



ECOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

GENIE CIVIL ET ENVIRONNEMENTAL

Mécanique des structures

Exercices du cours LGCIV 1022

Sébastien Goessens
Pierre Latteur

Année académique 2016-2017
Version : Sept. 2016

Si vous trouvez des erreurs dans ce syllabus, n'hésitez pas à contacter sebastien.goessens@uclouvain.be.

Les exercices proviennent notamment des livres suivants :

« Introduction à l'analyse des structures », Marc-André Studer & François Frey – Presses Polytechniques et universitaires romandes 2012.

“Calculer une structure, de la théorie à l'exemple”, Pierre Latteur, éditions L'Harmattan/Academia, Louvain-la-Neuve, (1ère édition sept. 2006).

Table des matières de la partie 1 :

Enoncés des exercices

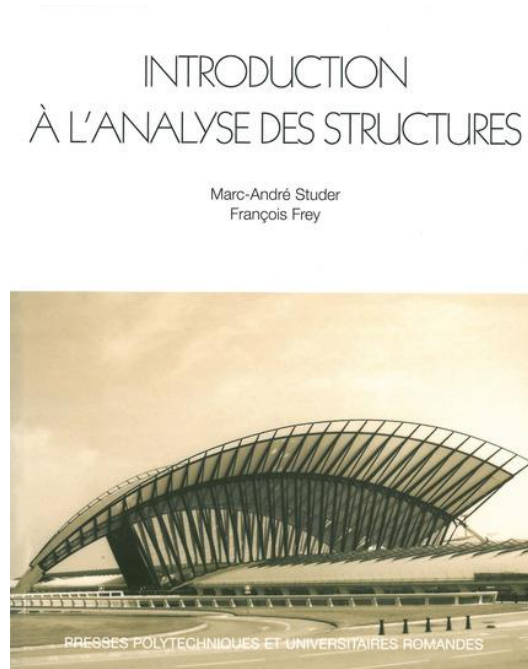
Chapitre 1	- Compositions de forces.....	- 6 -
Chapitre 2	- Equilibres.....	- 16 -
Chapitre 3	- Eléments de structure	- 18 -
Chapitre 4	- Réaction d'appuis	- 20 -
Chapitre 5	- Structures composées.....	- 22 -
Chapitre 6	- Exercices complémentaires (appuis – dimensionnement - ...).....	- 23 -
Chapitre 7	- Treillis	- 26 -
Chapitre 8	- Arcs funiculaires & câbles	- 29 -
Chapitre 9	- Efforts internes.....	- 34 -
Chapitre 10	- Flexion simple.....	- 40 -
Chapitre 11	- Flexion oblique et composée	- 41 -
Chapitre 12	- Effort tranchant.....	- 44 -
Chapitre 13	- Torsion.....	- 45 -
Chapitre 14	- Cercles de Mohr.....	- 47 -
Chapitre 15	- Flambement.....	- 49 -
Chapitre 16	- Exercices récapitulatifs	- 55 -

Table des matières de la partie 2 :
Solutions des exercices

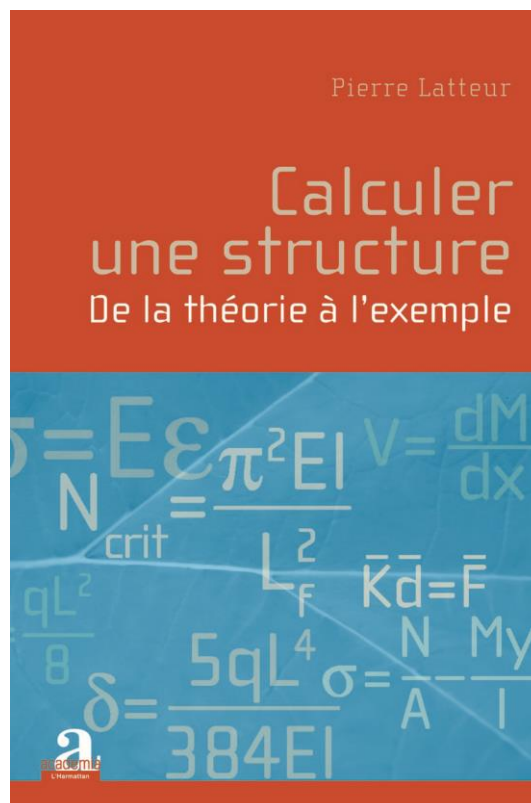
Chapitre 1	Solutions - Compositions de forces.....	- 64 -
Chapitre 2	Solutions - Equilibres	- 64 -
Chapitre 3	Solutions - Eléments de structure	- 65 -
Chapitre 4	Solutions - Réaction d'appuis.....	- 65 -
Chapitre 5	Solutions - Structures composées	- 65 -
Chapitre 6	Solutions - Exercices complémentaires (appuis – dim. - ...).....	- 66 -
Chapitre 7	Solutions - Treillis	- 68 -
Chapitre 8	Solutions - Arcs funiculaires & câbles.....	- 73 -
Chapitre 9	Solutions - Efforts internes.	- 82 -
Chapitre 10	Solutions - Flexion simple.....	- 92 -
Chapitre 11	Solutions - Flexion oblique et composée	- 93 -
Chapitre 12	Solutions - Effort tranchant.....	- 96 -
Chapitre 13	Solutions - Torsion.....	- 97 -
Chapitre 14	Solutions - Cercles de Mohr	- 99 -
Chapitre 15	Solutions - Flambement.....	- 101 -
Chapitre 16	Solutions - Exercices récapitulatifs.....	- 110 -

Livres de référence (théorie & exercices)

Introduction à l'analyse des structures - Marc-André Studer & François Frey
Presses Polytechniques et universitaires romandes 2012 :



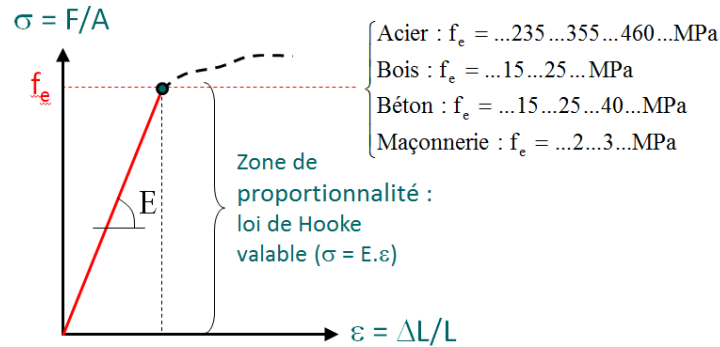
Calculer une structure, De la théorie à l'exemple – Pierre Latteur
Harmattan-Academia – 6^e édition en 2015 :



Hypothèses importantes

Hypothèse sur le comportement des matériaux :

Dans le cadre de ce cours, on considère que les matériaux ont un comportement élastique linéaire isotrope réversible, identique en traction et en compression, jusqu'à une valeur notée f_e , qui représente à la fois la limite d'élasticité et la rupture du matériau.

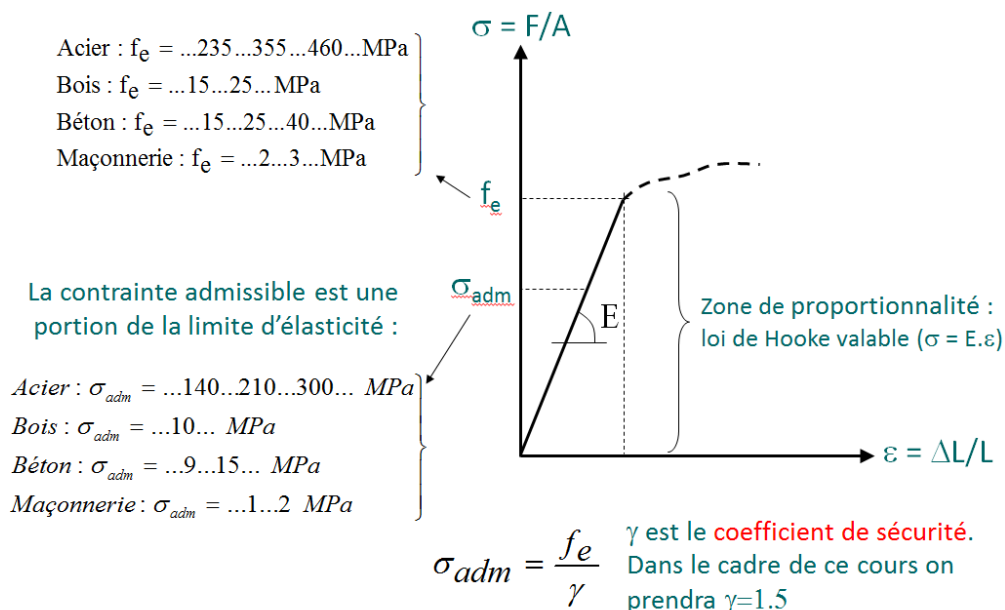


Cette hypothèse, qui consiste à considérer un matériau idéal répondant à la loi de Hooke en négligeant toute la zone plastique (matériaux ductiles) ou la zone de comportement non linéaire (matériaux fragiles), est appelée « Hypothèse de linéarisation matérielle ».

Elle n'est valable QUE pour des petits déplacements, ce qui est le cas dans la majorité des ouvrages.

Hypothèse sur les coefficients de sécurité et notion de contraintes admissibles :

Dans le cadre de ce cours, on considère que toutes les incertitudes (matériau, charges, exécution, modélisation, etc.) s'expriment par un seul coefficient de sécurité γ que l'on applique au matériau, et qui vaut 1,5. Ce coefficient de sécurité s'applique à la valeur de f_e et procure ce qu'on appellera la *contrainte admissible*.



Tableaux des profilés

IPE Profils IPE

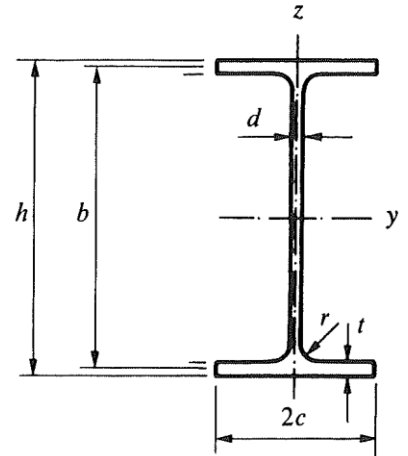
Longueurs normales

$h \leq 180$ 8...18 m

$h \geq 200$ 8...24 m

EURONORM 19-57, DIN 1025/5

IPE	Dimensions de la section					b mm
	h mm	2c mm	d mm	t mm	r mm	
80	80	46	3,8	5,2	5	74,8
100	100	55	4,1	5,7	7	94,3
120	120	64	4,4	6,3	7	113,7
140	140	73	4,7	6,9	7	133,1
160	160	82	5,0	7,4	9	152,6
180	180	91	5,3	8,0	9	172,0
200	200	100	5,6	8,5	12	191,5
220	220	110	5,9	9,2	12	210,8
240	240	120	6,2	9,8	15	230,2
270	270	135	6,6	10,2	15	259,8
300	300	150	7,1	10,7	15	289,3
330	330	160	7,5	11,5	18	318,5
360	360	170	8,0	12,7	18	347,3
400	400	180	8,6	13,5	21	386,5
450	450	190	9,4	14,6	21	435,4
500	500	200	10,2	16,0	21	484,0
550	550	210	11,1	17,2	24	532,8
600	600	220	12,0	19,0	24	581,0



$$b = h - t$$

$$A_w = b \cdot d$$

$$W_y = \frac{I_y}{h/2}$$

$$S_y = Z_y / 2$$

$$\bar{W}_y = \frac{I_y}{b/2}$$

$$S_z = Z_z / 2$$

$$W_z = \frac{I_z}{c}$$

IPE	m kg/m	Valeurs statiques											
		A mm ²	A _w mm ²	I _y mm ⁴	W _y mm ³	\bar{W}_y mm ³	Z _y mm ³	i _y mm	I _z mm ⁴	W _z mm ³	Z _z mm ³	i _z mm	K mm ⁴
				$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^6$
80	6,0	764	284	0,801	20,0	21,4	23,2	32,4	0,085	3,69	5,8	10,5	0,0067
100	8,1	1030	387	1,71	34,2	36,3	39,4	40,7	0,159	5,79	9,2	12,4	0,0115
120	10,4	1320	500	3,18	53,0	55,9	60,8	49,0	0,277	8,65	13,6	14,5	0,0169
140	12,9	1640	626	5,41	77,3	81,3	88,4	57,4	0,449	12,3	19,2	16,5	0,0240
160	15,8	2010	763	8,69	109	114	124	65,8	0,683	16,7	26,1	18,4	0,0353
180	18,8	2390	912	13,2	146	154	166	74,2	1,01	22,2	34,6	20,5	0,0472
200	22,4	2850	1070	19,4	194	203	220	82,6	1,42	28,5	44,7	22,4	0,0685
220	26,2	3340	1240	27,7	252	263	286	91,1	2,05	37,3	58,0	24,8	0,0898
240	30,7	3910	1430	38,9	324	338	366	99,7	2,84	47,3	74,0	26,9	0,127
270	36,1	4590	1710	57,9	429	446	484	112	4,20	62,2	97,0	30,2	0,157
300	42,2	5380	2050	83,6	557	578	628	125	6,04	80,5	125	33,5	0,198
330	49,1	6260	2390	117,7	713	739	804	137	7,88	98,5	154	35,5	0,276
360	57,1	7270	2780	162,7	904	937	1020	150	10,4	123	191	37,9	0,371
400	66,3	8450	3320	231,3	1160	1200	1310	165	13,2	146	229	39,5	0,504
450	77,6	9880	4090	337,4	1500	1550	1700	185	16,8	176	275	41,2	0,661
500	90,7	11600	4940	482,0	1930	1990	2200	204	21,4	214	336	43,1	0,886
550	106	13400	5910	671,2	2440	2520	2780	223	26,7	254	401	44,5	1,22
600	122	15600	6970	920,8	3070	3170	3520	243	33,9	308	486	46,6	1,65

HEA Profils à larges ailes HEA

Longueurs normales

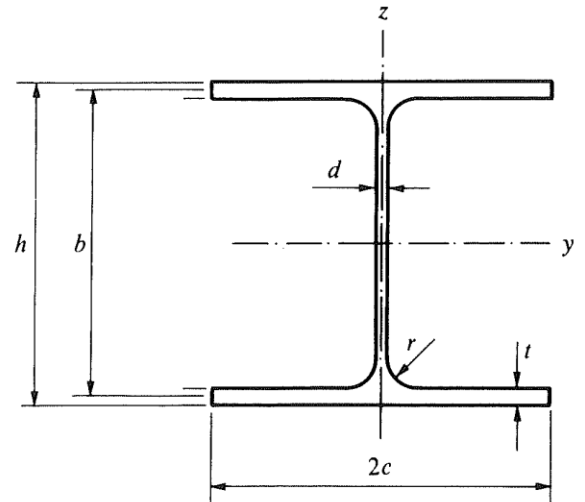
$h \leq 180$ 8...18 m

$h \geq 200$ 8...24 m

EURONORM 53-62, DIN 1025/3

Autres désignations: DIE, IPBI

HEA	Dimensions de la section					b mm
	h mm	2c mm	d mm	t mm	r mm	
100	96	100	5	8	12	88,0
120	114	120	5	8	12	106,0
140	133	140	5,5	8,5	12	124,5
160	152	160	6	9	15	143,0
180	171	180	6	9,5	15	161,5
200	190	200	6,5	10	18	180,0
220	210	220	7	11	18	199,0
240	230	240	7,5	12	21	218,0
260	250	260	7,5	12,5	24	237,5
280	270	280	8	13	24	257,0
300	290	300	8,5	14	27	276,0
320	310	300	9	15,5	27	294,5
340	330	300	9,5	16,5	27	313,5
360	350	300	10	17,5	27	332,5
400	390	300	11	19	27	371,0
450	440	300	11,5	21	27	419,0
500	490	300	12	23	27	467,0
550	540	300	12,5	24	27	516,0
600	590	300	13	25	27	565,0
650	640	300	13,5	26	27	614,0
700	690	300	14,5	27	27	663,0
800	790	300	15	28	30	762,0
900	890	300	16	30	30	860,0
1000	990	300	16,5	31	30	959,0



$$b = h - t$$

$$A_w = b \cdot d$$

$$W_y = \frac{I_y}{h/2}$$

$$S_y = Z_y / 2$$

$$\bar{W}_y = \frac{I_y}{b/2}$$

$$S_z = Z_z / 2$$

$$W_z = \frac{I_z}{c}$$

HEA	m kg/m	Valeurs statiques											
		A mm ²	A _w mm ²	I _y mm ⁴	W _y mm ³	\bar{W}_y mm ³	Z _y mm ³	i _y mm	I _z mm ⁴	W _z mm ³	Z _z mm ³	i _z mm	K mm ⁴
				$\times 10^8$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^8$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^8$
100	16,7	2120	440	3,49	73	79	83	40,6	1,34	26,8	41,2	25,1	0,0520
120	19,9	2530	530	6,06	106	114	119	48,9	2,31	38,5	58,9	30,2	0,0596
140	24,7	3140	685	10,3	155	166	173	57,3	3,89	55,6	84,7	35,2	0,0803
160	30,4	3880	858	16,7	220	234	246	65,7	6,16	76,9	118	39,8	0,118
180	35,5	4530	969	25,1	294	311	324	74,5	9,25	103	157	45,2	0,147
200	42,3	5380	1170	36,9	389	410	430	82,8	13,4	134	204	49,8	0,204
220	50,5	6430	1390	54,1	515	544	568	91,7	19,5	178	271	55,1	0,281
240	60,3	7680	1640	77,6	675	712	744	101	27,7	231	352	60,0	0,410
260	68,2	8680	1780	104,5	836	881	920	110	36,7	282	430	65,0	0,520
280	76,4	9730	2060	136,7	1010	1060	1110	119	47,6	340	518	70,0	0,614
300	88,3	11300	2350	182,6	1260	1320	1380	127	63,1	421	642	74,9	0,842
320	97,6	12400	2650	229,3	1480	1560	1630	136	69,9	466	710	74,9	1,09
340	105	13300	2980	276,9	1680	1770	1850	144	74,4	496	756	74,6	1,29
360	112	14300	3320	330,9	1890	1990	2080	152	78,9	526	803	74,3	1,51
400	125	15900	4080	450,7	2310	2430	2560	168	85,6	571	873	73,4	1,91
450	140	17800	4820	637,2	2900	3040	3220	189	94,7	631	966	72,9	2,49
500	155	19800	5600	869,7	3550	3730	3940	210	103,7	691	1060	72,4	3,18
550	166	21200	6450	1119	4150	4340	4620	230	108,2	721	1110	71,5	3,61
600	178	22600	7340	1412	4790	5000	5360	250	112,7	751	1160	70,5	4,08
650	190	24200	8290	1752	5470	5710	6140	269	117,2	782	1200	69,7	4,59
700	204	26000	9610	2153	6240	6490	7040	288	121,8	812	1260	68,4	5,23
800	224	28600	11400	3034	7680	7960	8700	326	126,4	843	1310	66,5	6,10
900	252	32100	13800	4221	9480	9820	10800	363	135,5	903	1420	65,0	7,51
1000	272	34700	15800	5538	11190	11550	12800	400	140,0	934	1470	63,5	8,37

HEB Profils à larges ailes HEB

Longueurs normales

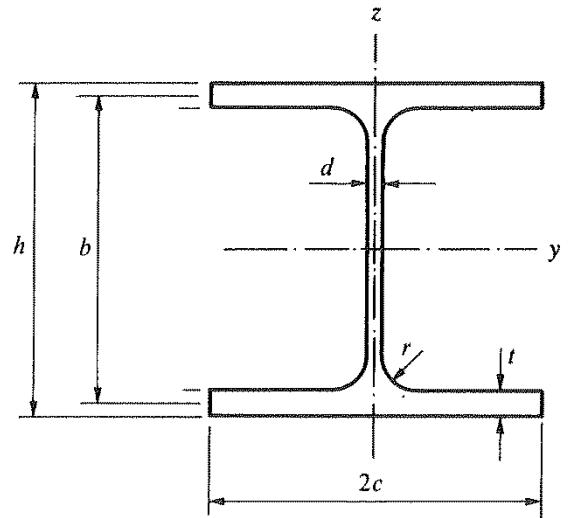
$h \leq 180$ 8...18 m

$h \geq 200$ 8...24 m

EURONORM 53-62, DIN 1025/2

Autres désignations: DIN, IPB

HEB	Dimensions de la section					
	h mm	2c mm	d mm	t mm	r mm	b mm
100	100	100	6	10	12	90,0
120	120	120	6,5	11	12	109,0
140	140	140	7	12	12	128,0
160	160	160	8	13	15	147,0
180	180	180	8,5	14	15	166,0
200	200	200	9	15	18	185,0
220	220	220	9,5	16	18	204,0
240	240	240	10	17	21	223,0
260	260	260	10	17,5	24	242,5
280	280	280	10,5	18	24	262,0
300	300	300	11	19	27	281,0
320	320	300	11,5	20,5	27	299,5
340	340	300	12	21,5	27	318,5
360	360	300	12,5	22,5	27	337,5
400	400	300	13,5	24	27	376,0
450	450	300	14	26	27	424,0
500	500	300	14,5	28	27	472,0
550	550	300	15	29	27	521,0
600	600	300	15,5	30	27	570,0
650	650	300	16	31	27	619,0
700	700	300	17	32	27	668,0
800	800	300	17,5	33	30	767,0
900	900	300	18,5	35	30	865,0
1000	1000	300	19	36	30	964,0



$$b = h - t$$

$$A_w = b \cdot d$$

$$W_y = \frac{I_y}{h/2}$$

$$S_y = Z_y / 2$$

$$\bar{W}_y = \frac{I_y}{b/2}$$

$$S_z = Z_z / 2$$

$$W_z = \frac{I_z}{c}$$

HEB	m kg/m	Valeurs statiques											
		A mm ²	A _w mm ²	I _y mm ⁴	W _y mm ³	\bar{W}_y mm ³	Z _y mm ³	i _y mm	I _z mm ⁴	W _z mm ³	Z _z mm ³	i _z mm	K mm ⁴
				$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^6$
100	20,4	2600	540	4,50	90	100	104	41,6	1,67	33	51	25,3	0,0931
120	26,7	3400	708	8,64	144	158	165	50,4	3,18	53	81	30,6	0,139
140	33,7	4300	896	15,1	216	236	246	59,3	5,50	79	120	35,8	0,202
160	42,6	5430	1180	24,9	311	339	354	67,8	8,89	111	170	40,5	0,312
180	51,2	6530	1410	38,3	426	461	482	76,6	13,6	151	231	45,7	0,422
200	61,3	7810	1660	57,0	570	616	642	85,4	20,0	200	306	50,7	0,596
220	71,5	9100	1940	80,9	736	793	828	94,3	28,4	258	394	55,9	0,770
240	83,2	10600	2230	112,6	938	1010	1050	103	39,2	327	499	60,8	1,04
260	93,0	11800	2420	149,2	1150	1230	1280	112	51,3	395	603	65,8	1,26
280	103	13100	2750	192,7	1380	1470	1530	121	65,9	471	718	70,9	1,45
300	117	14900	3090	251,7	1680	1790	1870	130	85,6	571	871	75,8	1,87
320	127	16100	3440	308,2	1930	2060	2140	138	92,4	616	940	75,7	2,29
340	134	17100	3820	366,6	2160	2300	2400	146	96,9	646	986	75,3	2,62
360	142	18100	4220	431,9	2400	2560	2680	155	101	676	1030	74,9	2,98
400	155	19800	5080	576,8	2880	3070	3240	171	108	721	1100	74,0	3,61
450	171	21800	5940	798,9	3550	3770	3980	191	117	781	1200	73,3	4,49
500	187	23900	6840	1072	4290	4540	4820	212	126	842	1290	72,7	5,50
550	199	25400	7820	1367	4970	5250	5600	232	131	872	1340	71,7	6,12
600	212	27000	8840	1710	5700	6000	6420	252	135	902	1390	70,8	6,80
650	225	28600	9900	2106 *	6480	6800	7320	271	140	932	1440	69,9	7,52
700	241	30600	11400	2569	7340	7690	8320	290	144	963	1490	68,7	8,42
800	262	33400	13400	3591	8980	9360	10220	328	149	994	1550	66,8	9,62
900	291	37100	16000	4941	10980	11400	12580	365	158	1050	1660	65,3	11,5
1000	314	40000	18300	6447	12890	13400	14860	401	163	1090	1710	63,8	12,7

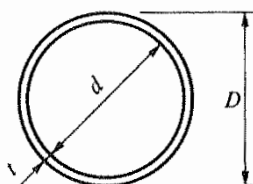
ROR Tubes en acier sans soudure ou soudés

Longueurs normales

~ 6 m (tubes soudés)

~ 13 m (tubes sans soudures)

$$K = 2 I$$



ROR	D · t mm	m kg/m	Valeurs statiques				
			A mm ²	I mm ⁴	W mm ³	Z mm ³	i mm
42,4 •	2,3	2,27	290	0,0584	2,76	3,70	14,2
	2,6	2,55	325	0,0646	3,05	4,12	14,1
	5,0	4,61	587	0,105	4,93	7,04	13,3
	7,1	6,18	787	0,128	6,02	8,97	12,7
	10,0	7,99	1020	0,146	6,90	10,8	12,0
48,3 •	2,3	2,61	332	0,0881	3,65	4,87	16,3
	2,6	2,93	373	0,0978	4,05	5,44	16,2
	5,0	5,34	680	0,162	6,69	9,42	15,4
	7,1	7,21	919	0,201	8,31	12,2	14,8
	10,0	9,45	1200	0,236	9,76	15,0	14,0
60,3 •	2,9	4,11	523	0,216	7,16	9,56	20,3
	5,0	6,82	869	0,335	11,1	15,3	19,6
	7,1	9,32	1190	0,427	14,2	20,2	19,0
	10,0	12,4	1580	0,520	17,2	25,6	18,1
76,1 •	2,9	5,24	667	0,447	11,8	15,5	25,9
	5,0	8,77	1120	0,709	18,6	25,3	25,2
	7,1	12,1	1540	0,926	24,3	33,9	24,5
	10,0	16,3	2080	1,16	30,5	44,0	23,6
88,9 •	3,2	6,76	862	0,792	17,8	23,5	30,3
	5,0	10,3	1320	1,16	26,2	35,2	29,7
	7,1	14,3	1820	1,54	34,6	47,6	29,0
	10,0	19,5	2480	1,96	44,1	62,6	28,1
	12,5	23,6	3000	2,25	50,6	73,6	27,4
101,6 •	3,6	8,70	1110	1,33	26,2	34,6	34,7
	5,0	11,9	1520	1,77	34,9	46,7	34,2
	7,1	16,5	2110	2,37	46,6	63,5	33,5
	10,0	22,6	2880	3,05	60,1	84,2	32,6
	12,5	27,5	3500	3,54	69,7	99,9	31,8
114,3 •	3,6	9,83	1250	1,92	33,6	44,1	39,2
	7,1	18,8	2390	3,45	60,4	81,7	38,0
	10,0	25,7	3280	4,50	78,7	109	37,0
	12,5	31,4	4000	5,26	92,0	130	36,3
	16,0	38,8	4940	6,13	107	156	35,2
127 •	4,0	12,1	1550	2,93	46,1	60,5	43,5
	7,1	21,0	2670	4,82	75,9	102	42,5
	10,0	28,9	3680	6,34	99,8	137	41,5
	12,5	35,3	4500	7,46	117	165	40,7
	16,0	43,8	5580	8,77	138	199	39,7
139,7 •	4,0	13,4	1710	3,93	56,2	73,7	48,0
	7,1	23,2	2960	6,52	93,3	125	46,9
	10,0	32,0	4070	8,62	123	169	46,0
	12,5	39,2	5000	10,20	146	203	45,2
	16,0	48,8	6220	12,09	173	246	44,1
152,4 •	4,0	14,6	1860	5,14	67,4	88,1	52,5
	4,5	16,4	2090	5,72	75,1	98,5	52,3
	7,1	25,4	3240	8,57	113	150	51,4
	10,0	35,1	4470	11,40	150	203	50,5
	12,5	43,1	5490	13,55	178	245	49,7
152,4 •	16,0	53,8	6860	16,16	212	299	48,6
	25,0	78,5	10000	21,1	277	411	45,9

ROR	D · t mm	m kg/m	Valeurs statiques				
			A mm ²	I mm ⁴	W mm ³	Z mm ³	i mm
159 •	4,0	15,3	1950	5,85	73,6	96,1	54,8
	4,5	17,1	2180	6,52	82,0	107	54,6
	7,1	26,6	3390	9,79	123	164	53,8
	10,0	36,7	4680	13,05	164	222	52,8
	12,5	45,2	5750	15,55	196	269	52,0
168,3 •	4,0	16,2	2060	6,97	82,8	108	58,1
	4,5	18,2	2320	7,77	92,4	121	57,9
	7,1	28,2	3600	11,70	139	185	57,0
	10,0	39,0	4970	15,64	186	251	56,1
	12,5	48,0	6120	18,68	222	304	55,3
219,1 •	4,5	23,8	3030	17,47	159	207	75,9
	6,3	33,1	4210	23,86	218	285	75,3
	10,0	51,6	6570	35,98	328	438	74,0
	16,0	80,1	10200	52,97	483	661	72,0
	25,0	120	15200	73,0	666	947	69,2
273 •	4,0	17,7	22500	94,7	865	1300	64,9
	5,0	33,0	4210	37,81	277	359	94,8
	6,3	41,4	5280	46,96	344	448	94,3
	10,0	64,9	8260	71,54	524	692	93,1
	16,0	101	12900	107,1	784	1058	91,0
323,9 •	5,6	44,0	5600	70,94	438	567	113
	7,1	55,5	7070	88,69	548	713	112
	10,0	77,4	9860	121,6	751	986	111
	16,0	121	15500	183,9	1136	1518	109
	25,0	184	23500	264,0	1630	2239	106
355,6 •	4,0	280	35700	367	2260	3250	101
	6,0	390	49700	455	2810	4250	95,7
	8,0	68,6	8740	132,0	742	967	124
	10,0	85,2	10900	162,2	912	1195	123
	16,0	134	17100	246,6	1387	1847	120
406,4 •	25,0	204	26000	356,8	2007	2738	117
	40,0	311	39700	502	2820	4010	112
	60,0	437	55700	634	3560	5310	107
	6,3	62,2	7920	158,5	780	1009	141
	8,8	86,3	11000	217,3	1069	1391	141
406,4 •	12,5	121	15500	300,3	1478	1940	139
	16,0	154	19600	374,5	1843	2440	138
	25,0	235	30000	547,0	2692	3642	135
	40,0	361	46000	781,9	3850	5390	130
	60,0	513	65300	1010	4960	7270	124

MSH, RHS, TPS Profils creux carrés

Produit Mannesmann (MSH), British Steel (RHS),
Tubeurop France (TPS)

Laminage à chaud

Qualité d'acier: S355 (Fe E355)

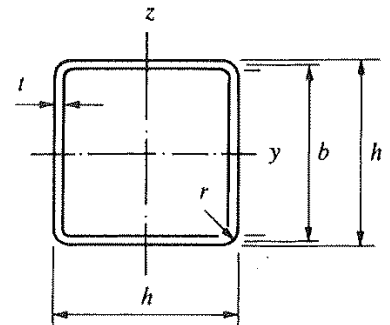
Longueurs normales: 6-16 m

Dénomination: p. ex. MSH 120 · 120 · 6,3 Fe E355

$$W = \frac{I}{h/2}$$

$$\bar{W} = \frac{I}{b/2}$$

$$\sim 2t \leq r \leq \sim 3t$$



h · h · t mm	m kg/m	Valeurs statiques							
		A mm ²	I mm ⁴	W mm ³	\bar{W} mm ³	b mm	Z mm ³	i mm	K mm ⁴
			$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^3$		$\times 10^6$
40 · 40 · 4	4,39	559	0,118	5,91	6,56	36	7,44	14,5	0,195
50 · 50 · 4	5,64	719	0,250	9,99	10,9	46	12,3	18,6	0,404
50 · 50 · 5	6,85	873	0,289	11,6	12,8	45	14,5	18,2	0,476
60 · 60 · 4	6,90	879	0,454	15,1	16,2	56	18,3	22,7	0,725
60 · 60 · 5	8,42	1070	0,533	17,8	19,4	55	21,9	22,3	0,864
70 · 70 · 5	9,99	1270	0,885	25,3	27,2	65	30,8	26,4	1,42
80 · 80 · 5	11,6	1470	1,37	34,2	36,5	75	41,1	30,5	2,17
80 · 80 · 6,3	14,2	1810	1,62	40,5	44,0	73,7	49,7	29,9	2,62
90 · 90 · 5	13,1	1670	2,00	44,4	47,1	85	53,0	34,5	3,16
90 · 90 · 6,3	16,2	2070	2,38	53,0	56,9	83,7	64,3	34,0	3,82
90 · 90 · 8	20,1	2560	2,81	62,6	68,5	82	77,6	33,2	4,59
100 · 100 · 4	11,9	1520	2,32	46,4	48,3	96	54,5	39,1	3,61
100 · 100 · 5	14,7	1870	2,79	55,9	58,7	95	66,4	38,6	4,39
100 · 100 · 6,3	18,2	2320	3,36	67,1	71,7	93,7	80,9	38,0	5,34
100 · 100 · 8	22,6	2880	4,00	79,9	87,0	92	98,2	37,3	6,46
100 · 100 · 10	27,4	3490	4,62	92,4	103	90	116	36,4	7,61
120 · 120 · 5	17,8	2270	4,98	83,0	86,6	115	97,6	46,8	7,77
120 · 120 · 6,3	22,2	2820	6,03	100	106	113,7	120	46,2	9,50
120 · 120 · 8	27,6	3520	7,26	121	130	112	146	45,5	11,6
120 · 120 · 10	33,7	4290	8,52	142	155	110	175	44,6	13,8
140 · 140 · 5	21,0	2670	8,07	115	120	135	135	55,0	12,5
140 · 140 · 8	32,6	4160	12,0	171	181	132	204	53,6	18,9
140 · 140 · 10	40,0	5090	14,2	202	218	130	246	52,7	22,7
150 · 150 · 5	22,6	2870	10,0	134	138	145	156	59,0	15,5
150 · 150 · 8	35,1	4480	14,9	199	210	142	237	57,7	23,5
150 · 150 · 10	43,1	5490	17,7	236	253	140	286	56,8	28,3
150 · 150 · 12,5	52,7	6710	20,8	277	303	137,5	342	55,7	33,8
160 · 160 · 6,3	30,1	3830	15,0	187	195	153,7	220	62,6	23,3
160 · 160 · 10	46,3	5890	21,9	273	291	150	329	60,9	34,8
180 · 180 · 5	27,3	3470	17,7	196	202	175	227	71,3	27,2
180 · 180 · 6,3	34,0	4330	21,7	241	250	173,7	281	70,7	33,6
180 · 180 · 8	42,7	5440	26,6	296	309	172	349	70,0	41,6
180 · 180 · 10	52,5	6690	31,9	355	376	170	424	69,1	50,5
180 · 180 · 12,5	64,4	8210	37,9	421	453	167,5	511	68,0	60,7
180 · 180 · 16	80,2	10200	45,0	500	549	164	621	66,4	73,4
200 · 200 · 5	30,4	3870	24,5	245	251	195	283	79,5	37,6
200 · 200 · 6,3	38,0	4840	30,1	301	311	193,7	350	78,9	46,5
200 · 200 · 8	47,7	6080	37,1	371	386	192	436	78,1	57,8
200 · 200 · 10	58,8	7490	44,7	447	471	190	531	77,2	70,3
200 · 200 · 12,5	72,3	9210	53,4	534	591	187,5	643	76,1	84,9
200 · 200 · 16	90,3	11500	63,9	639	695	184	785	74,6	103
220 · 220 · 6,3	41,9	5340	40,5	368	379	213,7	427	87,1	62,4
220 · 220 · 10	65,1	8290	60,5	550	576	210	650	85,4	94,7
250 · 250 · 6,3	47,9	6100	60,1	481	494	243,7	556	99,3	92,4
250 · 250 · 8	60,3	7680	74,6	596	616	242	694	98,6	115
250 · 250 · 10	74,5	9490	90,6	724	755	240	851	97,7	141
250 · 250 · 12,5	91,9	11700	109	873	919	237,5	1040	96,6	172
250 · 250 · 16	115	14700	133	1060	1130	234	1280	95,0	211
260 · 260 · 8	62,8	8000	84,2	648	668	252	753	103	130
260 · 260 · 12,5	95,8	12200	124	951	999	247,5	1130	101	194
300 · 300 · 10	90,2	11500	160	1070	1110	290	1250	118	248
300 · 300 · 16	141	17900	239	1590	1680	284	1900	115	376
350 · 350 · 10	106	13500	259	1480	1520	340	1720	139	399
350 · 350 · 16	166	21100	389	2230	2330	334	2630	136	610
400 · 400 · 10	122	15500	391	1960	2010	390	2260	159	601
400 · 400 · 12,5	151	19200	478	2390	2470	387,5	2780	158	739
400 · 400 · 16	191	24300	593	2970	3090	384	3480	156	924

MSH, RHS, TPS

Profilés creux rectangulaires

Produit Mannesmann (MSH), British Steel (RHS),
Tubeprof-France (TPS)

Laminage à chaud

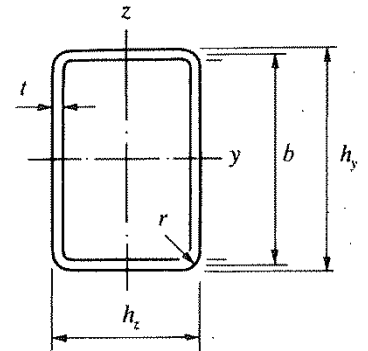
Qualité d'acier: S355 (Fe E355)

Longueurs normales: 6-16 m

Dénomination: p. ex. MSH 120 · 60 · 6,3 Fe E355

$$\bar{W}_y = \frac{I_y}{b/2}$$

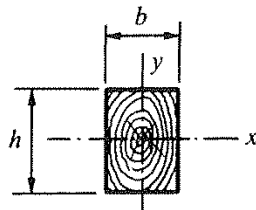
$$\sim 2t \leq r \leq \sim 3t$$



h _y · h _z · t mm	m kg/m	Valeurs statiques												
		A	I _y	W _y	\bar{W}_y	b _y	Z _y	i _y	I _z	W _z	Z _z	i _z	K	
		mm ²	mm ⁴	mm ³	mm ³	mm	mm ³	mm	mm ⁴	mm ³	mm ³	mm	mm ⁴	
				$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^3$		$\times 10^6$	$\times 10^3$	$\times 10^3$	$\times 10^6$		
50 · 30 · 4	4,39	559	0,165	6,60	7,17	46	8,59	17,2	0,0708	4,72	5,88	11,3	0,166	
60 · 40 · 4	5,64	719	0,328	10,9	11,7	56	13,8	21,4	0,170	8,52	10,3	15,4	0,367	
5	6,85	873	0,381	12,7	13,9	55	16,4	20,9	0,195	9,77	12,2	15,0	0,430	
80 · 40 · 4	6,90	879	0,682	17,1	17,9	76	21,8	27,9	0,222	11,1	13,2	15,9	0,552	
5	8,42	1070	0,803	20,1	21,4	75	26,1	27,4	0,257	12,9	15,7	15,5	0,651	
90 · 50 · 5	9,99	1270	1,27	28,3	29,9	85	36,0	31,6	0,492	19,7	23,5	19,7	1,16	
100 · 50 · 4	8,78	1120	1,40	27,9	29,2	96	35,2	35,3	0,462	18,5	21,5	20,3	1,13	
5	10,8	1370	1,67	33,3	35,2	95	42,6	34,8	0,543	21,7	25,8	19,9	1,35	
8	16,3	2080	2,30	46,0	50,0	92	61,4	33,3	0,717	28,7	36,3	18,6	1,86	
100 · 60 · 5	11,6	1470	1,89	37,8	39,8	95	47,4	35,8	0,836	27,9	32,9	23,8	1,88	
6,3	14,2	1810	2,25	45,0	48,0	93,7	57,3	35,2	0,981	32,7	39,5	23,3	2,24	
8	17,5	2240	2,64	52,8	57,4	92	68,7	34,4	1,13	37,8	47,1	22,5	2,65	
120 · 60 · 4	10,7	1360	2,49	41,5	42,9	116	51,9	42,8	0,831	27,7	31,7	24,7	2,01	
5	13,1	1670	2,99	49,9	52,0	115	63,1	42,3	0,988	32,9	38,4	24,3	2,42	
6,3	16,2	2070	3,58	59,7	63,0	113,7	76,7	41,6	1,16	38,8	46,3	23,7	2,90	
8	20,1	2560	4,25	70,8	75,9	112	92,7	40,8	1,35	45,0	55,4	23,0	3,44	
120 · 80 · 5	14,7	1870	3,65	60,9	63,5	115	74,6	44,2	1,93	48,2	56,1	32,1	4,01	
6,3	18,2	2320	4,40	73,3	77,4	113,7	91,0	43,6	2,30	57,6	68,2	31,5	4,87	
8	22,6	2880	5,25	87,5	93,8	112	111	42,7	2,73	68,1	82,6	30,8	5,87	
10	27,4	3490	6,09	102	111	110	131	41,8	3,13	78,1	97,3	29,9	6,88	
140 · 80 · 5	16,3	2070	5,34	76,3	79,1	135	94,3	50,8	2,21	55,3	63,6	32,7	4,99	
8	25,1	3200	7,76	111	118	132	141	49,3	3,14	78,5	94,1	31,4	7,33	
150 · 100 · 5	18,6	2370	7,39	98,5	102	145	119	55,8	3,92	78,5	90,1	40,7	8,07	
6,3	23,1	2950	8,98	120	125	143,7	147	55,2	4,74	94,8	110	40,1	9,86	
8	28,9	3680	10,8	145	153	142	180	54,4	5,69	114	135	39,4	12,0	
10	35,3	4490	12,8	171	183	140	216	53,4	6,65	133	161	38,5	14,3	
160 · 80 · 5	17,8	2270	7,44	93,0	96,0	155	116	57,2	2,49	62,3	71,1	33,1	6,00	
6,3	22,2	2820	9,03	113	118	153,7	142	56,6	2,99	74,8	86,8	32,6	7,30	
8	27,6	3520	10,9	136	144	152	175	55,7	3,56	89,0	106	31,8	8,83	
10	33,7	4290	12,8	161	171	150	209	54,7	4,11	103	125	31,0	10,4	
12,5	40,9	5210	14,9	186	201	147,5	247	53,4	4,65	116	146	29,9	12,0	
180 · 100 · 10	40,0	5090	20,4	226	240	170	288	63,2	7,87	157	188	39,3	18,6	
200 · 100 · 5	22,6	2870	15,0	149	153	195	185	72,1	5,05	101	114	41,9	12,0	
6,3	28,1	3580	18,3	183	189	193,7	228	71,5	6,13	123	140	41,4	14,8	
8	35,1	4480	22,3	223	233	192	282	70,6	7,39	148	172	40,6	18,0	
10	43,1	5490	26,6	266	280	190	341	69,6	8,69	174	206	39,8	21,6	
12,5	52,7	6710	31,4	314	335	187,5	408	68,4	10,0	201	245	38,7	25,4	
16	65,2	8300	36,8	368	400	184	491	66,6	11,5	229	290	37,2	29,8	
200 · 120 · 6,3	30,1	3830	20,7	207	213	193,7	253	73,4	9,29	155	177	49,2	20,3	
10	46,3	5890	30,3	303	319	190	379	71,7	13,4	223	263	47,6	30,0	
250 · 150 · 6,3	38,0	4840	41,4	331	340	243,7	402	92,5	18,7	250	283	62,2	40,5	
8	47,7	6080	51,1	409	422	242	501	91,7	23,0	306	350	61,5	50,2	
10	58,5	7490	61,7	494	515	240	611	90,8	27,6	367	426	60,6	60,9	
12,5	72,3	9210	73,9	591	622	237,5	740	89,6	32,7	435	514	59,6	73,3	
16	90,3	11500	88,8	710	759	234	906	87,9	38,7	516	625	58,0	88,7	
260 · 180 · 8	52,7	6720	63,9	492	507	252	592	97,5	36,1	401	459	73,3	72,2	
300 · 200 · 8	60,3	7680	97,2	648	666	292	779	113	51,8	518	589	82,2	106	
10	74,5	9490	118	788	815	290	956	112	62,8	628	721	81,3	129	
12,5	91,9	11700	143	952	993	287,5	1160	110	75,4	754	877	80,2	157	
16	115	14700	174	1160	1220	284	1440	109	91,9	911	1080	78,7	193	
350 · 250 · 10	90,2	11500	201	1150	1180	340	1380	132	119	955	1090	102	234	
400 · 200 · 10	90,2	11500	239	1200	1230	390	1480	144	80,8	808	911	83,9	193	
12,5	112	14200	291	1450	1500	387,5	1810	143	97,4	974	1110	82,8	234	
16	141	17900	357	1790	1860	384	2260	141	118	1180	1370	81,3	289	
450 · 250 · 10	106	13500	369	1640	1680	440	2000	165	148	1190	1330	105	333	
16	166	21100	557	2480	2570	434	3070	162	220	1760	2030	102	505	
500 · 300 · 10	122	15500	538	2150	2190	490	2600	186	244	1630	1830	126	525	
16	191	24300	818	3270	3380	484	4010	183	368	2450	2800	123	803	

Bois équarris

Le tableau suivant donne les caractéristiques géométriques des sections rectangulaires des bois équarris, jusqu'à 30 cm de hauteur.



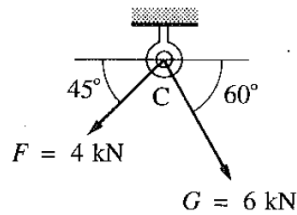
b cm	h cm	A cm ²	I_x cm ⁴	W_x cm ³	I_y cm ⁴	W_y cm ³	b cm	h cm	A cm ²	I_x cm ⁴	W_x cm ³	I_y cm ⁴	W_y cm ³
6	6	36	108	36	108	36	14	14	196	3 201	457	3 201	457
	8	48	256	64	144	48		16	224	4 779	597	3 659	523
	10	60	500	100	180	60		18	252	6 804	756	4 116	588
	12	72	864	144	216	72		20	280	9 333	933	4 573	653
	14	84	1 372	196	252	84		22	308	12 423	1 129	5 031	719
	16	96	2 048	256	288	96		24	336	16 128	1 344	5 488	784
	18	108	2 916	324	324	108		26	364	20 505	1 577	5 945	849
	20	120	4 000	400	360	120		28	392	25 611	1 829	6 403	914
	22	132	5 324	484	396	132		30	420	31 500	2 100	6 860	980
	24	144	6 912	576	432	144	16	16	256	5 461	683	5 461	683
	26	156	8 788	676	468	156		18	288	7 776	864	6 144	768
	28	168	10 976	784	504	168		20	320	10 667	1 067	6 827	853
8	8	64	341	85	341	85		22	352	14 197	1 291	7 509	939
	10	80	667	133	427	107		24	384	18 432	1 536	8 192	1 024
	12	96	1 152	192	512	128		26	416	23 435	1 803	8 875	1 109
	14	112	1 829	261	597	149		28	448	29 269	2 091	9 557	1 195
	16	128	2 731	341	683	171		30	480	36 000	2 400	10 240	1 280
	18	144	3 888	432	768	192	18	18	324	8 748	972	8 748	972
	20	160	5 333	533	853	213		20	360	12 000	1 200	9 720	1 080
	22	176	7 099	645	939	235		22	396	15 962	1 452	10 692	1 188
	24	192	9 216	768	1 024	256		24	432	20 736	1 728	11 664	1 296
	26	208	11 717	901	1 109	277		26	468	26 364	2 028	12 634	1 404
	28	224	14 635	1 045	1 195	299		28	504	32 928	2 352	13 608	1 512
	30	240	18 000	1 200	1 280	320		30	540	40 500	2 700	14 580	1 620
10	10	100	833	167	833	167	20	20	400	13 333	1 333	13 333	1 333
	12	120	1 440	240	1 000	200		22	440	17 747	1 613	14 667	1 467
	14	140	2 287	327	1 167	233		24	480	23 040	1 920	16 000	1 600
	16	160	3 413	427	1 333	267		26	520	29 293	2 253	17 333	1 733
	18	180	4 860	540	1 500	300		28	560	36 587	2 613	18 667	1 867
	20	200	6 667	667	1 667	333		30	600	45 000	3 000	20 000	2 000
	22	220	8 873	807	1 833	367	22	22	484	19 521	1 775	19 521	1 775
	24	240	11 520	960	2 000	400		24	528	25 344	2 112	21 296	1 936
	26	260	14 657	1 127	2 167	433		26	572	32 223	2 479	23 071	2 097
	28	280	18 293	1 307	2 333	467		28	616	40 245	2 875	24 845	2 259
	30	300	22 500	1 500	2 500	500		30	660	49 500	3 300	26 620	2 420
12	12	144	1 728	288	1 728	288	24	24	576	27 648	2 304	27 648	2 304
	14	168	2 744	392	2 016	336		26	624	35 152	2 704	29 952	2 496
	16	192	4 096	512	2 304	384		28	672	43 904	3 136	32 256	2 688
	18	216	5 832	648	2 592	432		30	720	54 000	3 600	34 560	2 880
	20	240	8 000	800	2 880	480	26	26	676	38 081	2 929	38 081	2 929
	22	264	10 648	968	3 168	528		28	728	47 563	3 397	41 011	3 155
	24	288	13 824	1 152	3 456	576		30	780	58 500	3 900	43 940	3 380
	26	312	17 576	1 352	3 744	624	28	28	784	51 221	3 659	51 221	3 659
	28	336	21 952	1 568	4 032	672		30	840	63 000	4 200	54 880	3 920
	30	360	27 000	1 800	4 320	720		30	900	67 500	4 500	67 500	4 500

PARTIE 1 :

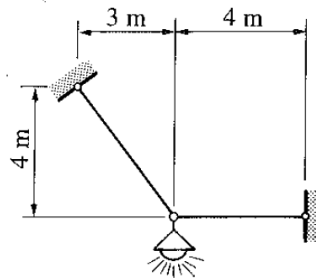
ENONCÉS DES EXERCICES

Chapitre 1 - Compositions de forces.

