$$V_{NL1} = \frac{2}{T} \int_T V_{NL}(t) \sin(\omega t) dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} V_{NL}(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{4}{\pi} \left[\int_0^{\theta_0} A V \sin^2 \theta d\theta + \int_{\theta_0}^{\pi/2} V_{cc} \sin \theta d\theta \right]$$

Sachant que $V_{cc} = A V \sin \theta_0$, on trouve :

$$\bar{N} = \frac{2A}{\pi} \left(\theta_0 + \frac{\sin(2\theta_0)}{2} \right)$$

La condition $\bar{N}B(j\omega) = -1$ nous donne que :

$$\omega = \omega_0 \text{ et que } \bar{N} = \frac{2A}{\pi} \left(\theta_0 + \frac{\sin(2\theta_0)}{2} \right) = 3 \text{ ce qui permet de trouver } V \text{ (approche graphique)}$$

rq : l'hypothèse du premier harmonique sera d'autant plus justifiée que les harmoniques ont peu d'incidence sur l'entrée de l'amplificateur, c'est à dire que le filtre de retour est sélectif.

15.3. LES AMELIORATIONS INDISPENSABLES POUR UN TEL MONTAGE.

La relation $\overline{N}B(j\omega) = -1$ permet d'écrire $\text{Arg}(\overline{N}) + \text{Arg}(B(j\omega)) = \pi$ ce qui conduit à la fréquence d'oscillation. En différenciant la dernière relation, on trouve :

$$\delta\theta + d\phi = 0 \quad (\phi \text{ argument de } B) \text{ soit } \delta\theta = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\right)_{\omega_0} d\omega$$

$$\text{on peut alors écrire que } \frac{\partial\omega}{\partial\phi} \approx \frac{-1}{\left(\frac{\partial\phi}{\partial\omega}\right)_{\omega_0}}$$

Dans le cas du pont de Wien, on a :

$$B(p) = \frac{-\frac{1}{3}}{1 + Q\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p}\right)} \approx \frac{-\frac{1}{3}}{1 + 2.jQ\left(\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right)} \text{ soit } \phi \approx \pi - \text{Arc tan}\left(2Q\frac{\delta\omega}{\omega_0}\right) \text{ et donc}$$

$$\frac{\delta\omega}{\delta\phi} \approx \omega_0/2.Q$$

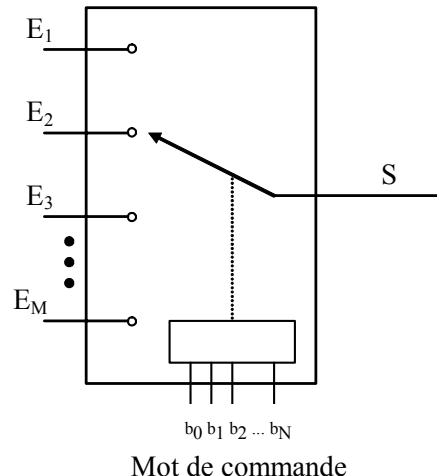
Le fait que le filtre de retour ait un fort coefficient de qualité permet de rendre l'oscillateur moins sensible aux éventuelles variations d'état de l'amplificateur (si les variations donnent lieu une variation de phase de ce dernier...). C'est pourquoi on utilise souvent des oscillateurs à quartz, dans lesquels la cellule sélective de retour est réalisée à partir d'un composant piézoélectrique dont le comportement permet d'obtenir des facteurs de qualité supérieurs à 10000. Ce composant est notamment utilisé pour réaliser la seconde dans les montres...

16. MULTIPLEXAGE - DEMULTIPLEXAGE

16.1. LE MULTIPLEXAGE

Un multiplexeur est un circuit logique à M entrées dites de données (ou d'informations) et une sortie qui transmet les informations parvenant à l'entrée sélectionnée.

Pour sélectionner une entrée, le multiplexeur doit recevoir un ordre qui provient de N entrées complémentaires appelées entrées d'adresse : ces entrées aiguillent les données d'entrée choisies vers la sortie. Les nombres N et M sont liés par la relation : $M = 2^N$.



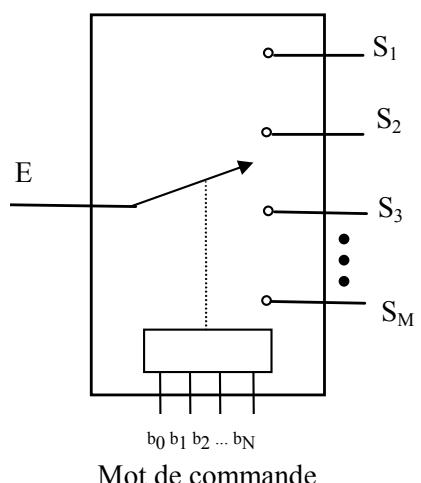
Intérêt

- Un multiplexeur joue le rôle d'un commutateur à plusieurs positions qui aiguillera les informations de n'importe quelle entrée.
- Les entrées d'adressage permettent de connaître à chaque instant l'état d'une entrée de données.
- Par une utilisation cyclique des entrées d'adressage, les données des entrées, qui sont en parallèle à l'entrée du multiplexeur, se retrouvent en série à la sortie.

