CHAPITRE XIV : Les circuits à courant alternatif : impédance, puissance, facteur de qualité et largeur de bande

XIV.1 : L'impédance complexe et son module

L'impédance est une grandeur qui généralise la notion de résistance, de réactance capacitive et de réactance inductive dans le cas des circuits comportant plusieurs éléments de nature différente. Elle caractérise la manière dont le circuit freine le passage du courant en donnant le rapport qui existe entre la tension de la source de f.é.m. et le courant résultant. Toutefois, comme dans le cas d'un circuit avec seulement un condensateur ou seulement un inducteur (voir sections XIII.2 et XIII.3), il y a un déphasage entre tension et courant qui fait qu'ils ne passent pas en même temps par leur maximum et qu'on ne peut prendre le rapport des valeurs instantanées, v/i, pour caractériser le circuit ; en effet, ce rapport varie dans le temps. Par contre on peut le faire soit avec le rapport des amplitudes ou des valeurs efficaces, comme dans le cas des réactances, soit avec le rapport des phaseurs. Dans ce dernier cas, on définit une impédance complexe :

$$\boxed{\mathbf{Z} \equiv \frac{\hat{\mathbf{v}}}{\hat{\mathbf{i}}}} \qquad \text{(XIV.1)}$$

Le module de cette impédance complexe est égale au rapport de l'amplitude de la tension à celle du courant ou encore, au rapport des valeurs efficaces :

$$|\mathbf{Z}| = \left|\frac{\hat{\mathbf{v}}}{\hat{\mathbf{i}}}\right| = \left|\frac{\mathbf{v_0}}{\mathbf{i_0}} \mathbf{e}^{\mathbf{j}\phi}\right| = \frac{\mathbf{v_0}}{\mathbf{i_0}} = \frac{\mathbf{v_{eff}}}{\mathbf{i_{eff}}} \qquad \text{(XIV.2)}$$

car $$\left|\mathbf{e}^{\mathbf{j}\phi}\right| = \mathbf{1}$$

Voyons maintenant ce que valent les impédances dans quelques cas particuliers.

<u>L'impédance d'une résistance</u> :

$$\mathbf{Z_R} = \frac{\mathbf{v_{0R}}}{\mathbf{i_0}} = \frac{\mathbf{Ri_0}}{\mathbf{i_0}}$$

car $\hat{\imath} = i_0\, e^{j\phi}$ et $\hat{v} = v_{0R}\, e^{j\phi}$.

Par conséquent :

$$\boxed{\mathbf{Z_R = |Z_R| = R, \quad pour\ une\ résistance}} \qquad \text{(XIV.3)}$$

Dans le cas d'une résistance, la notion de résistance et d'impédance complexe coïncident donc.

L'impédance d'un condensateur :

$$\mathbf{Z_C = \frac{-v_{0C}\, j}{i_0} = \frac{-i_0 / \omega C}{i_0}\, j = -\frac{1}{\omega C} j = \frac{1}{\omega C j}} \qquad \text{(XIV.4)}$$

En effet, $-j^2 = 1$ et par conséquent : $-j = \frac{1}{j}$.

Le résultat (XIV.4) peut encore s'écrire en fonction de la réactance capacitive :

$$\boxed{\mathbf{Z_C = -X_C\ j, \ pour\ un\ condensateur}} \qquad \text{(XIV.5)}$$

L'impédance complexe d'un condensateur est purement imaginaire et négative ; son module est égal à la réactance capacitive :

$$\boxed{\mathbf{|Z_C| = X_C, \ pour\ un\ condensateur}} \qquad \text{(XIV.6)}$$

L'impédance d'un inducteur :

$$\mathbf{Z_L = \frac{v_{0L}\, j}{i_0} = \frac{\omega L\, i_0}{i_0}\, j = \omega L\, j}, \qquad \text{(XIV.7)}$$

ce qui peut s'écrire en fonction de la réactance inductive :

$$\boxed{\mathbf{Z_L = X_L\ j, \ pour\ un\ inducteur}} \qquad \text{(XIV.8)}$$

L'impédance complexe d'un inducteur est purement imaginaire et positive ; son module est égal à la réactance inductive :

$$\boxed{\mathbf{|Z_L| = X_L, \ pour\ un\ inducteur}} \qquad \text{(XIV.9)}$$

L'impédance d'un circuit RLC série :