1.1 Sur le crochet C s'exercent deux forces F et G . Trouver, graphiquement puis analytiquement, l'orientation et l'intensité de leur résultante.



1.2 Une lampe de 400N est suspendue par deux fils. Trouver, analytiquement puis graphiquement, les forces qui s'exercent suivant l'axe de ces fils (tension dans les fils).

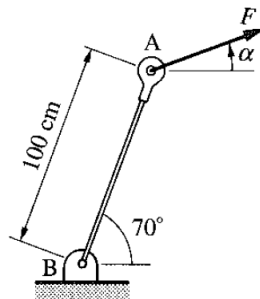


1.3 Sur un levier AB dans la position indiquée, on agit en A avec une force F , inclinée d'un angle α sur l'horizontale.

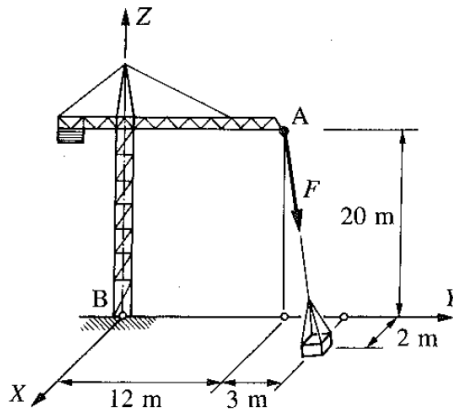
(a) Si $F=200$ N, calculer le moment produit autour de l'axe B (ou par rapport au point B) lorsque la force est horizontale.

(b) Quelle doit être l'orientation de la ligne d'action de cette même force pour obtenir la plus grand moment (M_{max}) en B ?

(c) Que vaut ce moment ? Si $\alpha = 20^\circ$, quelle doit être l'intensité de F pour obtenir M_{max} en B ?

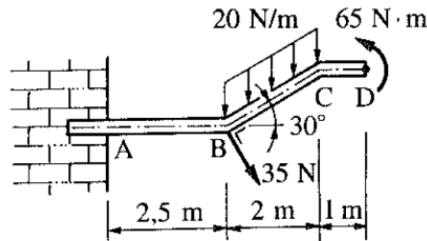


1.4 Une grue soulève une charge de manière légèrement oblique ; il s'exerce, de ce fait une force $F=250$ kN à l'extrémité A de la flèche. Dans le système d'axes (X,Y,Z) indiqué, trouver les composantes de F en A , puis celles du moment que cette force exerce au pied B du mât.



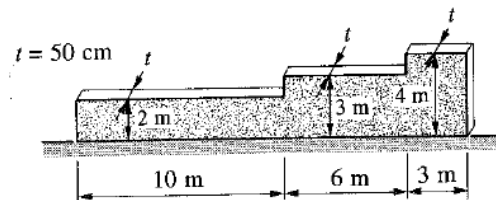
Chapitre 2 - Equilibres

2.1 Calculer au point A la résultante et le moment résultant du système plan de forces agissant sur la console ABCD. Dessiner ensuite ces deux résultantes avec leur sens réel.



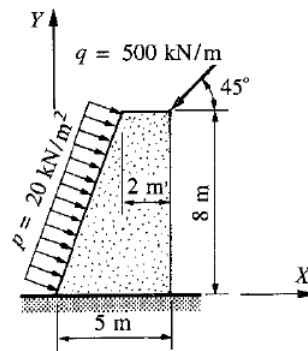
2.2 La figure montre un mur plan en béton armé ($\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$) d'épaisseur constante $t = 50 \text{ cm}$. Trouver le poids total de ce mur et la position de sa résultante.

Note : Utiliser le théorème de Varignon : Le moment dû à l'ensemble des forces = le moment dû à la force résultante.

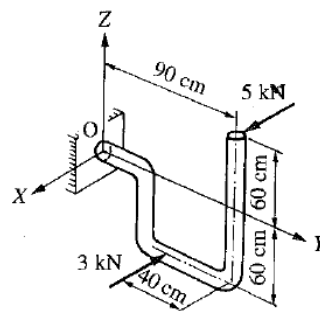


2.3 Sur un contrefort trapézoïdal plan en béton armé, de 1 m d'épaisseur, agissent trois actions : $p = 20 \text{ kN/m}^2$ sur la face inclinée, $q = 500 \text{ kN/m}$ le long de l'arrête supérieure droite et le poids propre. Trouver les composantes de la force résultante de ce système plan de forces, ainsi que son point d'application au niveau du sol.

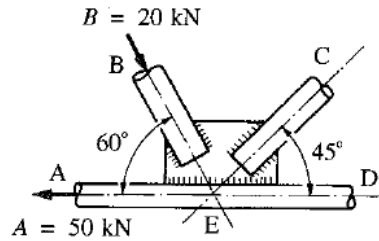
Note : Utiliser le théorème de Varignon.



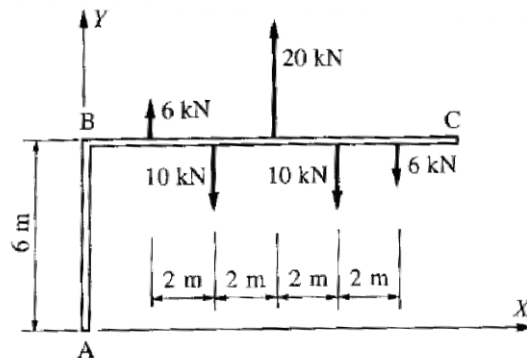
2.4 Un tube coudé dans le plan vertical (Y,Z) est soumis à l'action de deux forces parallèles à X. Calculer à l'origine O les composantes de la force résultante et celles du moment résultant.



2.5 Sur un assemblage plan de tubes métalliques s'exercent quatre forces dont les lignes d'action sont les axes concourants des tubes. Les forces en A et B sont connues. Trouver les Forces en C et en D telles que l'assemblage soit en équilibre. Procéder analytiquement et contrôler graphiquement.

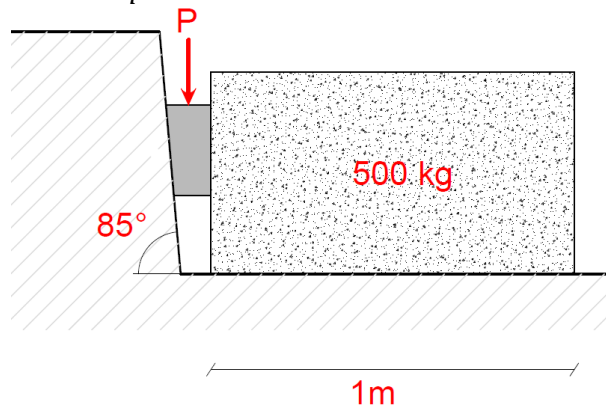


2.6 Un élément porteur ABC d'une structure plane est soumis à un système de cinq forces verticales. Cet élément est-il en équilibre?



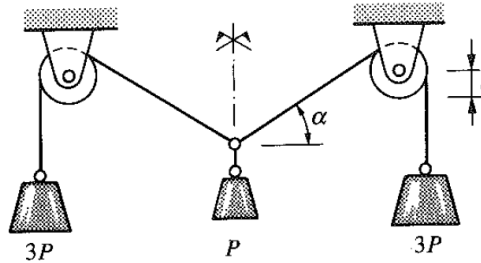
2.7 Exam Aout 2015 - La position horizontale d'un bloc de 500 kg (1m de long et 30 cm de large) est ajustée au moyen d'un coin sous l'action de la force P. Le coefficient de frottement pour les deux faces du coin est de 0,3 et le coefficient de frottement entre le bloc et le sol est de 0,6. On néglige le poids propre du coin.

Déterminer la valeur minimale de P permettant de mettre le bloc en mouvement.

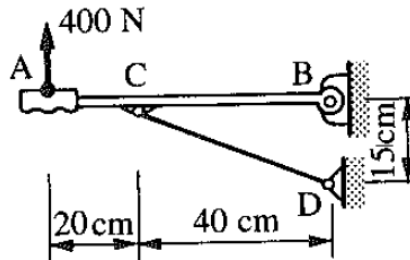


Chapitre 3 - Eléments de structure

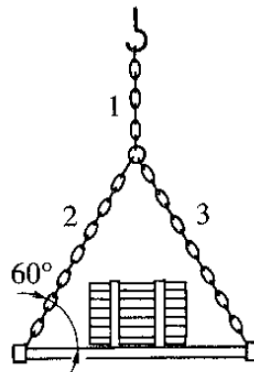
3.1 Un poids P est suspendu à deux fils de poids propre négligeable ; chaque fil passe sur une poulie sans frottement, de rayon r , et est attaché à un poids $3P$. Déterminer la position d'équilibre de ce système, définie par l'angle α .



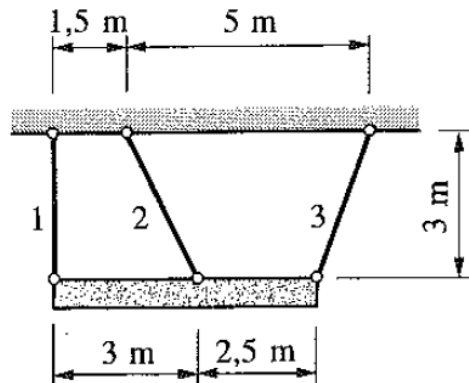
3.2 Si, sur la poignée du levier AB, articulée en B, on agit avec une force de 400N, quelle est la force qui s'exerce dans le câble CD ?



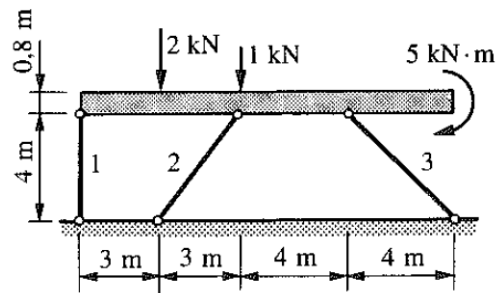
3.3 Une caisse est soulevée par une grue au moyen d'un système formé d'un plateau et de chaînes, le tout étant ramené dans un plan et représenté sur la figure. Plateau et caisse pèsent au total 30 kN, charge agissant au milieu du plateau. Calculer les efforts dans les chaînes.



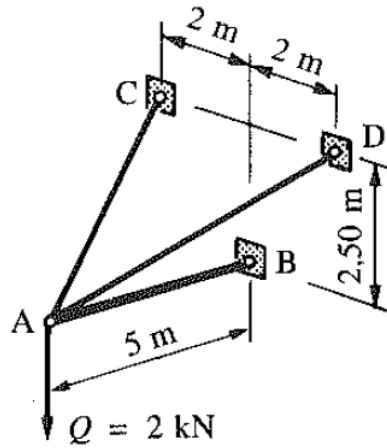
3.4 Une poutre homogène de poids total $G = 5\text{ kN}$ est suspendue au moyen de trois câbles et maintenue en position d'équilibre horizontale comme indiqué. Calculer l'effort normal dans ces câbles.



3.5 Une poutre horizontale en équilibre est chargée par deux forces verticales et un moment selon la figure (le poids propre n'est pas considéré). Elle est fixée à une fondation par trois barres 1, 2 et 3. Calculer l'effort normal dans ces trois barres.

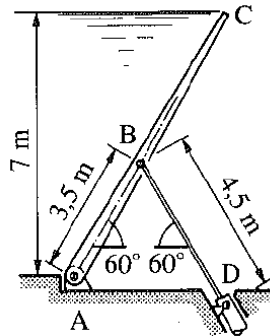


3.6 Un système de trois barres de l'espace, accroché à un mur vertical aux articulations B, C et D, est soumis à une charge verticale $Q=2\text{ kN}$ à l'articulation commune A. La barre AB est horizontale et perpendiculaire au mur. Calculer l'effort normal dans les trois barres.

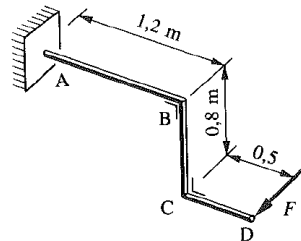


Chapitre 4 - Réaction d'appuis

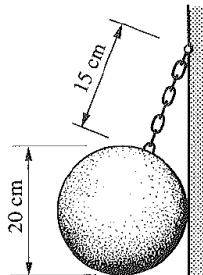
4.1 Une vanne plane ABCD, de 6 m de large, est maintenue en position fermée par le vérin BD. Déterminer analytiquement les réactions d'appuis en A et l'effort normal dans la tige BD du vérin, sous l'action de l'eau seulement. Dessiner ensuite toutes les forces à l'échelle et vérifiez le théorème des trois forces en l'équilibre.



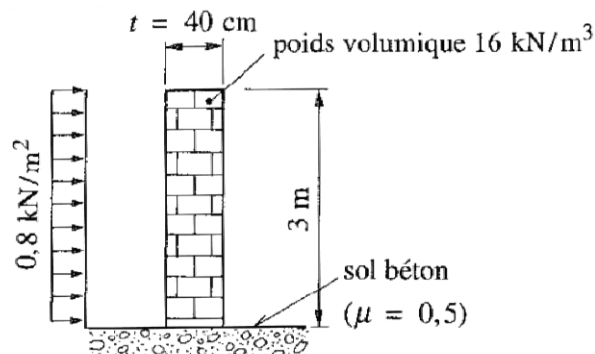
4.2 Calculer les réactions d'appuis d'une manivelle, donnée par son schéma statique ABCD, encastrée en A, placée dans un plan vertical et chargée en D d'une force $F=2 \text{ kN}$.



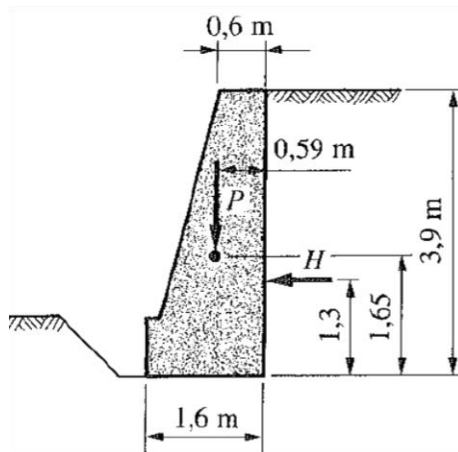
4.3 Une boule en aluminium de 20 cm de diamètre, pesant 100 N, est attachée à un mur par une chaîne de 15 cm de long. En négligeant le frottement, déterminer analytiquement, puis graphiquement, l'effort dans la chaîne et la réaction du mur.



4.4 Un mur de briques est posé sur un sol en béton, avec un coefficient de frottement $\mu = 0,5$. Il est soumis à une pression latérale de vent de $0,8 \text{ kN/m}^2$. Vérifier l'équilibre global de ce mur (en translation et en rotation).



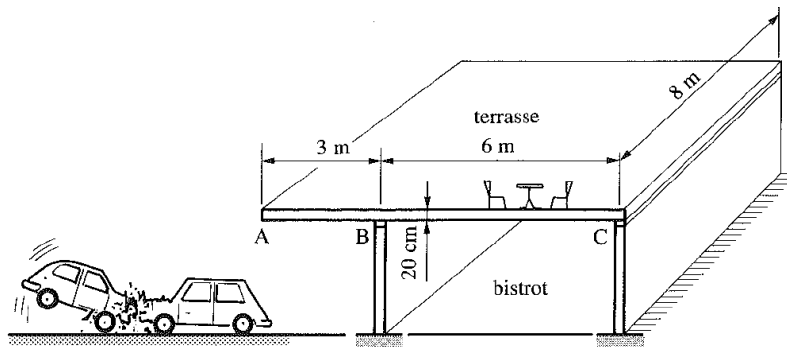
4.5 Un mur de soutènement est soumis aux forces $P = 103 \text{ kN/m}$ (due au poids propre) et $H = 38 \text{ kN/m}$ (due à la poussée des terres). Le coefficient de frottement sur le sol vaut $\mu = 0,6$. Vérifier l'équilibre global de ce mur (translation et rotation).



4.6 La terrasse d'un bistrot est formée d'une dalle en béton posée sur deux murs B et C. Cette dalle a 9m de long, 8m de large et 20cm d'épaisseur. Elle peut recevoir une charge répartie de 2 kN/m^2 (foule des clients sur toute la terrasse).

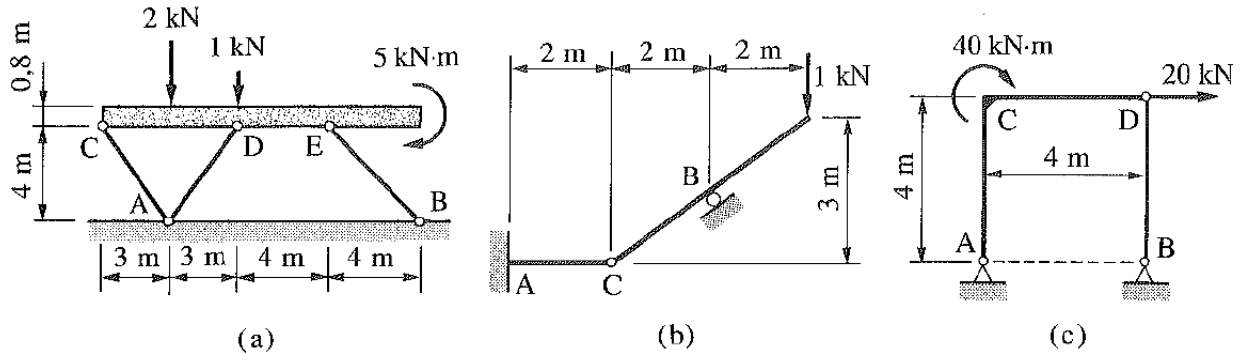
(a) Déterminer les réactions d'appuis en B et C.

(b) Suite à un accident sur la rue, tous les clients se précipitent sur le porte-à-faux AB (ou ils forment une nouvelle charge uniformément répartie). Vérifiez alors si l'équilibre global de la terrasse est encore assuré.

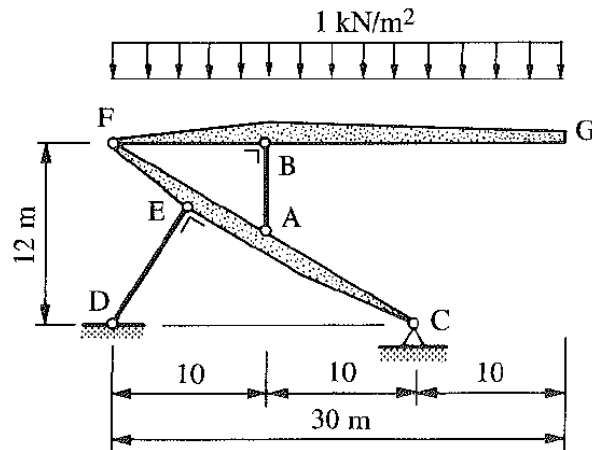


Chapitre 5 - Structures composées

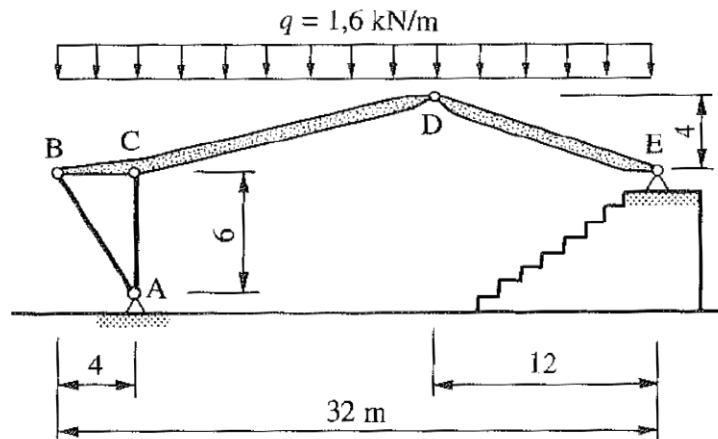
5.1 Calculer les réactions d'appuis des structures composées planes (a), (b) et (c), soumises aux forces indiquées.



5.2 Le système porteur principal d'une tribune de stade est formé de structures planes qui se répètent tous les 5 m. Poids propre et neige conduisent à une charge de 1 kN/m^2 sur le toit. On n'envisage que ce cas de charge. Montrer que l'une de ces structures est isostatique dans ses appuis et liaisons ; calculer les réactions d'appuis et les efforts normaux dans les barres.



5.3 L'ossature plane de la couverture d'une patinoire est soumise à l'action de la neige $q = 1,6 \text{ kN/m}$. Vérifier si la structure ABCDE est isostatique dans ses appuis et liaisons, puis calculer l'effort normal dans les deux barres AB et AC.

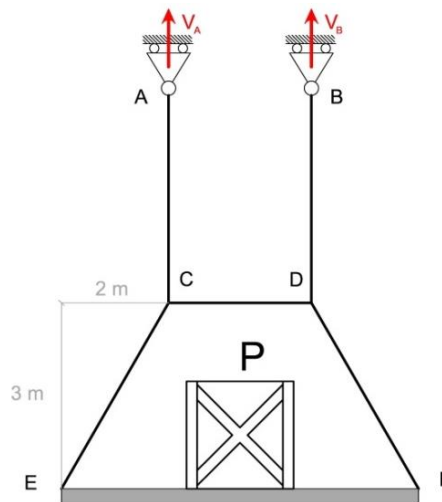


Chapitre 6 - Exercices complémentaires (appuis – dimensionnement - ...)

6.1 Exam Aout 2014 - Le mécanisme ci-dessous est composé d'un plateau suspendu par des câbles. Les câbles ont un diamètre de 3mm et ont une résistance $f_e = 300 \text{ MPa}$. On néglige le poids propre du plateau.

(a) Calculer en fonction du poids « P » de la caisse l'effort dans le câble le plus sollicité.

(b) Calculer le poids maximal qu'il est possible de placer sur le plateau sans rompre les câbles. Le coefficient de sécurité à prendre en compte sur la résistance est de 1,5.

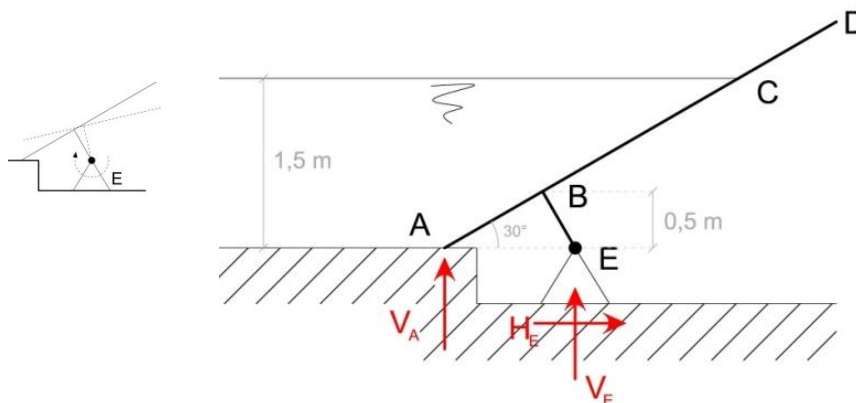


6.2 Exam Jan 2014 - La structure ABCDE ci-dessous est continue et est soumise à une charge répartie due à la présence d'eau. La structure est rotulée en E et n'est pas physiquement connectée en A (simplement posée sans frottements). On considère une tranche de structure de 1m de large. On néglige le poids propre de l'élément.

(a) Représenter la charge répartie due à la présence de l'eau et indiquer les valeurs caractéristiques (kN/m). Indiquer également la valeur et la position des résultantes :

(b) Quelle est la sécurité au renversement de la structure (rotation autour de E) ?

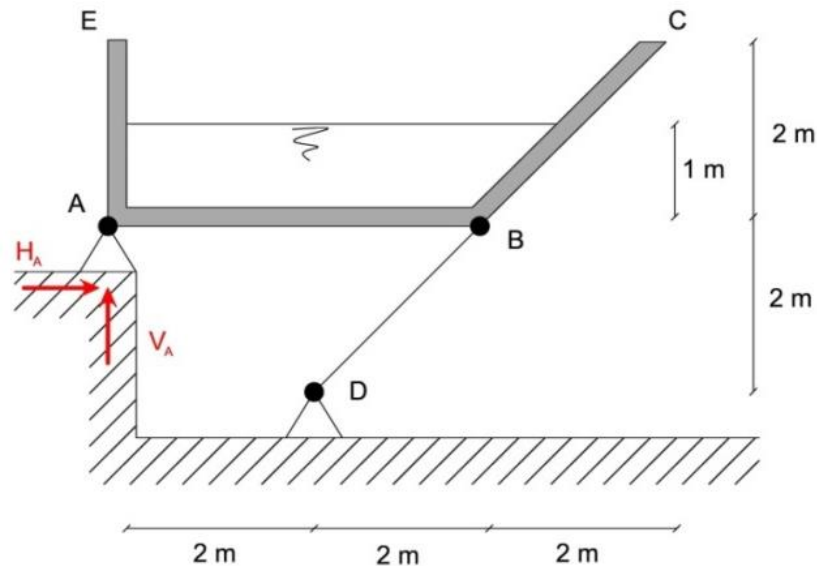
(c) Calculer les réactions d'appui de la structure en A et en E :



6.3 Exam Jan 2014 - La structure ABCDE ci-contre est soumise à une charge répartie due à la présence d'eau. La barre BD est *bi-articulée*, alors que l'élément EABC est continu. On considère une tranche de structure de 1m de large. On néglige le poids propre de l'élément.

(a) Représenter la charge répartie due à la présence de l'eau, et indiquer les valeurs caractéristiques.

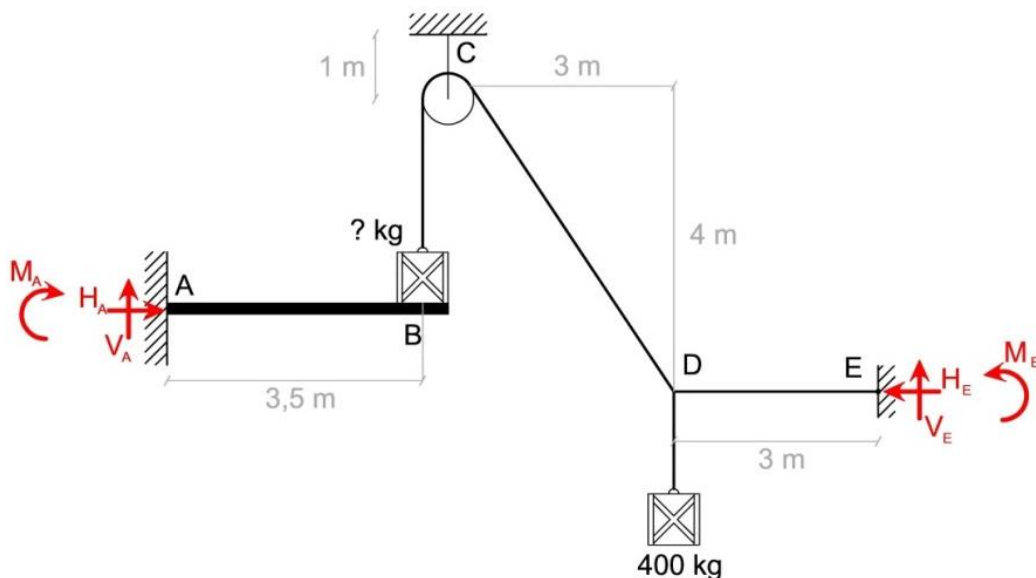
(b) Calculer les réactions d'appui en A et l'effort dans la barre BD.



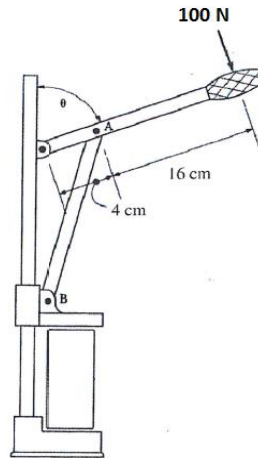
6.4 Exam Juin 2014 - La structure ABCDE ci-contre est composée d'une poutre encastrée en A et d'un câble passant par une poulie en C. Une Caisse de 4 kN est suspendue en D. Une caisse de poids inconnu est suspendue au câble venant de la poulie en C et est posée sur la poutre en B. Le câble DE est horizontal.

(a) Quel doit être le poids de la caisse en B pour assurer une stabilité du système avec un facteur de sécurité de 2 ?

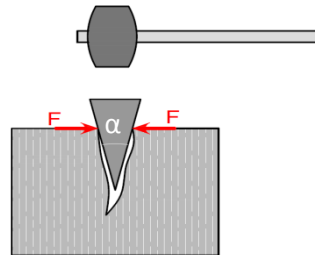
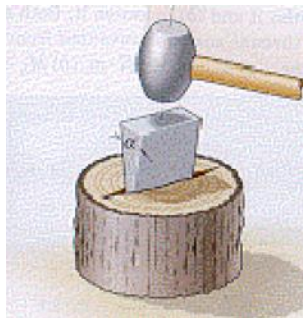
(b) Calculer les réactions d'appui de la structure en A et en E en prenant un poids de 7,5 kN pour la caisse en B :



6.5 Exam Jan 2015 - La figure ci-dessous représente un broyeur de canettes. Une force de 100N est appliquée perpendiculairement au manche. Pour $\theta = 90^\circ$, calculer la force exercée sur la canette.
Note : On néglige les frottements.



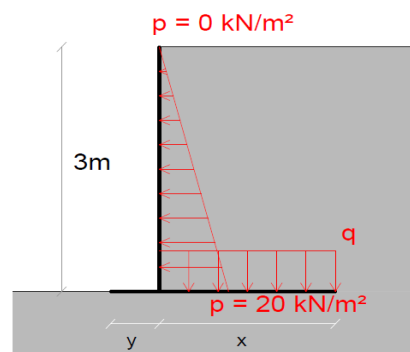
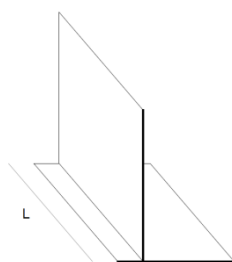
6.6 Exam Jan 2015 - Déterminer l'angle α maximal que peut avoir le coin, afin qu'il ne ressorte pas de la bûche après que celle-ci ait été fendue. Le coefficient de frottement entre les fibres du bois et le coin est de 0,25. On néglige le poids propre du coin.
 Note : Arrondir la valeur trouvée au degré inférieur.



6.7 Exam Jan 2015 - Le mur de soutènement considéré à une hauteur de $H=3\text{m}$ et une longueur L . On néglige le poids propre et l'épaisseur du mur. Le poids volumique de la terre vaut $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$.

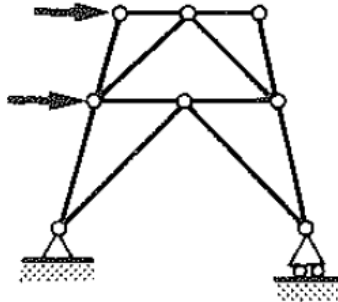
(a) Calculer la longueur « x » du mur nécessaire pour garantir une sécurité au glissement de $F_s = 1,5$. Le coefficient de frottement entre le sol et le mur équerre est de $\mu = 0,6$.

(b) Calculer la longueur « y » du bec nécessaire pour garantir une sécurité au renversement de $F_{s\text{rot}} = 2$.

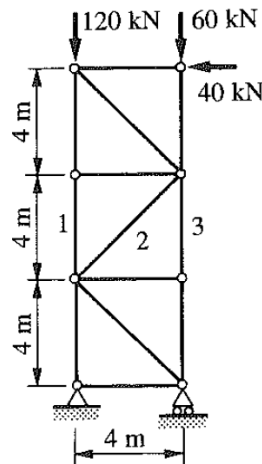


Chapitre 7 - Treillis

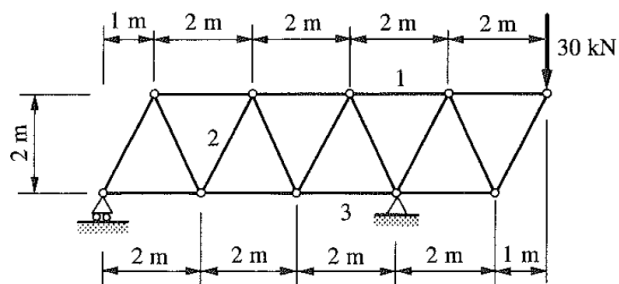
7.1 Montrer que le treillis plan de la figure est instable. En ajoutant le nombre adéquat de liaisons externes (appuis) ou internes (barres), trouver trois possibilités de rendre ce treillis isostatique stable ; dessiner ces structures.



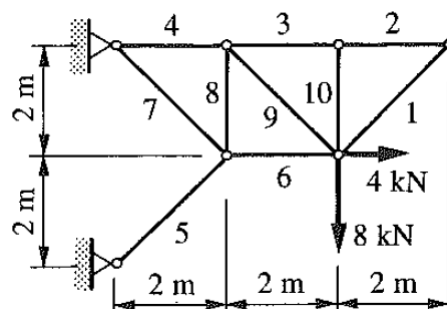
7.2 Par une coupe simple, calculer l'effort normal dans les barres 1, 2 et 3 d'une colonne en treillis plan.



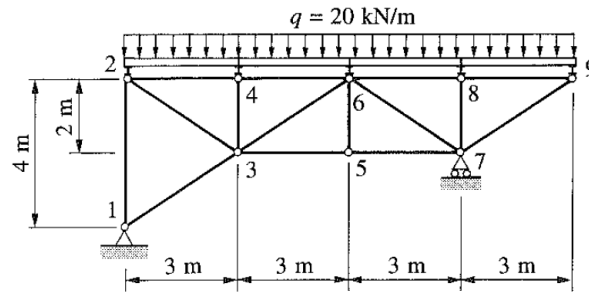
7.3 Par des coupes simples, calculer l'effort normal dans les barres 1, 2 et 3 d'une poutre en treillis en V.



7.4 Déterminer GRAPHIQUEMENT les efforts normaux dans toutes les barres de la structure réticulée, chargée de deux forces de 4 et 8 kN, en faisant l'équilibre successif des nœuds.



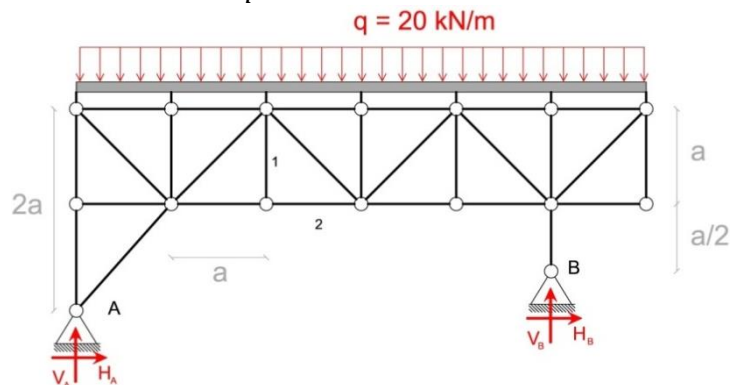
7.5 Une poutre triangulée avec porte-à-faux est soumise à une charge verticale uniformément répartie $q=20\text{kN/m}$ selon la figure. Y a-t-il des barres à effort nul ? Calculer l'effort normal dans les deux montants 1-2 et 3-4, les deux membrures 3-5 et 4-6, et les deux diagonales 2-3 et 3-6.



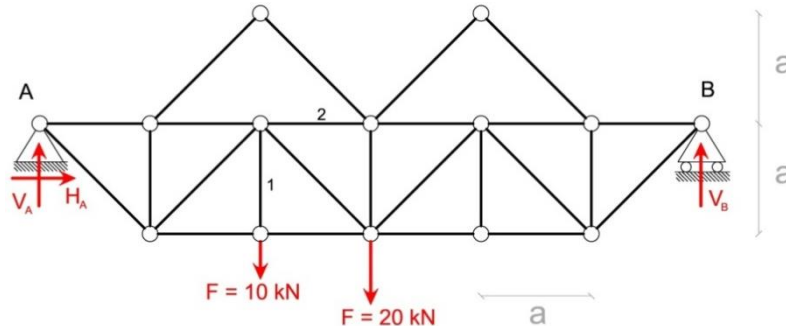
7.6 Exam Aout 2014 -

(a) Sans faire aucun calcul, identifier les 6 barres qui ne sont pas sollicitées. **(b)** Calculer les réactions d'appuis en fonction de a .

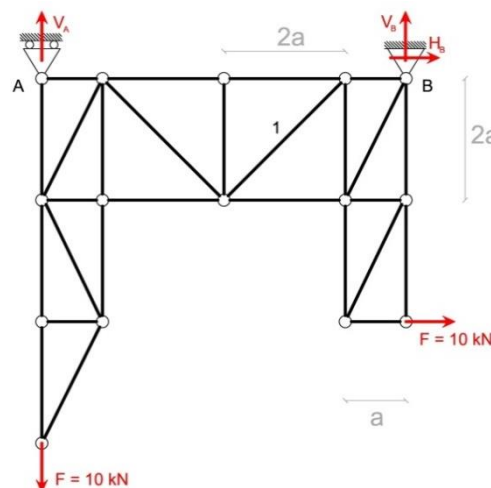
(c) Calculer l'effort dans les barres 1 et 2 pour $a=1\text{m}$.



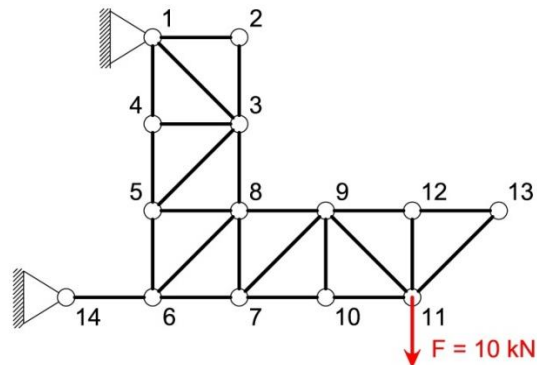
7.7 Exam Aout 2014 - Sans faire aucun calcul, identifier les barres qui ne sont pas sollicitées. Avec la méthode de votre choix, calculer l'effort dans les barres 1 et 2.



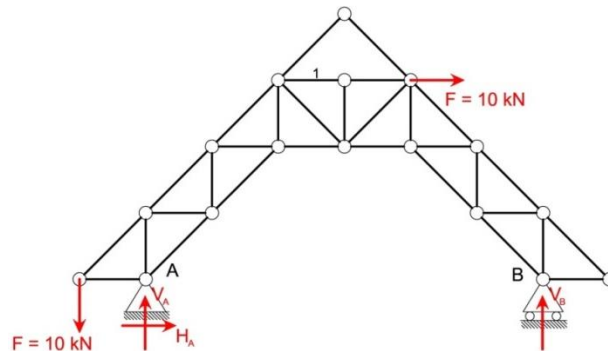
7.8 Exam Jan 2014 - Sans faire aucun calcul, identifier les 8 barres qui ne sont pas sollicitées. Calculer les réactions d'appuis et les efforts dans la barre 1.



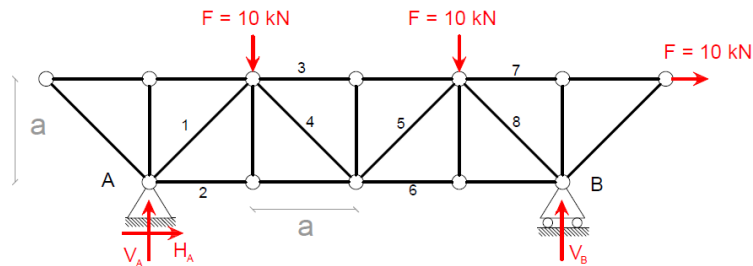
7.9 Exam Jan 2014 - Sans faire aucun calcul, identifier les barres qui ne sont pas sollicitées. Avec la méthode de votre choix, calculer l'effort dans la barre 8 - 9.



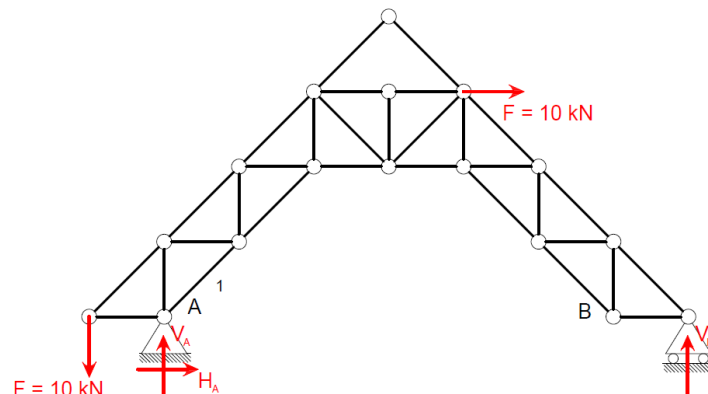
7.10 Exam Juin 2014 - Sans faire aucun calcul, identifier les barres qui ne sont pas sollicitées. Calculer les réactions d'appuis et les efforts dans la barre 1.



7.11 Exam Jan 2015 - Sans faire aucun calcul, marquer sur le schéma ci-dessus les barres qui ne sont pas sollicitées, calculer les réactions d'appuis de la structure et, avec la méthode de votre choix, calculer les efforts dans les barres 1 à 8.

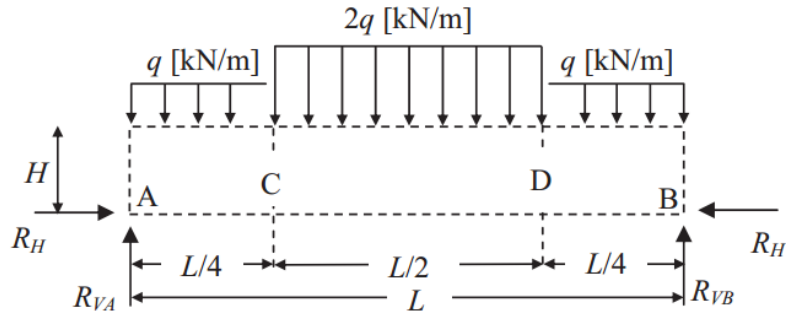


7.12 Exam Aout 2015 - Les barres verticales et horizontales du treillis ont une longueur a . Sans faire aucun calcul, trouver les barres qui ne sont pas sollicitées. Calculer ensuite les réactions d'appuis et avec la méthode de votre choix, calculer l'effort dans la barre 1.



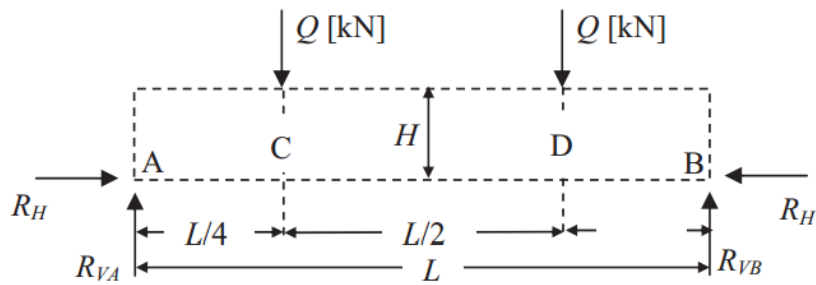
Chapitre 8 - Arcs funiculaires & câbles

8.1 Chercher la forme funiculaire associée au cas de charge suivant, composé d'une charge uniformément répartie valant $2q$ kN/m sur la moitié centrale de la structure et q kN/m sur les tronçons extrêmes, de telle sorte que la structure ait une hauteur maximale H pour une portée L .



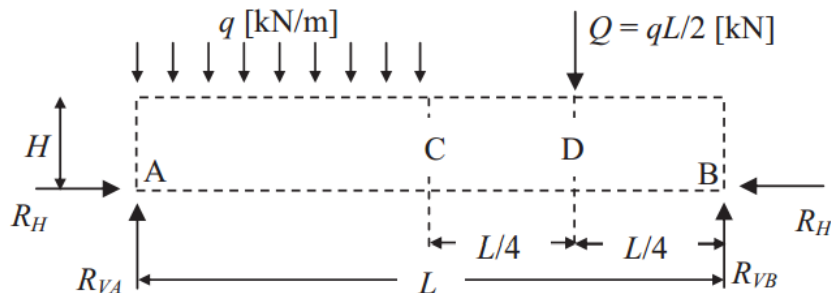
Calculer ensuite l'effort maximal dans la structure, et dimensionner le profilé métallique circulaire plein nécessaire pour reprendre cet effort, sachant que l'acier utilisé a une résistance de $f_e = 235$ MPa et en tenant compte d'un coefficient de sécurité $\gamma = 1,5$. ($q=5$ kN/m, $L=10$ m & $H=5$ m).

8.2 Chercher la forme funiculaire associée au cas de charge suivant, de telle sorte que la structure ait une hauteur maximale H pour une portée L .



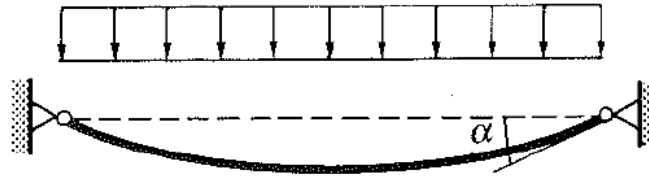
Calculer ensuite l'effort maximal dans chaque partie de la structure, et dimensionner la section de bois nécessaire pour reprendre les efforts. On considère une section carrée de résistance $f_e = 30$ MPa et on tient compte d'un coefficient de sécurité $\gamma = 1,5$. ($Q=20$ kN, $L=10$ m & $H=5$ m).

8.3 Sachant que la hauteur maximale de la forme funiculaire sera au niveau du point C, chercher la forme funiculaire associée au cas de charge suivant, de telle sorte que la structure ait une hauteur maximale H pour une portée L .

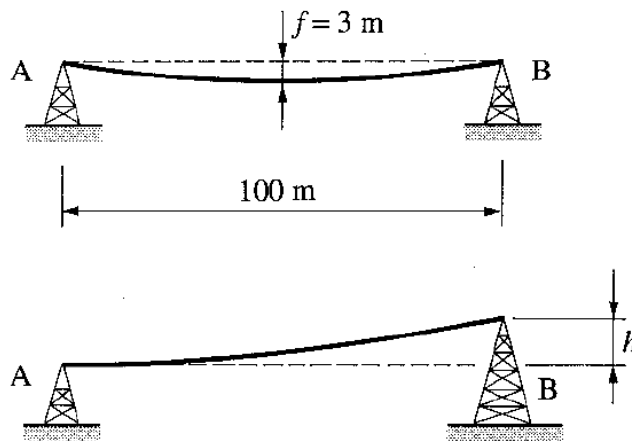


Calculer ensuite l'effort maximal dans la structure, et dimensionner le profilé métallique (IPE) nécessaire pour reprendre cet effort, sachant que l'acier utilisé a une résistance de $f_e = 235$ MPa et en tenant compte d'un coefficient de sécurité $\gamma = 1,5$. ($q=20$ kN/m, $L=10$ m & $H=5$ m).

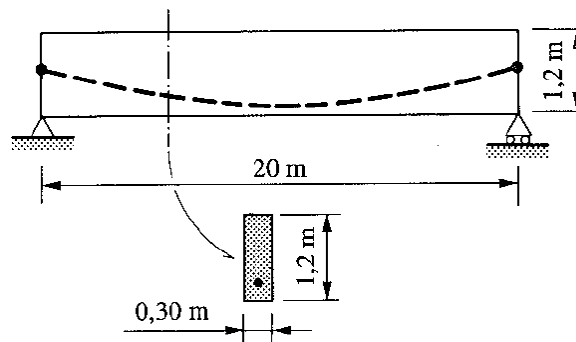
8.4 On considère un câble surbaissé uniformément chargé sur l'horizontale. Calculer l'erreur commise sur la tension maximale en supposant qu'elle est égale à sa composante horizontale H , pour $\alpha = 3^\circ$ et 6° . Quel est l'angle α correspondant à une erreur de 1% ?



8.5 D'un câble de téléphérique, de poids propre $g = 60\text{ N/m}$, on considère un tronçon situé entre deux pylônes A et B distants de 100m. Si A et B sont au même niveau, et que la flèche vaut 3m, calculer la tension maximale dans ce câble. De quelle hauteur H faut-il élever le pylône B pour que la tension en A soit horizontale et que la tension maximale soit égale à 30,6 kN ?