16.2. LE DEMULTIPLEXAGE

Un démultiplexeur est un circuit logique à une entrée de données ou d'informations et M sorties qui reçoivent les informations d'entrée.

Pour sélectionner la sortie qui doit être active, le démultiplexeur reçoit un ordre de N entrées d'adresse, comme dans le cas du multiplexeur. Ces sorties orientent les données d'entrée vers la sortie sélectionnée. Les nombres N et M sont liés par la relation : $M = 2^N$.

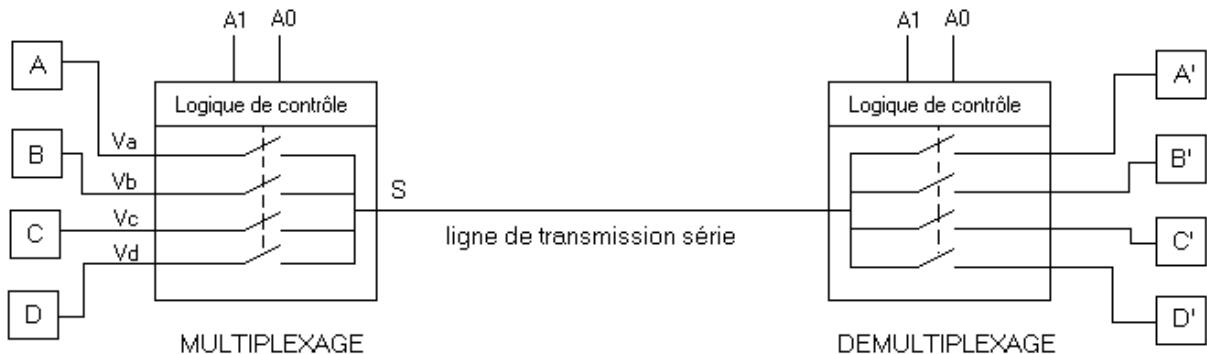


Intérêt

- Un démultiplexeur joue le rôle d'un commutateur à plusieurs positions qui oriente les informations d'entrée vers la sortie choisie,
- Les entrées d'adressage permettent de connaître à chaque instant l'état d'une sortie,
- Par une utilisation cyclique des entrées d'adressage, les données des entrées, qui sont en série à l'entrée du démultiplexeur, se retrouvent en parallèle à la sortie.

16.3. EXEMPLE D'APPLICATION

Le multiplexage temporel (TDM pour Time Division Multiplexing) est l'application systématiquement utilisée en télécommunication. On fait appel à la TDM pour transmettre simultanément plusieurs signaux sur un même canal de transmission. Les signaux sont appliqués au multiplexeur qui échantillonne à tour de rôle chacun d'entre eux à une fréquence telle qu'elle soit supérieure à la fréquence des signaux d'entrée. Cela permet d'éviter les problèmes de perte d'informations (recouvrement de spectre) lors de la reconstitution des messages. Les échantillons sont donc transmis sur le canal en série, entrelacés, pour être triés et réattribués à leur message d'origine à l'arrivée. Sur la ligne transite donc un signal composite consistant en une succession d'impulsions d'amplitudes diverses. En réception, le signal composite est démultiplexé au moyen d'un second commutateur électronique (démultiplexeur) qui distribue les signaux échantillonnés sur chaque sortie. Le bon fonctionnement du système repose sur la synchronisation parfaite du couple multiplexeur-démultiplexeur.



16.4. LES MULTIPLEXEURS ET LES DEMULTIPLEXEURS ANALOGIQUES

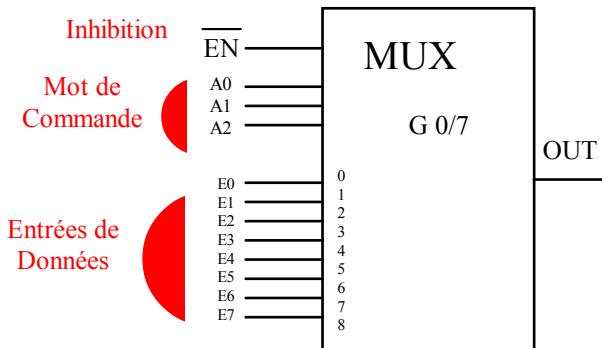
Le multiplexage/démultiplexage est dit "analogique" lorsqu'il est possible de faire transiter des tensions variables (et pas simplement un signal binaire).