Pour un circuit comme celui de la figure XIII.11 :

$$\mathbf{Z} = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{\hat{\mathbf{i}}} = \frac{\mathbf{v_{0R}} + (\mathbf{v_{0L}} - \mathbf{v_{0C}})\,\mathbf{j}}{\mathbf{i_0}}$$

$$= \frac{\mathbf{v_{0R}}}{\mathbf{i_0}} + \left(\frac{\mathbf{v_{0L}}}{\mathbf{i_0}} - \frac{\mathbf{v_{0C}}}{\mathbf{i_0}}\right)\mathbf{j}$$

$$\boxed{\mathbf{Z} = \mathbf{R} + \left(\boldsymbol{\omega}\mathbf{L} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega}\mathbf{C}}\right)\mathbf{j}\text{, pour un circuit RLC série}} \qquad \text{(XIV.10)}$$

On remarque que ce résultat est équivalent à la simple addition des impédances complexes Z_R (XIV.3), Z_C (XIV.4) et Z_L (XIV.7). Cette fois l'impédance comporte une partie réelle et une partie imaginaire et son module vaut :

$$\boxed{|\mathbf{Z}| = \sqrt{\mathbf{R}^2 + \left(\boldsymbol{\omega}\mathbf{L} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\omega}\mathbf{C}}\right)^2}\text{, pour un circuit RLC série}} \qquad \text{(XIV.11)}$$

C'est aussi le rapport de l'amplitude de la tension de la source à celle du courant, ou encore le rapport des valeurs efficaces.

Exemple :

Dans le cas d'un circuit RLC série comportant une résistance de 200 Ω, un condensateur de capacité 10 µF et un inducteur d'inductance 20 mH, a) calculez son impédance pour une fréquence de 50 Hz b) calculez le courant efficace dans le circuit pour une tension sinusoïdale de 300 V d'amplitude.

a) $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 50 = 100\,\pi$ rad/s = 314 rad/s

$Z_R = 200\ \Omega$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 10 \times 10^{-6}} = 318\ \Omega$$

$Z_C = -318\ j\ \Omega$

$X_L = \omega L = 314 \times 20 \times 10^{-3} = 6{,}3\ \Omega$

$Z_L = 6{,}3\ j\ \Omega$

$Z = 200\ - 3\ 18\ j + 6{,}3\ j \equiv (200 - 312\ j)\ \Omega$

b) $v_0 = 300\text{V} \quad v_{eff} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} = \frac{300}{\sqrt{2}} = 212$ V

$$|Z| = \frac{v_{eff}}{i_{eff}} \quad i_{eff} = \frac{v_{eff}}{|Z|}$$

$$|Z| = \sqrt{200^2 + 312^2} = 370\ \Omega$$

$$i_{eff} = \frac{212\ V}{370\ \Omega} = 0,57\ A\ .$$

XIV.2 : Les impédances en série et en parallèle

a) En série

Lorsque divers éléments d'un circuit sont branchés en série, comme à la figure XIV.1, l'impédance équivalente de la combinaison d'éléments est égale à la somme des impédances de chaque élément.

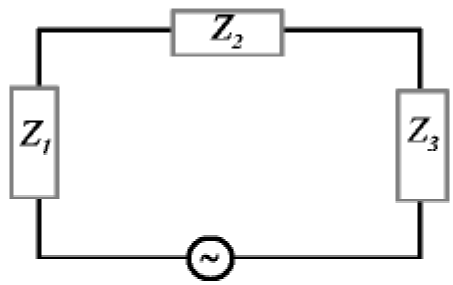


Figure XIV.1.