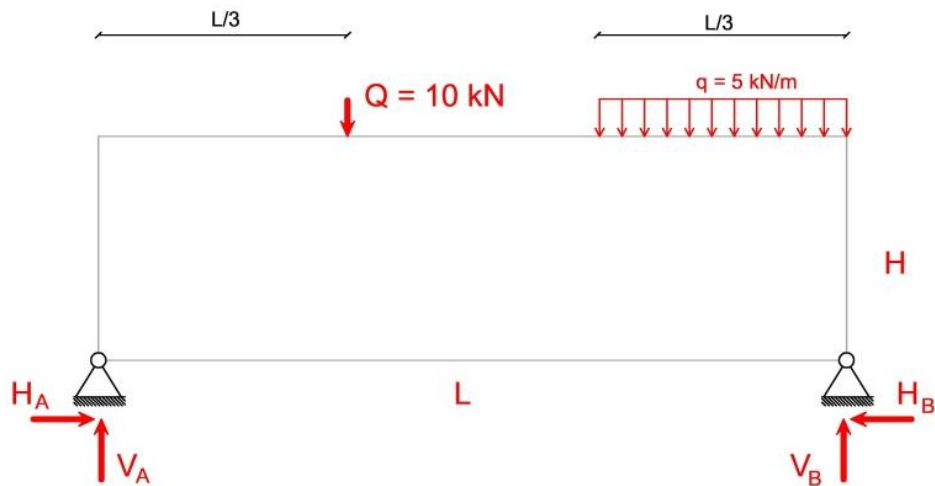
8.6 Une poutre prismatique en béton sur deux appuis simples, d'une portée de 20m et de section rectangulaire 0,3m x 1,2 m, est précontrainte par un câble parabolique passant à mi-hauteur sur appui et à 5 cm des fibres inférieures à mi-portée. Peut-on considérer ce câble comme surbaissé ? Calculer sa tension de manière à ce qu'il porte le poids propre du béton ($\gamma = 24 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$). Que vaut alors le diagramme des moments dans la poutre ?



8.7 Exam Aout 2014 - Une structure funiculaire dont la géométrie est à déterminer est inscrite dans un rectangle de dimensions L et H et repose sur deux appuis.

(a) Calculer les réactions d'appui de la structure (en fonction de H et avec $L=20\text{m}$) et dessiner l'allure de la structure en y indiquant les hauteurs en chaque point d'application des charges.

(b) Calculer la valeur de l'effort normal dans le premier tronçon de la structure (côté gauche) pour $L = 20\text{ m}$ et $H = 5\text{ m}$.

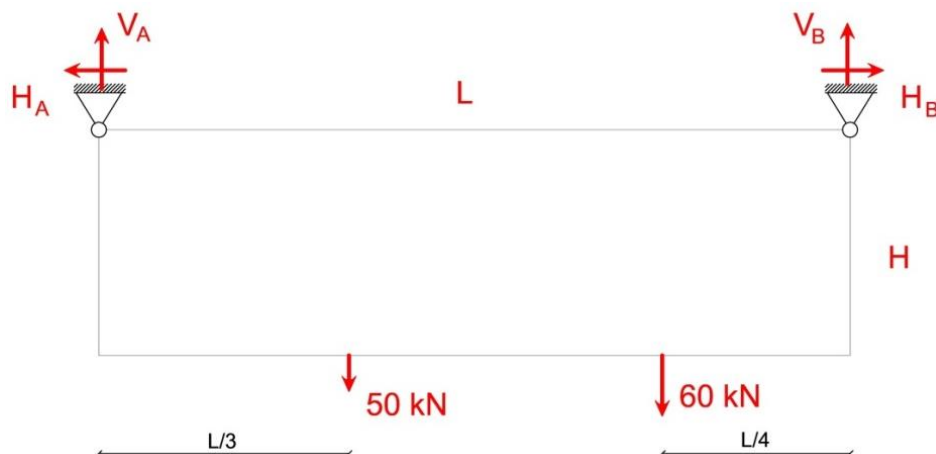


8.8 Exam Aout 2014 - Une structure funiculaire composée d'un câble dont la géométrie est à déterminer est inscrite dans un rectangle de dimensions L et H et est suspendu aux appuis A et B.

(a) Calculer les réactions d'appui de la structure (en fonction de H et de L) et dessiner l'allure de la structure en y indiquant les hauteurs en chaque point d'application des charges.

(b) Calculer la valeur de l'effort normal dans le premier tronçon de la structure (côté gauche) pour $L = 20\text{ m}$ et $H = 5\text{ m}$.

(c) En considérant l'effort normal N_{\max} calculé dans la sous-question précédente, dimensionner la section circulaire creuse nécessaire, sachant que le rapport épaisseur sur diamètre extérieur vaut $\frac{e}{\phi} = 0,1$. La résistance du matériau est de $f_e = 235\text{ MPa}$, et le coefficient de sécurité à prendre en compte est de 1,5.

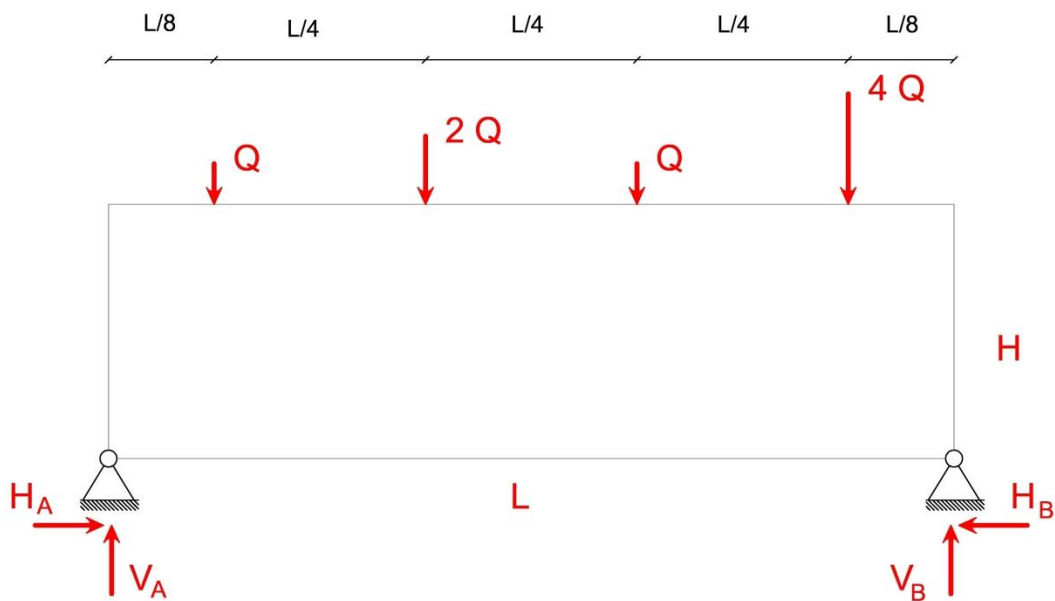


8.9 Exam Jan 2014 - Une structure funiculaire dont la géométrie est à déterminer est inscrite dans un rectangle de dimensions L et H et repose sur les appuis A et B .

(a) Calculer les réactions d'appui de la structure et dessiner l'allure de la structure en y indiquant les hauteurs en chaque point d'application des charges.

(b) Calculer la valeur de l'effort normal dans le dernier tronçon de la structure (côté droit) pour $L = 20$ m, $Q = 10$ kN et $H = 5$ m.

(c) En considérant l'effort normal N_{\max} calculé dans la sous-question précédente, dimensionner la section circulaire creuse nécessaire, sachant que le rapport épaisseur sur diamètre extérieur vaut $e/\phi = 0,1$. La résistance du matériau est de $f_e = 235$ MPa, et le coefficient de sécurité à prendre en compte est de 1,5.

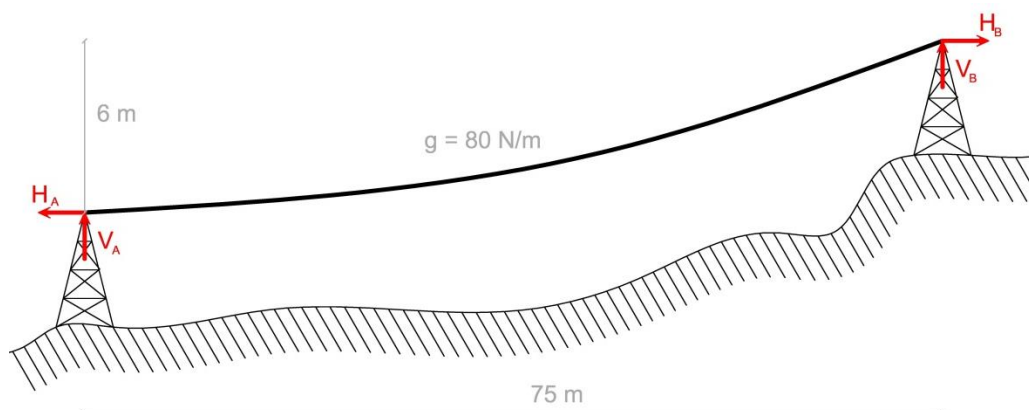


8.10 Exam Jan 2014 - Le câble suivant est placé entre les pylônes A et B , de telle manière qu'il est horizontal en A (note : le câble a une longueur de 75 m).

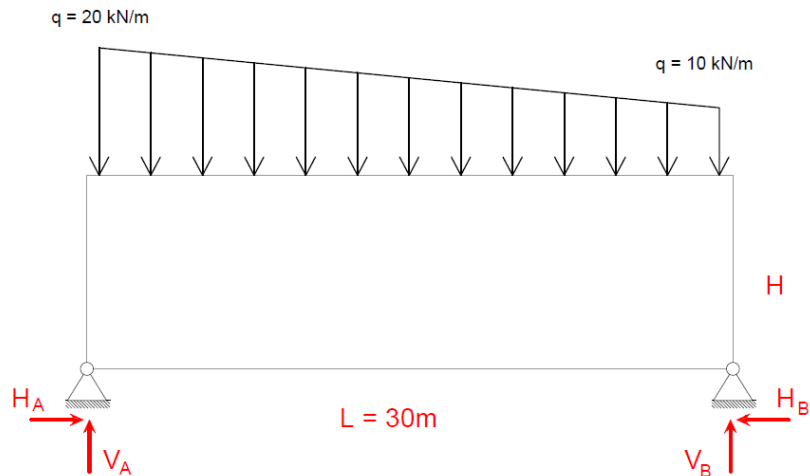
(a) Quelle est la géométrie du câble ? Peut-on dans ce cas précis faire une hypothèse simplificatrice à ce sujet ? Si oui, laquelle et pourquoi ?

(b) Calculer les réactions d'appui de la structure ainsi que l'effort dans le câble en A et en B .

(c) En tenant compte de l'effort maximal dans le câble ($\phi = 7$ mm), calculer l'allongement de celui-ci (le module de Young du câble est de $E = 190$ GPa).



8.11 Exam Aout 2015 - Une structure dont la géométrie est à déterminer a une portée de $L = 30\text{m}$ et une hauteur $H = 6\text{ m}$ et repose sur les appuis A et B. Cette structure est soumise à une charge trapézoïdale.



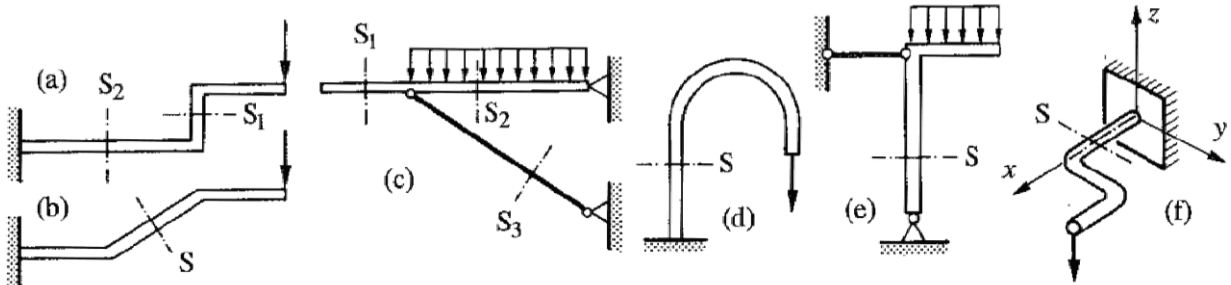
(a) Calculer les réactions d'appui de la structure, sachant que cette structure est le funiculaire du cas de charge appliqué.

(b) Dessiner l'allure de la structure funiculaire en y indiquant la hauteur à mi travée.

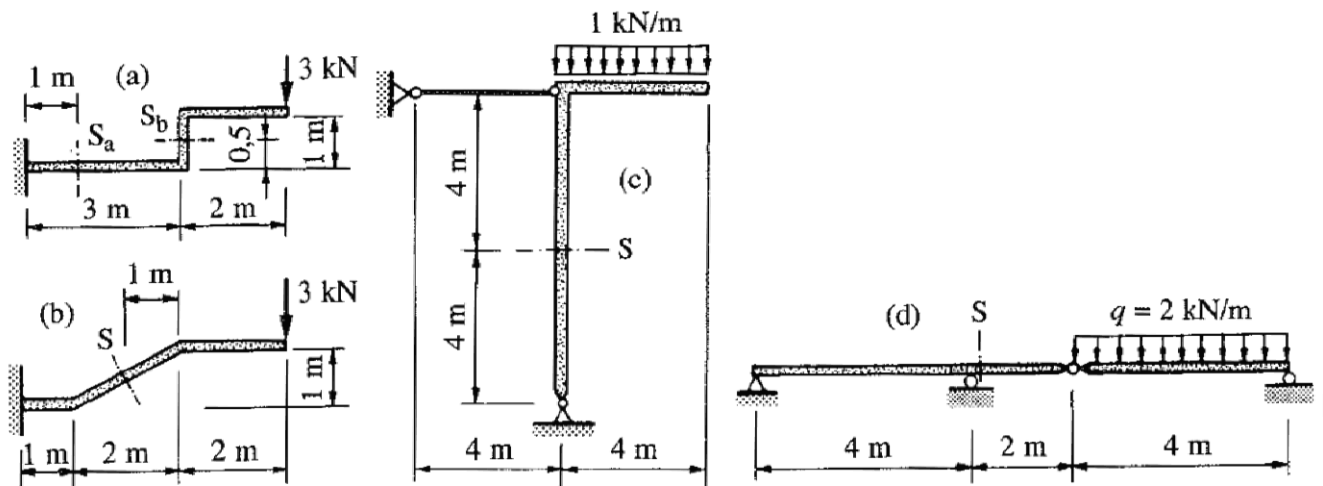
(c) Sur base de l'effort normal maximal, dimensionner la section de bois nécessaire pour construire la structure. On considère une section rectangulaire de largeur deux fois plus petite que la hauteur ($h = 2 \cdot b$). Le bois a une limite $f_e = 18\text{ MPa}$ et un module de 10 GPa . On considère un coefficient de sécurité de $\gamma = 1,5$.

Chapitre 9 - Efforts internes.

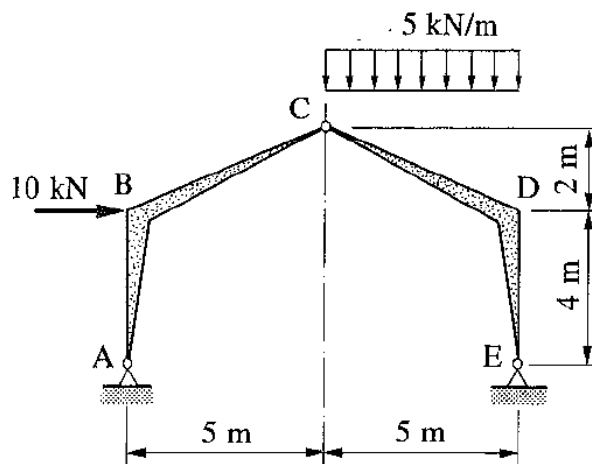
9.1 Dire, sans rien calculer, quels efforts intérieurs naissent dans les sections S de poutres planes (a) à (e) et de la poutre spatiale (f) en forme de manivelle. Les charges agissent verticalement.



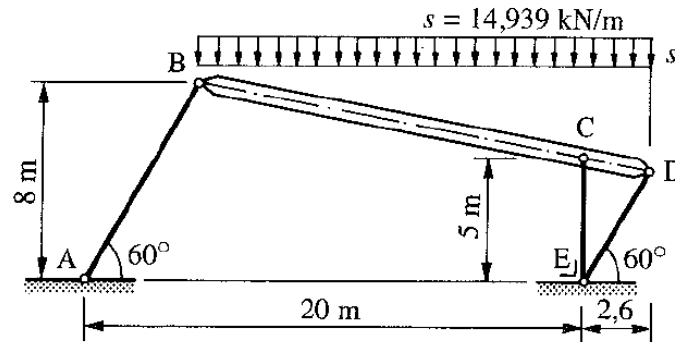
9.2 Calculer les efforts qui naissent dans les diverses sections droites S des structures planes et poutres (a) à (d), chargées comme indiqué.



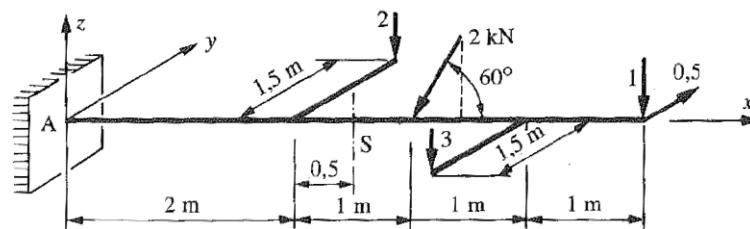
9.3 Un portique plan à trois articulations est soumis au cas de charge indiqué. Calculer le moment de flexion aux nœuds B et D.



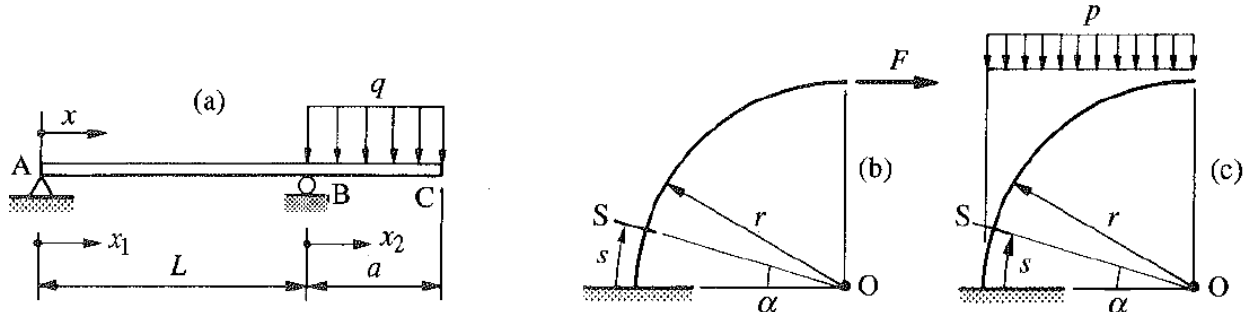
9.4 Une structure plane en barres et poutres est soumise à la seule charge uniformément répartie $s = 14,939 \text{ kN/m}$ comme indiqué. Calculer les efforts internes dans les deux sections situées de part et d'autre du nœud C de la poutre.



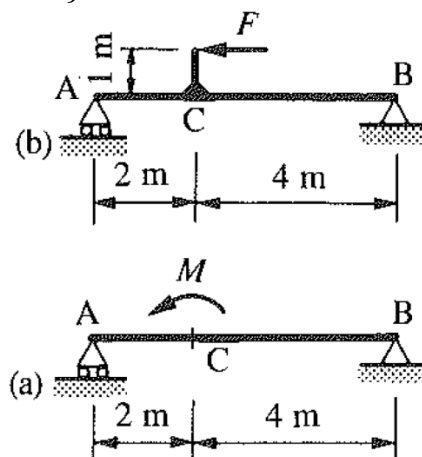
9.5 Une poutre de l'espace de type console est encastrée au point A et soumise à 5 forces ponctuelles selon la figure. Calculer les efforts intérieurs dans la section S.



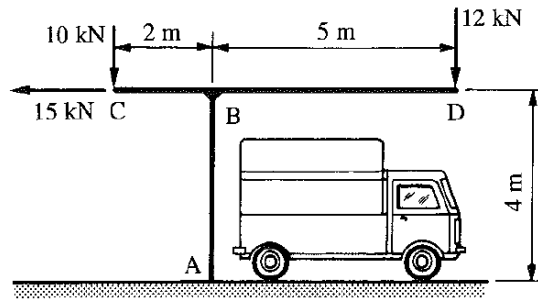
9.6 Etablir les diagrammes des efforts internes MNV pour les structures chargées suivantes et indiquez les valeurs aux endroits remarquables. Vérifier que la relation entre le moment et l'effort tranchant.



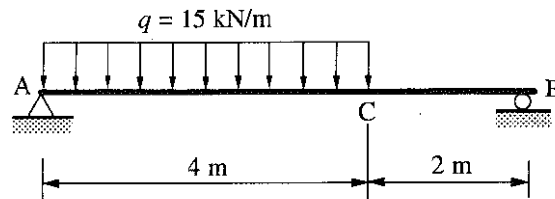
9.7 Tracer le diagramme des efforts internes MNV de deux poutres simples de même portée soumises à un moment concentré ou à une force excentrée. Vérifier l'équilibre d'un petit tronçon de poutre au point C. ($F=60\text{kN}$, $M=60\text{kNm}$)



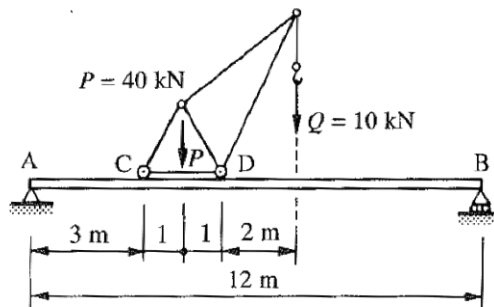
9.8 Déterminer les diagrammes des efforts internes MNV de la structure ABCD, formant une poutre console et chargée de trois forces concentrées. Esquisser sa déformée. Isoler le nœud rigide B et vérifier son équilibre.



9.9 Etudier les diagrammes M et V d'une poutre AB soumise à une charge répartie sur la Zone AC. Que peut-on dire des tangentes de part et d'autre du point C ?



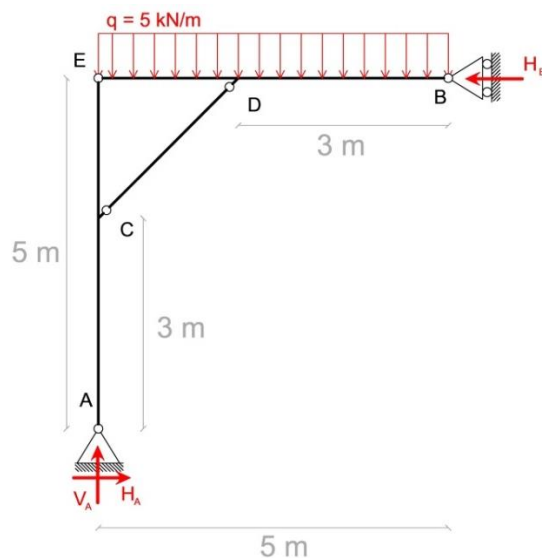
9.10 Une poutre simple AB est soumise aux charges transmises par une petite grue dans la position indiquée par la figure. Tracez les diagrammes V et M de cette poutre.



9.11 Exam Aout 2014 -

(a) Dessiner le diagramme des efforts internes MNV de la structure suivante.

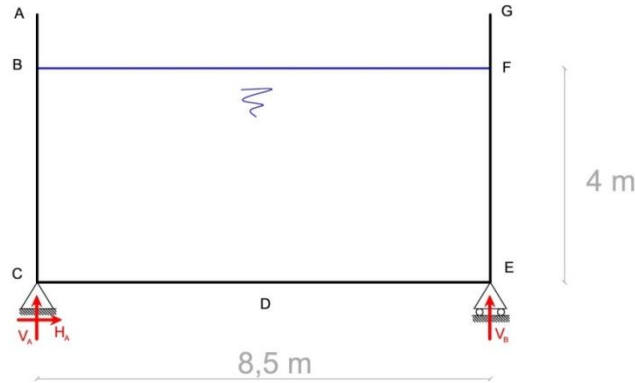
(b) Sur base des efforts maximaux dans la barre CD (en bois de section circulaire), calculer son diamètre, avec $f_e = 20 \text{ MPa}$ et un coefficient de sécurité $\gamma = 1,5$ (commentez brièvement le résultat).



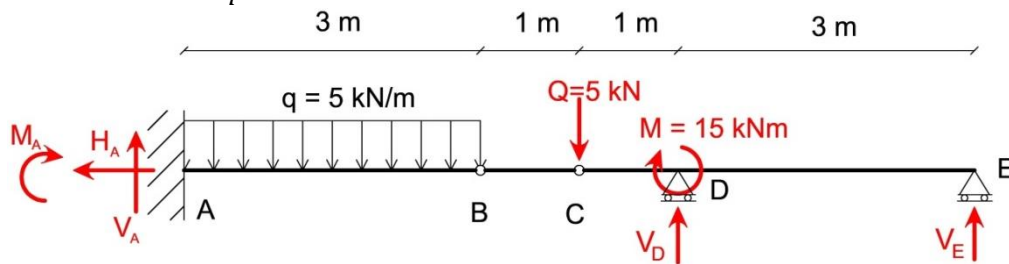
9.12 Exam Aout 2014 - Le bac ACEG est rempli d'eau, il a une largeur de 8,5m, une hauteur de 4m et on considérera pour le calcul une longueur de 1m. (La masse volumique de l'eau vaut : $\gamma_w = 10 \text{ kN/m}^3$.)

(a) Dessiner le diagramme des charges dû à la présence d'eau dans le bac et indiquer les valeurs en A, B, C, D, E, F et G.

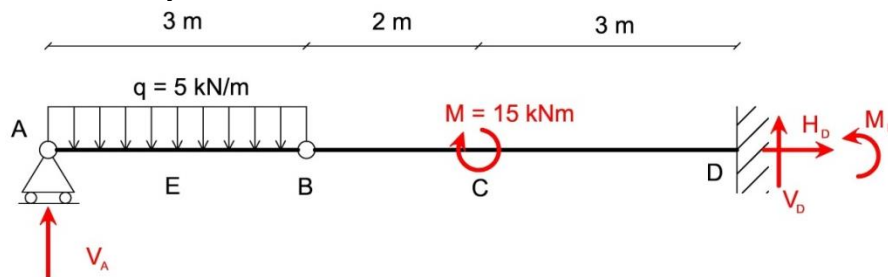
(b) Dessiner les diagrammes des efforts internes MNV dans la structure et indiquer les valeurs en A B C D E F et G.



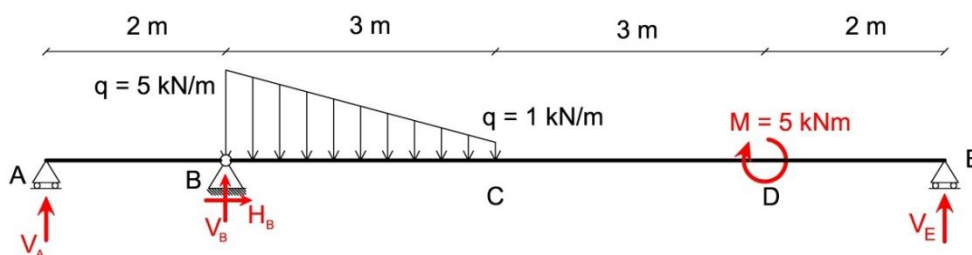
9.13 Exam Jan 2014 - Dessiner le diagramme des efforts internes MNV de la structure suivante et indiquer les valeurs numériques en A B C D et E.



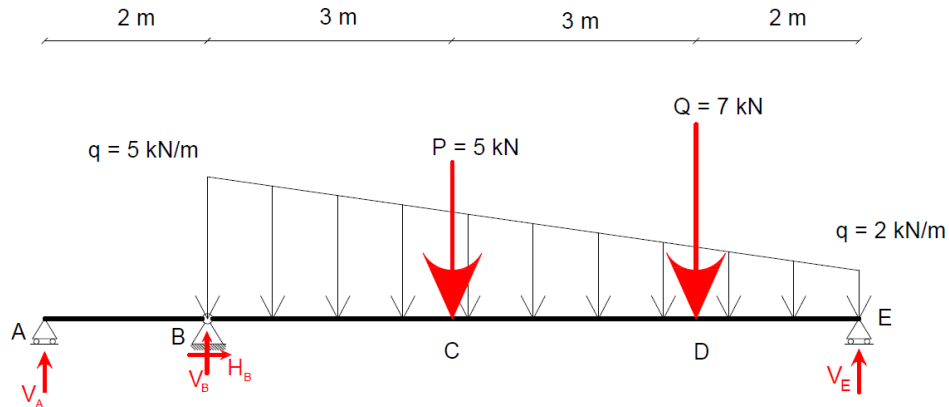
9.14 Exam Jan 2014 - Dessiner le diagramme des efforts internes MNV de la structure suivante et indiquer les valeurs numériques en A B C D et E.



9.15 Exam Juin 2014 - Dessiner le diagramme des efforts internes MNV de la structure suivante et indiquer la valeur maximale, ainsi que les valeurs numériques en A B C D et E.



9.16 Exam Jan 2015 - La poutre ci-dessous est soumise aux charges suivantes :



(a) Calculer les réactions d'appuis.

(b) Calculer et positionner le moment de flexion maximal dans la poutre.

(c) Dessiner l'allure des moments fléchissants et indiquer les valeurs numériques en A, B, C, D et E.

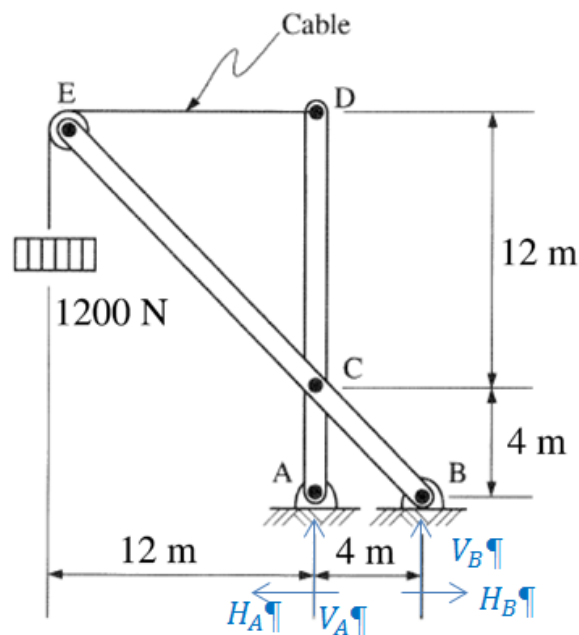
(d) Dessiner l'allure des efforts tranchants en précisant vos conventions et indiquer les valeurs numériques en A, B, C, D et E.

9.17 Exam Aout 2015 - La structure isostatique ci-contre possède une poulie sans frottement en E. Les barres EB et AD sont fixées entre elles au moyen d'une rotule en C.

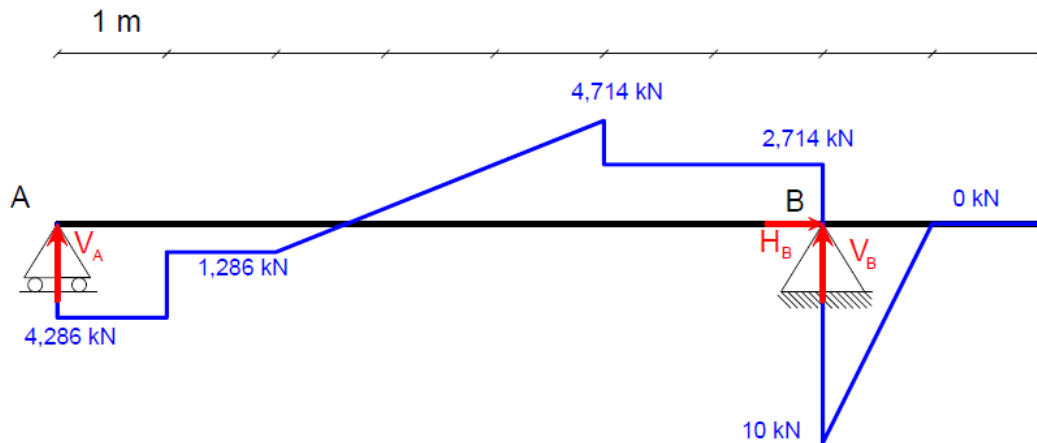
(a) Sachant que la poulie tourne sans frottement, calculer la tension dans le câble ED. Calculer ensuite les réactions d'appuis de la structure.

Note : Considérer séparément l'équilibre de chaque barre. L'effort transmis entre les deux barres au point C à une composante horizontale H_C et une composante verticale V_C .

(b) Dire, sans rien calculer, quels efforts intérieurs naissent dans chaque partie de la structure (ED, EC, DC, CA et CB).



9.18 Exam Aout 2015 - Voici un diagramme d'effort tranchant pour une poutre sur deux appuis. Les efforts normaux valent 0 kN entre A et B, et 10 kN à droite de B (compression).



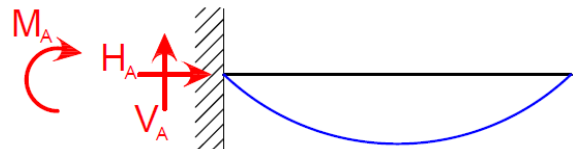
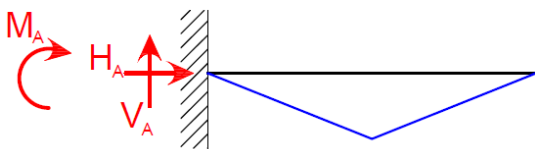
(a) Sur base du diagramme d'effort tranchant et des efforts normaux, trouver les réactions d'appuis de la structure.

(b) Trouver et dessiner les charges qu'il faut appliquer sur la structure pour obtenir ce diagramme d'effort tranchant et les valeurs de l'effort normal données. (Attention au sens des charges.)

(c) Dessiner l'allure des moments fléchissant.

(d) Calculer et positionner le moment de flexion maximal dans la poutre.

9.19 Exam Aout 2015 - Voici deux diagrammes de moments fléchissant pour une poutre encastrée. Les efforts normaux sont nuls dans les poutres.



(a) Trouver et dessiner les charges qu'il faut appliquer sur la structure pour obtenir ces diagrammes de moments fléchissant (Attention au sens des charges).

(b) Trouver les réactions d'appuis de la structure. (En fonction de F et q les charges ponctuelles ou réparties sur la structure.)

(c) Dessiner, sans indiquer de valeurs, l'allure des diagrammes d'effort tranchant correspondants.

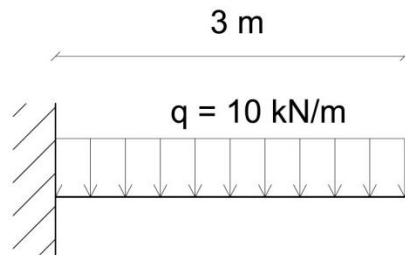
(d) Dessiner, l'allure du diagramme des déformations.

Chapitre 10 - Flexion simple

10.1 Exam Jan 2014 - La structure suivante est composée d'un profilé HEA. On considère $f_e = 355 \text{ MPa}$ et un coefficient de sécurité de 1,5.

(a) Sur base du moment maximal dans la poutre, dimensionner le profilé HEA.

(b) Dimensionner le profilé HEA nécessaire pour que la flèche soit limitée à $1/350$ de la longueur. **(c)** Quel profilé HEA faut-il choisir pour vérifier les deux critères précédents ?

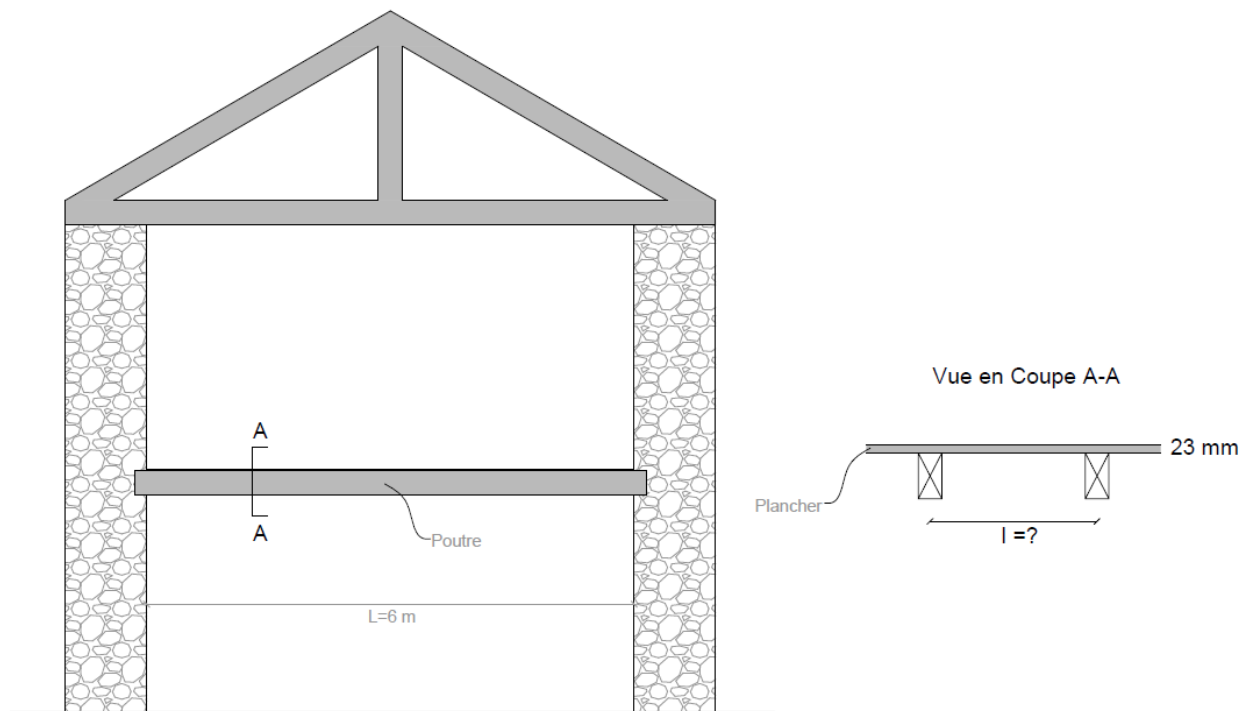


10.2 Lors de la rénovation d'une ancienne ferme, on souhaite dimensionner un nouveau plancher à placer entre les murs existant d'une grange. Le plancher est composé de planches de bois de 23mm d'épaisseur qui portent sur des poutres d'une portée de 6m. Les éléments en bois ont une résistance de $f_e = 15 \text{ MPa}$, et le module de Young du bois est de $E = 10 \text{ GPa}$. La charge à reprendre par le plancher est de 8 kN/m^2 .

(a) Quelle doit être l'entre distance maximale des poutres pour assurer la résistance du plancher ? ($\gamma = 1,5$).

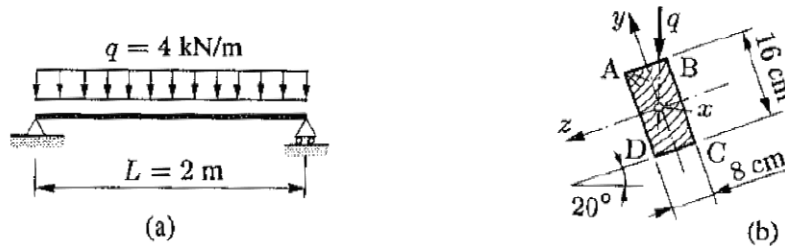
(b) Quelle doit être l'entre distance maximale des poutres pour assurer une flèche du plancher soit inférieure à $l/250$? ($\gamma = 1$)

(c) Dimensionner la section des poutres principales pour la résistance ($\gamma = 1,5$) et pour une flèche inférieure à $L/300$ ($\gamma = 1$). Les sections disponibles sont : Bois (7x15 / 8x23 et 10x30cm) ou un IPE ($f_e=235\text{MPa}$, $E = 200\text{GPa}$).

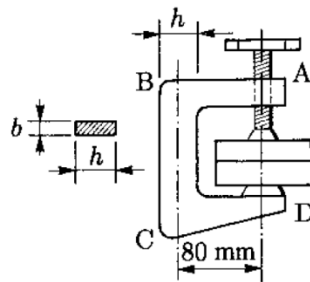


Chapitre 11 - Flexion oblique et composée

11.1 Une poutre simple en bois, de section rectangulaire 8 cm x 16 cm, supportée obliquement (panne de toiture), est soumise à une charge verticale uniforme $q=4\text{ kN/m}$, dont le plan contient l'axe de la poutre. Dans la section la plus sollicitée en flexion, calculer les contraintes normales aux sommets du rectangle. Tracer l'axe neutre et représentez graphiquement (en perspective) le diagramme des contraintes.

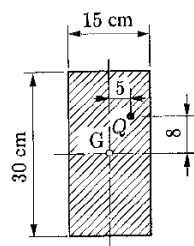


11.2 La branche BC d'un étrier a une section rectangulaire $h \times b = 40 \times 10\text{ mm}$. Si la force de serrage vaut 3 kN, calculer la contrainte de traction maximale en toute section de cette branche et y dessiner le diagramme des contraintes normales.

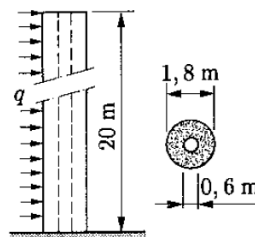


11.3 Une colonne courte en béton, de section rectangulaire, est soumise à une charge Q doublement excentré, agissant en compression. Calculer la valeur admissible de cette charge (traction : $\sigma_{adm} = 50\text{ N/cm}^2$ & compression: $\sigma_{adm} = 1200\text{ N/cm}^2$).

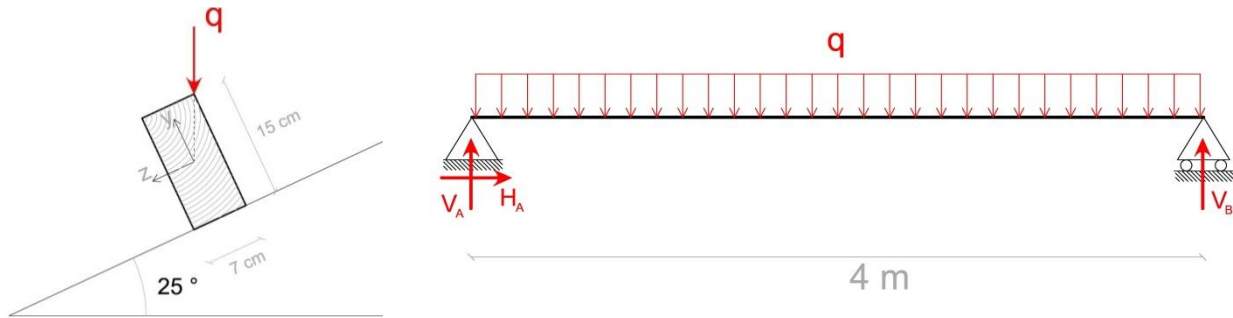
Note : poids propre négligeable, et béton admis élastique linéaire.



11.4 Une cheminée en béton ($\gamma = 24\text{ kN/m}^3$), prismatique, à section annulaire, est soumise à l'action du vent ($q=1,6\text{ kN/m}$). Déterminer le rayon x du noyau central de la section. Calculer l'excentricité e du centre de pression à la base et en déduire si les contraintes normales changent de signe.



11.5 Exam Aout 2014 - La poutre de toiture ci-dessous d'une section de 7 x 15 cm est soumise à une charge répartie verticale. Quel est la charge maximale que l'on peut appliquer sur la poutre, sachant que $f_e = 30 \text{ MPa}$; considérer un coefficient de sécurité de 1,5. Représenter graphiquement (en perspective) le diagramme des contraintes dans la section.



11.6 Exam Jan 2014 - On considère une poutre rectangulaire posée sur deux appuis. Cette poutre est soumise à un effort normal de compression P et à une charge ponctuelle Q .

(a) Calculer l'aire et l'inertie de la section de la poutre.

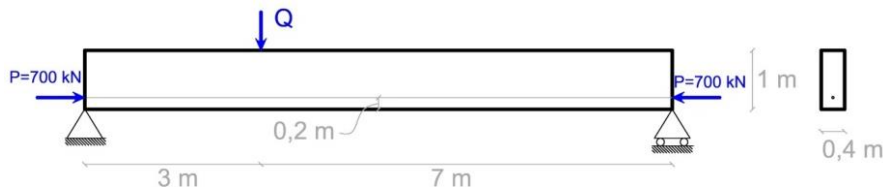
(b) Dessiner le diagramme des contraintes normales dans la section due à l'effort P (indiquer les deux diagrammes élémentaires et le résultant) et indiquer la contrainte maximale.

(c) Dessiner le diagramme des contraintes normales dues à l'effort Q dans la section au droit de Q et indiquer la contrainte maximale (en fct. de Q).

(d) Calculer $Q_{\max,0}$ pour que la contrainte normale en fibre inférieure soit nulle.

(e) Calculer la charge Q_{\max} au-delà de laquelle la contrainte normale de compression dépasse 20 MPa quelque part dans la section.

Note : On néglige le poids propre de la poutre.



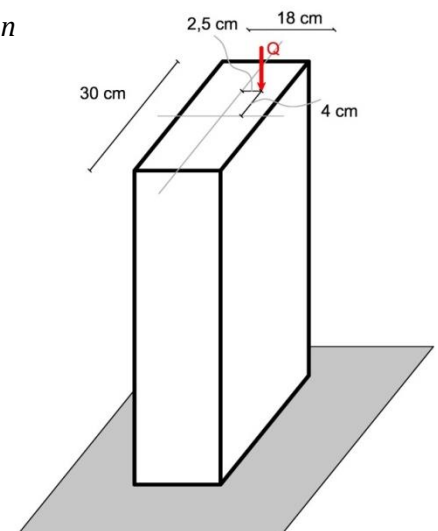
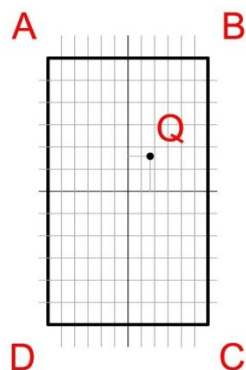
11.7 Exam Jan 2014 - On considère une colonne de 30x18 cm soumise à une charge Q doublement excentrée agissant en compression.

(a) Dessiner le noyau central de la section. La colonne est-elle soumise à des contraintes de traction ?

(b) Calculer la valeur de la contrainte normale en B en fonction de Q .

(c) Indiquer où la contrainte de traction maximale est atteinte.

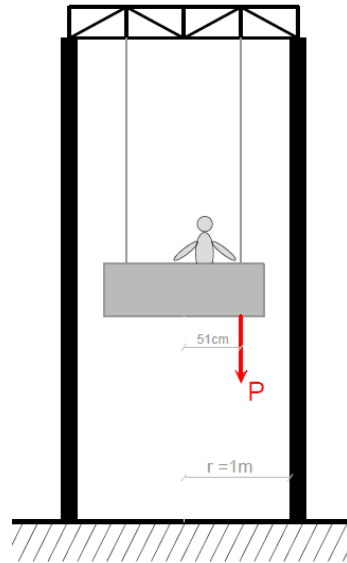
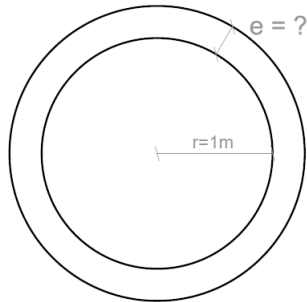
(d) Calculer la charge Q au-delà de laquelle la contrainte de compression dépasse 30 MPa quelque part dans la section.



11.8 Exam Jan 2014 - On souhaite construire une structure circulaire creuse de 1m de rayon intérieur.

A l'intérieur de cette structure, vient se placer une nacelle de charge maximale $P=20$ kN. Comme le chargement de la nacelle est variable, la résultante du poids ne se trouve pas toujours au centre de celle-ci. Le cas de charge le plus critique nous donne une excentricité de la charge de 51cm.

L'épaisseur de la structure est à définir.



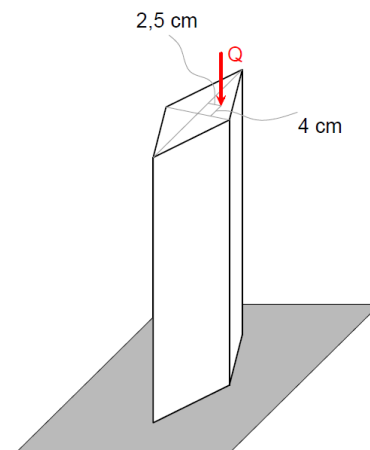
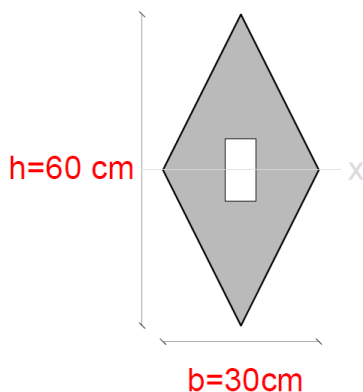
(a) Positionner P et dessiner le noyau central de la structure nécessaire pour éviter l'apparition de contraintes de traction dans la section.

(b) Calculer l'épaisseur minimale de la structure pour éviter l'apparition de contraintes de traction dans celle-ci.