On peut définir trois imperfections qui influencent le fonctionnement :

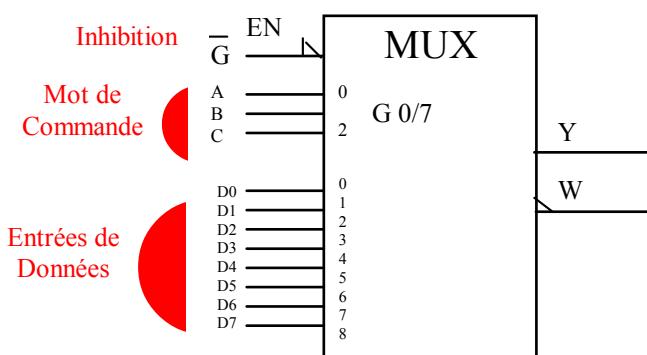
- La résistance RON :
Lorsqu'une entrée et une sortie sont reliées, il existe une résistance de faible valeur entre l'entrée considérée et la sortie, on l'appelle RON .
- Temps de fermeture TON :
C'est le temps qui s'écoule entre le moment où il y a présence du mot de commande et la connexion complète entre l'entrée désirée et la sortie.
- Temps d'ouverture TOFF :
C'est le temps qui s'écoule entre le moment où il y a présence du nouveau mot de commande et la déconnexion complète de l'entrée et de la sortie.

Exemple de multiplexeur/démultiplexeur analogique : le 4051 ou encore le 4067 ...

16.5. EXEMPLES DE CIRCUITS LOGIQUES



MUX AD7501

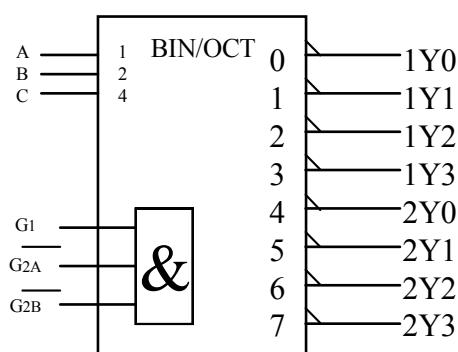


74LS151

Ce circuit référencé 74LS151 est appelé *sélecteur/multiplexeur 8 vers 1* c'est à dire qu'il possède 8 entrées de données (D0 à D7) pouvant être aiguillé vers la sortie Y (ou Y=W) grâce aux entrées de commande A, B et C.

La validité du circuit se fait par l'entrée de contrôle notée G.

(voir Mémotech électronique, p99)



74LS138

Ce circuit référencé 74LS138 est appelé *décodeur/démultiplexeur 3 vers 8*.

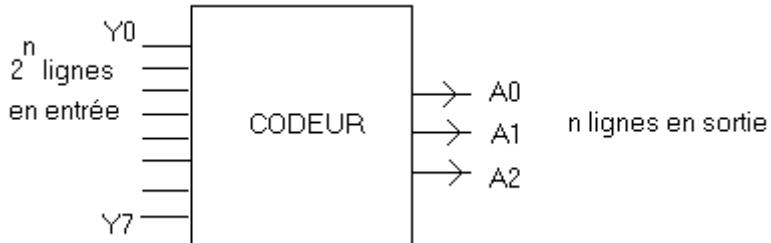
La négation logique en sortie indique que l'état logique bas est présent sur la sortie choisie par les entrées de commande A, B et C.

La validité du circuit se fait par les entrées de contrôle notée G1, G2x.

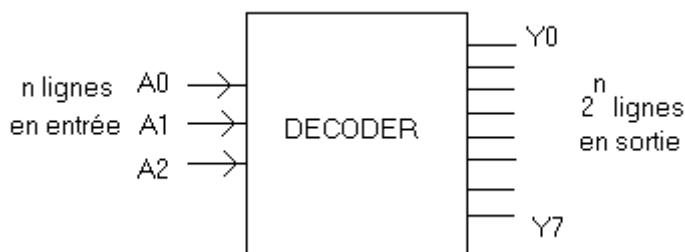
(voir Mémotech électronique, p102)

17. CODEUR ET DECODEUR BINAIRE

Un CODEUR est un circuit qui comporte en entrée et n lignes en sortie. A chaque ligne d'entrée correspond un code unique en sortie :



Un DECODEUR est un circuit qui comporte n lignes d'entrée et lignes en sorties. Il sélectionne une sortie unique en fonction du mot binaire en entrée.



Donner la table de vérité du codeur et du décodeur :

Codeur								Valeur binaire			Décodeur							
Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	A2	A1	A0	Y0	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Il existe d'autre modèle de codeur-décodeur intégré (par exemple pour le BCD). Mais le lecteur pourra concevoir par synthèse (VHDL par exemple) n'importe quel codeur-décodeur spécifique à une application.