En effet, nous avons par définition de Z_{eq} :

$$\mathbf{Z_{eq}} = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{\hat{\mathbf{i}}}\ ,$$

où $\hat{v}$ est le phaseur de la tension aux bornes de la combinaison d'éléments qui s'obtient en ajoutant les phaseurs de chaque élément :

$$\mathbf{Z_{eq}} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_1 + \hat{\mathbf{v}}_2 + \hat{\mathbf{v}}_3}{\hat{\mathbf{i}}} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_1}{\hat{\mathbf{i}}} + \frac{\hat{\mathbf{v}}_2}{\hat{\mathbf{i}}} + \frac{\hat{\mathbf{v}}_3}{\hat{\mathbf{i}}}$$

$$= \mathbf{Z_1} + \mathbf{Z_2} + \mathbf{Z_3}\ .$$

Par conséquent, pour une combinaison de n éléments en série, nous avons bien :

$$\boxed{\mathbf{Z_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Z_i}} \qquad \text{(XIV.12)}$$

b) en parallèle

Lorsque divers éléments d'un circuit sont branchés en parallèle, comme à la figure XIV.2, l'impédance équivalente de la combinaison d'éléments est l'inverse de la somme des inverses de l'impédance de chaque élément.

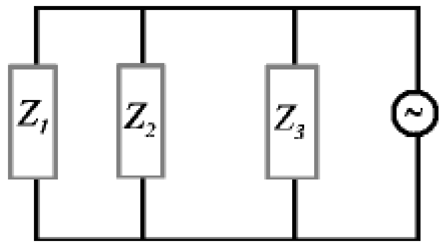


Figure XIV.2.

En effet, nous avons par définition de Z_{eq} :

$$\mathbf{Z_{eq}} = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{\hat{\mathbf{i}}}$$

où $\hat{v}$ est le phaseur de la tension aux bornes de chacun des éléments, qui est la même et qui est celle de la source ; î est le phaseur du courant débité par la source, qui est la somme instantanée de chacun des courants passant respectivement par Z_1, Z_2 et Z_3 (loi des nœuds). Dès lors :

$$\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3$$

et

$$\frac{1}{\mathbf{Z_{eq}}} = \frac{\hat{\mathbf{i}}_1}{\hat{\mathbf{v}}} + \frac{\hat{\mathbf{i}}_2}{\hat{\mathbf{v}}} + \frac{\hat{\mathbf{i}}_3}{\hat{\mathbf{v}}} = \frac{1}{\mathbf{Z_1}} + \frac{1}{\mathbf{Z_2}} + \frac{1}{\mathbf{Z_3}}$$

Par conséquent, pour une combinaison de n impédances en parallèle, nous avons bien :

$$\boxed{\frac{1}{\mathbf{Z_{eq}}} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \frac{1}{\mathbf{Z_i}}} \qquad \text{(XIV.13)}$$

XIV.3 : Relation entre impédance et déphasage

Lorsqu'on connaît l'impédance complexe d'un circuit, on peut en déduire aisément le déphasage de la tension par rapport au courant.

Soit $\hat{v} = v_0\, e^{j\phi_1}$, $\hat{i} = i_0\, e^{j\phi_2}$; le déphasage de la tension par rapport au courant est $\phi = \phi_1 - \phi_2$ (celui du courant par rapport à la tension est $\phi_2 - \phi_1 = -\phi$).

On a :

$$\mathbf{Z} = \frac{\hat{\mathbf{v}}}{\hat{\mathbf{i}}} = \frac{\mathbf{v_0\, e^{j\phi_1}}}{\mathbf{v_0\, e^{j\phi_2}}} = \frac{\mathbf{v_0}}{\mathbf{i_0}}\mathbf{e}^{j(\phi_1-\phi_2)}$$

$$= |\mathbf{Z}|\mathbf{e}^{j\phi} = |\mathbf{Z}|(\mathbf{cos}\,\phi + \mathbf{j\,sin}\,\phi)$$

L'impédance complexe peut toujours s'écrire :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R_e}\{\mathbf{Z}\} + \mathbf{j\ I_m}\{\mathbf{Z}\} \qquad \text{(XIV.14)}$$

Dès lors :

$$\mathbf{R_e}\{\mathbf{Z}\} = |\mathbf{Z}|\,\mathbf{cos}\,\phi$$

Et :

$$\boxed{\mathbf{cos}\,\phi = \frac{\mathbf{R_e}\{\mathbf{Z}\}}{|\mathbf{Z}|}} \qquad \text{(XIV.15)}$$

On a aussi :

$$\boxed{\mathbf{tg}\phi = \frac{\mathbf{I_m}\{\mathbf{Z}\}}{\mathbf{R_e}\{\mathbf{Z}\}}} \qquad \text{(XIV.16)}$$

XIV.4 : Résumé

Les relations entre phaseurs de la tension et du courant, impédance, et déphasage peuvent être visualisées sur le schéma de la figure (XIV.3).