Note: Exprimer d'abord le noyau central en fonction de R et r . (N'oubliez pas que $(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$.) Remplacer ENSUITE les valeurs connues dans l'expression pour trouver R puis e .

11.9 Exam Aout 2015 - On considère une colonne ayant une section en forme de losange et soumise à une charge Q doublement excentrée agissant en compression. Sachant que le noyau central d'un losange est un rectangle, calculer les dimensions de celui-ci.

Note: L'inertie d'un losange vaut : $I_x = \frac{bh^3}{48}$.



(a) Dessiner le noyau central de la section. La colonne est-elle soumise à des contraintes de traction ? Pourquoi ?

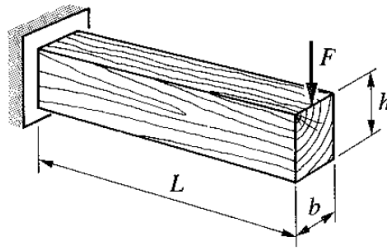
(b) Calculer l'aire et les inerties de la section de la colonne.

(c) Indiquer l'endroit où la contrainte de compression est la plus importante.

Chapitre 12 - Effort tranchant

12.1 Une poutre de section rectangulaire ($b=15\text{ cm}$ et $h=30\text{ cm}$) est soumise à un effort tranchant $V=233\text{ kN}$. Représenter le diagramme de contraintes tangentiels dues à l'effort tranchant, et calculer la valeur de la contrainte maximale.

12.2 Une poutre console de portée L et de section rectangulaire $b \times h$ supporte une charge ponctuelle F à son extrémité libre. Déterminer à partir de quel rapport L/h la résistance à l'effort tranchant l'emporte sur celle à la flexion. Considérer dans un premier temps un matériau fragile, puis un matériau ductile.

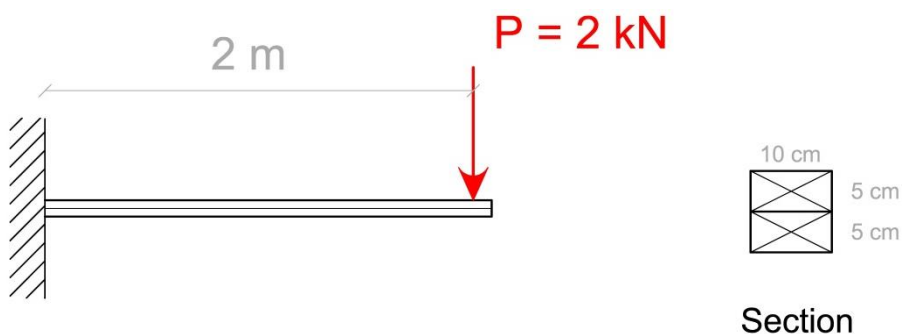


12.3 Exam Juin 2014 - On considère une poutre encastrée dans un mur composée de deux sections de bois superposées.

(a) Représenter la répartition des contraintes de cisaillement dans la section et calculer la valeur du cisaillement maximal si les deux poutres ne sont PAS solidaires, et si les deux poutres sont solidaires.

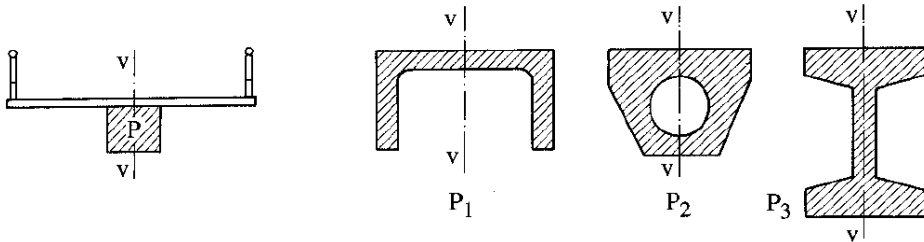
(b) Représenter la répartition des contraintes normales dans la section à l'encastrement et calculer la contrainte normale maximale si les deux poutres ne sont PAS solidaires, et si les deux poutres sont solidaires.

(c) Dimensionner le nombre de clous de diamètre $\phi=6\text{ mm}$ afin que l'on puisse considérer que les deux poutres sont solidaires, avec $f_e = 300\text{ MPa}$ et un coefficient de sécurité $\gamma = 1,5$.

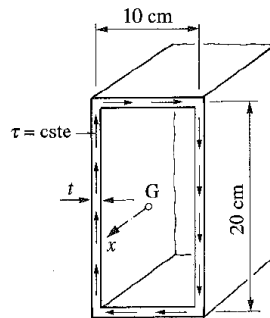


Chapitre 13 - Torsion

13.1 Une passerelle est portée par une poutre centrale P qui est soumise essentiellement à la flexion et à la torsion. Trois sections droites sont proposées pour P . Quelle est la meilleure pour résister à la torsion ? La moins bonne ? Dessiner pour chacune d'elles l'allure de la répartition des contraintes tangentiels de torsion. Ou se produit τ_{\max} ? Quelle est la meilleure section pour résister à la flexion ? Indiquer pour chaque section où se produit σ_{\max} . Quelle section choisiriez-vous pour concilier une bonne résistance à la flexion et à la torsion simultanément ?



13.2 Une section tubulaire rectangulaire est soumise à un effort de torsion $T=1600\text{kNm}$. On considère une répartition constante des contraintes de cisaillement. L'épaisseur de la section est de $t=0,8\text{ cm}$. Calculer la contrainte de cisaillement présente dans la section.



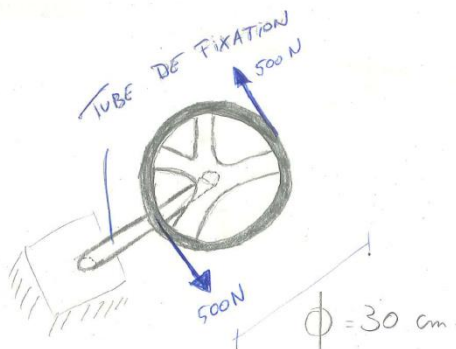
13.3 On dispose de quatre poutrelles métalliques dont la section droite est une cornière en forme de L. Comment assembler ces poutrelles par soudures longitudinales de façon à obtenir une poutre offrant une bonne résistance à la flexion ? Faites de même pour la torsion.

13.4 Dimensionner le tube de fixation d'un volant soumis à un effort de torsion dû aux forces qui lui sont appliquées. Sachant que la résistance du matériau vaut $f_e = 300\text{ MPa}$ (on considère un coefficient de sécurité de $\gamma = 1,5$).

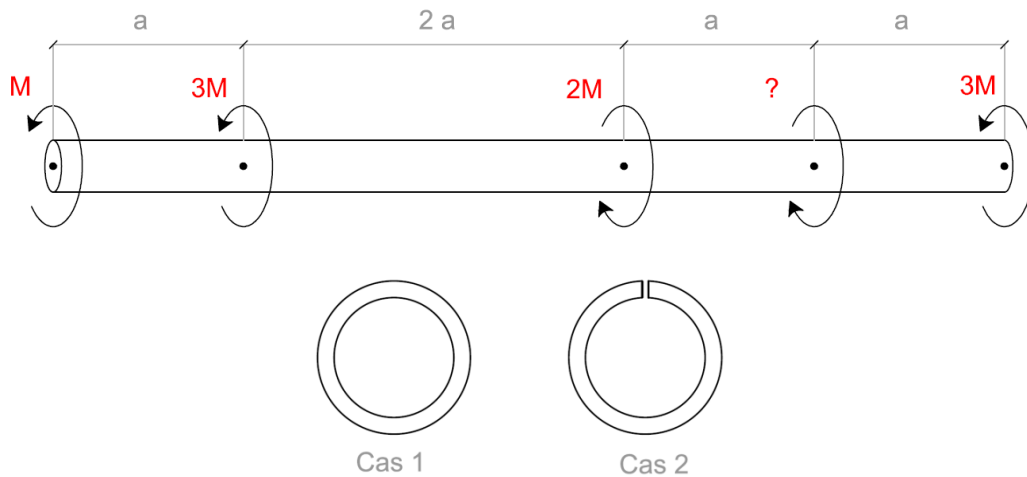
Considérer successivement un tube plein, un tube creux d'une épaisseur de 2mm et un tube creux fendu d'une épaisseur de 2mm.

Calculer le gain de matière par rapport à un tube plein.

Calculer la résistance à la flexion de chacune de ces sections.



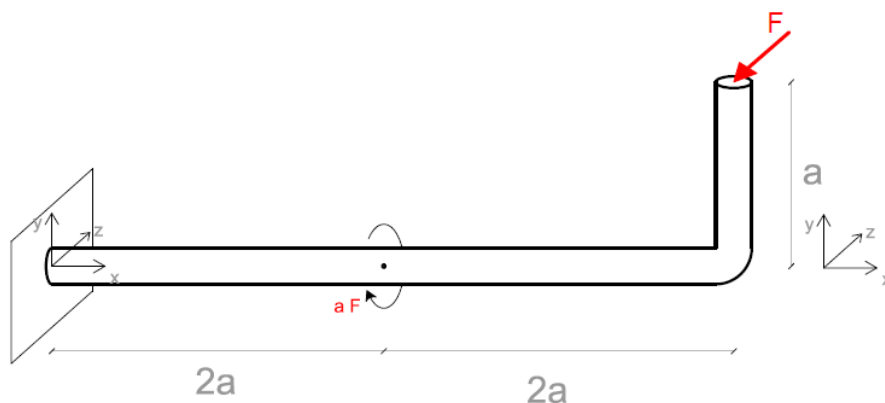
13.5 Exam Jan 2015 - La poutre ci-dessous est soumise à plusieurs moments de torsion. On considère deux sections possibles pour la poutre.



- (a) Calculer la valeur du couple manquant pour que la poutre soit à l'équilibre.
 (b) Dessiner l'allure des moments de torsion dans la poutre et indiquer les valeurs numériques à chaque point d'application d'un moment de torsion.
 (c) Pour le cas 1, dessiner l'allure des contraintes de cisaillement dans la section la plus sollicitée et indiquer la formule permettant de calculer la contrainte maximale.
 (d) Pour le cas 1, dimensionner le rayon nécessaire de la section (en acier) pour garantir la résistance de la poutre.
 $M = 125 \text{ Nm}$, $e = 2 \text{ mm}$ et $f_e = 235 \text{ MPa}$, avec un coefficient de sécurité de $\gamma = 1,5$.
 (e) Pour le cas 2, dessiner l'allure des contraintes de cisaillement dans la section la plus sollicitée et indiquer la formule permettant de calculer la contrainte maximale.
 (f) Pour le cas 2, dimensionner le rayon nécessaire de la section (en acier) pour garantir la résistance de la poutre.
 $M = 125 \text{ Nm}$, $e = 2 \text{ mm}$ et $f_e = 235 \text{ MPa}$, avec un coefficient de sécurité de $\gamma = 1,5$.

13.6 Exam Aout 2015 - Une barre encastrée est soumise à un moment de torsion $M_x = a \cdot F$ ainsi qu'à une force F appliquée dans le sens de l'axe z .

- (a) Calculer, en fonction de a et F , les réactions d'appuis de la barre.
 (b) Dessiner l'allure des moments de torsion dans la barre et indiquer le moment de torsion maximal.
 (c) Pour une barre de section circulaire, dessiner l'allure des contraintes de cisaillement dans la section la plus sollicitée et indiquer la formule permettant de calculer la contrainte maximale.
 (d) Dimensionner le rayon nécessaire de la section (en acier) pour garantir la résistance de la barre.
 $F = 2 \text{ kN}$, $a = 20 \text{ cm}$, $f_e = 235 \text{ MPa}$ et on considère un coefficient de sécurité de $\gamma = 1,5$.



Chapitre 14 - Cercles de Mohr

- 14.1** Tracer le cercle de Mohr, évaluer les contraintes et directions principales ainsi que la contrainte de cisaillement maximale.

$$\begin{cases} \sigma_x = 16 \text{ kN} / \text{cm}^2 \\ \sigma_y = 6 \text{ kN} / \text{cm}^2 \\ \tau_{xy} = -4 \text{ kN} / \text{cm}^2 \end{cases}$$

- 14.2** Interpréter la situation suivante :

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y = -10 \text{ kN} / \text{m}^2 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

- 14.3** Tracer le cercle de Mohr, évaluer les contraintes et directions principales ainsi que la contrainte de cisaillement maximale.

$$\begin{cases} \sigma_x = -5 \text{ N} / \text{mm}^2 \\ \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

- 14.4** Tracer le cercle de Mohr, évaluer les contraintes et directions principales ainsi que la contrainte de cisaillement maximale.

$$\begin{cases} \sigma_x = 3 \text{ MPa} \\ \sigma_y = 4 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

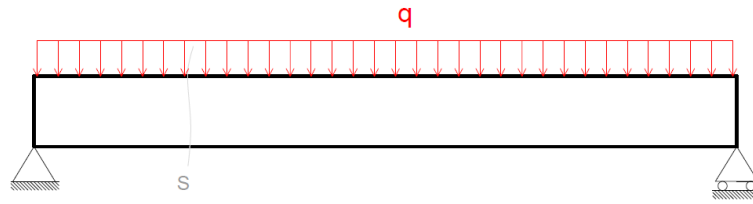
- 14.5** Tracer le cercle de Mohr, évaluer les contraintes et directions principales ainsi que la contrainte de cisaillement maximale et son orientation.

Evaluer la contrainte sur une facette à 30° par rapport aux facettes principales.

Quelle est l'orientation d'une facette sur laquelle la composante normale est nulle ?

$$\begin{cases} \sigma_x = 18 \text{ MPa} \\ \sigma_y = -6 \text{ MPa} \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

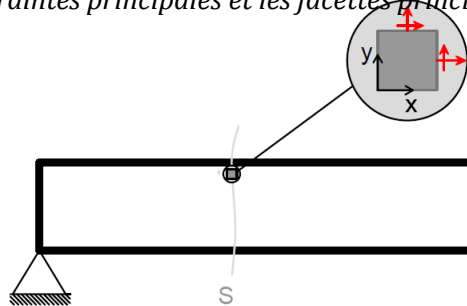
14.6 Exam Aout 2015 - La poutre ci-dessous est composée d'un matériau qui résiste mal à la traction et est soumise à une charge linéaire répartie q . En trois endroits de la section S , on s'intéresse à l'orientation de la contrainte principale de traction afin de prédire l'orientation des fissures qui vont apparaître.



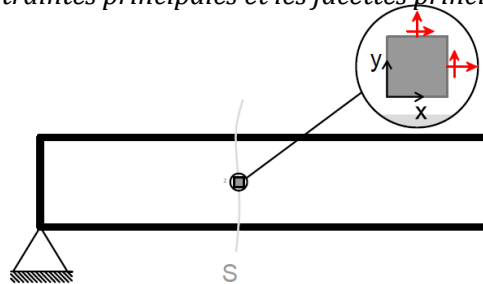
(a) Dessiner l'allure des contraintes normales dues au moment fléchissant dans la section S .

(b) Dessiner l'allure des contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant dans la section S .

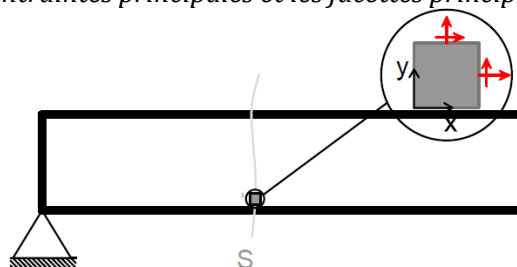
(c) Dessiner le diagramme de Mohr correspondant à l'état de contrainte du point 1 dans la section S . Indiquer le pôle ainsi que les contraintes principales et les facettes principales.



(d) Dessiner le diagramme de Mohr correspondant à l'état de contrainte du point 2 dans la section S . Indiquer le pôle ainsi que les contraintes principales et les facettes principales.



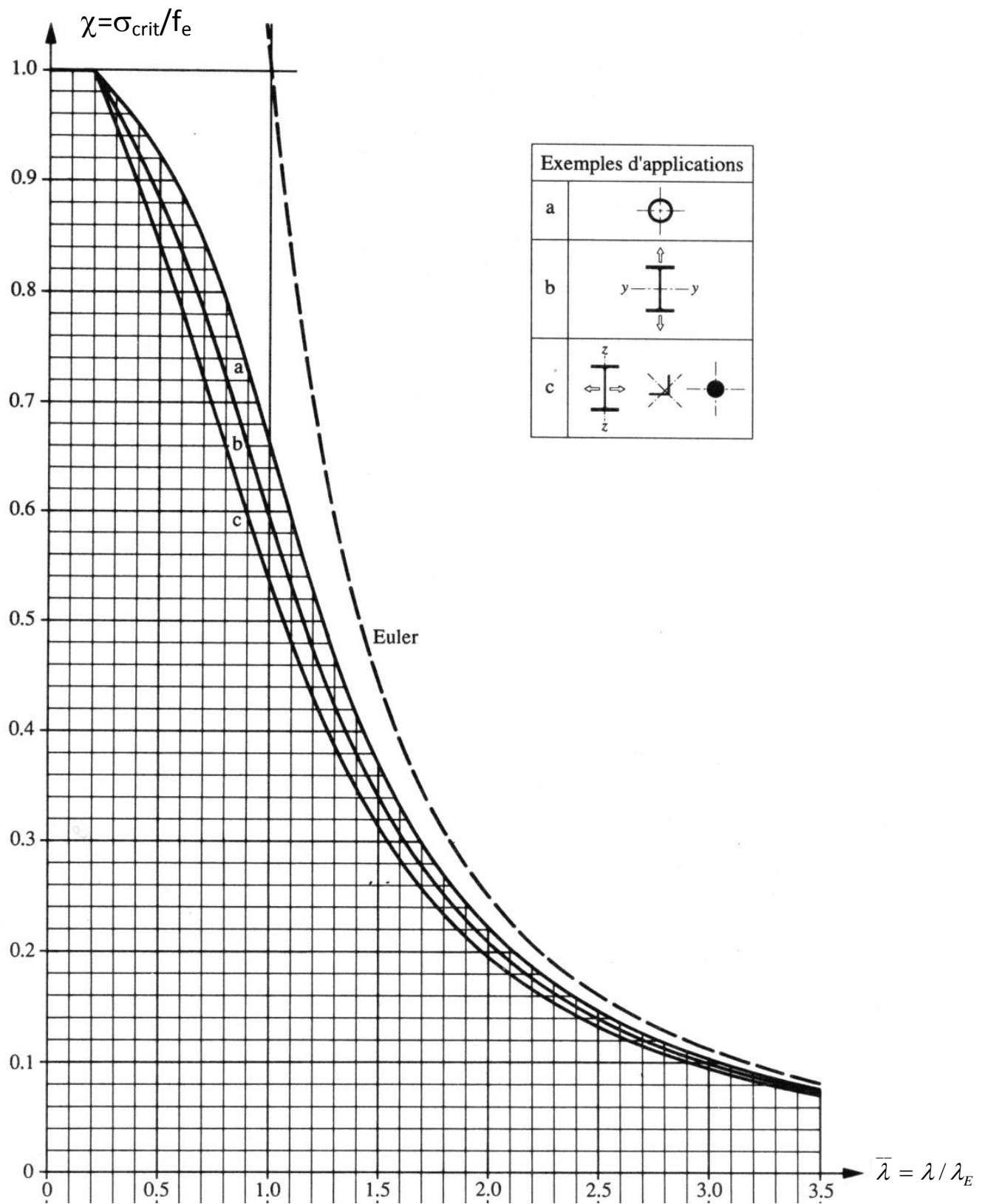
(e) Dessiner le diagramme de Mohr correspondant à l'état de contrainte du point 3 dans la section S . Indiquer le pôle ainsi que les contraintes principales et les facettes principales.



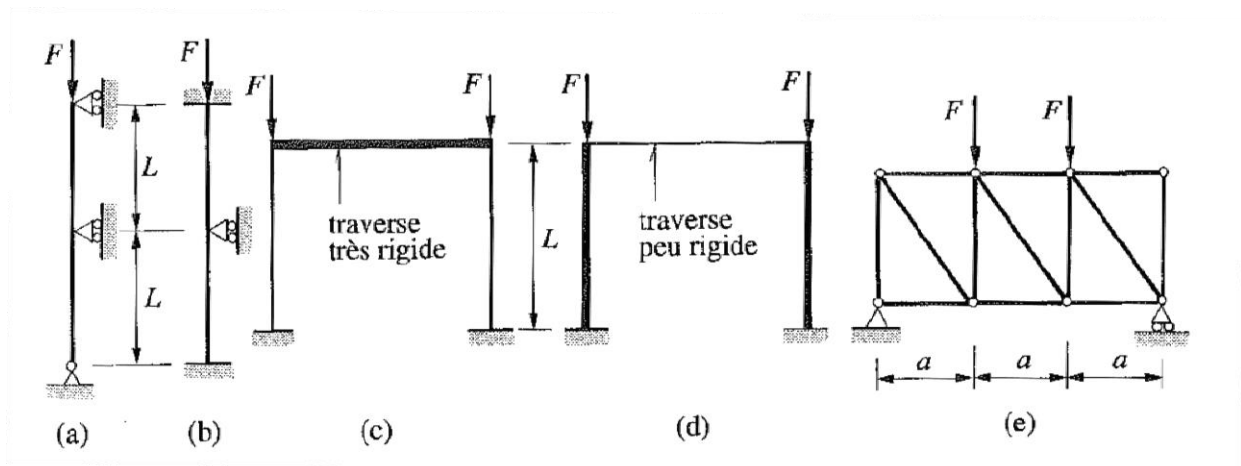
(f) Dessiner sur la poutre l'orientation des fissures dues aux contraintes principales de traction aux trois endroits de la section S .

Chapitre 15 - Flambement

Diagramme de flambement à utiliser pour les exercices.

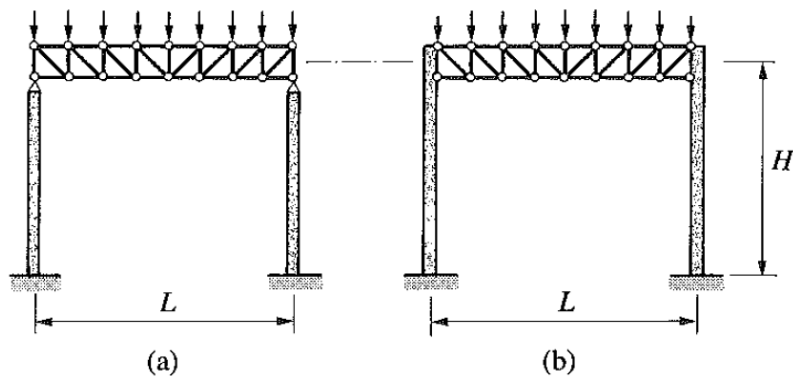


15.1 Tracer les modes de flambement probable des structures proposées et estimer la longueur de flambement L_f des colonnes et des barres.



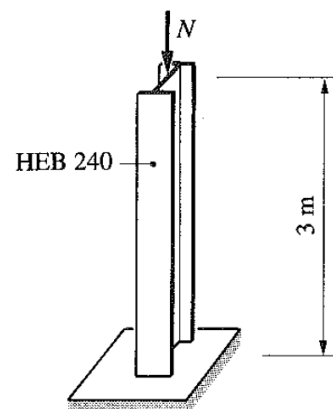
15.2 Pour porter la couverture d'une halle, un ingénieur prévoit des structures planes successives formées de deux colonnes (type profilé en acier) et d'une traverse (type poutre en treillis). Il propose deux possibilités « a » et « b ».

Dessiner le mode de flambement de chaque structure et estimer la longueur de flambement. Quelle structure sera la plus stable ?

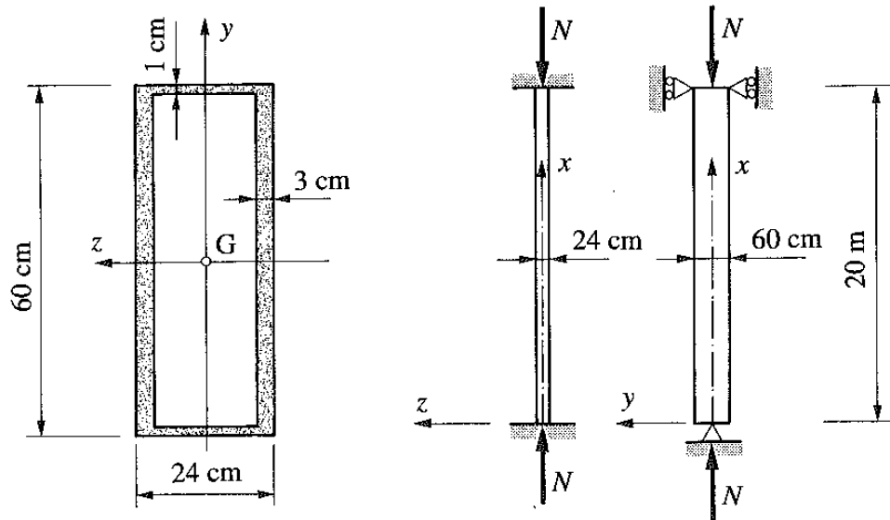


15.3 Une colonne, encastree au pied et libre en tete, est formee d'un profilé laminé HEB 240 en acier doux. Elle est soumise à une charge verticale N de compression (le poids propre est négligeable). Calculer la valeur maximale de N pour :

- (a) la compression pure ($\gamma = 1,5$)
- (b) le flambement d'Euler ($\gamma = 1,5$)
- (c) le flambement « réel » (courbe de flambement) ($\gamma = 1,5$)
- (d) la compression pure en service ($\gamma = 1$)



15.4 Une colonne est formée d'un tube rectangulaire en acier doux, dont les dimensions de la section sont spécifiées dans la figure. Trouver dans quel plan le risque de flambement est le plus grand (les conditions d'appuis n'étant pas les mêmes d'un plan à l'autre) et calculer la charge critique d'Euler de cette colonne.



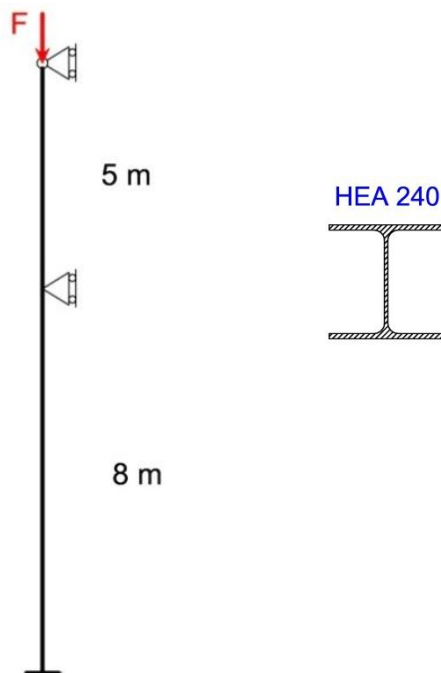
15.5 Exam Aout 2014 - L'élément en acier considéré est constitué d'un profilé HEA 240. La limite d'élasticité vaut $f_e = 235 \text{ MPa}$ (PAS de coefficient de sécurité).

(a) Dessiner la forme de flambement de l'élément.

(b) Calculer l'effort maximal que l'on peut appliquer sur l'élément en négligeant la sensibilité au flambement.

(c) Calculer la charge maximale que l'on peut appliquer sur l'élément en tenant compte du flambement d'Euler. La valeur obtenue par la loi d'Euler est-elle fiable ? Pourquoi ?

(d) En utilisant la courbe adaptée au profilé, calculer la charge maximale pouvant être appliqué sur l'élément.



15.6 Exam Jan 2014 - L'élément en acier ci-contre est constitué d'un profilé HEA 300. La limite d'élasticité vaut $f_e = 355 \text{ MPa}$ (PAS de coefficient de sécurité).

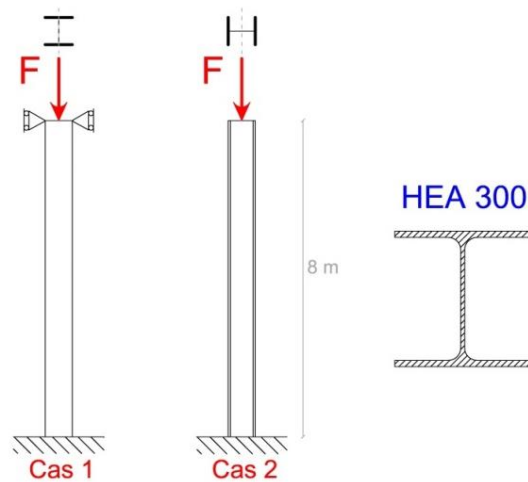
(a) Dessiner la forme de flambement de l'élément dans les deux plans considérés ET écrire les inerties et les longueurs de flambement correspondantes.

(b) Calculer la charge maximale que l'on peut appliquer sur l'élément en négligeant la sensibilité au flambement.

(c) Dans quel cas le flambement se produira-t-il d'abord ? Pourquoi ?

(d) Calculer la charge maximale que l'on peut appliquer sur l'élément en tenant compte du flambement d'Euler.

(e) En utilisant la courbe adaptée au profilé, calculer la charge maximale pouvant être appliquée sur l'élément.



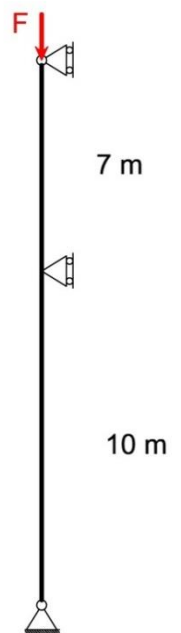
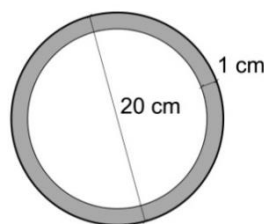
15.7 Exam Jan 2014 - L'élément en acier ci-contre est constituée d'un profilé circulaire creux de diamètre $\phi=20 \text{ cm}$ et d'épaisseur $e=1 \text{ cm}$. La limite d'élasticité vaut $f_e = 355 \text{ MPa}$ (PAS de coefficient de sécurité).

(a) Dessiner sur le schéma ci-dessus la forme de flambement de l'élément.

(b) Calculer la charge maximale que l'on peut appliquer sur l'élément en négligeant la sensibilité au flambement.

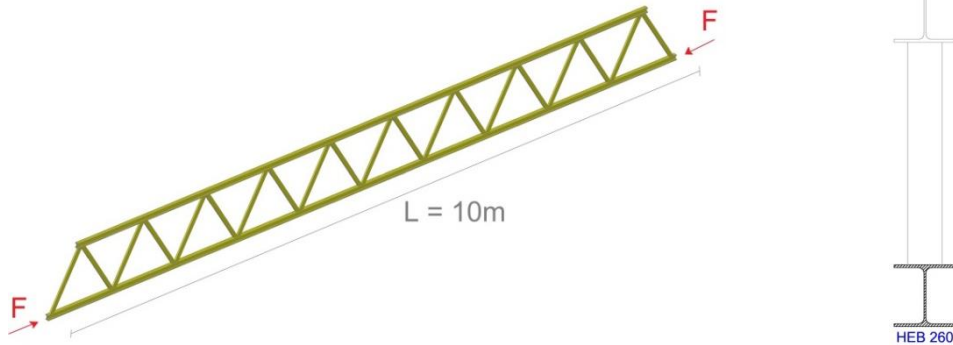
(c) Calculer la charge maximale que l'on peut appliquer sur l'élément en tenant compte du flambement d'Euler.

(d) En utilisant la courbe de flambement adaptée au profilé, calculer la charge maximale pouvant être appliquée sur l'élément.



15.8 Exam Juin 2014 - Le treillis ci-dessous est composé de profilés métalliques dont la limite d'élasticité vaut $f_e = 355 \text{ MPa}$ (PAS de coefficient de sécurité).

L'élément considéré pour cet exercice est la barre inférieure du treillis qui est soumise à un effort de compression F . Cette barre est constituée d'un profilé HEB 260



(a) Dessiner sur la forme de flambement la plus critique de l'élément considéré ET écrire l'inertie et la longueur de flambement correspondante.

(b) Calculer la charge maximale que l'on peut appliquer sur l'élément en négligeant la sensibilité au flambement.

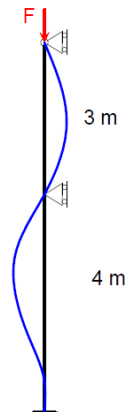
(c) Calculer la charge maximale que l'on peut appliquer sur l'élément en tenant compte du flambement d'Euler.

(d) En utilisant la courbe adaptée au profilé, calculer la charge maximale pouvant être appliquée sur l'élément.

15.9 Exam Jan 2015 - On s'intéresse à un poteau de 7m de haut encastré en partie inférieure et maintenu horizontalement à 4 et à 7m. Le poteau en bois est de section circulaire pleine de diamètre $D=20 \text{ cm}$. Le module de Young vaut $E = 10 \text{ GPa}$.

(a) Dessiner la forme de flambement la plus critique de la structure et calculer la longueur de flambement.

(b) Calculer la résistance nécessaire f_e afin que le poteau puisse reprendre en tenant compte du flambement (voir courbe adaptée sur le diagramme donné à la page suivante) la moitié de la charge qu'il peut reprendre si on néglige le flambement.

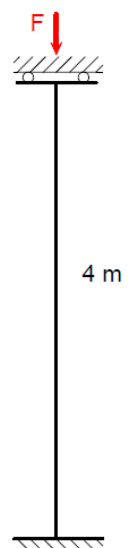
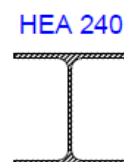


15.10 Exam Aout 2015 - Une colonne composée d'un profilé HEA240 est soumise à un effort de compression. La résistance à considérer pour l'acier est de $f_e = 200 \text{ MPa}$, et le module de Young de l'acier vaut $E = 210 \text{ GPa}$.

(a) Dessiner sur la forme de flambement la plus critique de la structure et donner la longueur de flambement à considérer pour le calcul.

(b) Calculer la charge maximale que l'on peut appliquer sur la colonne en tenant compte de la formule d'Euler.

(c) En utilisant la courbe la plus adaptée à la section donnée, calculer la charge maximale pouvant être appliquée sur la colonne. Commenter **brèvement** les résultats obtenus?

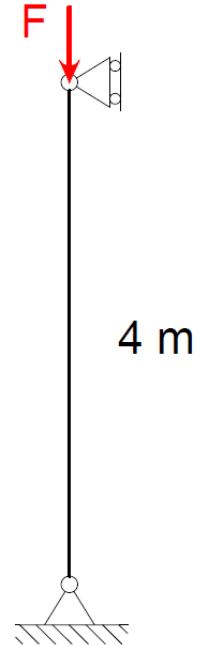
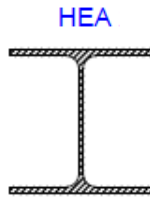
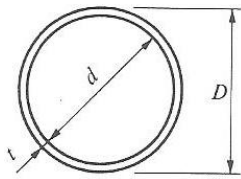


15.11 Exam Aout 2015 - Une colonne de 4m de haut est soumise à un effort de compression. On demande d'étudier deux sections possibles pour cette colonne ; soit un profilé HEA, soit une section circulaire creuse d'épaisseur $t=10\text{mm}$ (voir tableaux). La résistance à considérer pour l'acier est de $f_e = 200\text{ MPa}$ et le module de Young de l'acier vaut $E = 210\text{ GPa}$.

(a) Dessiner la forme de flambement la plus critique de la structure et calculer la longueur de flambement à considérer pour le calcul.

(b) Pour un effort $F= 500\text{ kN}$, dimensionner les profilés nécessaires en tenant compte de la formule d'Euler.

(c) En utilisant la courbe la plus adaptée à chaque section, calculer l'effort maximal pouvant être appliqué sur la colonne.



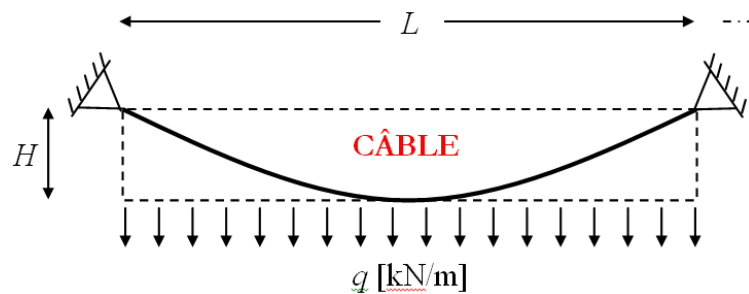
Chapitre 16 - Exercices récapitulatifs

16.1 Exam Juin 2014 - La structure ci-dessous est composée d'une poutre en béton ($\gamma=24 \text{ kN/m}^3$) de section rectangulaire. Elle est précontrainte au moyen d'un câble parabolique.



(a) Représenter et indiquer la valeur de la charge linéaire due au poids propre de la poutre ainsi que le diagramme des moments fléchissant dû à cette charge.

(b) Calculer la valeur de l'effort P qu'il faut mettre aux extrémités du câble pour qu'il « porte » le poids propre du béton.



(c) Dessiner le diagramme des moments fléchissant dus à la présence d'un effort P dans le câble.

(d) Dessiner le diagramme des efforts normaux dus à la présence d'un effort P dans le câble.

(e) Dessiner le diagramme des moments fléchissant pour l'ensemble des charges (PP + câble) et indiquer la valeur maximale.

(f) Dessiner le diagramme des efforts normaux pour l'ensemble des charges (PP + câble) et indiquer la valeur maximale.

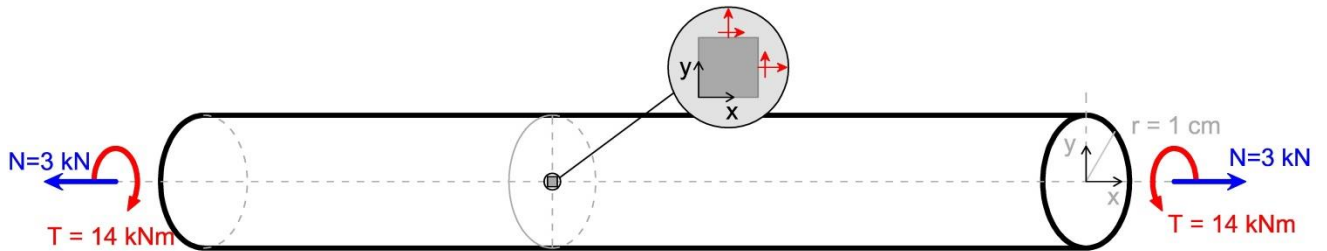
(g) Dessiner les contraintes normales dans la section de béton à mi-travée et calculer les valeurs maximales (préciser C ou T pour traction et compression).

16.2 Exam Jan 2014 - On considère une poutre soumise à de la torsion et de la traction.

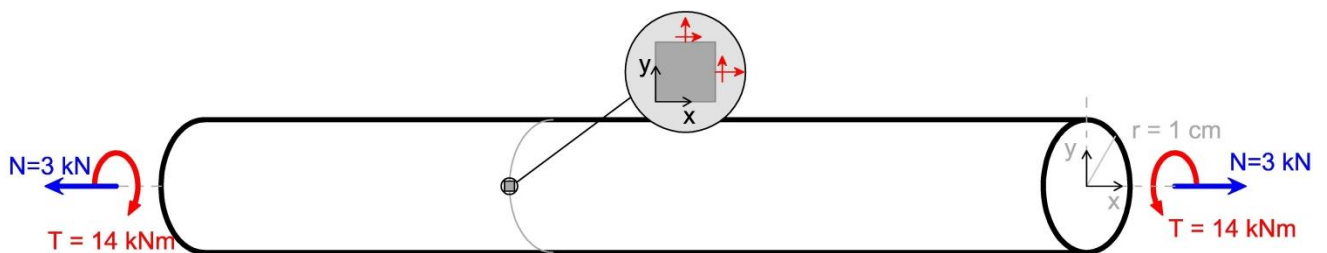
(a) Représenter la répartition des contraintes de cisaillement ET les contraintes normales dans la section et calculer les valeurs maximales. Note : Ne rien pondérer



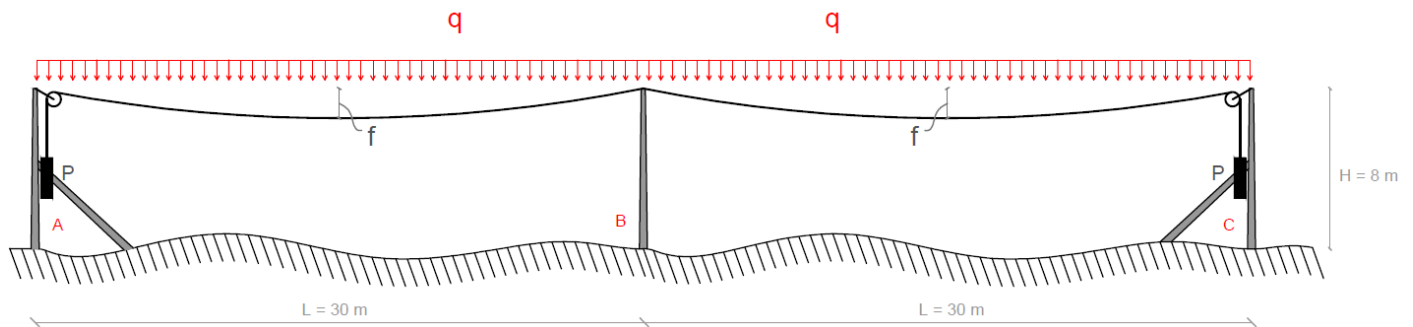
(b) Dessiner le cercle de Mohr correspondant à un point sur la fibre moyenne (σ positif en traction)
(La facette verticale est dans le plan de la section et la facette horizontale est dans le plan qui passe par la fibre moyenne et la point considéré)
Calculer les contraintes principales et indiquer leur orientation sur le schéma du cercle de Mohr.



(c) Dessiner le cercle de Mohr correspondant à un point sur la fibre extrême. (σ positif en traction.)
(La facette verticale est dans le plan de la section et la facette horizontale est dans le plan qui passe par la fibre moyenne et la point considéré)
Calculer les contraintes principales et indiquer leur orientation sur le schéma du cercle de Mohr.



16.3 Exam Jan 2015 - Un câble est porté par trois poteaux en bois de 8m de haut. Les charges, y compris le poids propre, sont réparties uniformément par unité de longueur horizontale. Les poteaux aux extrémités sont munis d'une poulie et d'un contrepoids comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Le câble est fixe au niveau du poteau central.



(a) Lorsque l'on place un contrepoids de 220 N et que le câble n'est soumis qu'à son poids propre, on observe une flèche de 0,5m. Calculer la charge répartie due au poids propre du câble qui cause cette géométrie.

(b) Quel contrepoids faut-il placer si on souhaite limiter la flèche du câble sous son poids propre à 0,25m ?

(c) Des oiseaux viennent se poser sur le câble, causant une charge répartie supplémentaire de 0,75 N/m. Calculer la tension maximale dans le câble et la flèche de celui-ci. Avec P calculé à la sous-question (b).

(d) Le poteau central est de section circulaire pleine ($\phi = 15$ cm), et il a une résistance de $f_e = 15$ MPa (on considère un coefficient de sécurité $\gamma = 1,5$). Du côté droit (BC), le câble supporte des oiseaux, tandis que du côté gauche (AB), il ne supporte que son poids propre. Calculer et dessiner (à l'échelle) le noyau central de la section. Ce poteau sera-t-il soumis à des contraintes de traction (on néglige le poids propre du poteau) ?

(e) Calculer la contrainte normale maximale dans le poteau central pour le cas de charge proposé à la sous-question (d) et vérifier s'il résiste. ($\gamma = 1,5$)

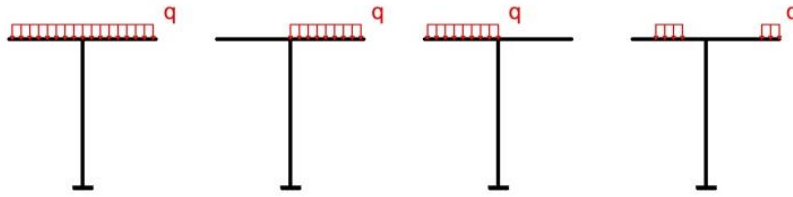
(f) Dessiner la forme de flambement du poteau central et écrire l'inertie et la longueur de flambement correspondante.

(g) Calculer la force maximale que l'on peut appliquer sur le poteau central en négligeant la sensibilité au flambement.

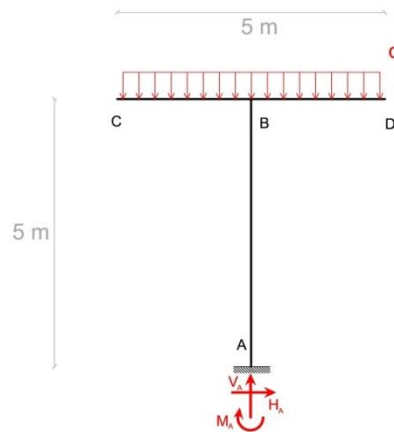
(h) Calculer la force maximale que l'on peut appliquer sur le poteau central en tenant compte de la formule d'Euler. Le module de Young du bois vaut $E = 10$ GPa.

(i) En utilisant la courbe la plus adaptée à la section donnée (voir sous-question 10 : courbe a, b ou c), calculer la force maximale pouvant être appliqué sur le poteau central.

16.4 Exam Aout 2014 - La structure suivante est soumise à une charge variable q (la charge peut être soit sur une partie de la structure, soit sur l'ensemble de la structure – voir exemples ci-dessous).



La structure est composée de poutres carrées de 15 cm de côté, la résistance du matériau vaut $f_e = 40 \text{ MPa}$, et le coefficient de sécurité à prendre en compte est de 1,5.



(a) Trouver et dessiner le cas de charge (position de la charge variable q) qui donne un effort normal maximal dans la colonne AB et dessiner le diagramme d'effort normal correspondant. Calculer la valeur maximale de cette charge variable que l'on peut appliquer sans atteindre la rupture de la colonne.

(b) Trouver et dessiner quel cas de charge (position de la charge variable q) donne un moment de flexion maximal dans la colonne AB. Dessiner le diagramme d'effort normal **et** de moment correspondant. Calculer la valeur maximale de cette charge variable que l'on peut appliquer sans atteindre la rupture de la colonne.

(c) Dessiner le noyau central de la section.

Lorsque q est appliquée sur la moitié de la structure, la colonne est-elle soumise à des contraintes de traction ? Pourquoi ?

(d) Dessiner l'allure du diagramme des efforts tranchants dans la poutre CD et préciser les valeurs en B, C et D

(e) Représenter la répartition des contraintes de cisaillement dans la section la plus sollicitée de l'élément et calculer la valeur du cisaillement maximal, avec $q = 120 \text{ kN/m}$.

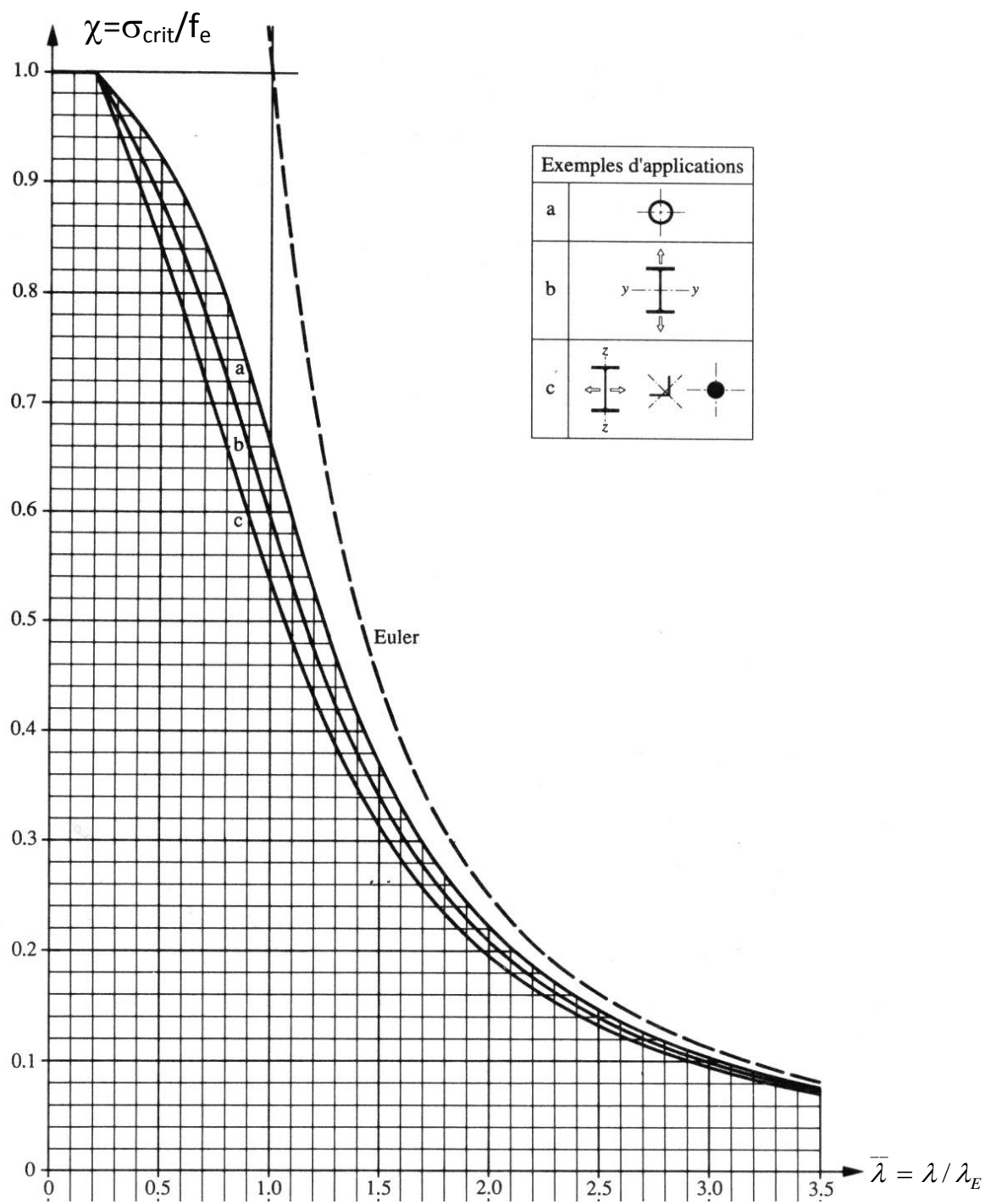
(f) Ecrire le critère de Von Mises au niveau de la fibre neutre dans la section la plus sollicitée de la poutre, et calculer la charge q maximale que l'on peut appliquer sur la structure.

(g) Pour q appliqué sur l'ensemble de la structure, dessiner la forme de flambement de la colonne, et écrire la longueur de flambement correspondante.

(h) Calculer la charge q maximale que l'on peut appliquer sur l'élément en tenant compte de la loi d'Euler (avec $E = 18 \text{ GPa}$).

(i) En utilisant la courbe « a » du diagramme suivant, calculer la charge répartie maximale pouvant être appliqué sur l'élément.

(j) Sur le diagramme ci-dessous, indiquer clairement les points relatifs aux 3 situations précédentes (sans flambement, Euler, Courbe « a »)



PARTIE 2 :
SOLUTIONS DES
EXERCICES

Table des matières (solutions)

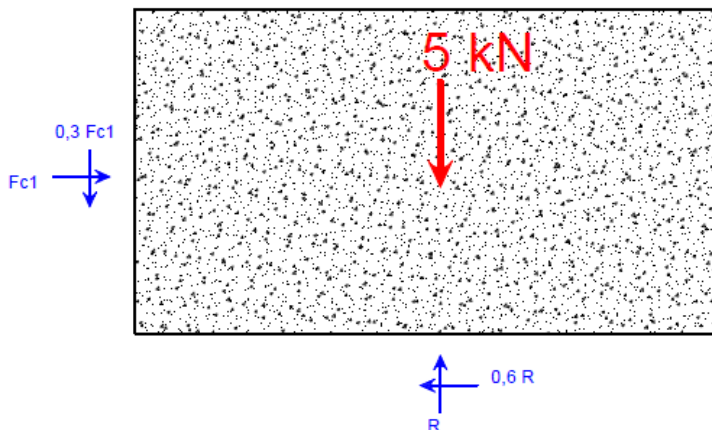
Chapitre 1	Solutions - Compositions de forces.....	- 64 -
Chapitre 2	Solutions - Equilibres	- 64 -
Chapitre 3	Solutions - Eléments de structure	- 65 -
Chapitre 4	Solutions - Réaction d'appuis.....	- 65 -
Chapitre 5	Solutions - Structures composées	- 65 -
Chapitre 6	Solutions - Exercices complémentaires (appuis – dim. - ...).....	- 66 -
Chapitre 7	Solutions - Treillis	- 68 -
Chapitre 8	Solutions - Arcs funiculaires & câbles.....	- 73 -
Chapitre 9	Solutions - Efforts internes.	- 82 -
Chapitre 10	Solutions - Flexion simple.....	- 92 -
Chapitre 11	Solutions - Flexion oblique et composée	- 93 -
Chapitre 12	Solutions - Effort tranchant.....	- 96 -
Chapitre 13	Solutions - Torsion.....	- 97 -
Chapitre 14	Solutions - Cercles de Mohr	- 99 -
Chapitre 15	Solutions - Flambement.....	- 101 -
Chapitre 16	Solutions - Exercices récapitulatifs.....	- 110 -

Chapitre 1 Solutions - Compositions de forces.

- 1.1 $R = 8,026 \text{ kN}$ à $88,77^\circ$ de l'horizontal.
- 1.2 500 N dans le fil incliné & 300 N dans le fil horizontal.
- 1.3 (a) Si $\alpha = 0$, $M_B = 188 \text{ Nm}$; (b) $M_{\max} = 200 \text{ Nm}$ quand F est \perp à AB ; (c) Si $\alpha = 20^\circ$, $F = 261 \text{ N}$.
- 1.4 $F_x = 24,603$; $F_y = 36,905 \text{ kN}$; $F_z = -246,034 \text{ kN}$
- 1.5 $M_x = -3690,5 \text{ kNm}$; $M_y = 492,1 \text{ kNm}$; $M_z = -295,2 \text{ kNm}$

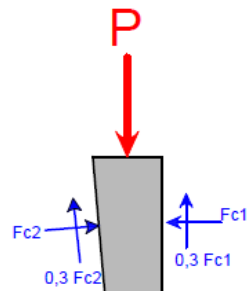
Chapitre 2 Solutions - Equilibres

- 2.1 $F_R = 78,5 \text{ N}$; $M_R = 172,4 \text{ Nm}$.
- 2.2 Le poids, de 625 kN , agit à $10,88 \text{ m}$ du bord vertical gauche.
- 2.3 $F_{RX} = 193,55 \text{ kN}$ (\leftarrow); $F_{RY} = 1113,55$ (\downarrow); $x_R = 1,68 \text{ m}$.
- 2.4 $F_{RX} = 2 \text{ kN}$; $F_{RY} = 0$; $M_{OX} = 0$; $M_{OY} = 4,8 \text{ kNm}$; $M_{OZ} = -3 \text{ kNm}$.
- 2.5 $C = 24,5 \text{ kN}$ (\nearrow); $D = 22,7 \text{ kN}$ (\rightarrow)
- 2.6 L'équilibre en translation $\sum F_x$ et $\sum F_y = 0$ est vérifié. L'équilibre en rotation $\sum M = 48 \text{ kNm} \neq 0$ n'est pas vérifié; il subsiste un moment résultant M_R .
- 2.7 **Equilibre du bloc :**
 $\sum F_v = 0 \rightarrow R = 0,3 F_{c1} + 5$
 $\sum F_h = 0 \rightarrow F_{c1} = 0,6 R \rightarrow F_{c1} = 0,6 [0,3 F_{c1} + 5] = 3,658 \text{ kN}$
 $\rightarrow R = 0,3 \cdot 3,658 + 5 = 6,097 \text{ kN}$



Equilibre du coin :

$$\begin{aligned} \sum F_h = 0 &\rightarrow F_{c2} \cos 5 = F_{c1} + 0,3 F_{c2} \sin 5 \rightarrow F_{c2} = 3,77 \text{ kN} \\ \sum F_v = 0 &\rightarrow F_{c2} \sin 5 + 0,3 F_{c2} \cos 5 + 0,3 F_{c1} = P \\ &\rightarrow P = 3,77 \sin 5 + 0,3 \cdot 3,77 \cos 5 + 0,3 \cdot 3,658 = 2,55 \text{ kN} \\ P_{\min} &= 2550 \text{ [N]} \end{aligned}$$



Chapitre 3 Solutions - Eléments de structure

3.1 $\alpha = 9,6^\circ$

3.2 $N_{CD} = 1708,8 \text{ N}$

3.3 Les chaines sont obligatoirement tendues, avec : $N_1 = 30 \text{ kN}$, $N_2 = N_3 = 17,32 \text{ kN}$

3.4 $N_1 = 1,944 \text{ kN}$, $N_2 = 1,366 \text{ kN}$, $N_3 = 1,933 \text{ kN}$; (traction)

3.5 $N_1 = -796 \text{ N}$, $N_2 = -1574 \text{ N}$, $N_3 = -1336 \text{ N}$; (compression)

3.6 $N_{AB} = -4 \text{ kN}$ (compression) ; $N_{AC} = N_{AD} = 2,375 \text{ kN}$ (traction)

Chapitre 4 Solutions - Réaction d'appuis

4.1 $A_X = 715,6 \text{ kN}$ (\leftarrow) ; $A_Y = 458 \text{ kN}$ (\downarrow) ; $N_{BD} = -1508,8 \text{ kN}$ (compression)

4.2 Dans le système d'axe (X,Y,Z) en A (X // à F, Y=AB et Z vertical ascendant) :
 $A_X = -2 \text{ kN}$; $A_Y = A_Z = 0$; $M_X = 0$; $M_Y = 1,6 \text{ kNm}$; $M_Z = 3,4 \text{ kNm}$

4.3 $N = 109,1 \text{ N}$; $R = 43,6 \text{ N}$ (\leftarrow)

4.4 Sécurité au glissement $\gamma_{transl} = 4$; sécurité au renversement $\gamma_{rot} = 1,07 \leq 1,5$
(donc trop FAIBLE !) ; $R_x = 2,4 \text{ kN}$ (\leftarrow) ; $R_y = 19,2 \text{ kN}$ (\uparrow) ; $M = 3,6 \text{ kNm}$

4.5 $\gamma_{transl} = 1,63$; $\gamma_{rot} = 2,11$

4.6 **(a)** $B_y = 378 \text{ kN}$ (\uparrow) ; $C_y = 126 \text{ kN}$ (\uparrow) ; **(b)** Foule sur AB : Sécurité au renversement autour de B, $\gamma_{rot} = 1,82$.

Chapitre 5 Solutions - Structures composées

5.1 **(a)** $A_x = 0,727 \text{ kN}$ (\rightarrow) ; $A_y = 2,273 \text{ kN}$ (\uparrow) ; $R_B = 1,029 \text{ kN}$ (\nwarrow)
(b) $A_x = 0,96 \text{ kN}$ (\rightarrow) ; $A_y = 0,28 \text{ kN}$ (\downarrow) ; $M_A = 0,56 \text{ kNm}$; $R_B = 1,6 \text{ kN}$ (\nwarrow)
(c) $A_x = 20 \text{ kN}$ (\leftarrow) ; $A_y = 30 \text{ kN}$ (\downarrow) ; $B_y = 30 \text{ kN}$ (\uparrow)

5.2 $N_{AB} = -225 \text{ kN}$ (Comp) ; $C_x = 22,5 \text{ kN}$ (\leftarrow) ; $C_y = 112,5 \text{ kN}$ (\uparrow) ; $R_D = 43,73 \text{ kN}$ (\nearrow)

5.3 $N_{AB} = 40,6 \text{ kN}$ (traction) ; $N_{AC} = -67,9 \text{ kN}$ (compression).

Chapitre 6 Solutions - Exercices complémentaires (appuis - dim. - ...)

6.1 (a) Calcul des efforts dans les câbles pour une charge P :

- Câbles verticaux : $e_{vert} = \frac{P}{2} = 0,5 P$
 - Câbles oblique : $tg \alpha = \frac{2}{3} = 33,69^\circ \rightarrow e_{incliné} = \frac{P/2}{\cos \alpha} = 0,6 P$
 - Câbles horizontaux : $e_{hor} = \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{2} = 0,33 P$
- $e_{max} = 0,6 P$ dans le câble incliné**

(b) Calcul de la charge maximale :

Section du câble : $A = \pi R^2 = 7,068 \text{ mm}^2$

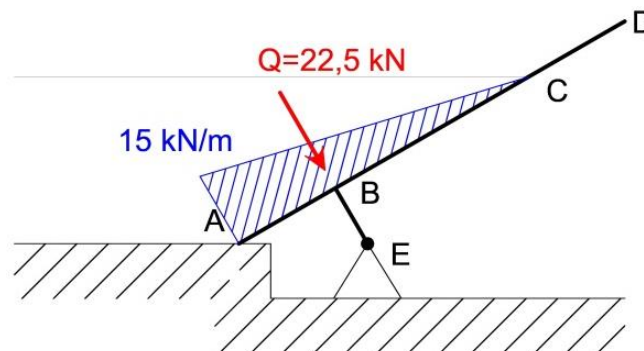
Résistance du câble : $\frac{f_e}{\gamma} = \frac{300}{1,5} = 200 \text{ MPa}$

Donc l'effort maximal dans le câble vaut : $F_{max} = A \frac{f_e}{\gamma} = 1413,71 \text{ N} = 1,4 \text{ kN}$

Ce qui nous correspond à un chargement $P_{max} = \frac{F_{max}}{0,6} = 2,356 \text{ kN}$

$$P_{max} = 2,36 \text{ kN}$$

6.2 (a) Représentation des forces dues à la présence de l'eau :



(b) Calcul de la sécurité au renversement :

La résultante est dans l'axe de BE, nous sommes donc à l'état d'équilibre. ($F_s = 1$)

On peut obtenir le même résultat en calculant $F_s = \frac{F_{stab}}{F_{destab}}$.

(c) Calcul des réactions d'appuis :

Le système est tout juste à l'équilibre (rotation autour de E), donc $V_A = 0$

Les réactions en E valent les composantes de la résultante $Q = 22,5 \text{ kN}$:

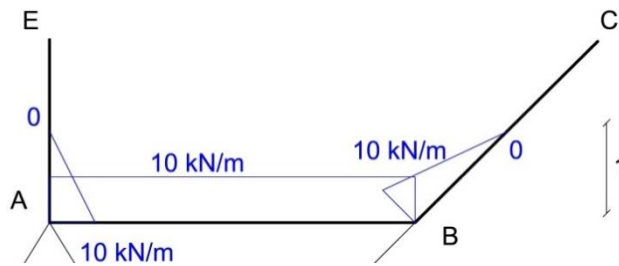
$$V_E = R \cos 30^\circ$$

$$H_E = R \sin 30^\circ$$

$$V_E = 19,49 \text{ kN}$$

$$H_E = -11,25 \text{ kN}$$

6.3 (a) Représentation des forces dues à la présence de l'eau :



(b) Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum F_v = \frac{N_{BD}}{\sqrt{2}} + V_A - 40 - \frac{10}{2} = 0$$

$$\sum F_h = \frac{N_{BD}}{\sqrt{2}} - \frac{10}{2} + H_A + \frac{10}{2} = 0 \rightarrow \frac{N_{BD}}{\sqrt{2}} = -H_A$$

$$\sum M_A = \frac{N_{BD}}{\sqrt{2}} \cdot 4 - 40 \cdot 2 - \frac{10}{2} \cdot 0,33 - \frac{10}{2} \cdot 4,33 + \frac{10}{2} \cdot 0,33 = 0$$

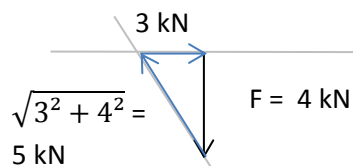
$$\rightarrow \frac{N_{BD}}{\sqrt{2}} = \frac{80+21,66}{4} = 25,42 \text{ kN} = -H_A$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow V_A = -\frac{N_{BD}}{\sqrt{2}} + 40 + 5 = 19,58 \text{ kN}$$

$$H_A = -25,42 \text{ kN} \quad V_A = 19,58 \text{ kN} \quad N_{BD} = 35,95 \text{ kN (Compression)}$$

6.4 (a) Calcul du poids de la caisse :

Equilibre du point D :



Tension dans la corde qui passe par la poulie = 5 kN

Poids minimum de la caisse : $B_{\min} = 10 \text{ [kN]}$ ($F_s = 2$)

(b) Calcul des réactions d'appuis :

Equilibre du point D : $H_E = -3 \text{ kN}$

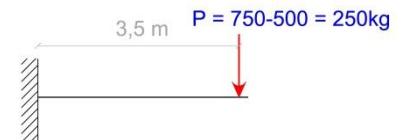
Tension dans le sens du câble : $V_E = 0 \text{ kN}$ et $M_E = 0 \text{ kNm}$

$$M_A = -2,50 \cdot 3,5 = -8,75 \text{ kNm}$$

$$V_A = P = 2,50 \text{ kN}$$

$$H_A = 0$$

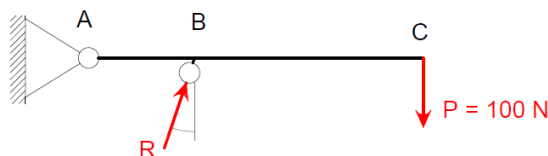
$$V_A = 2,5 \text{ [kN]} ; H_A = 0 \text{ [kN]} ; M_A = -8,75 \text{ [kNm]} ; V_E = 0 \text{ [kN]} ; H_E = -3 \text{ [kN]} ; M_E = 0 \text{ [kNm]}$$



6.5 Calcul de la force exercée sur la canette :

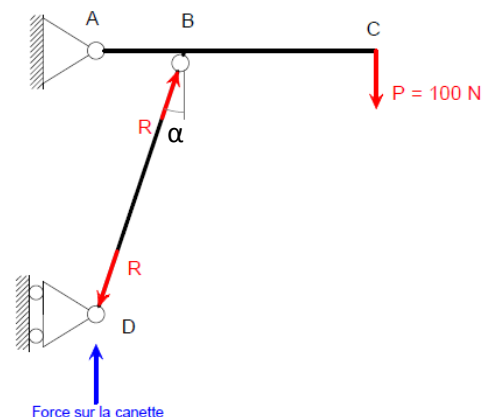
$\sum F_v$ en D : Force sur la canette = $R \cos \alpha$.

L'équilibre de la partie supérieure de la structure donne $\sum M_A = 0$



$$R \cos \alpha \cdot 4 = P \cdot 20$$

$$F = R \cos \alpha = P \cdot 5 = 500 \text{ N}$$



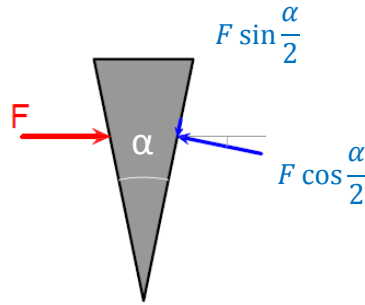
6.6 Décomposition de la force F :

$$F \sin \frac{\alpha}{2} = \mu F \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = 0,25$$

$$\frac{\alpha}{2} = 14,03$$

$$\alpha = 28^\circ$$



6.7 Pour le calcul, on considère une tranche de 1m de structure.

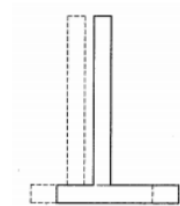
(a) Calcul de la sécurité au glissement :

La charge q vaut : $q = \gamma \cdot 3 = 60 \text{ kN/m}^2$.

$$F_s = \frac{F_{stab}}{F_{destab}} = \frac{q \cdot x \cdot \mu}{\frac{p_{max} \cdot H}{2}} = 1,5$$

$$x = \frac{1,5 \cdot 30}{60 \cdot 0,6} = 1,25 \text{ m}$$

$$x_{min} = 1,25 \text{ [m]}$$



(b) Calcul de la sécurité au renversement :

$$F_{s \text{ rot}} = \frac{M_{stab}}{M_{destab}} = \frac{q \cdot x \cdot (\frac{x}{2} + y)}{P \cdot H/3} = 2$$

$$75 \frac{x}{2} + 75 y = 30 \cdot 1 \cdot 2$$

$$y = \frac{16,125}{75}$$

$$y = 0,175 \text{ m}$$

$$y_{min} = 0,18 \text{ [m]}$$



Chapitre 7 Solutions - Treillis

7.1 Degré d'hyperstaticité : $I = b + r - 2n = 12 + 3 - 2 \cdot 8 = -1$ (c'est un mécanisme).

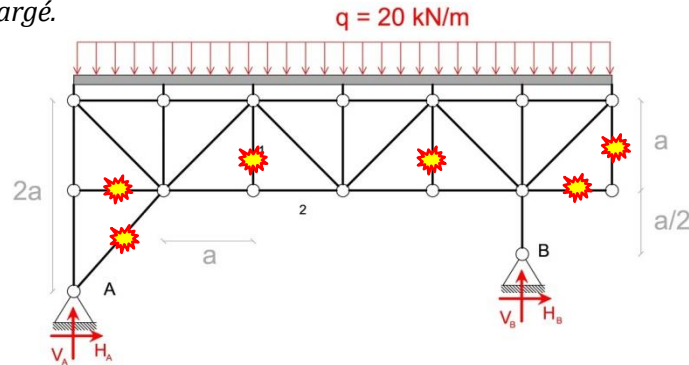
7.2 $N_1 = -160 \text{ kN (comp)}$; $N_2 = -56,6 \text{ kN (comp)}$; $N_3 = 20 \text{ kN (tract)}$

7.3 $N_1 = 45 \text{ kN (tract)}$; $N_2 = 16,77 \text{ kN (tract)}$; $N_3 = -37,5 \text{ kN (comp)}$

7.4 $N_1 = N_2 = N_3 = N_{10} = 0$; $N_4 = 8 \text{ kN (tract)}$; $N_5 = -8,49 \text{ kN (comp)}$; $N_6 = -4 \text{ kN (comp)}$
 $N_7 = 2,83 \text{ kN (tract)}$; $N_8 = -8 \text{ kN (comp)}$; $N_9 = 11,31 \text{ kN (tract)}$

7.5 $N_{1-3} = N_{5-6} = 0$; $N_{1-2} = -80 \text{ kN (comp)}$; $N_{3-4} = -60 \text{ kN (comp)}$;
 $N_{4-6} = -75 \text{ kN (comp)}$; $N_{2-3} = 90,14 \text{ kN (tract)}$; $N_{3-6} = 18,03 \text{ kN (tract)}$.

- 7.6** Effort nul dans deux barres non // arrivant en un nœud non chargé.
Effort nul dans une barre ayant une composante perpendiculaire à toutes les autres barres en un nœud non chargé.



Calcul des réactions d'appuis :

Effort vertical transmis par la barre en B, donc $H_B = 0$

$$\sum F_h = 0 : H_B + H_A = 0 \rightarrow H_B = H_A = 0$$

$$\sum F_v = 0 : V_A + V_B = 20 \cdot 6a = 120a$$

$$\sum M_A = 20a \cdot a + 20a \cdot 2a + 20a \cdot 3a + 20a \cdot 4a + 20a \cdot 5a + 10a \cdot 6a - V_B \cdot 5a = 0$$

$$\rightarrow V_B = 72a$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow V_A = 48a$$

$$V_A = 48a \text{ kN} \quad H_A = 0 \text{ kN} \quad V_B = 72a \text{ kN} \quad H_B = 0 \text{ kN}$$

Calcul des efforts :

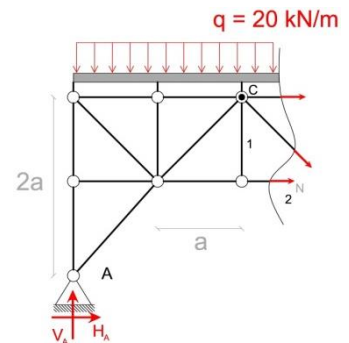
Effort dans la barre 1 : $N_1 = 0$ (voir sous question 1)

Calcul de l'effort dans la barre 2 par la méthode des coupes :

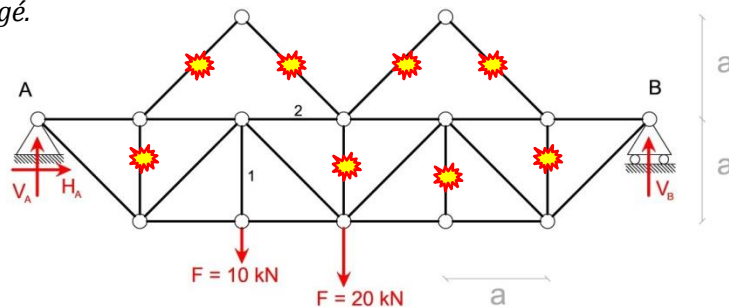
$$\sum M_C = 0 : V_A \cdot 2a = 10 \cdot 2a + 20 \cdot a + N_2 \cdot a$$

$$N_2 = 96a - 40 = 56 \text{ kN}$$

$$N_1 = 0 \text{ kN} \quad ; \quad N_2 = 56 \text{ kN (Traction)}$$



- 7.7** Effort nul dans deux barres non // arrivant en un nœud non chargé.
Effort nul dans une barre ayant une composante perpendiculaire à toutes les autres barres en un nœud non chargé.



Calcul des réactions d'appuis en A :

$$\sum F_h = 0 : H_A = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 : V_A \cdot 6a = 10 \cdot 4a + 20 \cdot 3a \rightarrow V_A = \frac{100}{6} = 16,66 \text{ kN}$$

Calcul de l'effort dans la barre 1 par équilibre de son nœud inférieur :

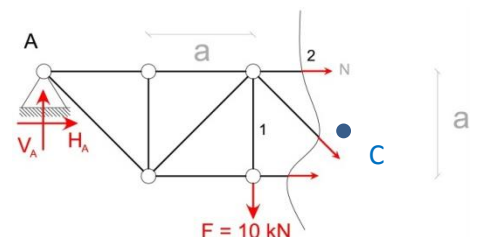
$$N_1 = 10 \text{ kN}$$

Calcul de l'effort dans la barre 2 par la méthode des coupes :

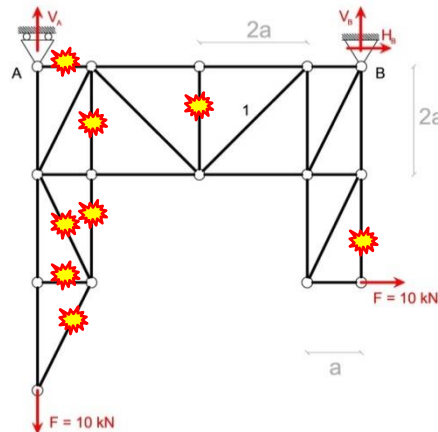
$$\sum M_C = 0 : V_A \cdot 3a = 10 \cdot a - N_2 \cdot a$$

$$N_2 = -3 \cdot 16,66 + 10 = -40 \text{ kN}$$

$$N_1 = 10 \text{ kN (Tract)} \quad N_2 = -40 \text{ kN (Comp)}$$



- 7.8** Effort nul dans deux barres non // arrivant en un nœud non chargé.
Effort nul dans une barre ayant une composante perpendiculaire à toutes les autres barres en un nœud non chargé.



Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum F_h = 0 : H_B = -10 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 : 10 \cdot 4 \cdot a + 10 \cdot 6 \cdot a = V_A \cdot 6 \cdot a \quad \rightarrow \quad V_A = \frac{100}{6} = 16,66 \text{ kN}$$

$$\sum F_v = 0 : V_B = 10 - V_A = -6,66 \text{ kN}$$

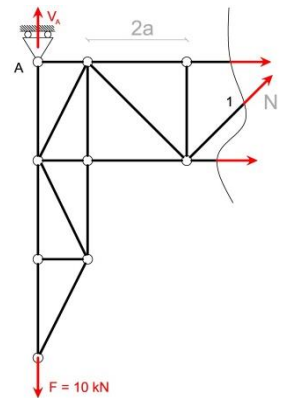
$$V_A = 16,66 \text{ kN} \quad V_B = -6,66 \text{ kN} \quad H_B = -10 \text{ kN}$$

Calcul de l'effort dans la barre 1 par la méthode de la coupe :

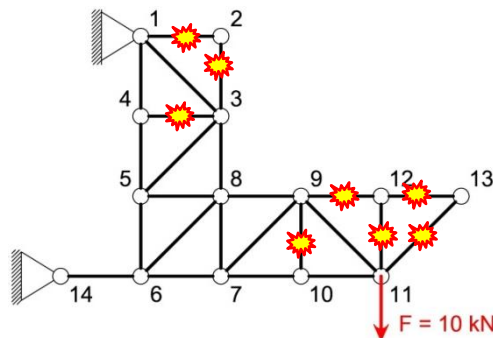
$$\sum F_v = 0 : \frac{N}{\sqrt{2}} + 16,66 = 10$$

$$N = -6,66 \cdot \sqrt{2} = -9,43 \text{ kN}$$

$$N_1 = 9,43 \text{ kN} \quad (\text{Compression})$$



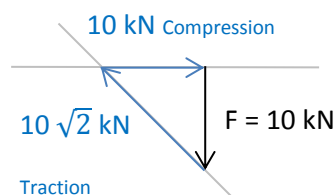
- 7.9** Effort nul dans deux barres non // arrivant en un nœud non chargé.
Effort nul dans une barre ayant une composante perpendiculaire à toutes les autres barres en un nœud non chargé.



Calcul de l'effort dans la barre 8-9 :

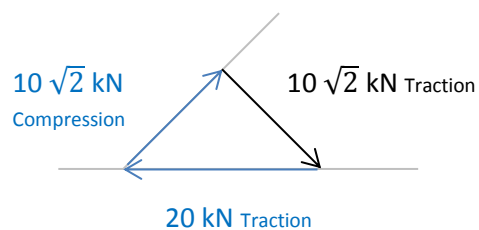
Résolution rapide par méthode graphique

Equilibre nœud 11 :

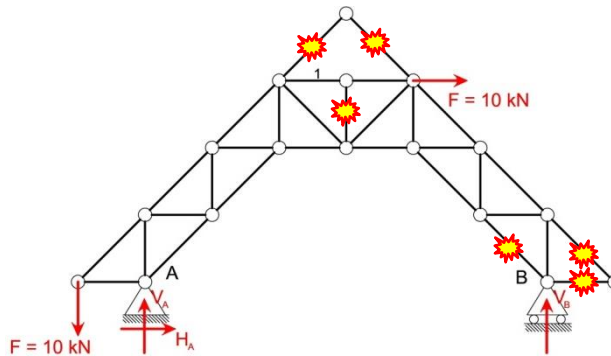


$$N_{8-9} = 20 \text{ kN} \quad (\text{Traction})$$

Equilibre nœud 9 :



Effort nul dans une barre ayant une composante perpendiculaire à toutes les autres barres en un nœud non chargé.



Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum F_h = 0 : H_A = -10 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : 10 \cdot 3 \cdot a - 10 \cdot a = V_B \cdot 6 \cdot a \quad \rightarrow \quad V_B = \frac{20}{6} = 3,33 \text{ kN}$$

$$\sum F_v = 0 : V_A = 10 - V_B = 6,66 \text{ kN}$$

$$V_A = 6,66 \text{ [kN]} \quad H_A = -10 \text{ [kN]} \quad V_B = 3,33 \text{ [kN]}$$

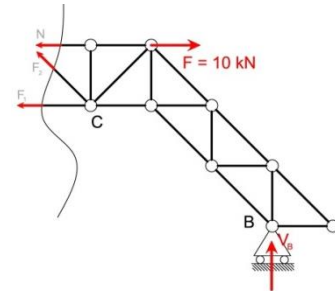
Calcul de l'effort dans la barre 1 :

Par la méthode de la coupe :

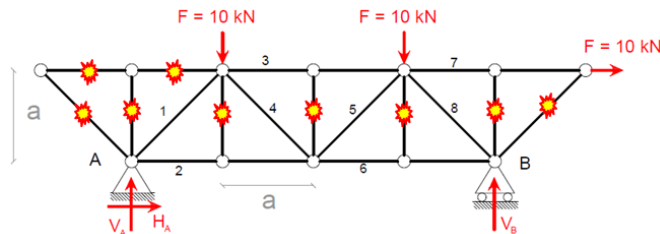
$$\sum M_C = 0 : N \cdot a - 10 \cdot a + V_B \cdot 3a = 0$$

$$\rightarrow N = 10 - 3,333.3 = 0 \text{ kN}$$

$$N_1 = 0 \text{ [kN]}$$



7.11



Calcul des réactions d'appuis suivantes :

$$\sum F_V = 0 : V_A + V_B = 20 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0 : H_A = -10 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : 10 a + 10 a + 10 \cdot 3a = V_B \cdot 10$$

$$V_A = 7,5 \text{ [kN]} \quad V_B = 12,5 \text{ [kN]} \quad H_A = -10 \text{ [kN]}$$

Calcul des efforts internes :

On peut rapidement calculer les efforts dans l'ensemble des barres en utilisant la méthode graphique.

$$N_1 = 10,61 \text{ [kN]} \text{ c}$$

$$N_2 = 17,5 \text{ [kN] t}$$

$$N_3 = 5 \text{ [kN]} c$$

$$N_4 = 3,54 \text{ [kN]} c$$

$$N_5 = 3,54 \text{ [kN]} t$$

$$N_6 = 12,5 \text{ [kN]} t$$

$$N_7 = 10 \text{ [kN]} \quad t$$

$$N_8 = 17,68 \text{ [kN]} c$$

7.12 Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum F_h = 0 \rightarrow H_A = -10$$

$$\sum F_v = 0 \rightarrow V_A + V_B = 10$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow 10 \cdot a + 7a \cdot V_B = 3a \cdot 10 \rightarrow V_B = 20/7$$

$$\rightarrow V_A = 50/7$$

$$V_A = 7,14 \text{ [kN]}$$

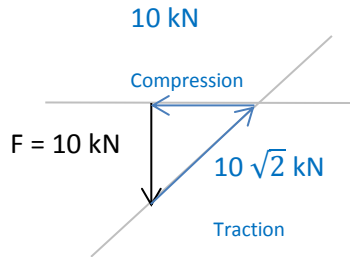
$$H_A = -10 \text{ [kN]}$$

$$V_B = 2,86 \text{ [kN]}$$

Calcul de l'effort dans la barre 1 :

Méthode graphique au nœud inférieur gauche :

Equilibre nœud 11 :



Equilibre à l'appui A :

$$\sum F_h = 0 \rightarrow H_A + 10 - x \cos 45 = 0 \rightarrow -10 + 10 - x \cos 45 = 0$$

$$\rightarrow x \cos 45 = 0 \rightarrow x = 0$$

$$N_1 = 0 \text{ [kN]}$$

Chapitre 8 Solutions - Arcs funiculaires & câbles

8.1 Calcul des réactions d'appui :

Le calcul des réactions d'appui verticales est immédiat grâce à la symétrie. La réaction horizontale s'obtient par équilibre des couples sur le demi tronçon gauche par rapport à la clé de l'arc (située forcément à mi-portée grâce à la symétrie) :

$$\begin{cases} R_{VA} = R_{VB} = \frac{1}{2} \left[2 \left(q \frac{L}{4} \right) + 2q \frac{L}{2} \right] = \frac{3qL}{4} \\ R_{VA} \frac{L}{2} = R_H H + \left(q \frac{L}{4} \right) \left(\frac{3L}{8} \right) + \left(2q \frac{L}{4} \right) \left(\frac{L}{8} \right) \Rightarrow R_H = \frac{7qL^2}{32H} \end{cases}$$

Calcul de la géométrie de l'arc sur le tronçon AC :

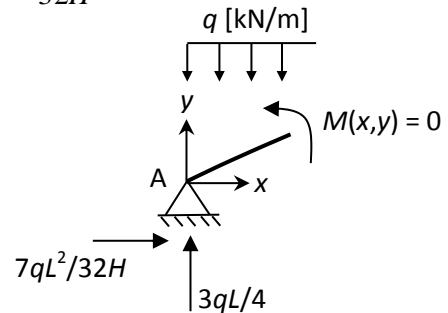
Sur le tronçon AC, le moment fléchissant $M(x,y)$ vaut :

$$M(x,y) = \frac{3qL}{4}x - \frac{7qL^2}{32H}y - \frac{qx^2}{2}$$

$M(x,y)$ devant être nul quels que soient x et y , on trouve :

$$M=0 \Rightarrow y = \frac{32H}{7L^2} \left(\frac{3Lx}{4} - \frac{x^2}{2} \right)$$

Cette équation est l'équation de la fibre moyenne de l'arc sur le tronçon AC, telle que le moment fléchissant y est partout nul.



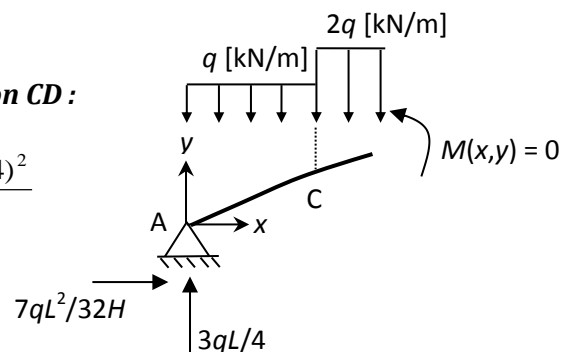
Calcul de la géométrie de l'arc sur le tronçon CD :

Sur le tronçon CD, $M(x,y)$ vaut :

$$M(x,y) = \frac{3qL}{4}x - \frac{7qL^2}{32H}y - \frac{qL}{4}(x - L/8) - 2q \frac{(x - L/4)^2}{2}$$

M devant être nul quels que soient x et y , on trouve :

$$M=0 \Rightarrow y = \frac{32H}{7L^2} \left(Lx - x^2 - \frac{L^2}{32} \right)$$

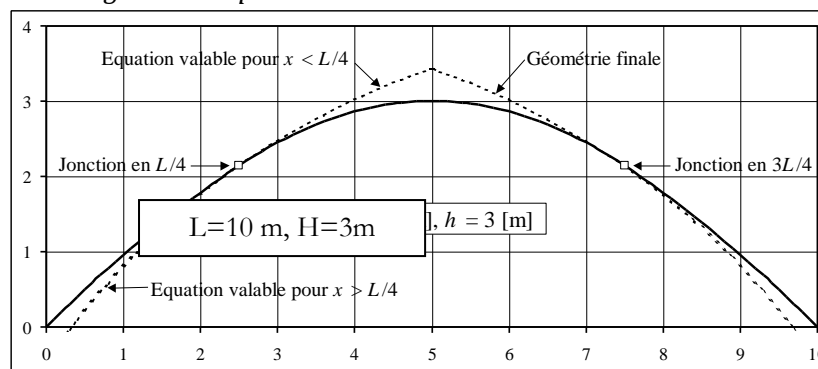


Dimensionnement de la section nécessaire :

$F_{max} = 43,41 \text{ kN}$; section circulaire $R = 1 \text{ cm}$

Géométrie finale de l'arc :

On voit sur la figure ci-dessous qu'une discontinuité dans la répartition des charges distribuées n'implique aucune discontinuité dans la géométrie de l'arc. En effet, si on calcule la valeur des dérivées des deux fonctions correspondant respectivement aux tronçons AC et CD en $x = L/4$, on trouve une même valeur $16H/7L$, ce qui prouve que les deux courbes y sont tangentes. Remarquons que l'on aurait pu trouver le même résultat en utilisant le théorème d'analogie avec la poutre.

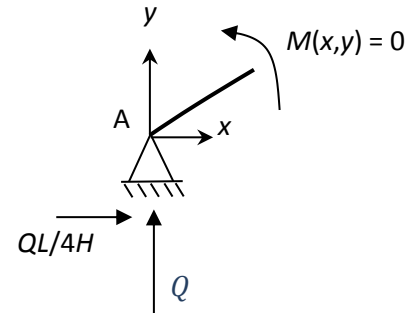


8.2 Calcul des réactions d'appui :

Le calcul des réactions d'appui verticales est immédiat grâce à la symétrie. La réaction horizontale s'obtient par équilibre des couples sur le demi tronçon gauche par rapport à la clé de l'arc :

$$\begin{cases} R_{VA} = R_{VB} = Q \\ R_{VA} \frac{L}{2} = R_H H + Q \frac{L}{4} \Rightarrow R_H = \frac{QL}{4H} \end{cases}$$

Calcul de la géométrie de l'arc sur le tronçon AC :

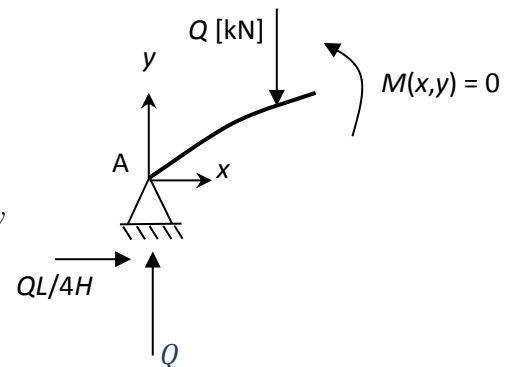


Sur le tronçon AC, on a : $M(x, y) = Qx - \frac{QL}{4H} y$

M devant être nul quels que soient x et y, on trouve : $M = 0 \Rightarrow y = \frac{4H}{L} x$

Cette équation est donc l'équation de la fibre moyenne de l'arc sur le tronçon AC, telle que le moment fléchissant y est nul partout. Cette équation est celle d'une droite. Le tronçon AC est donc rectiligne.

Calcul de la géométrie de l'arc sur le tronçon CD :



Sur le tronçon CD, on a : $M(x, y) = -Q\left(x - \frac{L}{4}\right) + Qx - \frac{QL}{4H} y$

M devant être nul quels que soient x et y, on trouve :

$$M = 0 \Rightarrow y = H$$

Le tronçon CD est donc rectiligne et horizontal.

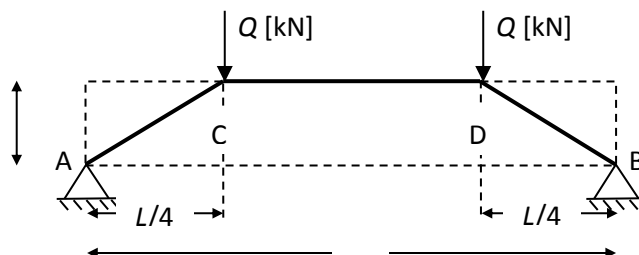
Géométrie finale de "l'arc"

Les calculs précédents montrent que la condition $M = 0$ transforme la structure en un portique de hauteur H :

Remarquons que le même résultat serait obtenu en utilisant le théorème d'analogie avec la poutre

Dimensionnement de la section nécessaire :

$F_{max} = 22,36 \text{ kN}$; section carrée $a = 4 \text{ cm}$



8.3 Comme pour l'exemple précédent, la dissymétrie des charges ne permet pas de savoir quelle est l'abscisse du point haut de l'arc. Le théorème d'analogie avec le diagramme des moments de la poutre (§7.5) permet toutefois de vérifier rapidement que la clé se situe sur le tronçon CD, d'une part, et que ce dernier est horizontal, d'autre part. On propose cependant de passer par une détermination analytique de l'équation de chaque tronçon.

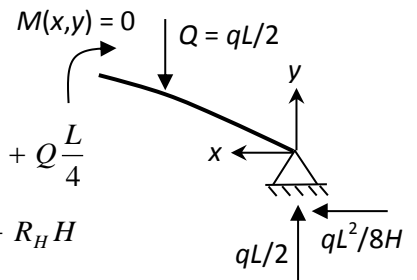
Calcul des réactions d'appui :

$$\text{Équilibre vertical : } R_{VA} + R_{VB} = \frac{qL}{2} + Q$$

$$\text{Équilibre des moments par rapport à l'appui B : } R_{VA}L = \frac{qL}{2} \frac{3L}{4} + Q \frac{L}{4}$$

$$\text{Équilibre des moments à la clé (tronçon droit) : } R_{VB} \frac{L}{2} = Q \frac{L}{4} + R_H H$$

$$\text{On obtient : } R_{VA} = R_{VB} = \frac{qL}{2} \quad \text{et} \quad R_H = \frac{qL^2}{8H}$$



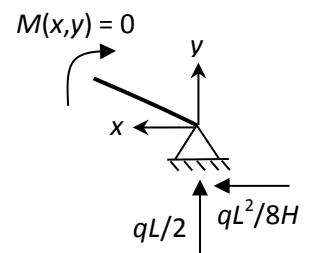
Calcul de la géométrie sur le tronçon BD :

En tout point de coordonnées (x,y), le moment est nul et s'écrit :

$$M(x, y) = \frac{qL}{2} x - \frac{qL^2}{8H} y = 0$$

On en déduit que le tronçon BD doit être rectiligne :

$$y = \frac{4H}{L} x \quad \text{avec} \quad y(x=L/4) = H$$



Calcul de la géométrie sur le tronçon DC :

En tout point de coordonnées (x,y), le moment est nul et s'écrit :

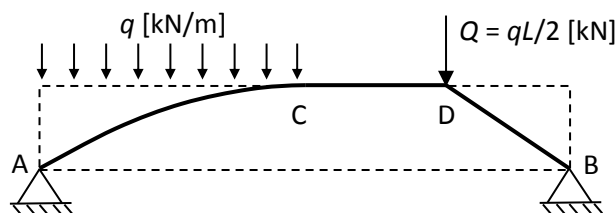
$$M(x, y) = \frac{qL}{2} x - \frac{qL^2}{8H} y - \frac{qL}{2} (x - L/4) = 0$$

Et on en déduit que le tronçon BD doit être horizontal, ce qui confirme le calcul de la géométrie du tronçon BD : $y = H$

Géométrie complète :

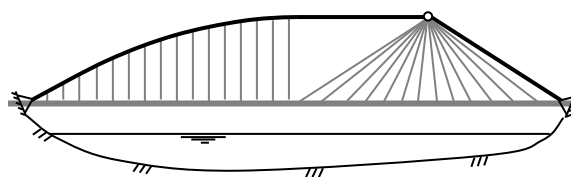
On sait que le funiculaire de la charge uniformément distribuée est une parabole qui s'arrête dans ce cas à la clé de l'arc avec une tangente horizontale en C. Par ailleurs, les calculs précédents ont montré que les deux autres tronçons doivent être rectilignes :

Pratiquement, cette structure pourrait être idéale dans les deux cas suivants.



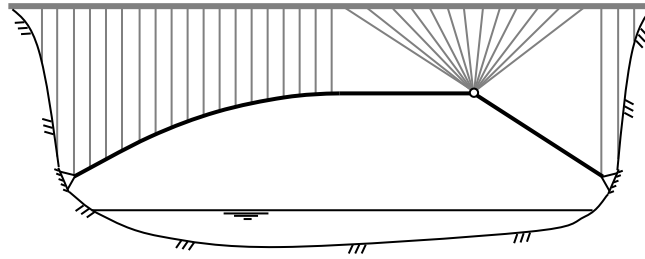
Le premier concerne une passerelle ou un pont dont le tablier serait suspendu à la structure :

Sur la partie droite, les suspentes convergent toutes vers le point haut et y exercent un effort dont la résultante est verticale et égale à $qL/2$. Dans ce cas la partie droite du tablier reçoit des efforts de compression qui proviennent des composantes horizontales des efforts de traction dans les suspentes.



On peut aussi envisager le cas dual d'un tablier qui repose sur la structure par

l'intermédiaire de colonnettes rigides. Dans ce cas la partie droite du tablier est soumise à des efforts de traction qui proviennent de la composante horizontale des colonnettes obliques comprimées :



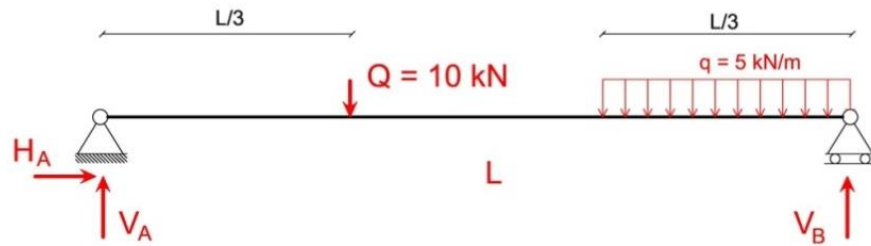
Dimensionnement de la section nécessaire :

$F_{max} = 111,8 \text{ kN}$; IPE 80

- 8.4** Pour $\alpha = 3^\circ$ et 6° l'erreur est de 0,14% et 0,55% ; Pour une erreur de 1%, $\alpha = 8^\circ$.
- 8.5** Si A et B sont au même niveau, $N_{max} = 25,2 \text{ kN}$; B doit être surélevé de $h=10\text{m}$.
- 8.6** Oui, on peut considérer le câble comme surbaissé, $N \cong H = 785,5 \text{ kN}$; $M=0$ dans la poutre.

8.7 (a) Calcul des réactions d'appuis et de la géométrie de la structure :

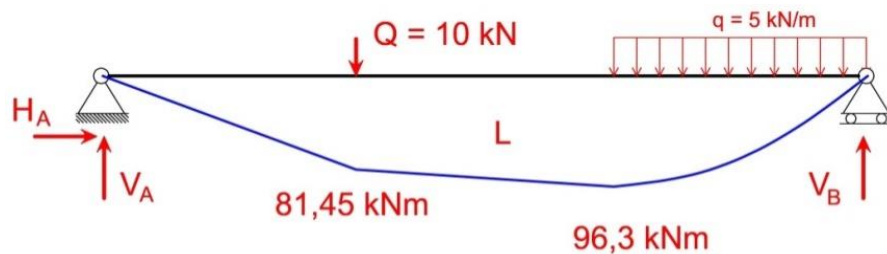
$\sum F_h = 0 : H_A = H_B$: Méthode de la poutre modèle pour trouver le point haut de la structure et pouvoir effectuer une coupe pour déterminer les réactions horizontales (calcul du diagramme des moments) :



$$\sum F_v = 0 : V_A + V_B = 10 + \frac{5L}{3} \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : \frac{10L}{3} + \frac{\frac{5L}{3} \cdot L \cdot 5}{6} - V_B L = 0 \rightarrow V_B = 31,11 \text{ kN} \rightarrow V_A = 12,22 \text{ kN}$$

Calcul des moments dans la poutre en effectuant des coupes...