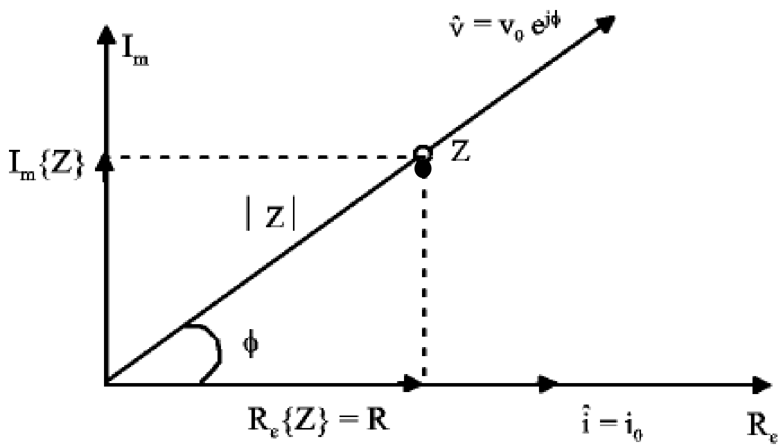


Figure XIV.3.

En outre :

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Z}\,\hat{\mathbf{i}}$$
$$\mathbf{v_0} = |\mathbf{Z}|\,\mathbf{i_0}$$
$$\mathbf{v_{eff}} = |\mathbf{Z}|\,\mathbf{i_{eff}}$$

XIV.5 : La puissance moyenne

Au chapitre XIII, nous avons vu que la puissance moyenne dissipée dans un condensateur ou dans un inducteur était toujours nulle (XIII.7 et XIII.13). Seule la partie résistive du circuit dissipe de l'énergie.
Dès lors dans tout circuit dont on aura écrit l'impédance complexe sous la forme (XIV.14), la puissance moyenne dissipée peut s'écrire :

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{R_e}\{\mathbf{Z}\}\,\mathbf{i^2_{eff}} \qquad \text{(XIV.17)}$$

où $R_e\{Z\}$ est la composante résistive de l'impédance du circuit et $I_{eff,}$ le courant efficace qui y circule et qui est aussi celui délivré par la source. Remarquons qu'ici, on ne peut remplacer $R_e\{Z\}I_{eff}$ par V_{eff} parce que $R_e\{Z\}I_{eff}$ est la tension efficace aux bornes de la composante résistive de l'impédance alors que V_{eff} est celle de tout le circuit y compris les éléments non résistifs, condensateur et inducteur ; elle vaut :

$$\mathbf{v_{eff}} = |\mathbf{Z}|\,\mathbf{i_{eff}}$$

En remplaçant dans (XIV.17) et en utilisant (XIV.15), on obtient :

$$\boxed{\langle \mathbf{p} \rangle = \mathbf{i_{eff}}\,\mathbf{v_{eff}}\,\cos\phi} \qquad \text{(XIV.18)}$$

La relation ci-dessus montre que dans un circuit comportant des inducteurs et/ou des condensateurs, la puissance n'est pas égale au produit $I_{eff}\ V_{eff}$, comme dans un circuit où il n'y aurait que des résistances; elle est toujours inférieure d'un facteur cos ϕ que l'on appelle facteur de puissance du circuit. Ce facteur vaut 1 quand il n'y a que des résistances, zéro lorsqu'il n'y a que des condensateurs ou que des inducteurs.