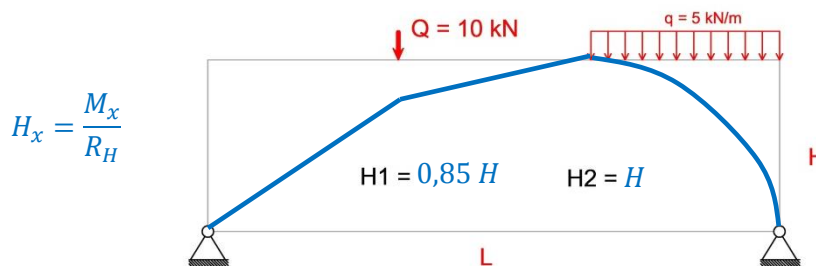
On trouve que le point haut de la structure est en $2L/3$.

On peut donc trouver H_A en effectuant une coupe dans la structure en $2L/3$:

$$\sum M_{\frac{2L}{3}} = 0 : \frac{V_A 2L}{3} - H_A \cdot H - \frac{10L}{3} = 0 \rightarrow H_A = \frac{96,3}{H} = H_B$$

$$V_A = 12,22 \text{ kN} \quad H_A = \frac{96,3}{H} \text{ kN} \quad V_B = 31,11 \text{ kN} \quad H_B = \frac{96,3}{H} \text{ kN}$$

La structure funiculaire a la même forme que le diagramme des moments.



(b) Calcul de l'effort normal :

L'équilibre au nœud A nous donne directement l'effort dans la barre.

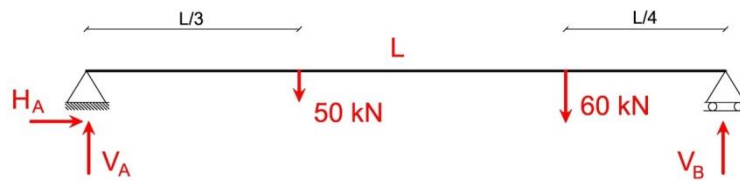
$$H_A = \frac{96,3}{H} = 19,26 \text{ kN}$$

$$V_A = 12,22 \text{ kN}$$

$$N_{max} = \sqrt{19,26^2 + 12,22^2} = 22,81 \text{ kN}$$

8.8 (a) Calcul des réactions d'appuis et de la géométrie de la structure :

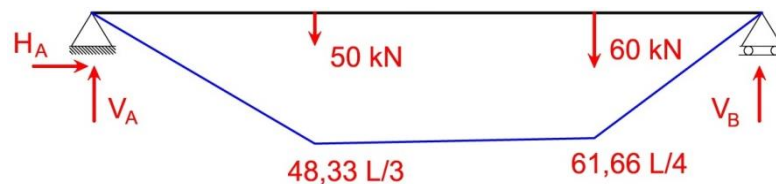
$\sum F_h = 0 : H_A = H_B$: Méthode de la poutre modèle pour trouver le point haut de la structure et pouvoir effectuer une coupe pour déterminer les réactions horizontales (calcul du diagramme des moments) :



$$\sum F_v = 0 : V_A + V_B = 110 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : \frac{50L}{3} + \frac{120L}{4} - V_B L = 0 \rightarrow V_B = 61,66 \text{ kN} \rightarrow V_A = 48,33 \text{ kN}$$

Calcul des moments dans la poutre en effectuant des coupes...



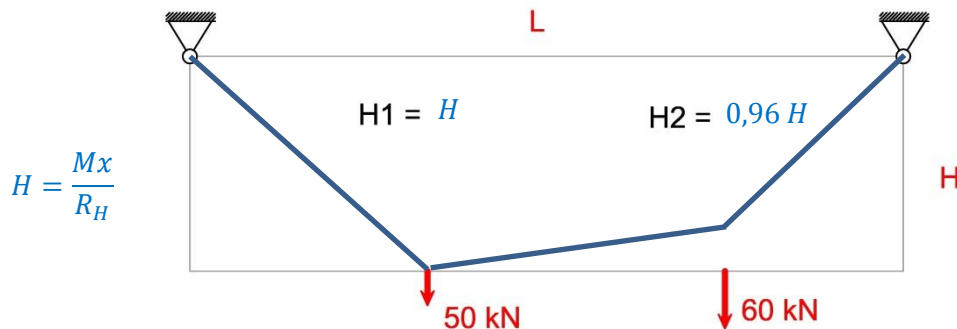
On trouve que le point haut de la structure est en $L/4$.

On peut donc trouver H_A en effectuant une coupe dans la structure au point d'application de la force de 50 kN :

$$\sum M_{50} = 0 : \frac{48,33 L}{3} + H_A \cdot H = 0 \rightarrow H_A = \frac{-48,33 L}{3H} = H_B$$

$$V_A = 48,33 \text{ kN} \quad H_A = \frac{-48,33 \cdot L}{3H} \quad V_B = 61,66 \text{ kN} \quad H_B = \frac{-48,33 \cdot L}{3H}$$

La structure funiculaire a la même forme que le diagramme des moments.



(b) Calcul de l'effort dans le premier tronçon de la structure :

L'équilibre au nœud B nous donne directement l'effort dans la barre.

$$H_B = \frac{48,33 L}{3H} = 64,44 \text{ kN}$$

$$V_B = 61,66 \text{ kN}$$

$$N_{max} = \sqrt{64,44^2 + 61,66^2} = 89,2 \text{ kN}$$

(c) Dimensionnement de la structure :

$$N = A \cdot \frac{f_e}{1,5} \rightarrow A = \frac{1,5 N}{f_e} = 569,31 \text{ mm}^2$$

$$A = 569,31 = \frac{\pi \phi^2}{4} - \frac{\pi (\phi - 0,2\phi)^2}{4} = \frac{0,36 \pi}{4} \phi$$

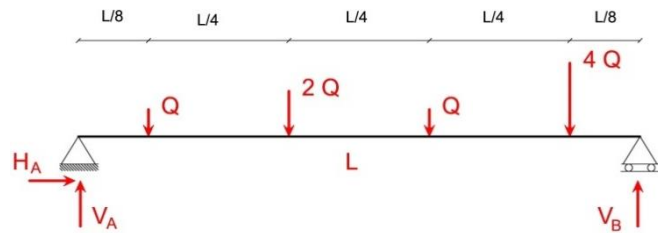
$$\text{Ce qui nous donne } \phi = \sqrt{\frac{569,31 \cdot 4}{0,36 \cdot \pi}} = 44,8 \text{ mm}$$

En arrondissant au mm supérieur, cela donne :

$$e = 4,5 \text{ mm} \quad \phi = 45 \text{ mm}$$

8.9 (a) Calcul des réactions d'appuis et de la géométrie de la structure :

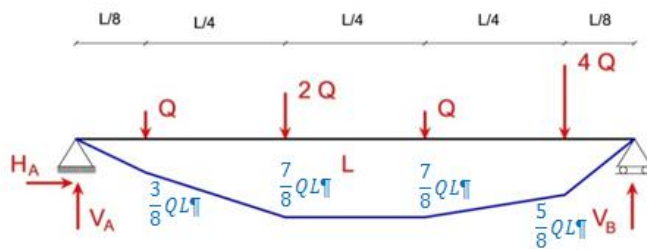
$\sum F_h = 0 : H_A = H_B$: Méthode de la poutre modèle pour trouver le point haut de la structure et pouvoir effectuer une coupe pour déterminer les réactions horizontales (calcul du diagramme des moments) :



$$\sum F_v = 0 : V_A + V_B = 8Q$$

$$\sum M_A = 0 : \frac{QL}{8} + \frac{2Q \cdot 3L}{8} + \frac{Q \cdot 5L}{8} + \frac{4Q \cdot 7L}{8} - \frac{V_B \cdot 8L}{8} = 0 \rightarrow V_B = 5Q \rightarrow V_A = 3Q$$

Calcul des moments dans la poutre en effectuant des coupes...



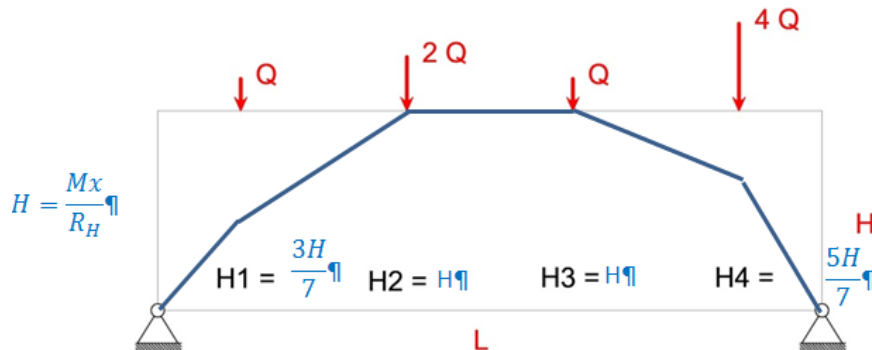
On trouve que le point haut de la structure est entre $3L/8$ et $5L/8$.

On peut donc trouver H_A en effectuant une coupe dans la structure au point d'application de $2Q$:

$$\sum M_{2Q} = 0 : \frac{Q \cdot 2L}{8} + H_A \cdot H - \frac{3Q \cdot 3L}{8} = 0 \rightarrow H_A = \frac{7QL}{8H} = H_B$$

$$V_A = 3Q ; H_A = \frac{7Q \cdot L}{8H} ; V_B = 5Q ; H_B = \frac{7Q \cdot L}{8H}$$

La structure funiculaire a la même forme que le diagramme des moments.



(b) Calcul de l'effort dans le dernier tronçon de la structure :

L'équilibre au nœud B nous donne directement l'effort dans la barre.

$$H_B = \frac{7QL}{8H} = 35 \text{ kN}$$

$$V_B = 5Q = 50 \text{ kN}$$

$$N_{max} = \sqrt{50^2 + 35^2} = 61,03 \text{ kN}$$

(c) Dimensionnement de la structure :

$$N = A \cdot \frac{f_e}{1,5} \rightarrow A = \frac{1,5 N}{f_e} = 3,894 \times 10^{-4}$$

$$A = 3,894 \times 10^{-4} = \frac{\pi \phi^2}{4} - \frac{\pi (\phi - 0,2\phi)^2}{4} = \frac{0,36 \pi}{4} \phi$$

$$\text{Ce qui nous donne } \phi = \sqrt{\frac{3,894 \times 10^{-4} \cdot 4}{0,36 \cdot \pi}} = 37,1 \text{ mm}$$

En arrondissant au mm supérieur, cela donne :

$$e = 4 \text{ mm} \quad \phi = 38 \text{ mm}$$

8.10 (a) La forme du câble est une chaînette. Mais on peut considérer une parabole car $\frac{L}{H} \geq 2$

(b) Calcul des réactions d'appuis et de l'effort dans le câble :

$$V_A = 0 \text{ (Câble horizontal)}$$

$$V_B = 80 \cdot 75 = 6000 \text{ N} = 6 \text{ kN}$$

$$H_A = H_B = \frac{q(2L)^2}{8H} = \frac{80 \cdot 150^2}{8 \cdot 6} = 37,5 \text{ kN}$$

Calcul de l'effort dans le câble en A et en B.

$$N_A = H_A$$

$$N_B = \sqrt{H_B^2 + V_B^2} = \sqrt{37,5^2 + 6^2} = 37,98 \text{ kN}$$

(c) Calcul de l'allongement du câble :

$$A = \pi R^2 = 38,48 \text{ mm}^2 \rightarrow \sigma = \frac{N}{A} = \frac{37980}{38,48} = 987 \text{ MPa}$$

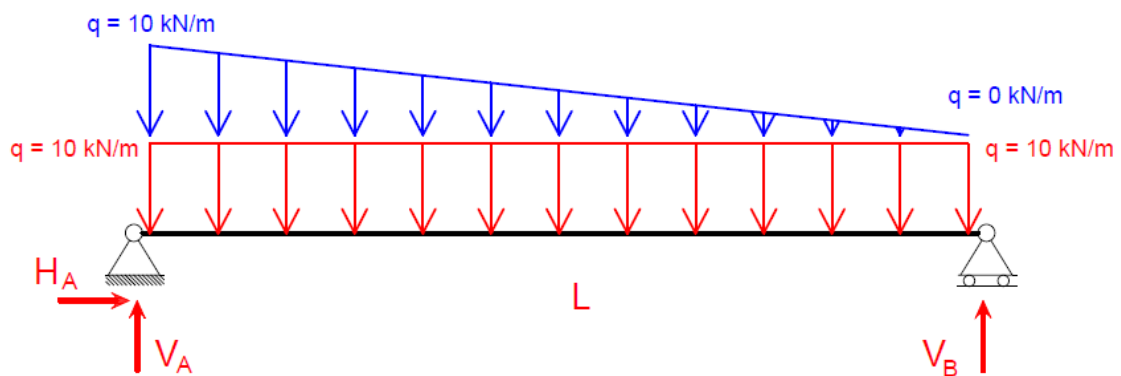
$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{987}{190\,000} = 5,19 \times 10^{-3} \rightarrow \Delta L = L \cdot \varepsilon = 75 \cdot 5,19 \times 10^{-3} = 0,39 \text{ m}$$

8.11 (a) Calcul des réactions d'appui de la structure :

$$\sum F_h = 0 : H_A = H_B$$

$$\sum F_v = 0 : V_A + V_B = 10 \cdot 30 + 10 \cdot \frac{30}{2} = 450 \text{ kN}$$

Méthode de la poutre modèle pour trouver le point haut de la structure et pouvoir effectuer une coupe pour déterminer les réactions horizontales (calcul du diagramme des moments) :



$$\sum F_v = 0 : V_A + V_B = 450 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : V_B \cdot 30 = 300 \cdot 15 + 150 \cdot 10 \rightarrow V_B = 200 \text{ kN} \rightarrow V_A = 250 \text{ kN}$$

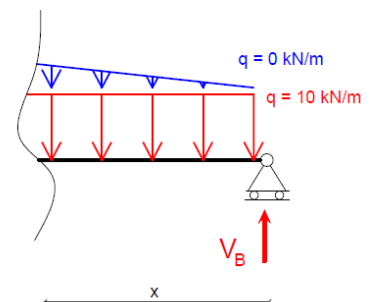
Le point haut de la structure se trouvera à l'endroit où le moment dans la poutre modèle est maximal. Le moment est maximal lorsque l'effort tranchant vaut 0.

Calcul de l'effort tranchant en effectuant une coupe... (Le côté droit est plus simple que le côté gauche.)

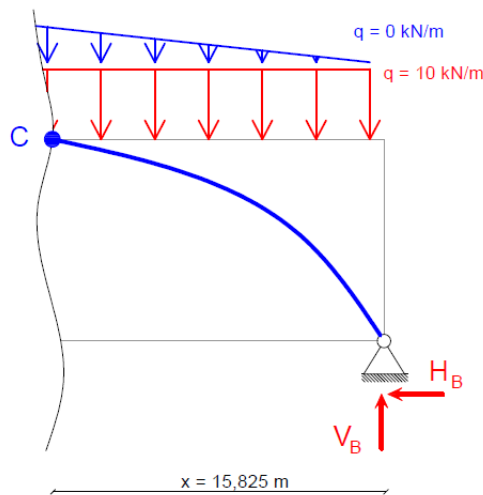
$$V_x = 200 - 10x - \frac{10}{30} x \cdot \frac{x}{2} = 0$$

$$\rightarrow V_x = 0 \text{ en } x = 15,825 \text{ m}$$

On trouve que le point haut de la structure est en $x = 15,82 \text{ m}$.



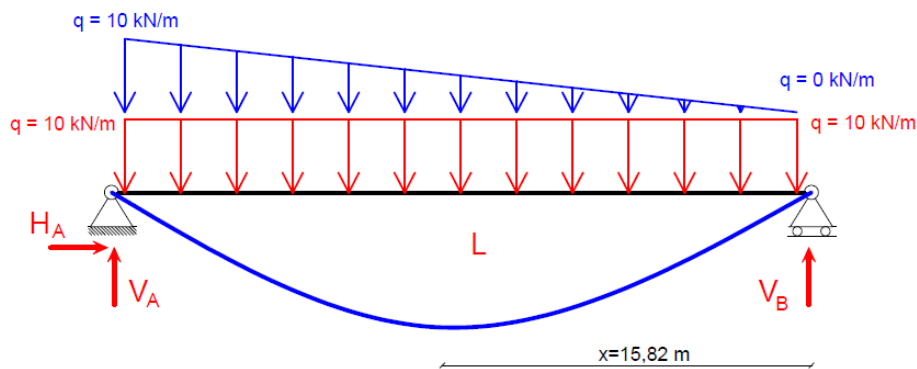
On peut donc trouver H_A en effectuant une coupe dans la structure a cet endroit :



$$\sum M_C = 0 : V_B \cdot 15,825 - H_B \cdot H - 10 \cdot \frac{15,825^2}{2} - \frac{10}{30} \frac{15,825^3}{3 \cdot 2} = 0 \rightarrow H_B = 282,113 \text{ kN}$$

(b) Allure de la structure funiculaire :

La structure funiculaire a la même forme que le diagramme des moments de la poutre modèle.



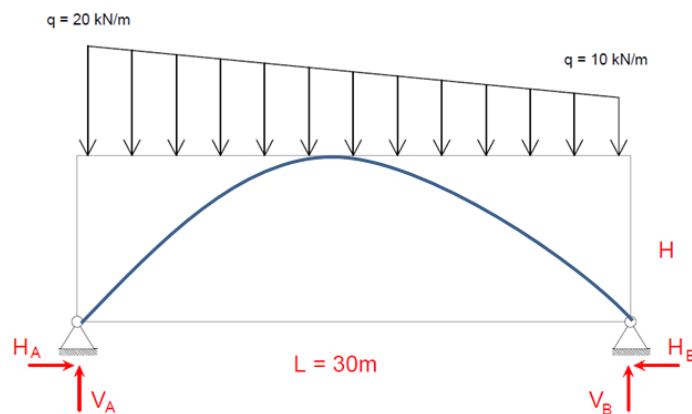
La hauteur de la structure peut donc en chaque point être calculée avec la formule suivante :

$$H_x = \frac{M_x}{R_H}$$

Calcul du moment à mi travée :

$$M_{15} = 200 \cdot 15 - 10 \cdot \frac{15^2}{2} - \frac{10}{30} \frac{15^3}{3 \cdot 2} \rightarrow M_{15} = 1687,15 \text{ kN}$$

$$H_{15} = \frac{M_x}{R_H} = \frac{1687,15}{282,113} = 5,98 \text{ m}$$



(c) Dimensionnement de la structure :

L'équilibre au nœud A nous donne directement l'effort maximal dans la structure.

$$H_A = 282,113 \text{ kN}$$

$$V_A = 250 \text{ kN}$$

$$N_{max} = \sqrt{250^2 + 282,113^2} = 376,94 \text{ kN}$$

$$N = A \cdot \frac{f_e}{\gamma} \rightarrow A = \frac{\gamma \cdot N}{f_e} = 3,14 \times 10^{-4} \text{ mm}^2$$

$$A = 3,14 \times 10^{-4} = b \cdot h = 2b^2$$

$$\text{Ce qui nous donne } b = \sqrt{\frac{3,14 \times 10^{-4}}{2}} = 125,32 \text{ mm}$$

$$\text{En arrondissant au mm supérieur, cela donne : } h = 25,2 [\text{cm}] \quad b = 12,6 [\text{cm}]$$

Chapitre 9 Solutions - Efforts internes.

9.1 (a) NM dans S_1 et VM dans S_2 ; (b) NVM; (c) NVM dans S_2 et N dans S_3 ; (d) MN; (e) MVN; (f) $V_z T M_y$.

9.2 (a) $V = -3 \text{ kN}$, $M = 12 \text{ kNm}$ (fibre sup. tendue) dans S_a ; $N = -3 \text{ kN}$, $M = 6 \text{ kNm}$ (fibre gauche tendue) dans S_b ;

(b) $N = -1,34 \text{ kN}$, $V = -2,68 \text{ kN}$, $M = 9 \text{ kNm}$ (fibre sup. tendue);

(c) $N = -4 \text{ kN}$, $V = 1 \text{ kN}$, $M = 4 \text{ kNm}$ (fibre gauche tendue);

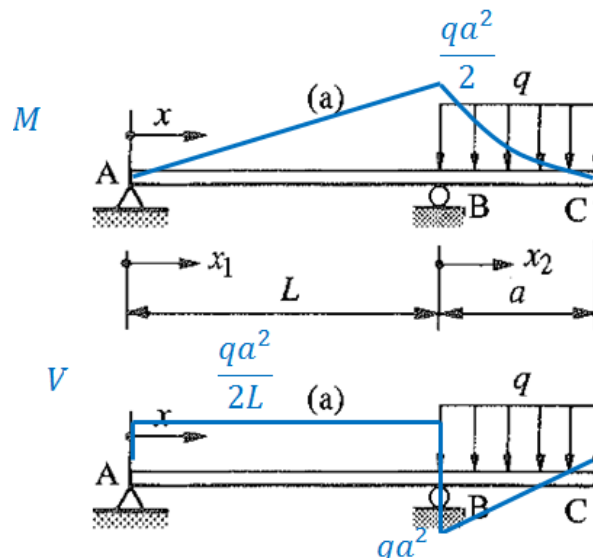
(d) $V = -4 \text{ kN}$, $M = 8 \text{ kNm}$ (fibre sup. tendue).

9.3 $M_B = 5,84 \text{ kNm}$ (fibre int. tendue); $M_D = 34,16 \text{ kNm}$ (fibre ext. tendue).

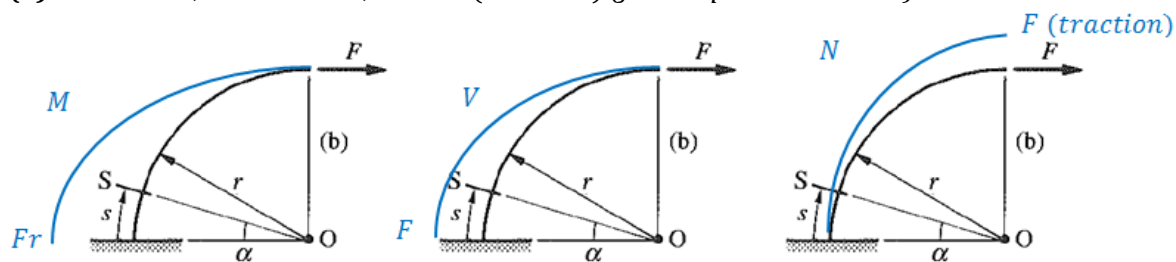
9.4 À gauche de C: $N = -76,3 \text{ kN}$, $V = 131,9 \text{ kN}$; à droite de C: $N = -24,9 \text{ kN}$, $V = -132,1 \text{ kN}$; $M_C = 298,9 \text{ kNm}$ (fibre sup. tendue).

9.5 $N = -1 \text{ kN}$, $V_y = 0,5 \text{ kN}$, $V_z = -5,732 \text{ kN}$, $T = 4,5 \text{ kNm}$, $M_y = 7,866 \text{ kNm}$, $M_z = 1,25 \text{ kNm}$.

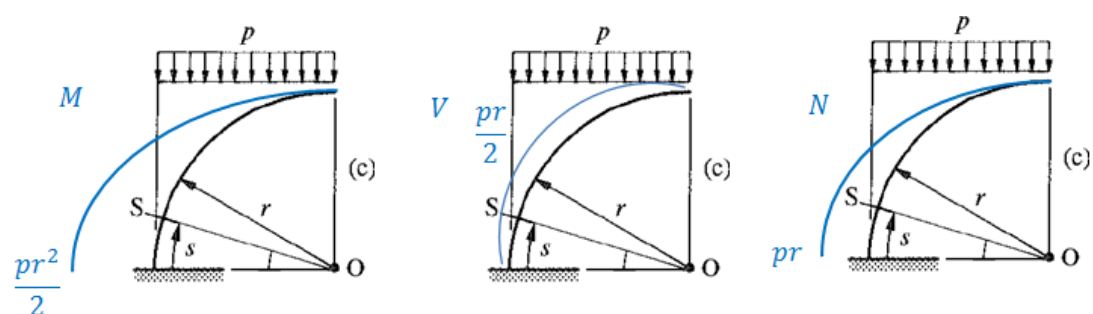
9.6 (a) pour $0 \leq x_1 \leq L$: $N = 0$, $V = \frac{qa^2}{2L}$, $M = \frac{qa^2x_1}{2L}$; pour $0 \leq x_2 \leq a$: $N = 0$, $V = -q(a - x_2)$, $M = \frac{q(a-x_2)^2}{2}$ (fibre supérieure tendue)



(b) $N = F \sin \alpha, V = -F \cos \alpha, M = Fr(1 - \sin \alpha)$ (fibre supérieure tendue)

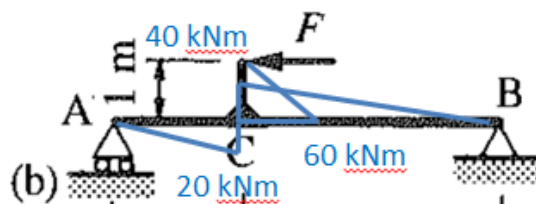
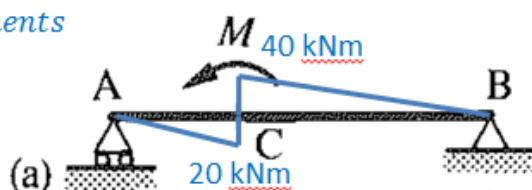


(c) $N = -pr \cos^2 \alpha, V = -pr \cos \alpha \sin \alpha, M = \frac{pr^2}{2} \cos^2 \alpha$ (fibre supérieure tendue)

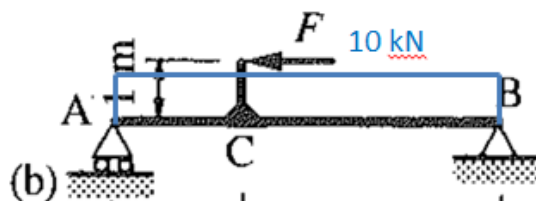
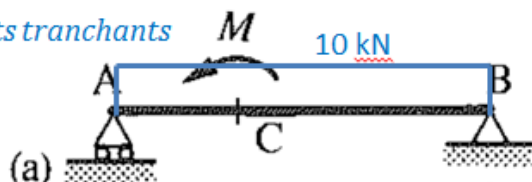


9.7

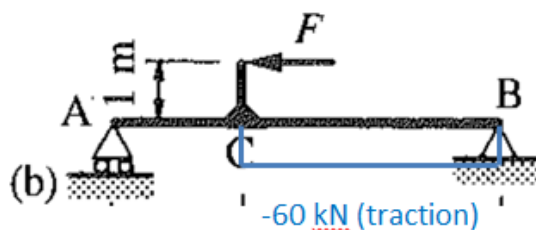
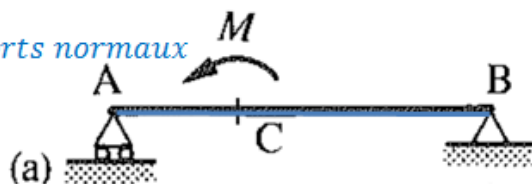
Moments



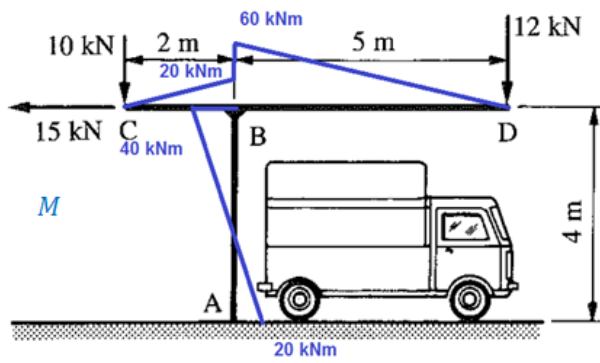
Efforts tranchants



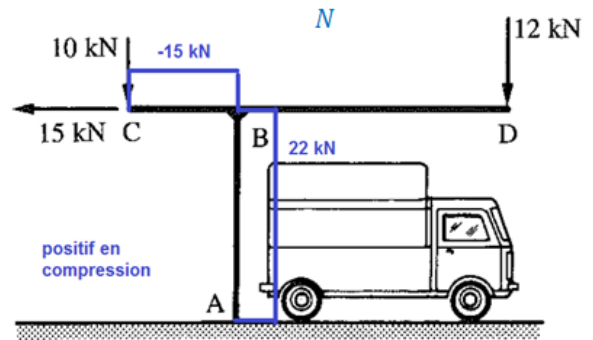
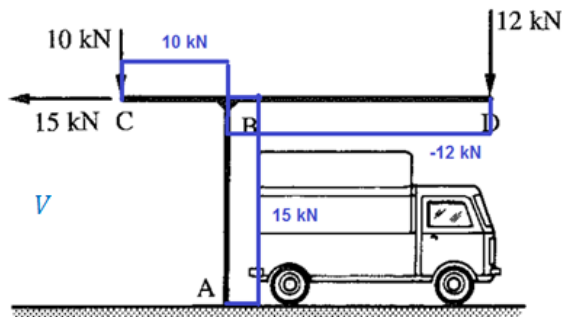
Efforts normaux



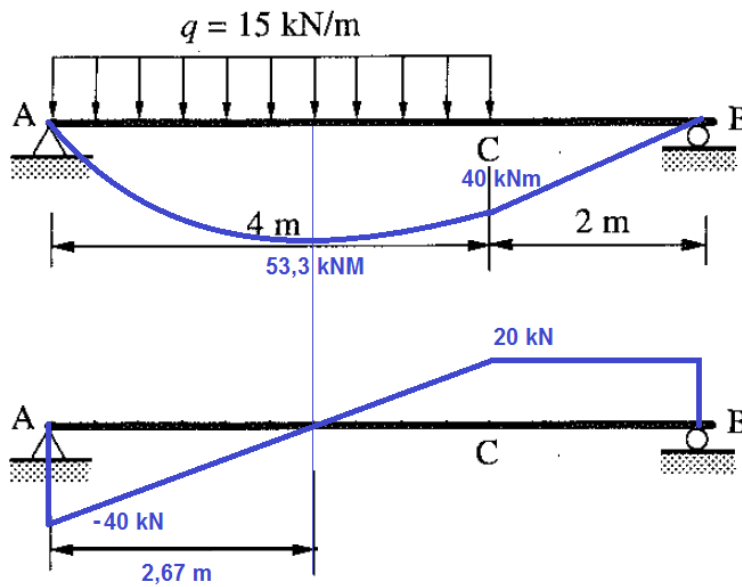
9.8



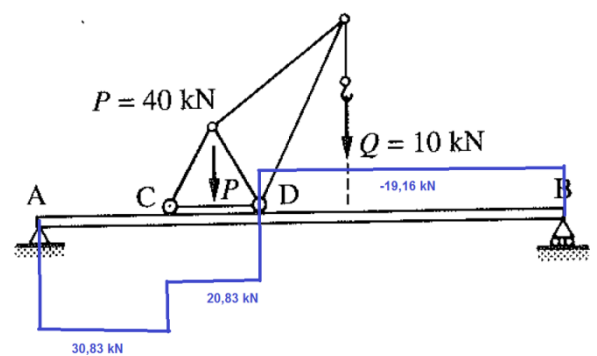
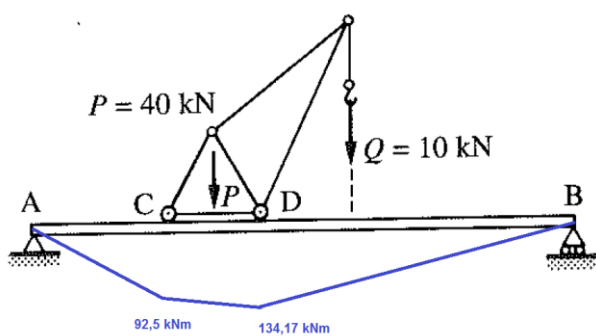
*Dessin du côté
de la fibre tendue*



9.9



9.10



9.11 (a) Diagrammes d'efforts interne :

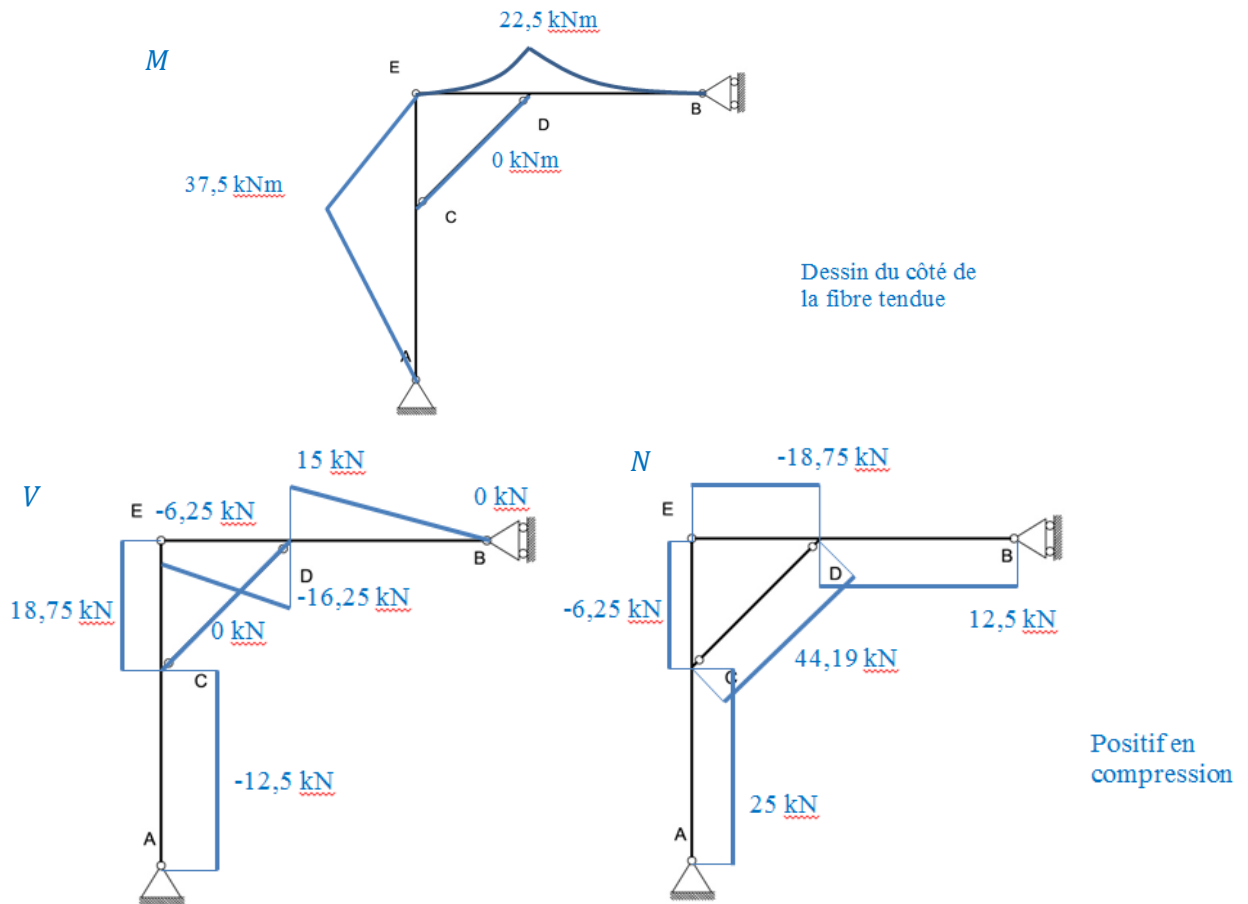
Calcul des réactions d'appuis :

$$\sum F_h = 0 : H_B - H_A = 0$$

$$\sum F_v = 0 : V_A = 25 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : H_B \cdot 5 = 25 \cdot 2,5 \rightarrow H_B = 12,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_h = 0 \rightarrow H_A = 12,5 \text{ kN}$$



(b) Dimensionnement de la barre CD :

$$\sigma = \frac{Mv}{I} + \frac{N}{A} \leq \frac{f_e}{\gamma} = 13,33 \text{ MPa}$$

$$M = 0 \quad \text{et} \quad N = 44,19 \text{ kN}$$

$$\frac{N}{A} = \frac{N}{\pi R^2} = 13,33$$

$$R = \sqrt{\frac{44\,190}{13,33 \pi}} = 32,48 \text{ mm}$$

$$\phi = 6,5 \text{ cm}$$

Le résultat obtenu ne tiens pas compte du flambement, mais aux vues des dimensions de l'élément ($L=2,8\text{m}$ et $\phi = 6,5\text{cm}$) il ne sera pas possible de le négliger.

9.12 Calcul des réactions d'appuis de la structure :

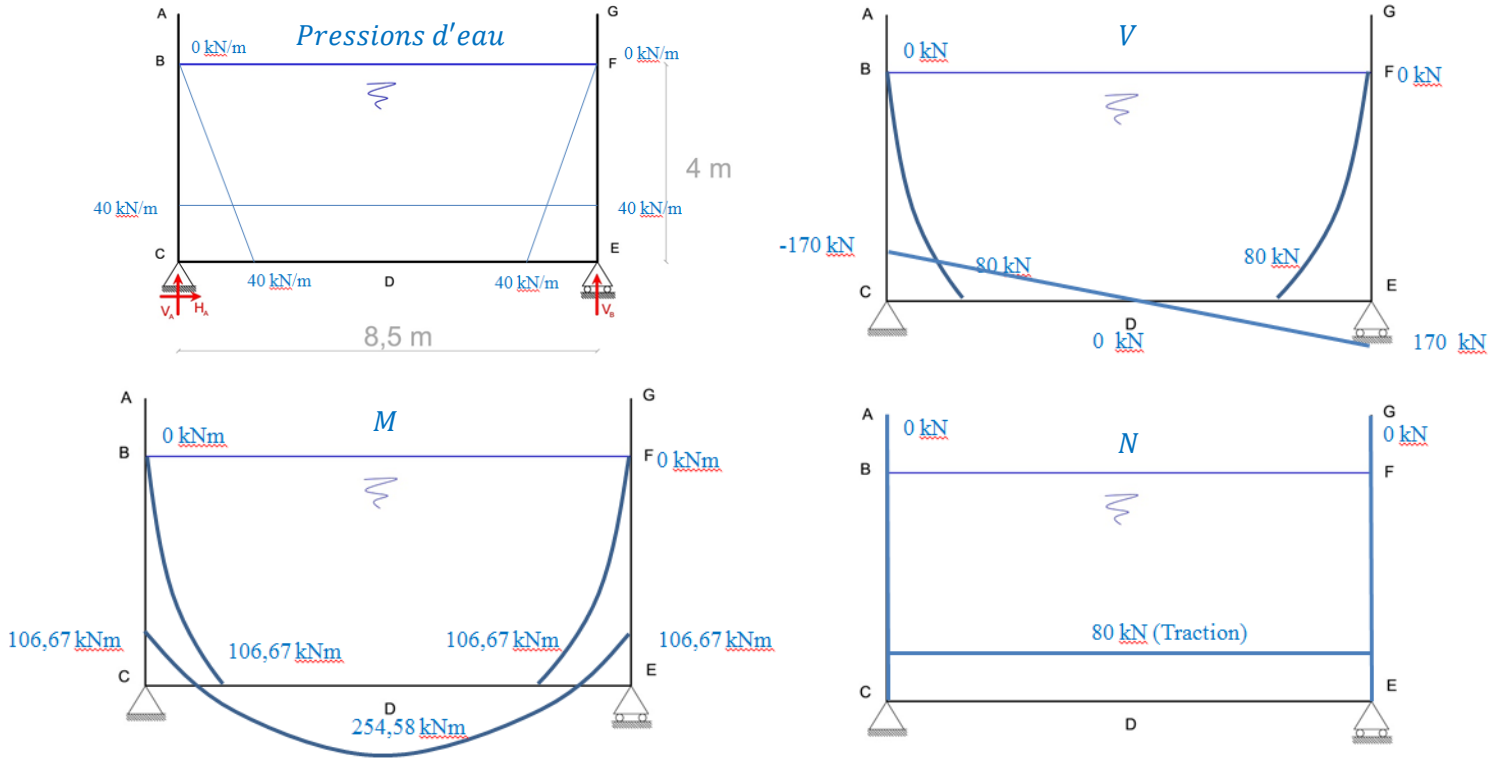
$$\sum F_v = 0 : V_A + V_B = 40 \cdot 8,5 = 340 \text{ kN}$$

$$\sum M_C = 0 : V_B \cdot 8,5 = 340 \cdot 4,25$$

$$V_B = 170 \text{ kN}$$

$$V_A = 340 - V_B = 170 \text{ kN}$$

$$\sum F_h = 0 : H_A = 0 \text{ kN}$$



9.13 Calcul des réactions d'appuis de la structure :

$$\sum M_B = 0 : 15 - V_D \cdot 1 - V_E \cdot 4 = 0 \rightarrow V_D = 15 - 4 V_E$$

$$\sum M_C = 0 : 5 \cdot 1 - V_D \cdot 2 - V_E \cdot 5 + 15 = 0$$

$$5 - (15 - 4 V_E) \cdot 2 - V_E \cdot 5 + 15 = 0 \rightarrow V_E = \frac{10}{3} = 3,33 \text{ kN}$$

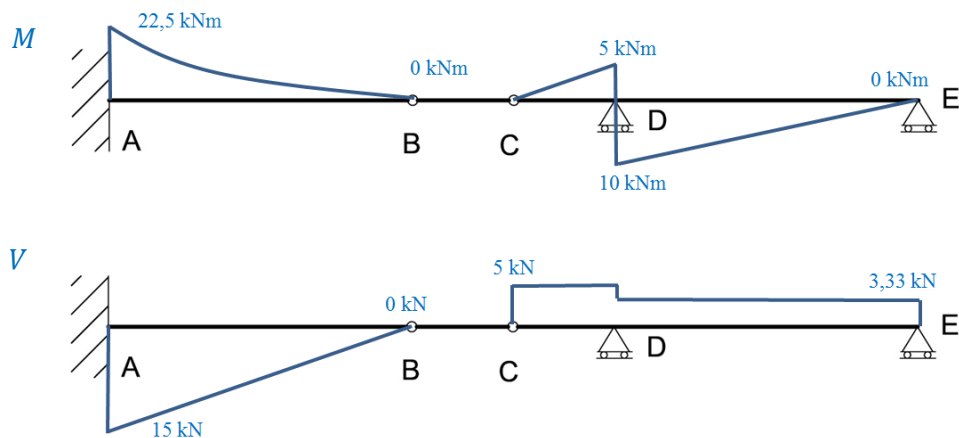
$$\rightarrow V_D = 15 - 4 \cdot 3,33 = 1,66 \text{ kN}$$

$$\sum F_v = 0 : V_A = 20 - V_D - V_E = 15 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0 : M_A + 22,5 + 20 + 15 = 5 V_D + 8 V_E$$

$$M_A + 57,5 = 5 \cdot 1,66 + 8 \cdot 3,33 \rightarrow M_A = -22,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_h = 0 : H_A = 0 \text{ kN}$$



9.14 Calcul des réactions d'appuis de la structure :

$$\sum F_v = V_A + V_D - 15 = 0$$

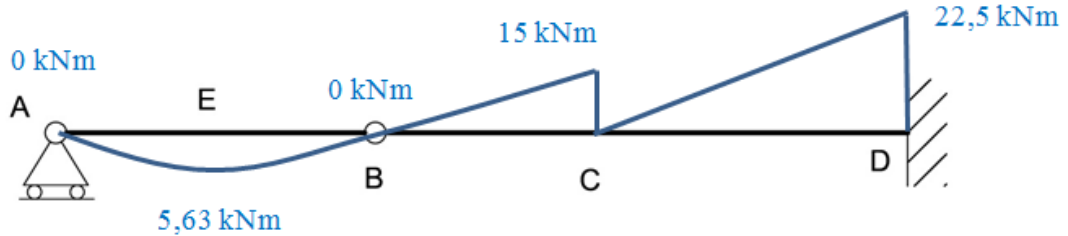
$$\sum F_h = H_D = 0$$

$$\sum M_{B(\text{coupe gauche})} = V_A \cdot 3 - 15 \cdot 1,5 = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = \frac{15 \cdot 1,5}{3} = 7,5 \text{ kN}$$

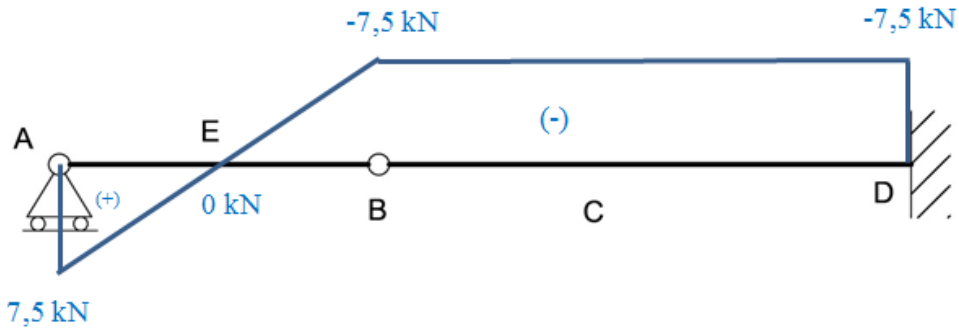
$$\sum F_v = 0 \quad \rightarrow \quad V_D = 15 - 7,5 = 7,5 \text{ kN}$$

$$\sum M_D = M - 15 \cdot 6,5 - M_D + V_A \cdot 8 = 0 \quad \rightarrow \quad M_D = 15 - 97,5 + 60 = -22,5 \text{ kNm}$$

M



V



9.15 Calcul des réactions d'appuis de la structure :

Poutre rotulée en B et aucune force sur le tronçon AB, donc $V_A = 0 \text{ kN}$

Pour le reste de la structure :

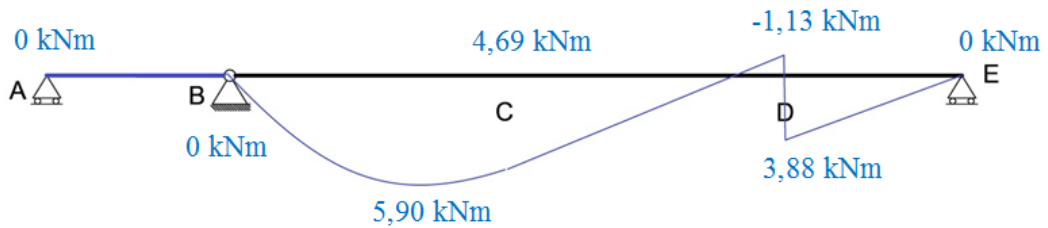
$$\sum F_h = 0 : H_B = 0 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 : M - V_E \cdot 8 + 1 \cdot 3 \cdot 1,5 + \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 1 = 0 \quad \rightarrow \quad V_E \cdot 8 = 5 + 4,5 + 6 = 15,5$$

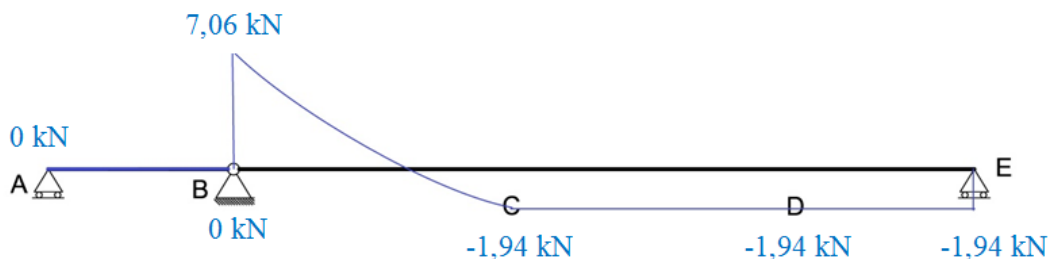
$$\rightarrow V_E = 1,937 \text{ kN}$$

$$\sum F_v = 0 : V_B = 1 \cdot 3 + \frac{4 \cdot 3}{2} - V_E = 7,063 \text{ kN}$$

M



V



9.16 (a) Réactions d'appuis :

Si on fait une coupe dans la rotule en B et qu'on fait l'équilibre de la partie gauche, on trouve $V_A = 0$.

Pour le reste de la structure :

$$\sum F_V = 0 : V_B + V_E = 2 \cdot 8 + 5 + 7 + 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sum F_H = 0 : H_B = 0$$

$$\sum M_B = 0 : V_E \cdot 8 = 7 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 8 \cdot 4 + 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{3}$$

$$V_E = 19,125 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 : V_B + V_E = 40$$

$$V_B = 20,875 \text{ kN}$$

$$V_A = 0 \text{ [kN]} \quad V_B = 20,875 \text{ [kN]} \quad H_B = 0 \text{ [kN]} \quad V_E = 19,125 \text{ [kN]}$$

(b) Calcul du moment de flexion maximal dans la poutre :

On aura M_{max} là où l'effort tranchant vaudra 0.

$$V_x = V_E - 2 \cdot y - \frac{3}{8} \cdot y \cdot \frac{y}{2} - 7 = 0$$

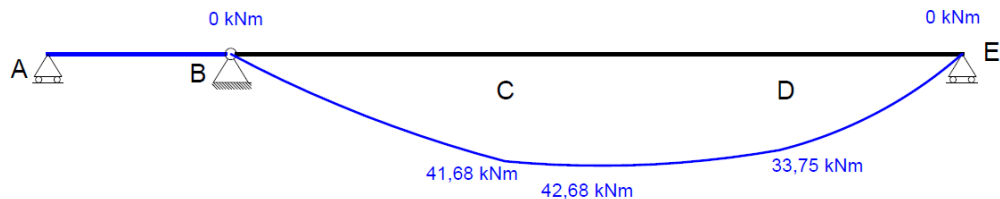
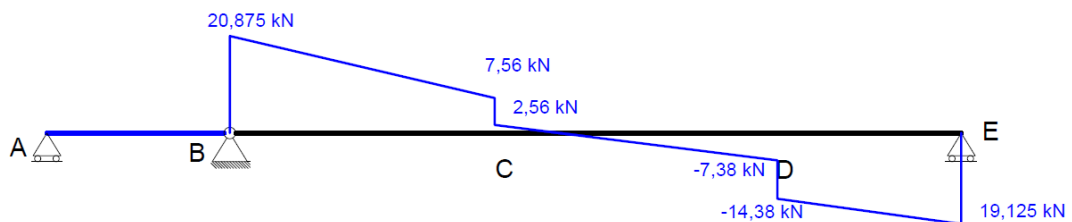
$$y = 4,316$$

$$x = 10 - y = 5,68$$

On fait une coupe en $x=3,68 \text{ m}$ pour trouver la valeur du moment max.

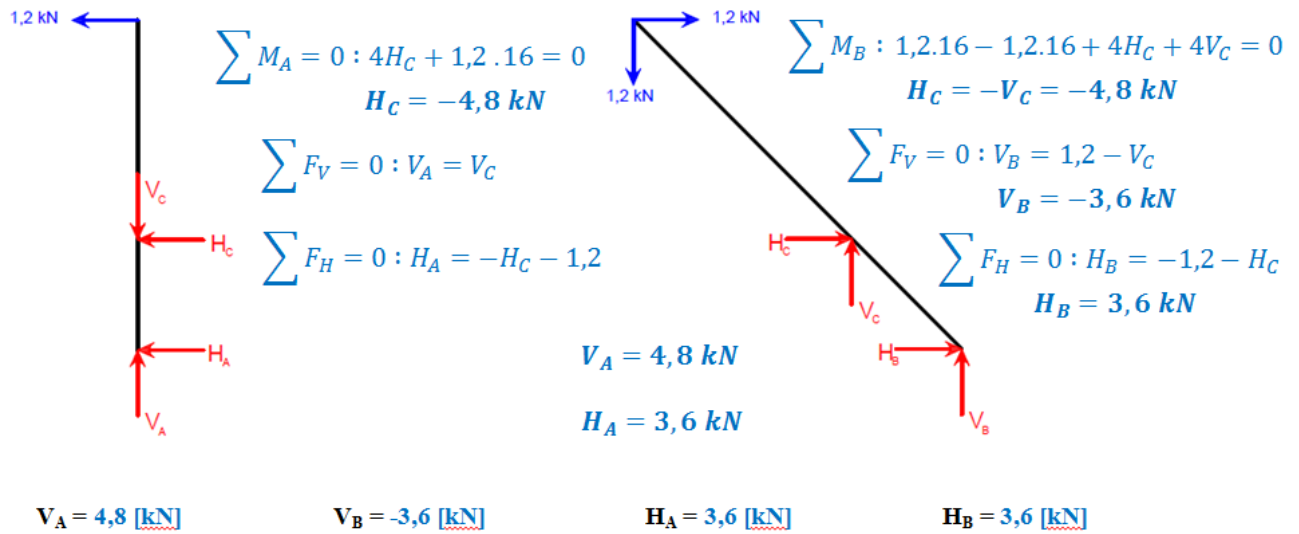
$$M_x = V_E \cdot y - 7(y - 2) - 2 \cdot y \cdot \frac{y}{2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{y^2}{2} \cdot \frac{y}{3} \quad (\text{avec } y = 4,316)$$

$$M_{max} = 42,68 \text{ [kNm]} \text{ à une distance } x = 5,68 \text{ [m]} \text{ du point A.}$$

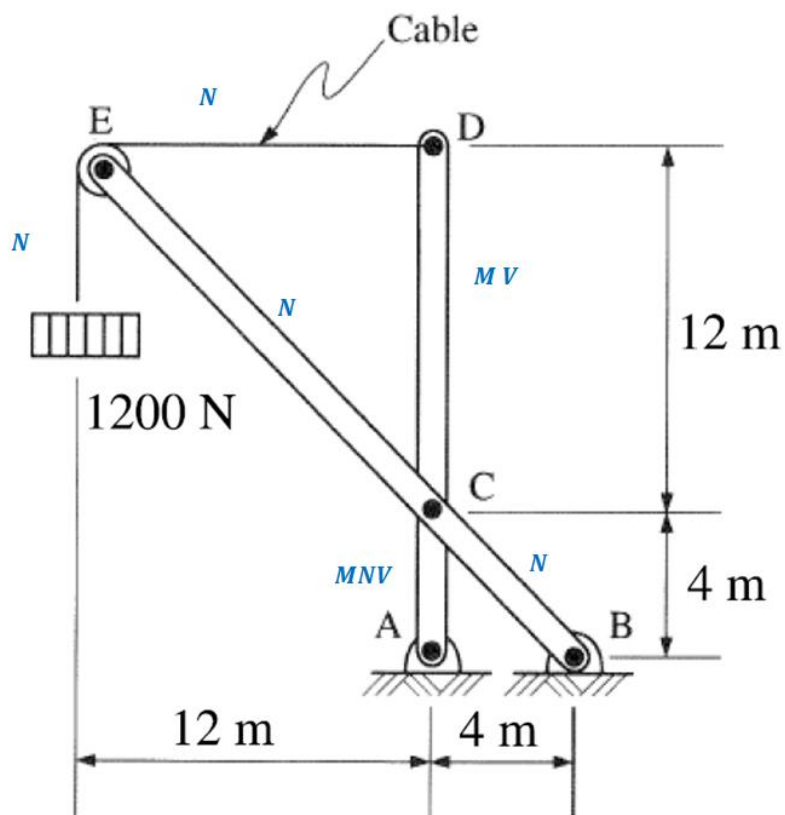
(c) Diagramme des moments fléchissants :**(d) Diagramme des efforts tranchants :**

9.17 (a) Calcul des réactions d'appuis :

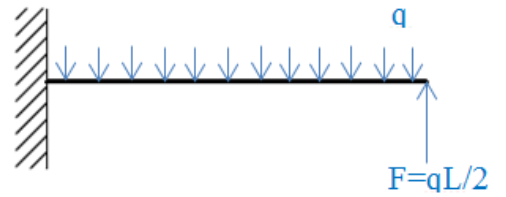
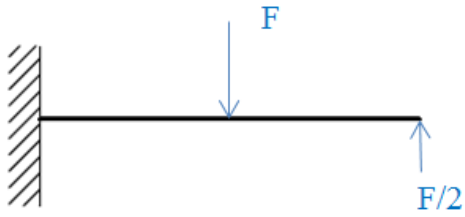
Sachant que la poulie tourne sans frottement, la tension dans le câble ED vaut : **1,2 [kN]**



(b) Efforts internes :



9.18 (a) Forces sur la structure :



(b) Calcul des réactions d'appuis :

$M = 0$ (voir diagramme)

$H = 0$ (car pas d'effort normaux)

La somme des forces verticales donne V

$$V_A = F/2$$

$$H_A = 0$$

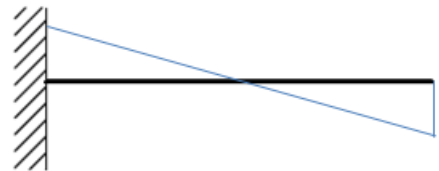
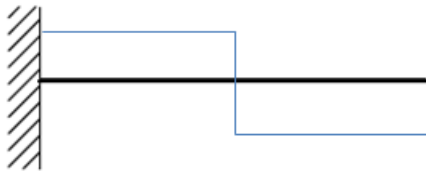
$$M_A = 0$$

$$V_A = qL/2$$

$$H_A = 0$$

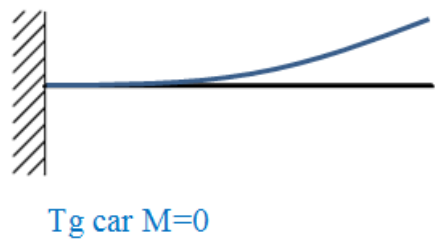
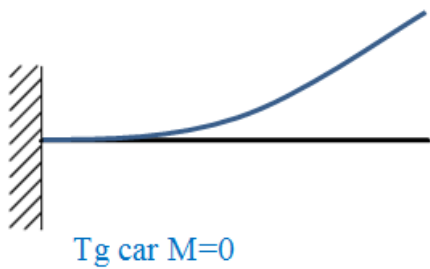
$$M_A = 0$$

(c) Diagrammes d'effort tranchant :



(d) Déformée :

Diagramme dessiné du côté de la fibre tendue !



9.19 (a) Calcul des réactions d'appuis :

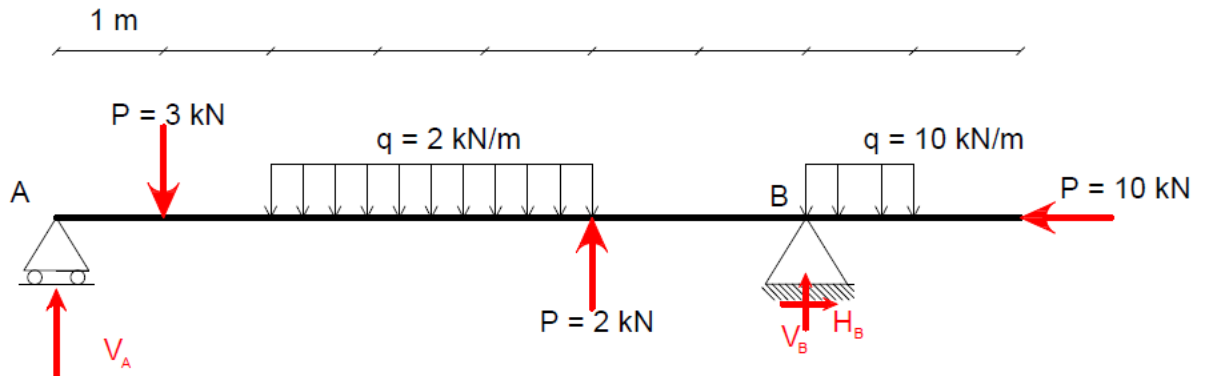
Les réactions d'appuis verticales correspondent aux sauts dans le diagramme des efforts tranchants.

$$V_A = 4,286 \text{ [kN]} \quad V_B = 12,714 \text{ [kN]} \quad H_B = 10 \text{ [kN]}$$

(b) Calcul des charges :

Un saut dans le diagramme des efforts tranchants correspond à une charge ponctuelle.

Une variation linéaire du diagramme des efforts tranchants correspond à une charge répartie.



(c) Allure des moments fléchissant :

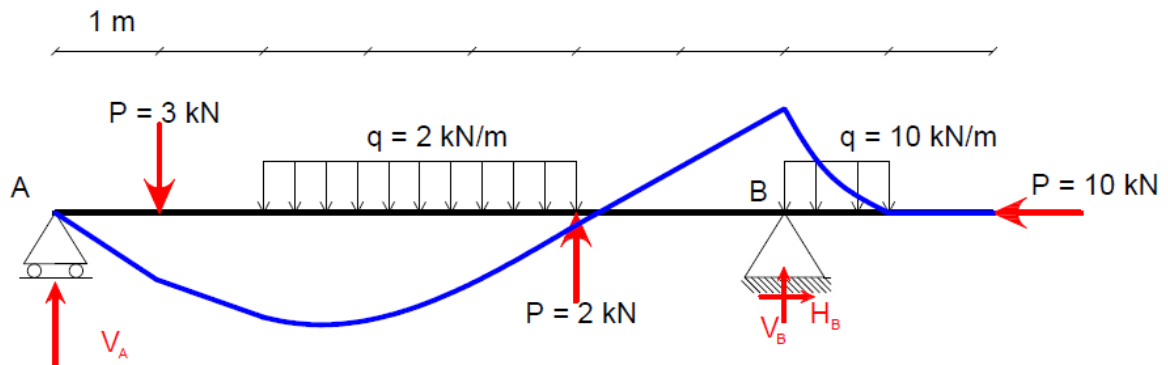
Le moment est maximal là où l'effort tranchant vaut 0 (entre A et B ainsi que sur l'appui B).

Le moment est linéaire là où l'effort tranchant est constant.

Le moment est non-linéaire là où l'effort tranchant est linéaire.

Effort tranchant négatif, moments décroissant & effort tranchant positif, moment croissant.

Le diagramme des moments se dessine TOUJOURS du côté de la fibre tendue.



(d) Calcul du moment maximal :

Sur appui :

$$M_{\max} = 10 \cdot 1 \cdot 0,5 = 5 \text{ kNm}$$

En travée :

Le moment est max lorsque $V=0$. Avec Thalès, $V=0$ en $x = 2,643 \text{ m}$

$$M_{\max} = V_A \cdot x - 3 \cdot (x - 1) - 2 \cdot \frac{(x-2)^2}{2} = 5,98 \text{ kNm}$$

$M_{\max} = 5,98 \text{ [kNm]}$ à une distance $x = 2,64 \text{ [m]}$ du point A.

Chapitre 10 Solutions - Flexion simple

10.1 (a) Dimensionnement pour la résistance à la flexion :

$$M_{max} = 30 \cdot 1,5 = 45 \text{ kNm}$$
$$\frac{f_e}{\gamma} = \frac{M}{W_{pl}} \rightarrow W_{pl} = \frac{45\,000\,000 \cdot 1,5}{355} = 190\,140,00 \text{ mm}^3 \rightarrow \text{HEA 160}$$

(b) Dimensionnement pour la flèche :

$$f = \frac{q L^4}{8 E I} \leq \frac{L}{350}$$
$$I_{min} = \frac{350 q L^3}{8 E} = 5,6 \times 10^{-5} \text{ m}^4 \rightarrow \text{HEA 240}$$

(c) On prend le cas le plus critique \rightarrow **HEA 240**

10.2 (a) Entre distance pour la résistance du plancher : $l=0,77 \text{ m}$

(b) Entre distance pour une flèche acceptable : $l=0,73 \text{ m}$

L'état limite de service (flèche) est plus limitant que la résistance, on prendra donc une entre distance finale de 73 cm.

(c) Dimensionnement :

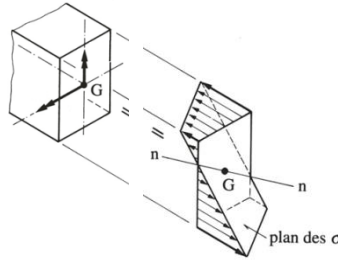
Les sections en bois ne sont pas suffisantes pour reprendre les charges, il faut donc prendre un profilé IPE :

Pour la résistance, IPE 180.

Pour la flèche, IPE 220 \rightarrow Il faudra donc choisir un **IPE 220**.

Chapitre 11 Solutions - Flexion oblique et composée

11.1 $\sigma_C = -\sigma_A = 150 \text{ N/cm}^2$; $\sigma_D = -\sigma_B = 950 \text{ N/cm}^2$;



11.2 $\sigma_{\max} = 97,5 \text{ MPa}$

11.3 $Q_{adm} = 8654 \text{ N}$

11.4 $x = 25 \text{ cm}$; $e = 29,5 \text{ cm}$ (des contraintes de traction apparaissent dans la section)

11.5 On décompose le moment dû à la charge q selon les deux axes principaux de la section, ce qui nous donne :

$$M_z = \frac{qL^2}{8} \cdot \cos 25 \quad \text{et} \quad M_y = \frac{qL^2}{8} \cdot \sin 25$$

On calcule les inerties de la section :

$$I_z = \frac{7 \cdot 15^3}{12} = 19687500 \text{ mm}^4 \quad \text{et} \quad I_y = \frac{7^3 \cdot 15}{12} = 4287500 \text{ mm}^4$$

Ce qui nous permet de calculer la contrainte max. :

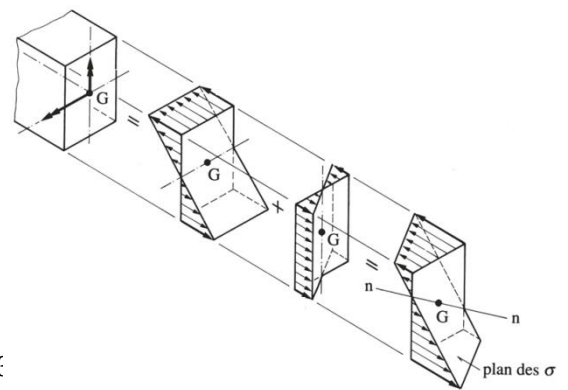
$$\sigma_{\max} = \frac{M_z \cdot \frac{150}{2}}{I_z} + \frac{M_y \cdot \frac{70}{2}}{I_y} = q \cdot (6,9 + 6,89) = 13,8 q$$

Comme :

$$\sigma_{\max} \leq \frac{f_e}{\gamma} = 20 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = 13,8 q = 20$$

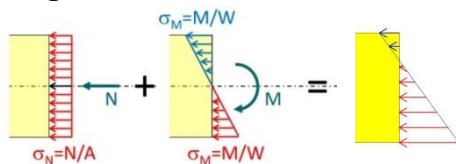
$$q_{\max} = 1,45 \text{ kN/m}$$



11.6 (a) Aire et l'inertie de la section de la poutre :

$$A = b \cdot h = 0,4 \cdot 1 = 0,4 \text{ m}^2 \quad I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,4 \cdot 1^3}{12} = 0,0333$$

(b) Diagramme des contraintes normales dans la section dues à la force P :



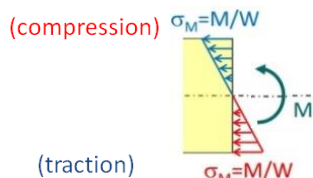
$$\sigma_N = \frac{P}{A} = 1,75 \text{ MPa}$$

$$M = P \cdot e = 0,3 \cdot 700 = 210 \text{ kNm}$$

$$\sigma_M = \frac{210 \cdot 0,5}{0,0333} = 3,15 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = 4,9 \text{ MPa} \quad (\text{Compression}).$$

(c) Diagramme des contraintes normales dans la section au droit de Q dues à la force Q :



$$V_B = \frac{3Q}{10} = 0,3 Q \rightarrow M_{\max} = 7 \cdot 0,3 Q = 2,1 Q$$

$$\sigma_{\max} = \frac{My}{I} = \frac{2,1Q \cdot 0,5}{0,0333} = 31,5 Q$$

$$\sigma_{\max} = 0,0315 Q \text{ MPa (avec } Q \text{ en kN)}$$

(d) $Q_{\max,0}$ pour que la contrainte normale en fibre inférieure soit nulle :

$$0,0315 Q = 4,9 \rightarrow Q = \frac{4,9}{0,0315} = 155,55 \text{ kN}$$

(e) Q_{\max} au-delà de laquelle la contrainte normale de compression dépasse 20 MPa quelque part dans la section :

$$0,0315 Q - 1,4 = 20 \rightarrow Q = \frac{21,4}{0,0315} = 679,36 \text{ kN}$$

11.7 (a) Noyau central :

Comme la charge de compression Q est appliquée en dehors du noyau central, il y aura de la traction quelque part dans la section.

(b) Calcul de la contrainte normale en B :

$$\sigma_B = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{Mv}{I} \pm \frac{Mv}{I}$$

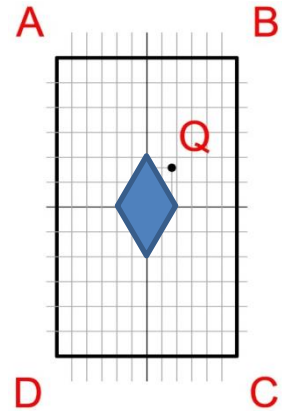
$$= \frac{Q}{540} + \frac{Q \cdot 4 \cdot 15}{40 \cdot 500} + \frac{Q \cdot 2,5 \cdot 9}{14 \cdot 580} = 0,004876 Q \left[\frac{N}{cm^2} \right] \text{ si } Q \text{ est en } N$$

(c) La contrainte de traction maximale se trouvera en D

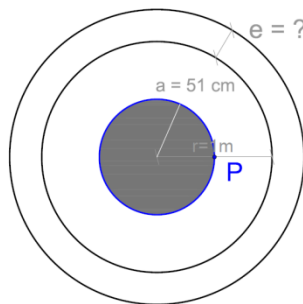
(e) Calcul de Q_{max} :

$$\sigma_B = 0,48 Q \leq 30 \text{ MPa}$$

$$Q_{max} = \frac{30}{0,0004876} = 615 \, 258 \text{ N}$$



11.8 (a) Noyau central de la structure nécessaire pour éviter l'apparition de contraintes de traction dans la section.



Noyau central circulaire de rayon « a ».

(b) Epaisseur minimale de la structure :

$$\sigma = \frac{My}{I} - \frac{N}{A} = \frac{P \cdot a \cdot R}{\pi R^4 - \pi r^4} - \frac{P}{\pi R^2 - \pi r^2} = 0$$

$$a = \frac{R^4 - r^4}{4R(R^2 - r^2)} = \frac{(R^2 - r^2)(R^2 + r^2)}{4R(R^2 - r^2)} = \frac{R^2 + r^2}{4R}$$

$$a = 0,51 \quad \& \quad r = 1 \text{ m}$$

On résout l'équation en R^2 et on trouve :

$$R = 1,22 \text{ m}$$

$$e = R - r = 0,22 \text{ m}$$

11.9 (a) Noyau central de la section :

Calcul de la hauteur du rectangle :

On place la force sur l'axe vertical et on regarde quelle position y nous donne une contrainte nulle au coin inférieur du losange.

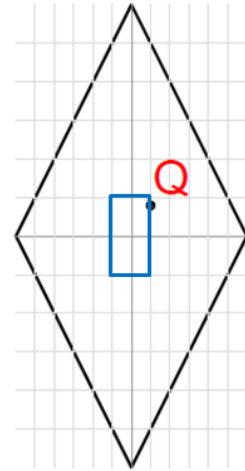
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I} = \frac{P}{\frac{bh}{2}} - \frac{P \frac{h}{2} y}{\frac{bh^3}{48}} = 0 \rightarrow y = \frac{h}{12}$$

Calcul de la largeur du rectangle :

On place la force sur l'axe horizontal et on regarde quelle position x nous donne une contrainte nulle au coin gauche du losange.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{My}{I} = \frac{P}{\frac{bh}{2}} - \frac{P \frac{b}{2} x}{\frac{hb^3}{48}} = 0 \rightarrow x = \frac{b}{12}$$

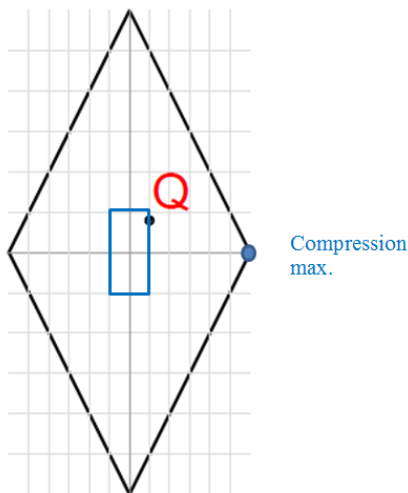
Pas de contraintes de traction, car Q est sur le noyau central.

**(b) Calcul de l'aire et des inerties de la section de la colonne :**

$$A = \frac{bh}{2} = 900 \text{ cm}^2$$

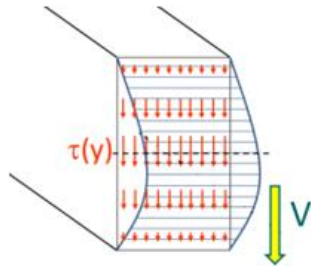
$$I_{\max} = \frac{30 \cdot 60^3}{48} = 135\,000 \text{ cm}^4$$

$$I_{\max} = \frac{60 \cdot 30^3}{48} = 33\,750 \text{ cm}^4$$

(c) Contrainte de compression max :

Chapitre 12 Solutions - Effort tranchant

12.1 $\tau_{max} = \frac{3V}{2bh} = 7,77 \text{ MPa}$



12.2 Matériau fragile : $\tau_{crit} = \frac{f_e}{\gamma} \rightarrow L/h = 0.25$
 Matériau ductile ; $\tau_{crit} = \frac{f_e}{\sqrt{3}\gamma} \rightarrow L/h = 0.43$

12.3 (a) contraintes de cisaillement :
 Si les deux poutres ne sont PAS solidaires.

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{F}{b h} = 0,3 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{F}{b h} = 0,3 \text{ MPa}$$

$\tau_{max} = 0,3 \text{ [MPa]}$

Si les deux poutres sont solidaires.

$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{P}{b h} = 0,3 \text{ MPa}$$

$\tau_{max} = 0,3 \text{ [MPa]}$

(b) Contraintes normales :

$$\sigma_{max} = \frac{2 \cdot 25}{\frac{100}{12} \cdot 50^3} = 48 \text{ MPa}$$

$\sigma_{max} = 48 \text{ [MPa]}$

$$\sigma_{max} = \frac{4 \cdot 50}{\frac{100}{12} \cdot 100^3} = 24 \text{ MPa}$$

$\sigma_{max} = 24 \text{ [MPa]}$

(c) Dimensionnement du nombre de clous :

Effort rasant à reprendre entre les deux poutres : $\tau_{max} \cdot b \cdot L = 0,3 \cdot 100 \cdot 2000 = 60 \text{ kN}$

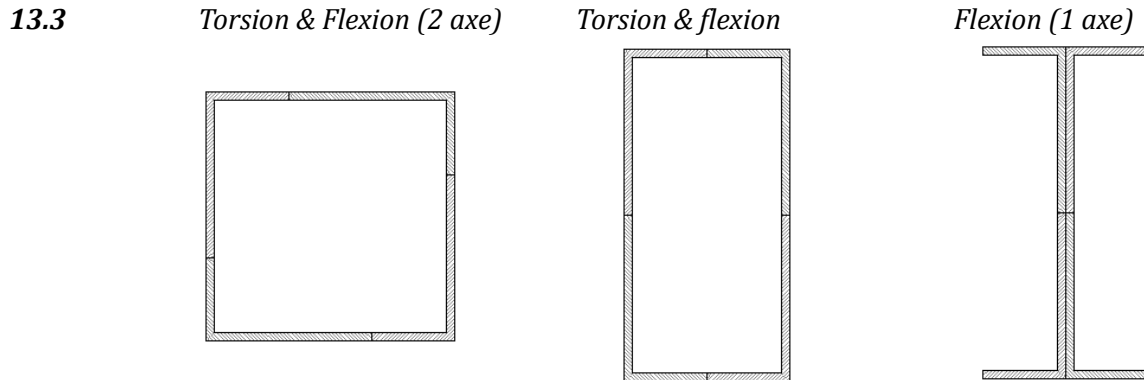
Résistance d'un clou au cisaillement : $\frac{f_e}{\gamma \sqrt{3}} A = \frac{300}{1,5 \sqrt{3}} 28,27 = 3,26 \text{ kN}$

Il faut donc 19 clous au total.

Chapitre 13 Solutions - Torsion

- 13.1** Meilleur pour torsion : P2 – Moins bon pour torsion : P1
 Meilleur pour flexion : P3
 Pour torsion et flexion, P2.

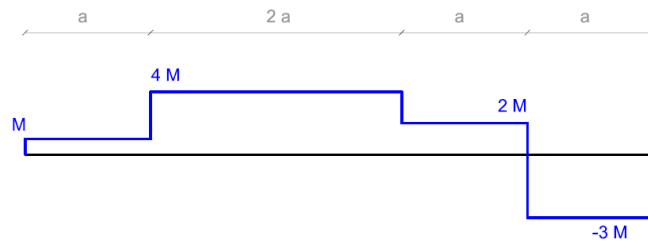
13.2 $\tau = 5 \text{ kN/cm}^2$



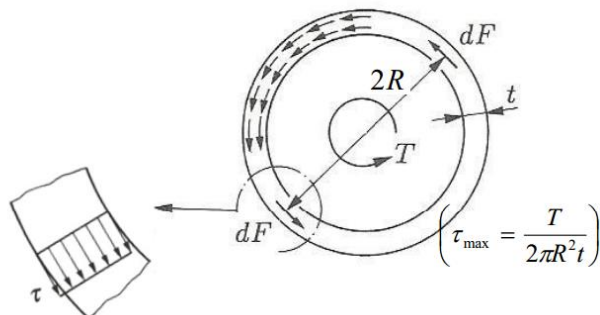
- 13.4** Tube plein : $R=1\text{cm}$ (100% de matière)
 Tube creux : $R=1,2 \text{ cm}$ (44% de matière)
 Tube fendu : $R=31,2 \text{ cm}$ (548% de matière)

- 13.5** (a) Calcule du couple manquant :
 $\sum M_x = 0 \rightarrow M + 3M - 2M + 3M = T$
 $T = 5M$

(b) Allure des moments de torsion dans la poutre :



(c) Contraintes de cisaillement pour le cas 1 :



(d) Dimensionnement pour le cas 1 :

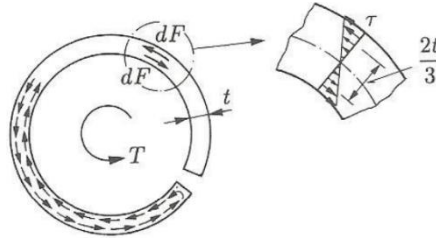
Critère de Von Mises car l'acier est un matériau ductile :

$$\tau_{max} = \frac{T}{2\pi R^2 e} \leq \frac{f_e}{\gamma \cdot \sqrt{3}} = 90,45 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\frac{500\,000}{2 \cdot \pi \cdot 2 \cdot 90,45}} = 20,97 \text{ mm}$$

$R = 2,5 \text{ [cm]}$ (arrondir au demi-centimètre)

(e) Contraintes de cisaillement pour le cas 2 :



$$\tau_{max} = \frac{3T}{\pi R e^2}$$

(f) Dimensionnement pour le cas 2 :

Critère de Von Mises car l'acier est un matériau ductile :

$$\tau_{max} = \frac{3T}{\pi R e^2} \leq \frac{f_e}{\gamma \cdot \sqrt{3}} = 90,45 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 500\,000}{\pi \cdot 2^2 \cdot 90,45}} = 1319,69 \text{ mm}$$

$R = 132 \text{ [cm]}$ (arrondir au demi-centimètre)

13.6 (a) Calcul des réactions d'appuis :

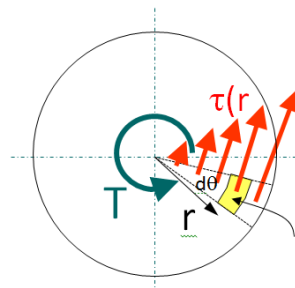
$$R_x = 0 \quad R_y = 0 \quad R_z = F \quad M_x = 0 \quad M_y = 4aF \quad M_z = 0$$

(b) Allure des moments de torsion :



$$T_{max} = aF \quad \text{Unités : kNm}$$

(c) Allure des contraintes de cisaillement dans la section la plus sollicitée :



$$\tau_{max} = \frac{2T}{\pi R^3}$$

(d) Dimensionnement de la barre :

L'acier est ductile \rightarrow Von Mises

$$T_{max} = 0,4 \text{ kNm}$$

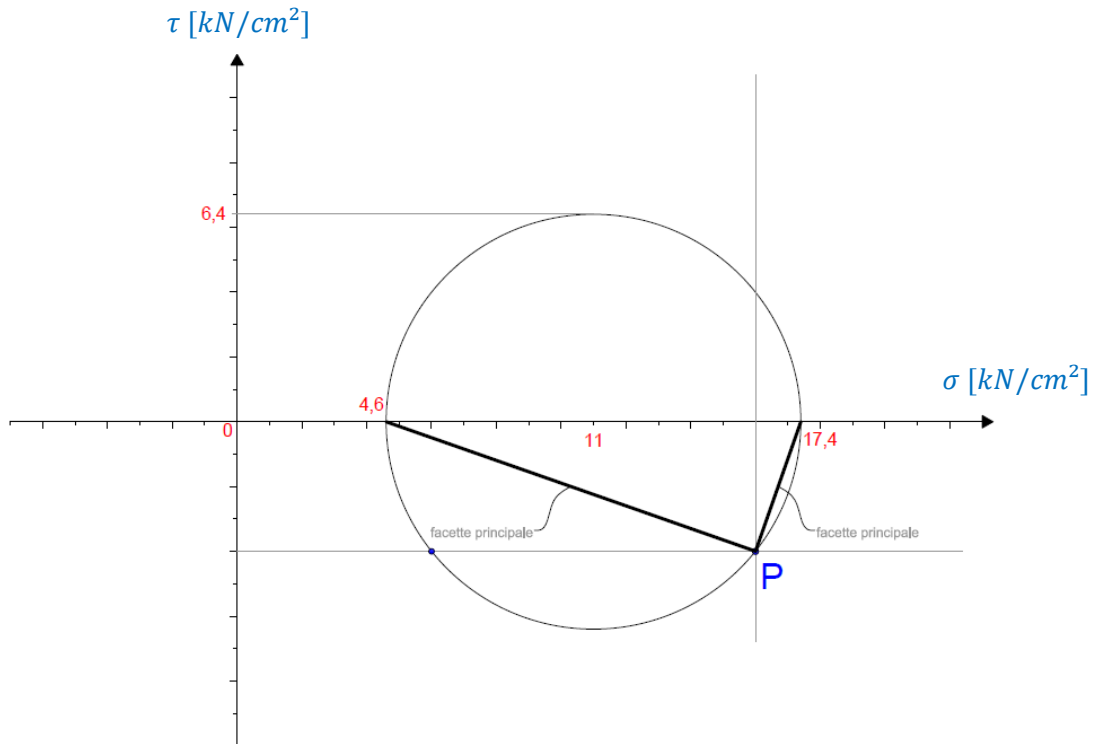
$$\tau_{max} = \frac{2 \cdot 0,4 \text{ kNm}}{\pi R^3} \leq \frac{f_e}{\gamma \sqrt{3}} = 90,45 \text{ MPa}$$

$$R^3 \cdot \pi \cdot 90,45 \text{ MPa} = 2 \cdot 0,4 \text{ kNm}$$

$$R = 0,014 \text{ m} \rightarrow \text{On arrondi au demi cm supérieur : } R = 1,5 \text{ [cm]}$$

Chapitre 14 Solutions - Cercles de Mohr

14.1



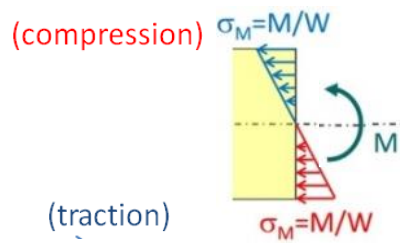
14.2 Une contrainte de 10 kN/m^2 sur toutes surfaces d'orientation α quelconque
 → Pression hydrostatique.

14.3 $\tau_{\max} = 2,5 \text{ N/mm}^2$;
 $\sigma_I = 0 \text{ N/mm}^2$ (facette horizontale) ;
 $\sigma_{II} = -5 \text{ N/mm}^2$ (facette verticale)

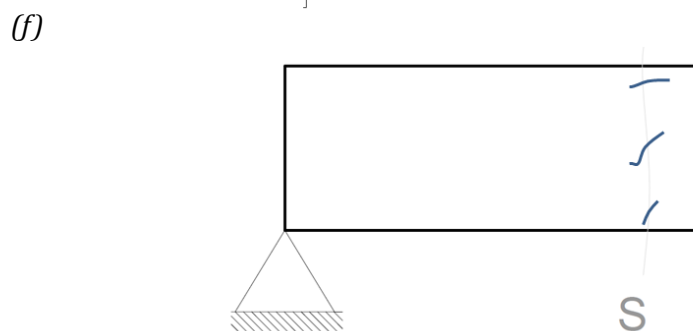
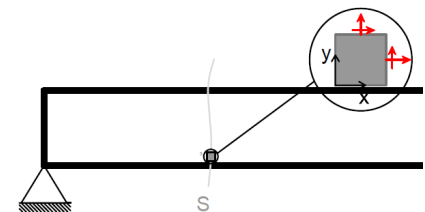
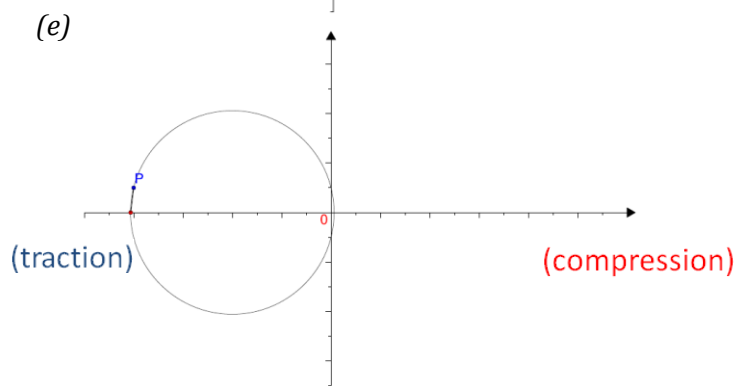
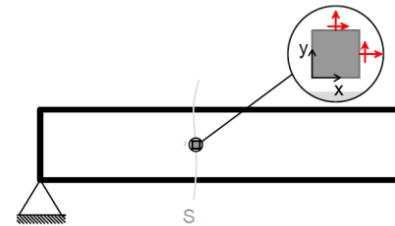
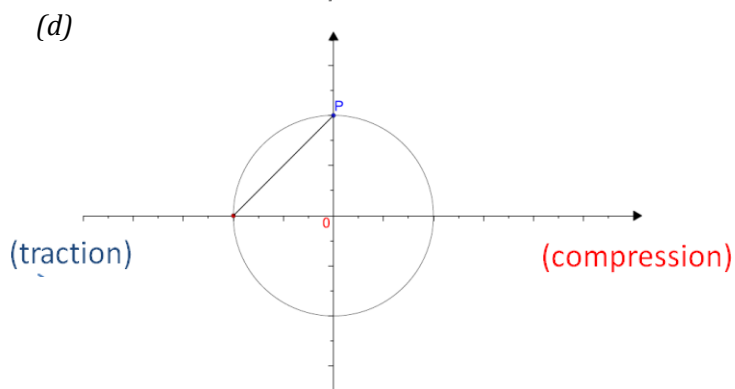
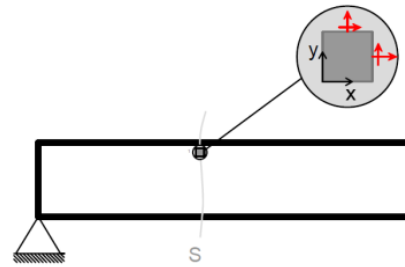
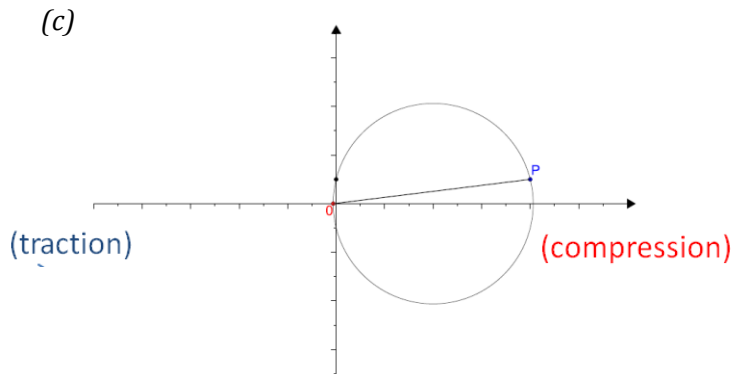
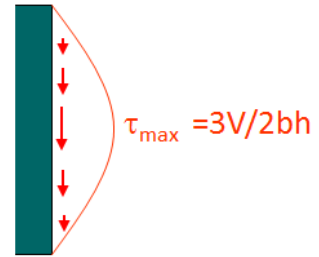
14.4 $\tau_{\max} = 0,5 \text{ MPa}$;
 $\sigma_I = 4 \text{ MPa}$ (facette horizontale) ;
 $\sigma_{II} = 3 \text{ MPa}$ (facette verticale)

14.5 $\tau_{\max} = 12 \text{ N/mm}^2$;
 $\sigma_I = 18 \text{ N/mm}^2$ (facette verticale) ;
 $\sigma_{II} = -6 \text{ N/mm}^2$ (facette horizontale)
 facette à 30° : $\sigma = 12 \text{ MPa}$ & $\tau = 10,39 \text{ MPa}$
 facette à 60° : $\sigma = 0 \text{ MPa}$ & $\tau = 10,39 \text{ MPa}$

14.6 (a) Contraintes normales :



(b) Contraintes de cisaillement :



Chapitre 15 Solutions - Flambement

15.1 (a) $L_f = L$; (b) $L_f = 0,7 L$; (c) $L_f = L$; (d) $L_f = 2 L$;
(e) $L_f =$ longueur des barres en compression.

15.2 (a) $L_f = 2H$

(b) $H < L_f < 2 H$ (en fonction de la rigidité du treillis)

La structure "b" sera donc la plus stable vis à vis du flambement.

15.3 (a) Effort résistant pour la compression pure :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq \sigma_{lim} = \frac{f_e}{\gamma} = 160 \text{ MPa}$$

$$A = 10600 \text{ mm}^2 \text{ (voir tableau)}$$

$$N_{max} = 1696 \text{ kN}$$

(b) Effort résistant pour le flambement d'Euler :

$$N_{crit} = \frac{1}{\gamma} \frac{\pi^2 EI}{L_f^2}$$

$$L_f = \text{Longueur de flambement} = 2L = 6 \text{ m}$$

Note : La longueur de flambement dépend des conditions d'appuis.

$$E = 210 \text{ GPa (Acier)}$$

$$I_z = 39,2 \times 10^6 \text{ mm}^4 \text{ (voir tableau)}$$

Note : la colonne aura tendance à flamber dans son sens le plus faible. On prend donc l'inertie correspondant à l'axe faible du profilé I_z .

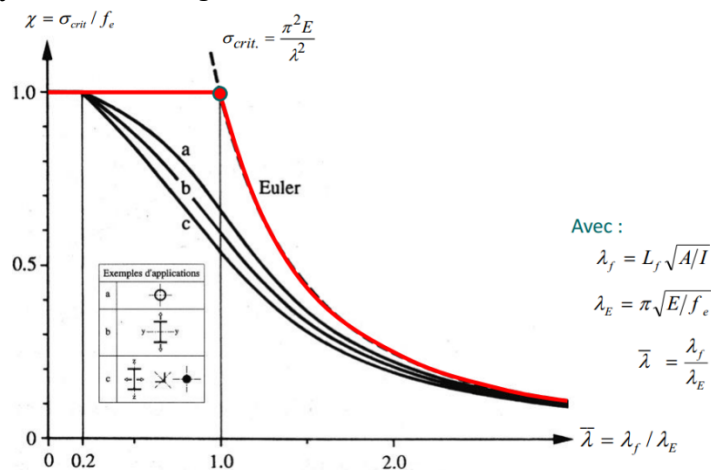
$$N_{crit} = 1504,5 \text{ kN}$$

(d) Avec courbe de flambement :

Pour calculer la résistance de l'élément en tenant compte du flambement réel, on utilise la formule :

$$\frac{\gamma |N|}{A \sigma_{crit}} \leq 1$$

Avec σ_{crit} , une valeur réduite de la résistance de l'acier en tenant compte du flambement. Pour calculer σ_{crit} on utilise le diagramme suivant.



Pour une approche simplifiée, on peut se limiter à la courbe rouge, et prendre σ_{crit} de Euler tant qu'il est inférieur à f_e .

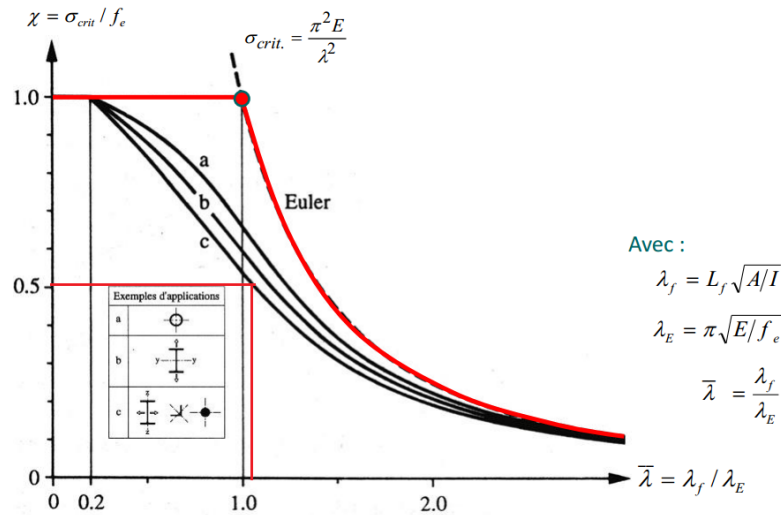
$$\sigma_{crit} = \text{Min} \left(\frac{\pi^2 E}{\lambda^2} ; f_e \right)$$

$$\lambda_f = L_f \sqrt{A/I} = 6 \cdot \sqrt{10600/39200000} = 98,66$$

$$\sigma_{crit} = \text{Min} (212,91 \text{ MPa} ; 240 \text{ MPa}) = 212,91 \text{ MPa}$$

$$\frac{\gamma |N|}{10600 \text{ mm}^2 \cdot 212,91 \text{ MPa}} \leq 1$$

$$N = 1504,5 \text{ kN}$$



Si on utilise la courbe c du diagramme ci-dessus :

$$\lambda_E = \pi \sqrt{E/f_e} = 92,93$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_f}{\lambda_E} = \frac{98,66}{92,93} = 1,06$$

Avec le diagramme : $\chi \approx 0,5 \rightarrow \sigma_{crit} = \chi \cdot f_e = 0,5 \cdot 240 \text{ MPa} = 120 \text{ MPa}$

$$\frac{\gamma |N|}{10600 \text{ mm}^2 \cdot 120 \text{ MPa}} \leq 1$$

$$N = 848 \text{ kN}$$

(d) Effort résistant pour la compression pure en service ($\gamma=1$) :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq \sigma_{lim} = \frac{f_e}{\gamma} = 240 \text{ MPa}$$

$$A = 10600 \text{ mm}^2 \text{ (voir tableau)}$$

$$N_{max} = 2544 \text{ kN}$$

15.4 Pour trouver dans quel plan le risque de flambement est le plus grand, il faut calculer les élancements.

Dans le plan (x,y) :

$$L_f = \text{Longueur de flambement} = L = 20 \text{ m}$$

$$A = 396 \text{ cm}^2$$

$$I_{max} = I_z = \frac{24 \cdot 60^3}{12} - \frac{18 \cdot 58^3}{12} = 139\,332 \text{ cm}^4$$

$$\lambda_f = L_f \sqrt{A/I} = 20 \cdot \sqrt{396/139332} = 106,6$$

Dans le plan (x,z) :

$$L_f = \text{Longueur de flambement} = 0,5 L = 10 \text{ m}$$

$$A = 396 \text{ cm}^2$$

$$I_{min} = I_y = \frac{60 \cdot 24^3}{12} - \frac{58 \cdot 18^3}{12} = 40\,932 \text{ cm}^4$$

$$\lambda_f = L_f \sqrt{A/I} = 10 \cdot \sqrt{396/40932} = 98,4$$

Le flambement le plus critique se fera donc dans le plan (x,y). La charge critique d'Euler vaut donc :

$$N_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} = 7219,5 \text{ kN}$$

15.5 (a) Longueur de flambement à considérer pour le calcul $L_f = 5,6m$

(b) Sans flambement :

Aire de la section HEA (voir tableau dans le cours) : $A = 7680 \text{ mm}^2$

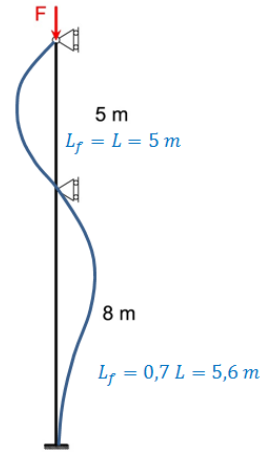
$$F_{max} = A \cdot f_e = 7680 \cdot 235$$

$$F_{max} = 1804,8 \text{ kN}$$

(c) Euler :

Inertie de la section HEA 240 : $I = 27,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 27,7 \times 10^6}{5600^2} = 1830\,700 \text{ N}$$



Dans le cas présent, comme l'élancement de l'élément est faible, la loi d'Euler donne une résistance plus grande que la résistance sans considérer le flambement. Il faut donc au minimum se limiter à la résistance obtenue sans tenir compte du flambement.

(d) Utilisation du diagramme :

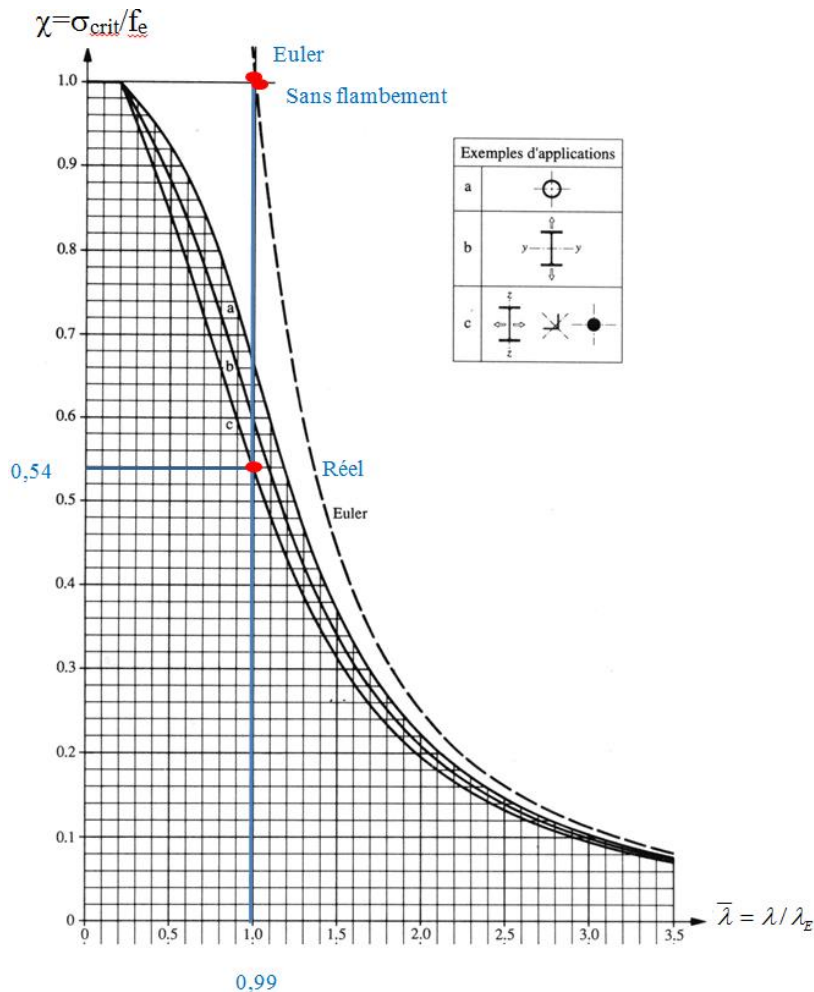
$$\text{Critère de résistance : } \frac{N}{A \cdot \sigma_{crit}} \leq 1$$

$$\lambda = L_f \sqrt{\frac{A}{I}} = 93,24 \quad \lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{f_e}} = 93,91 \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = 0,9928$$

En utilisant la courbe « c » du diagramme :

$$\chi = 0,54 \rightarrow \sigma_{crit} = \chi \cdot f_e = 126,9$$

$$\rightarrow N_{max} = A \cdot \sigma_{crit} = 974,55 \text{ kN}$$



15.6 (a) Calcul des Inerties et longueurs de flambements :

Cas 1 :

$$L_f = 0,7 \cdot 8m = 5,6 m$$

$$I = 63,1 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad L_f = 5,6 m$$

Cas 2 :

$$L_f = 2 \cdot 8m = 16 m$$

$$I = 182,6 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad L_f = 16 m$$

(b) Sans flambement :

$$F_{max} = f_e A = 355 \cdot 11\,300 = \mathbf{4011,5 \text{ kN}}$$

(c) La colonne flambera dans le plan ou elle a le plus grand élanement λ .

$$\text{Cas 1 : } \lambda = L_f \sqrt{\frac{A}{I}} = 5\,600 \sqrt{\frac{11\,300}{63,1 \times 10^6}} = 74,94$$

$$\text{Cas 2 : } \lambda = L_f \sqrt{\frac{A}{I}} = 16\,000 \sqrt{\frac{11\,300}{182,6 \times 10^6}} = 125,86$$

(d) Selon Euler :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 182,6 \times 10^6}{16\,000^2} = 1\,478\,358,79 \text{ N} = \mathbf{1478,4 \text{ kN}}$$

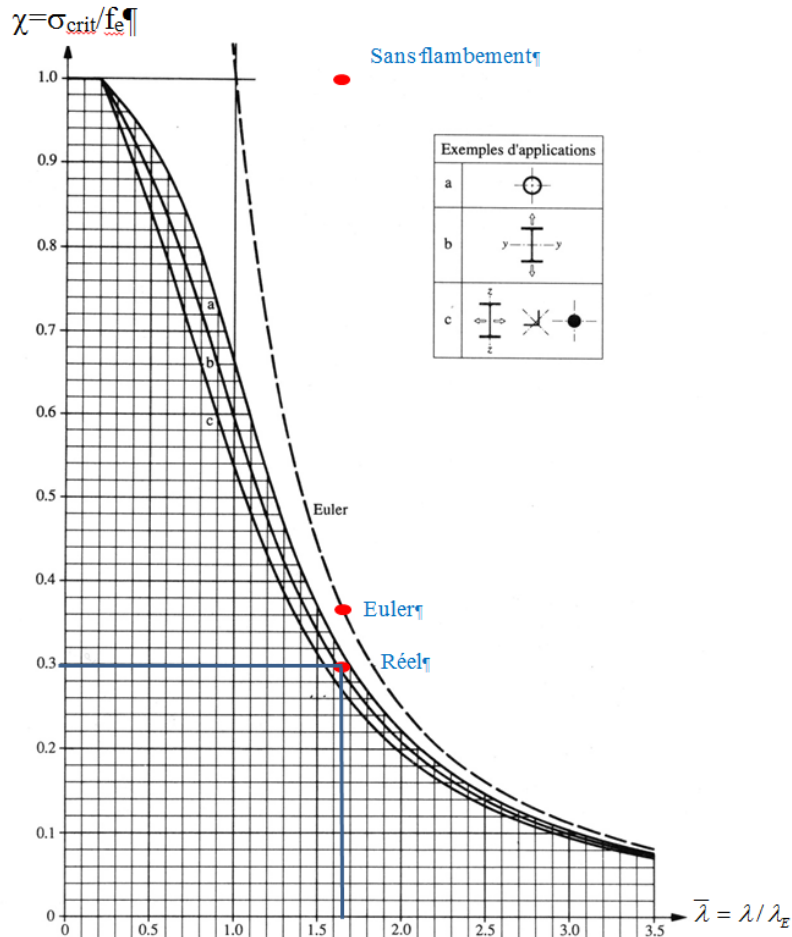
(e) En utilisant les courbes de flambement :

$$\text{Critère de résistance : } \frac{N}{A \cdot \sigma_{crit}} \leq 1$$

$$\lambda = 125,86 \quad \lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{f_e}} = 76,41 \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = 1,65$$

$$\text{En utilisant la courbe « b » du diagramme : } \chi = 0,3 \rightarrow \sigma_{crit} = \chi \cdot f_e = 106,5$$

$$\rightarrow N = A \cdot \sigma_{crit} = \mathbf{1203,45 \text{ kN}}$$



15.7 (a) Longueur de flambement :

$$L_f = 10 \text{ m}$$

(b) Sans flambement :

Aire de la section en acier : $A = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (100^2 - 90^2) = 5969 \text{ mm}^2$

$$F_{max} = A \cdot f_e = 5969 \cdot 355 = \mathbf{2118,99 \text{ kN}}$$

(c) Euler :

Inertie de la section en acier : $I = \frac{\pi R^4}{4} - \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi}{4} (100^4 - 90^4) = 2,7 \times 10^7 \text{ mm}^4$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 2,7 \times 10^7}{10000^2} = 559\,600 \text{ N} = \mathbf{559,6 \text{ kN}}$$

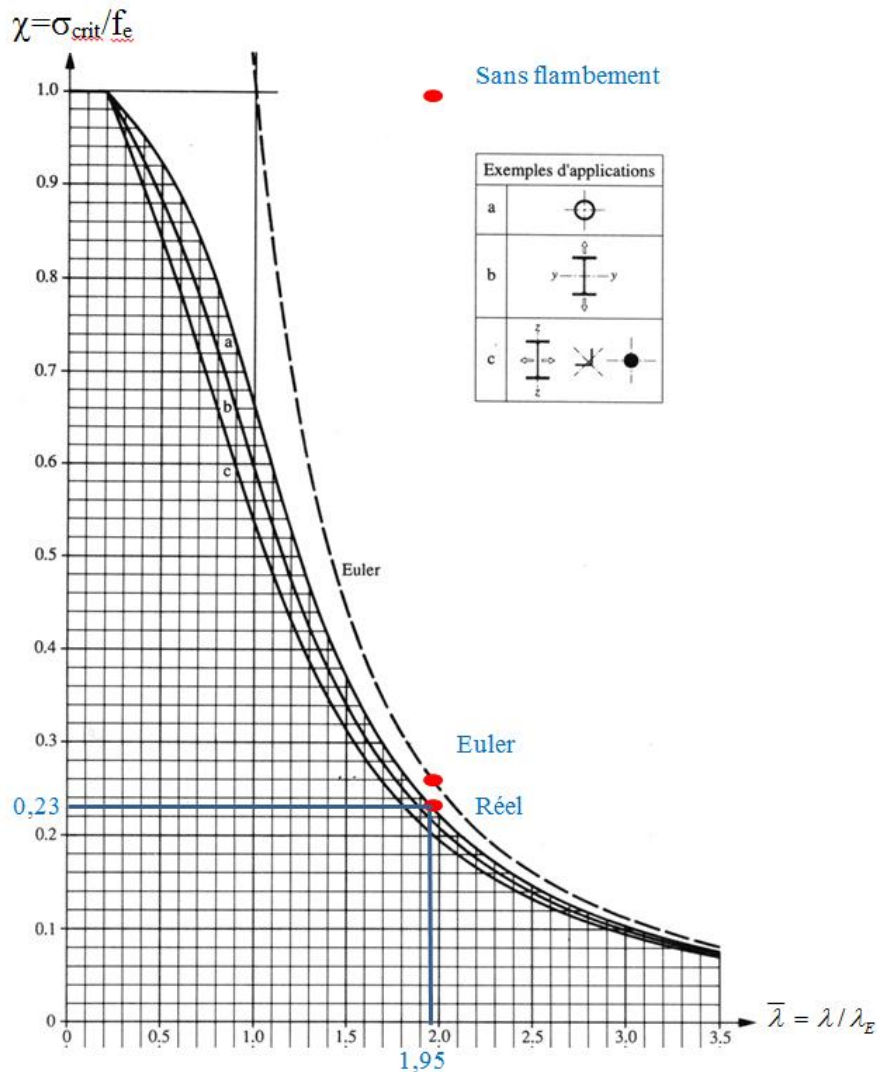
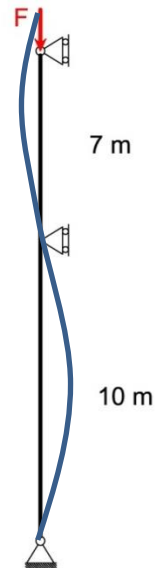
(d) Avec courbe de flambement :

Critère de résistance : $\frac{N}{A \cdot \sigma_{crit}} \leq 1$

$$\lambda = L_f \sqrt{\frac{A}{I}} = 148,68 \quad \lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{f_e}} = 76,41 \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = 1,95$$

En utilisant la courbe « a » du diagramme : $\chi = 0,23$

$$\rightarrow \sigma_{crit} = \chi \cdot f_e = 81,65 \rightarrow N = A \cdot \sigma_{crit} = \mathbf{487,36 \text{ kN}}$$



15.8 (a) Flambement en dehors du plan de treillis :

$$I = 51,3 \times 10^6 \text{ [mm}^4\text{]} \quad L_f = 10 \text{ [m]}$$

(b) Sans flambement :

$$F_{max} = f_e A = 355 \cdot 11\,800 = 4189 \text{ kN}$$

(c) Euler :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 51,3 \times 10^6}{10\,000^2} = 1063,25 \text{ kN}$$

(d) Avec courbe de flambement :

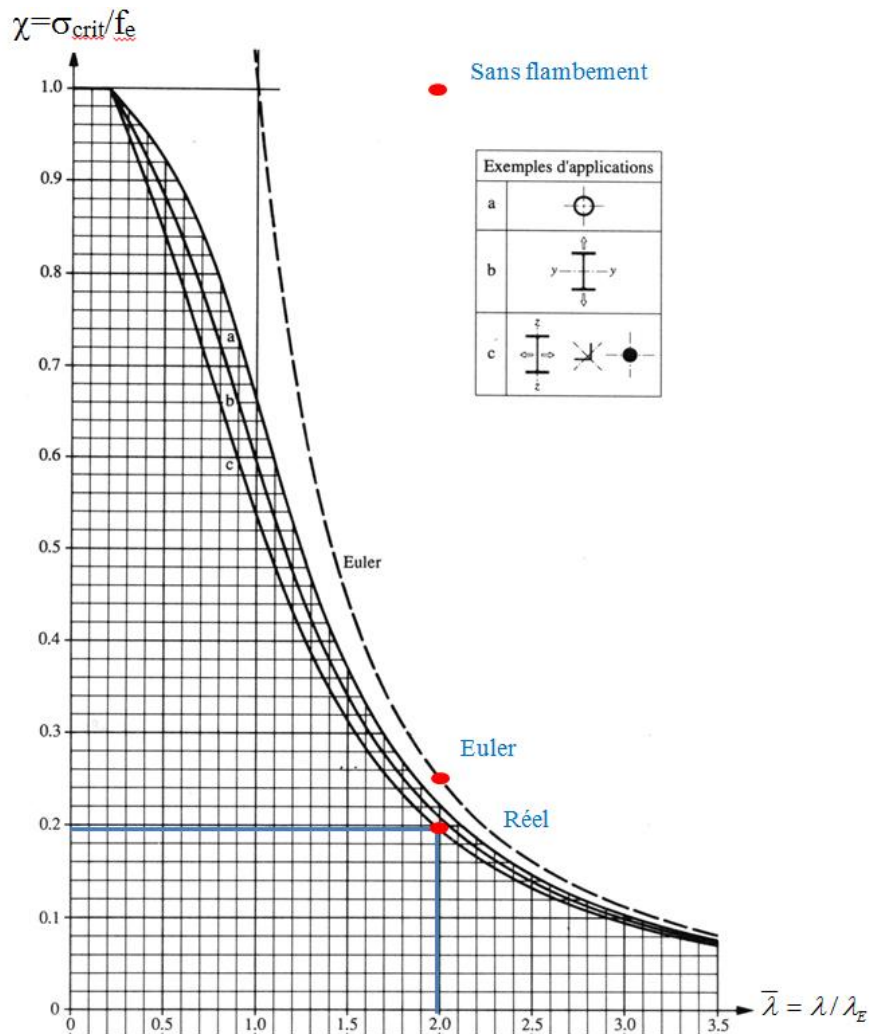
$$\text{Critère de résistance : } \frac{N}{A \cdot \sigma_{crit}} \leq 1$$

$$\lambda = L_f \sqrt{\frac{A}{I}} = 10\,000 \sqrt{\frac{11\,800}{51,3 \times 10^6}} = 151,66$$

$$\lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{f_e}} = 76,41 \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = 1,98$$

En utilisant la courbe « c » du diagramme :

$$\chi = 0,2 \rightarrow \sigma_{crit} = \chi \cdot f_e = 71 \rightarrow N = A \cdot \sigma_{crit} = 837,79 \text{ kN}$$



15.9 (a) Longueur de flambement :

$$0,7 \cdot 4 \text{ m} = 2,8 \text{ m} \leq 3 \text{ m}$$

$$L_f = 3 \text{ [m]}$$

(b) Calcul la résistance nécessaire f_e :

Avec la courbe « c »

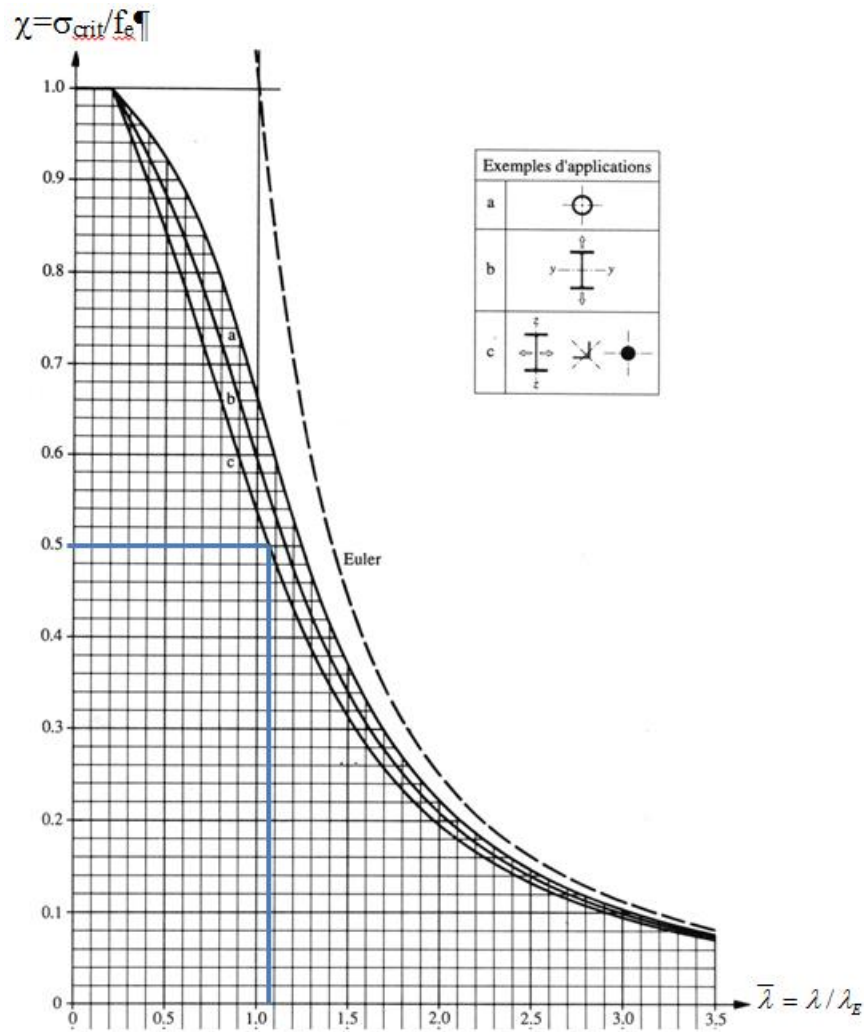
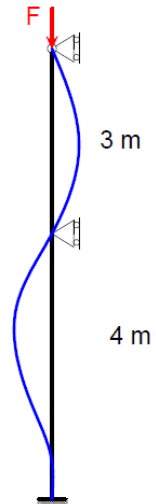
$$\chi = 0,5 \rightarrow \bar{\lambda} \approx 1,06$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_f}{\lambda_E}$$

$$\lambda_f = L_f \sqrt{\frac{A}{I}} = 3 \sqrt{\frac{\pi R^2}{\frac{\pi R^4}{4}}} = 3 \sqrt{400} = 60$$

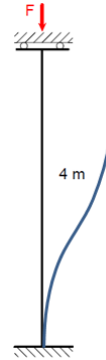
$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_f}{\lambda_E} = \frac{60}{\pi \sqrt{\frac{E}{f_e}}} = 1,06$$

$$f_e = \frac{E}{\left(\frac{60}{\pi \cdot 1,06}\right)^2} = \frac{10\,000}{324,63} = 30,8 \text{ MPa}$$



15.10 (a) Forme et longueur de flambement :

$$L_f = 4 \text{ [m]}$$



(b) Calcul de la charge maximale en tenant compte de la formule d'Euler :

Inertie de la section HEA 240 : $I = 27,7 \times 10^6 \text{ mm}^4$

$$F_{\max} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 210\,000 \cdot 27,7 \times 10^6}{4\,000^2} = 3\,588\,218 \text{ N} = 3\,588 \text{ [kN]}$$

(c) Calcul de la charge maximale en utilisant les diagrammes de flambement :

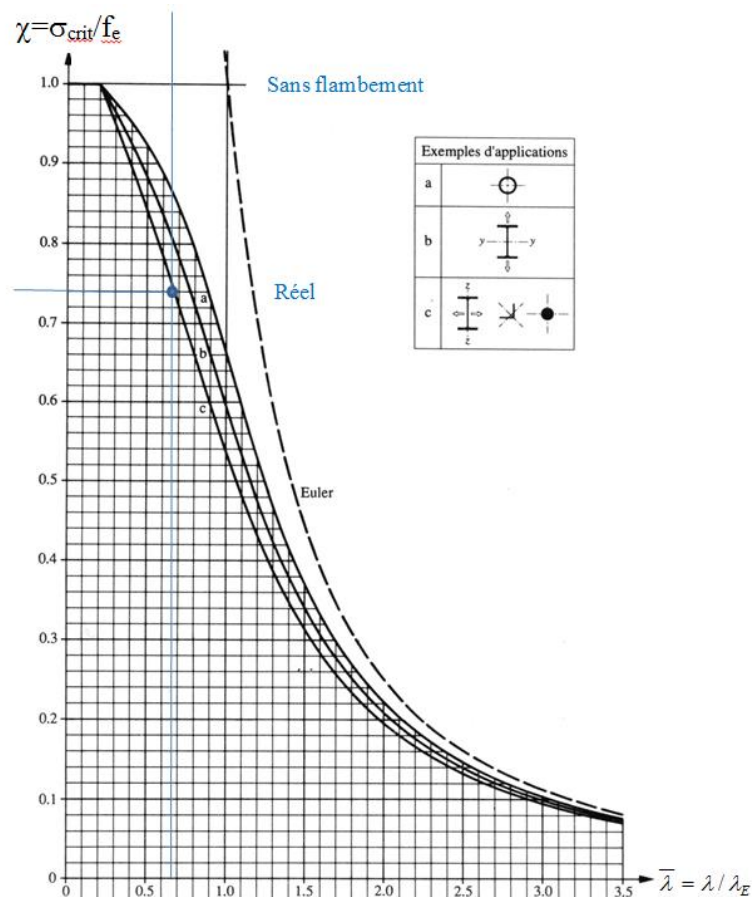
Critère de résistance : $\frac{N}{A \cdot \sigma_{\text{crit}}} \leq 1$

$$\lambda = L_f \sqrt{\frac{A}{I}} = 66,6 \quad \lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{f_e}} = 101,8 \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = 0,654$$

En utilisant la courbe « c » du diagramme : $\chi = 0,74 \rightarrow \sigma_{\text{crit}} = \chi \cdot f_e = 148$

$$\rightarrow F_{\max} = A \cdot \sigma_{\text{crit}} = 1\,137 \text{ kN}$$

L'élancement de la colonne étant très faible, la formule simplifiée d'Euler ne donne pas de résultats cohérents car la résistance proposée est supérieure à la résistance du profilé sans tenir compte du flambement



15.11 (a) Longueur de flambement :

$$L_f = 4[m]$$

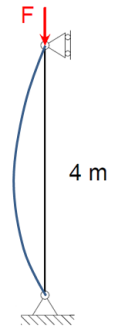
(b) Dimensionnement avec la formule de Euler :

$$F_{max} = 500 \text{ kN} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2}$$

$$I = 3,86 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Section HEA : **HEA 140**

Section circulaire : **D = 114,3 [mm]**



(c) Dimensionnement avec les courbes de flambement :

Critère de résistance : $\frac{1,5 \cdot N}{A \cdot \sigma_{crit}} \leq 1$

$$\lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{f_e}} = 101,80 /$$

Section HEA :

$$\lambda = L_f \sqrt{\frac{A}{I}} = 4000 \sqrt{\frac{3140}{3,89 \times 10^6}} = 113,64$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = 1,12$$

Avec la courbe c

$$\chi = 0,46 \rightarrow \sigma_{crit} = \chi \cdot f_e$$

$$\rightarrow N_{max} = A \cdot \sigma_{crit} = 288,88 \text{ kN}$$

Section circulaire :

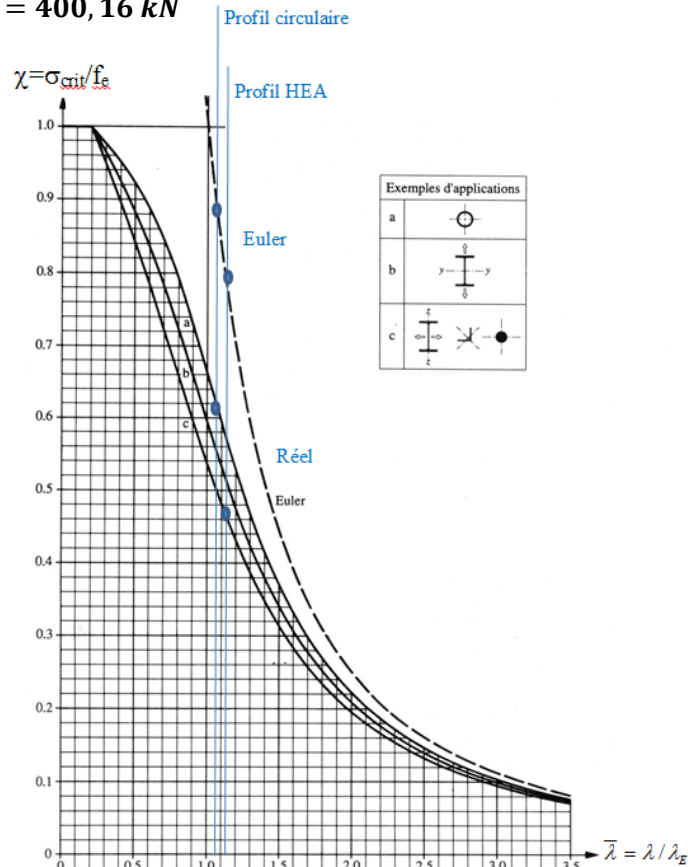
$$\lambda = L_f \sqrt{\frac{A}{I}} = 107,99$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = 1,06$$

Avec la courbe a

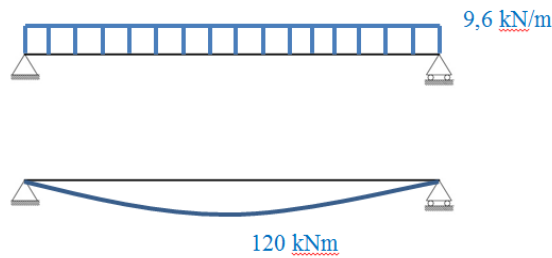
$$\chi = 0,61 \rightarrow \sigma_{crit} = \chi \cdot f_e$$

$$\rightarrow N_{max} = A \cdot \sigma_{crit} = 400,16 \text{ kN}$$



Chapitre 16 Solutions - Exercices récapitulatifs

16.1 (a) Charge et moment dû au poids propre :



(b) Effort dans le câble :

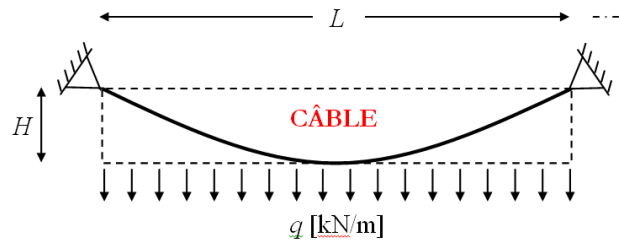
$q = PP \text{ du béton} = 9,6 \text{ kN}$

Pour une parabole :

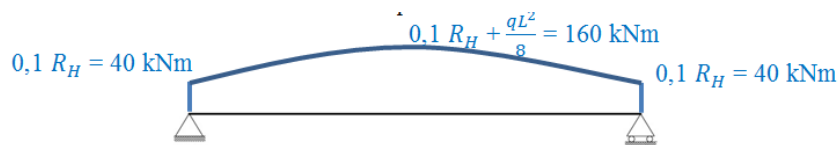
$$R_H = \frac{qL^2}{8H} = \frac{9,6 \cdot 10^2}{8 \cdot 0,3} = 400 \text{ kN}$$

$$R_V = \frac{qL}{2} = \frac{9,6 \cdot 10}{2} = 48 \text{ kN}$$

$$P = \sqrt{R_H^2 + R_V^2} = 402,87 \text{ kN}$$



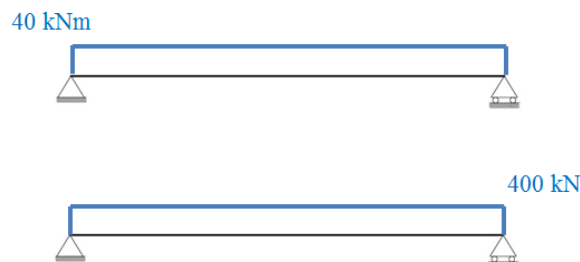
(c) Moments dus à P :



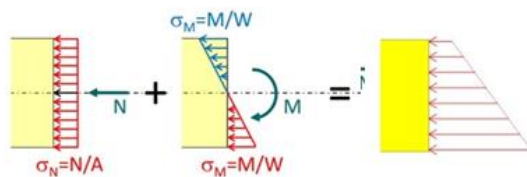
(d) Efforts normaux dus à P :



(e) & (f) Effort dans la structure (PP+câble) :



(g) Contraintes normales dans la section :



$$\sigma_N = \frac{P}{A} = \frac{400}{1 \cdot 0,4} = 1 \text{ MPa}$$

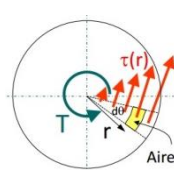
$$M = 40 \text{ kNm}$$

$$\sigma_M = \frac{0,04 \cdot 0,5}{0,0333} = 0,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max} = 1,6 \text{ [MPa] Compression}$$

$$\sigma_{\min} = 0,4 \text{ [MPa] Compression}$$

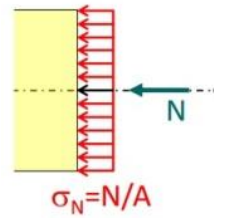
16.2 (a) Contraintes de cisaillement et contraintes normales :



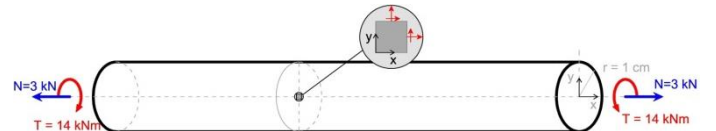
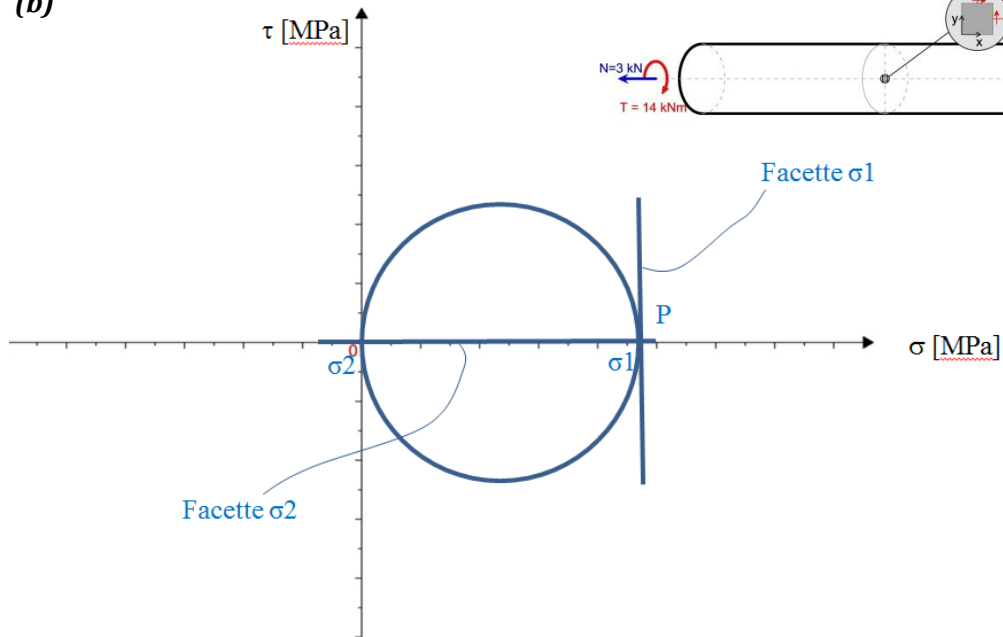
$$\tau_{\max} = \frac{2T}{\pi R^3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{2 \cdot 14\,000}{\pi \cdot 10^3} = 8,91 \text{ MPa}$$

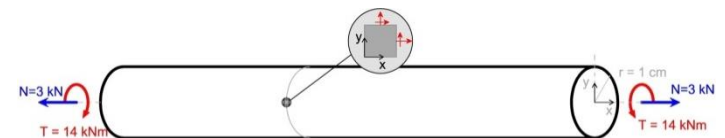
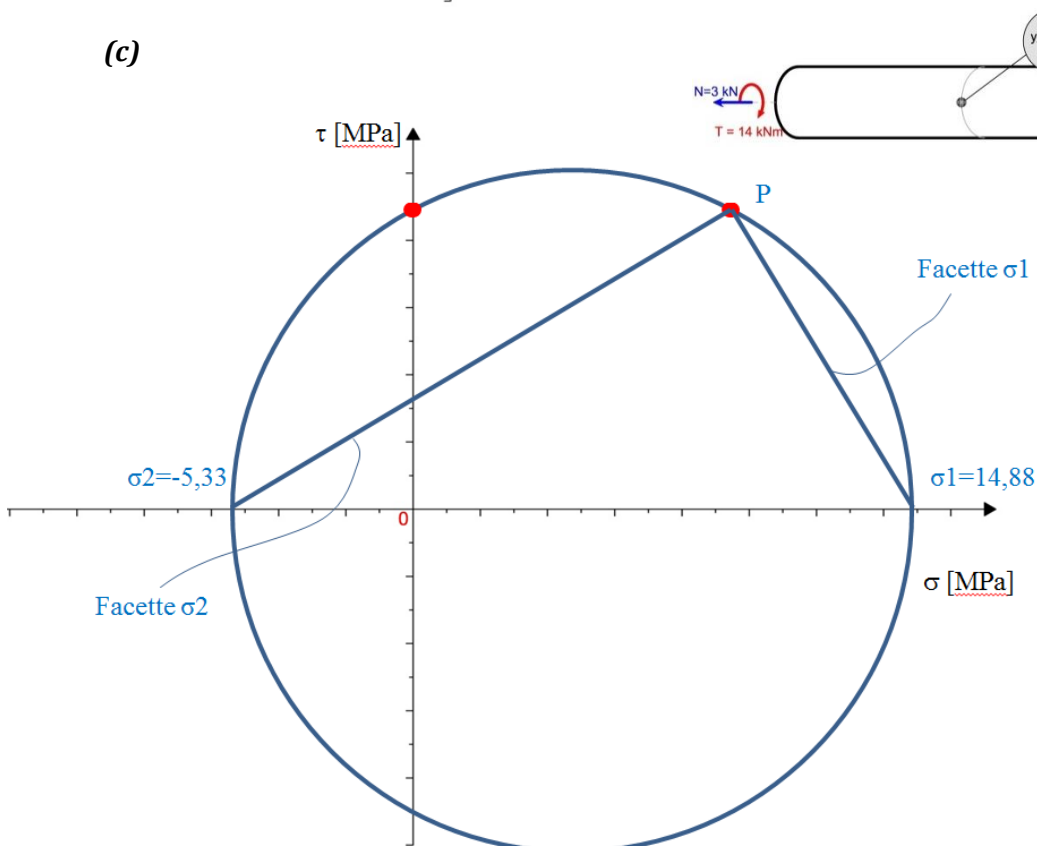
$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{3\,000}{\pi \cdot 10^2} = 9,55 \text{ MPa}$$



(b)



(c)



16.3 (a) Calcul de la charge répartie :

On part de la formule

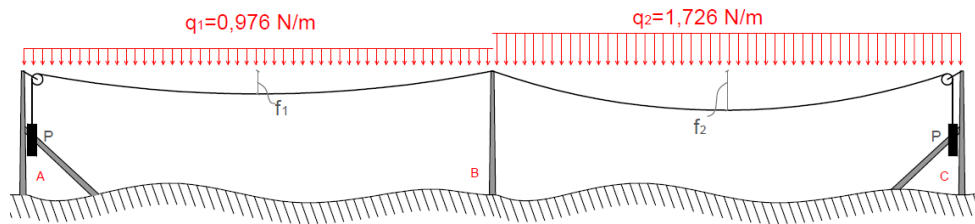
$$P = 220 \text{ N} = \sqrt{\left(\frac{qL}{2}\right)^2 + \left(\frac{qL^2}{8f}\right)^2} \rightarrow q = \sqrt{\frac{P^2}{\left(\frac{L^2}{4} + \frac{L^4}{64f^2}\right)}} = 0,976 \text{ N/m}$$

(b) Calcul de P pour limiter la flèche du câble :

$$P = \sqrt{\left(\frac{qL}{2}\right)^2 + \left(\frac{qL^2}{8f}\right)^2} = 439,44 \text{ N}$$

On peut arrondir à $P = 440 \text{ N}$

(c)



La tension max ne change pas et vaut la valeur du contrepoids : 440 N

$$P = 440 \text{ N} = \sqrt{\left(\frac{qL}{2}\right)^2 + \left(\frac{qL^2}{8f}\right)^2} \rightarrow f = \frac{qL^2}{8\sqrt{P^2 - \left(\frac{qL}{2}\right)^2}} = 0,442 \text{ m}$$

(d) Noyau central :

$$\sigma_{ext} = \frac{Mv}{I} - \frac{N}{A} = 0 = \frac{F \cdot r \cdot R}{\frac{\pi R^4}{4}} - \frac{F}{\pi R^2}$$

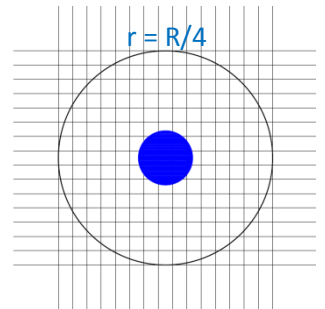
$$F_{V1} = \frac{qL}{2} = 14,64 \text{ kN} \quad \& \quad F_{H1} = \sqrt{P^2 - F_V^2} = 439,7564 \text{ N}$$

$$F_{V2} = \frac{qL}{2} = 25,89 \text{ kN} \quad \& \quad F_{H2} = \sqrt{P^2 - F_V^2} = 439,237 \text{ N}$$

$$F_{Vtot} = 40,53 \text{ kN} \quad \& \quad F_{Htot} = 0,5187 \text{ N}$$

Ce qui nous donne en pieds de poteau $M_{max} = 0,5187 \cdot 8 = 4,15 \text{ Nm}$ & $N = 40,53 \text{ N}$

On peut calculer $\frac{M}{N} = 0,1 \text{ m}$, et on voit que la résultante des efforts est en dehors du noyau central, il y aura donc des contraintes de traction.



(e) Calcul de la contrainte normale maximale dans le poteau central :

$$\sigma_{max} = \frac{Mv}{I} + \frac{N}{A} \leq \frac{f_e}{\gamma}$$

$$\sigma_{max} = \frac{4,15 R}{\frac{\pi R^4}{4}} + \frac{40,53}{\pi R^2} \leq \frac{f_e}{\gamma} = 10 \text{ Mpa}$$

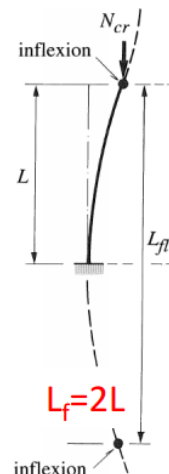
$$\sigma_{max} = \frac{4 \cdot 4,15}{\pi 75^3} + \frac{40,53}{\pi 75^2} \leq \frac{f_e}{\gamma} = 10 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_{max} = 0,0148 \text{ Mpa} \leq 10 \text{ Mpa} \quad \text{Le poteau résiste bien.}$$

(f) Forme de flambement du poteau central et inertie :

$$I = \frac{\pi R^4}{4} = 2,48 \cdot 10^7 \quad [\text{mm}^4]$$

$$L_f = 16 \text{ [m]}$$



(g) Calcul de la charge maximale en négligeant la sensibilité au flambement :

Aire de la section : $A = \pi R^2 = \pi 75^2 = 17\,671 \text{ mm}^2$

$$F_{max} = A \cdot \frac{f_e}{\gamma} = 17\,671 \cdot \frac{15}{1,5} = 176,71 [\text{kN}]$$

(h) Calcul de la charge maximale en tenant compte de la formule d'Euler :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 10\,000 \cdot 17\,671}{16000^2} = 9\,560 \text{ N}$$

$$F_{max} = \frac{N_{cr}}{1,5}$$

$$F_{max} = 6,37 [\text{kN}]$$

(i) Calcul de la charge maximale pouvant être appliqué sur le poteau central :

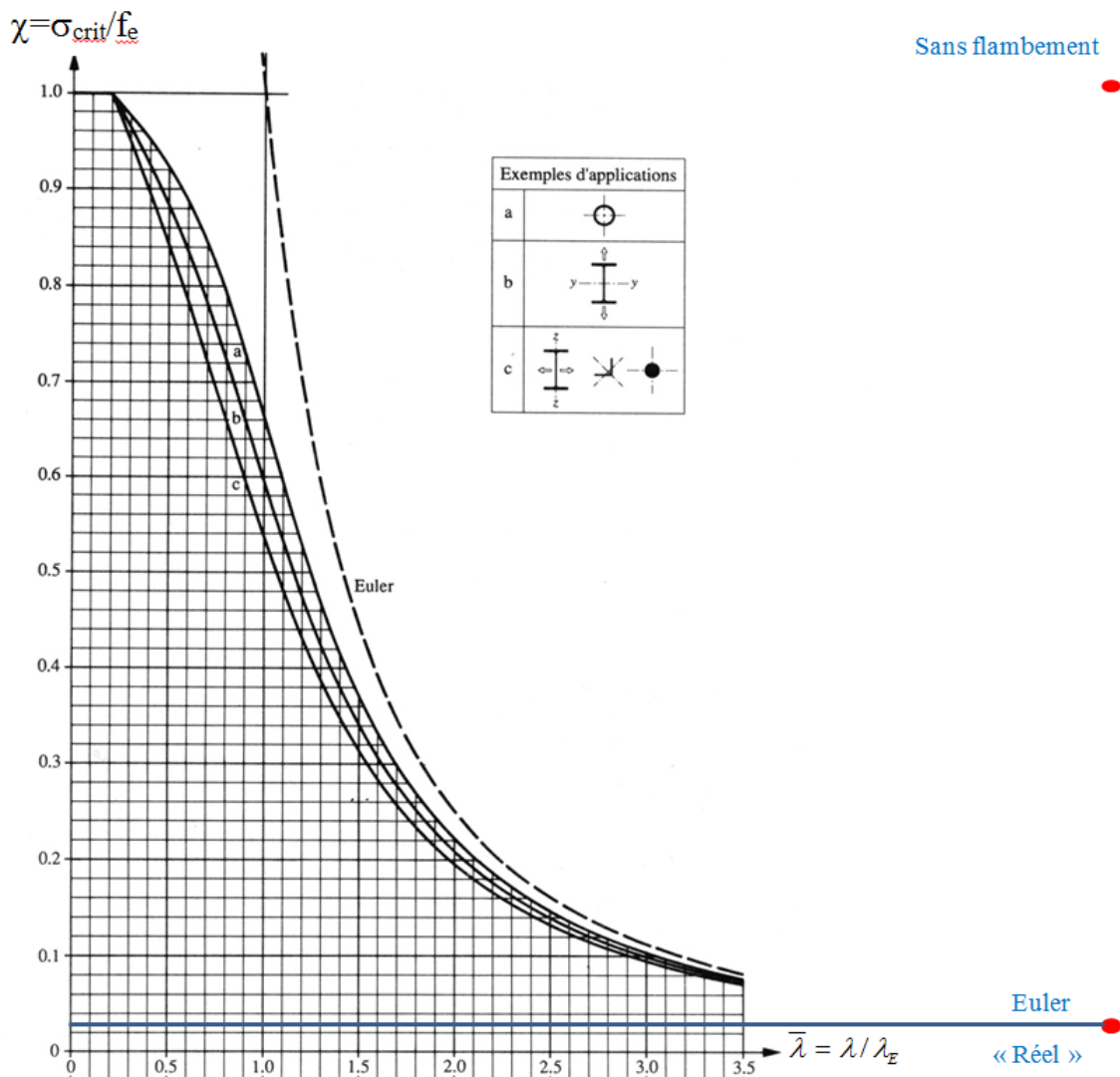
On utilise la courbe « c ».

$$\lambda_f = 426,67$$

$$\lambda_E = 81,11$$

$$\bar{\lambda} = 5,26$$

Comme notre élément est fortement élancé, on voit que la formule d'Euler donne une très bonne approximation de la résistance du poteau (la courbe « c » est presque confondue avec la courbe d'Euler). $\rightarrow F_{max} = 6,37 \text{ kN}$

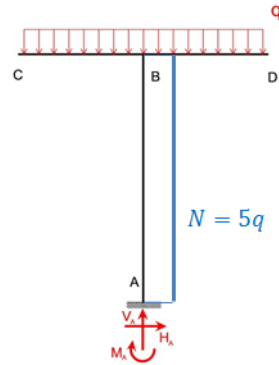


16.4 (a) Calcul de l'effort normal résistant :

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A}$$

$$50 \cdot 150 \cdot \frac{40}{1,5} = 5q$$

$$q = \frac{600000}{5} = 120\,000\,N = 120\,kN/m$$

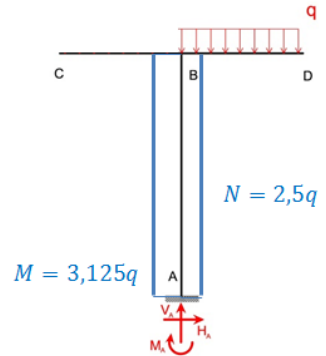


(b) Calcul en flexion composée :

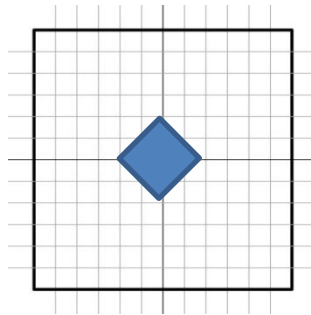
$$\sigma_{max} = \frac{Mv}{I} + \frac{N}{A} \quad \text{Avec : } A = 150 \cdot 150 = 22500\,mm^2$$

$$I = 42\,187\,500\,mm^4$$

$$26,666 = \frac{3,125q \cdot 75}{4,21875 \cdot 10^{-5}} + \frac{2,5q}{0,0225} \quad q = 4705\,N/m$$



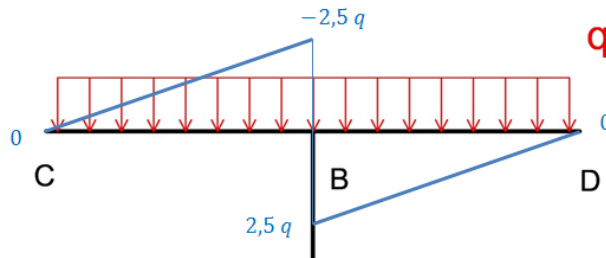
(c) Noyau central :



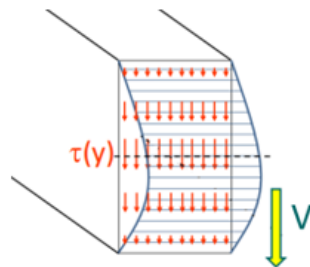
Calcul de l'excentricité de la charge. $e = \frac{M}{N} = \frac{3,125q}{2,5q} = 1,25\,m$

Le point d'application de la résultante Q est en dehors du noyau, il y aura donc des contraintes de traction dans la section.

(d) Calcul de l'effort tranchant :



(e)



$$\tau_{max} = \frac{3V}{2bh} = \frac{3 \cdot 2,5 \cdot 120\,000}{2 \cdot 150 \cdot 150} = 20\,MPa$$

(f) Critère de Von Mises :

Pour une poutre fléchie : $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq f_e$

Sur la fibre moyenne $\sigma = 0$: $\sqrt{3\tau^2} = \sqrt{3} \cdot \tau \leq \frac{f_e}{\gamma} = 26,666$

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{26,666^2}{3}} = 15,4\,MPa = 1,666 \cdot 10^{-4} q$$

$$q_{max} = \frac{15,4}{1,666 \cdot 10^{-4}} = 92\,400\,N/m = 92,4\,kN/m$$

(g) Longueur de flambement :

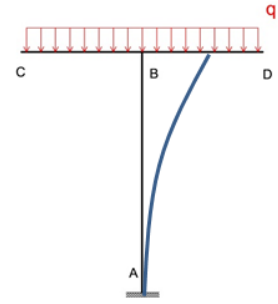
$$L_f = 2 L = 10 \text{ m}$$

(h) Euler :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 18\,000 \cdot 42\,187\,500}{10\,000^2} = 74\,947 \text{ N}$$

$$F_{max} = \frac{N_{cr}}{1,5} = 49,96 \text{ kN}$$

$$q_{max} = \frac{F_{max}}{5} = 9,99 \text{ kN/m}$$



(i) Flambement réel avec courbe « a » :

$$\text{Critère de résistance : } \frac{1,5 \cdot N}{A \cdot \sigma_{crit}} \leq 1$$

$$\lambda = L_f \sqrt{\frac{A}{I}} = 230,94 \quad \lambda_E = \pi \sqrt{\frac{E}{f_e}} = 66,64 \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_E} = 3,46$$

En utilisant la courbe « a » du diagramme :

$$\chi = 0,08 \rightarrow \sigma_{crit} = \chi \cdot f_e = 3,2 \rightarrow N = \frac{A \cdot \sigma_{crit}}{1,5} = 48 \text{ kN}$$

$$q_{max} = \frac{N_{max}}{5} = 9,6 \text{ kN/m}$$

(j)