XIV.6 : Le phénomène de résonance

Alors que la composante resistive d'une impédance ne dépend pas de la fréquence angulaire, la partie imaginaire varie avec celle-ci. Par conséquent, dans un circuit qui n'est pas purement résistif, $|Z|$ varie avec ω et par conséquent il en va de même pour le courant qui circule dans le circuit ; pour V_{eff} fixe, I_{eff} varie avec ω. Dans certains cas $|Z|$ passe par un minimum pour une valeur de la fréquence angulaire, ω_0, appelée fréquence de résonance. Pour cette valeur le courant passe par un maximum. Etudions ce phénomène dans le cas du circuit RLC série.

La résonance dans un circuit RLC série

L'impédance, donnée par la relation (XIV.11), passe par un minimum pour $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$, c'est-à-dire pour :

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{, pour le circuit RLC série}} \qquad \text{(XIV.19)}$$

A cette fréquence $X_L = X_C$ de sorte que l'impédance est entièrement résistive $Z = R$ et $\cos\phi = 1$. Le courant maximum à la résonance vaut :

$$\boxed{i_{eff}^{max} = \frac{V_{eff}}{R} \text{, pour le circuit RLC série}} \qquad \text{(XIV.20)}$$

Par conséquent, le pic sera d'autant plus prononcé que la résistance est faible, ainsi que l'illustrent les deux exemples de la figure XIV.4 qui montre la variation du courant efficace I_{eff} en fonction de la fréquence angulaire ω.

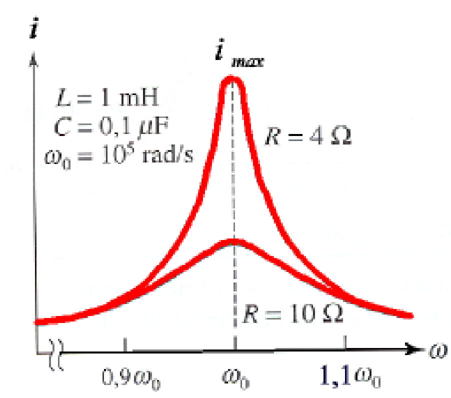


Figure XIV.4.

Dans un circuit RLC série la puissance moyenne dissipée passe elle aussi par un maximum à la résonance comme l'illustre la figure XIV.5.

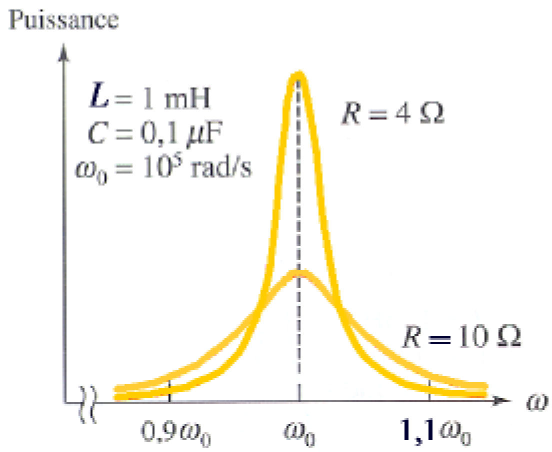


Figure XIV.5.

XIV.7 : Le facteur de qualité Q d'un circuit

On définit le facteur de qualité Q d'un circuit comme étant 2π fois l'énergie maximum emmagasinée dans le circuit divisée par l'énergie dissipée par cycle.

A titre d'exemple voyons ce que vaut ce facteur de qualité, à la résonance, dans le cas du circuit RLC série de la figure XIII.11.

Dans un tel circuit à la résonance, l'énergie emmagasinée est constante car lorsque la tension aux bornes du condensateur est maximum, le courant est nul et vice versa (le vérifier à titre d'exercice), dès lors $U_{max} = \frac{1}{2} C v_{0C}^2 = \frac{1}{2} L\, i_0^2 = L\, I_{eff}^2$. Quant à l'énergie dissipée lors d'un cycle, elle s'obtient en multipliant la puissance moyenne dissipée, par la période ou l'inverse de la fréquence f. Par conséquent :

$$\mathbf{Q_0 = 2\pi \frac{L\, i_{eff}^2}{R\, i_{eff}^2\ 1/f} = 2\pi f\ \frac{L}{R} = \omega_0 \frac{L}{R}} \qquad \text{(XIV.21)}$$

En faisant intervenir l'expression de la fréquence de résonance du circuit RLC série, obtenue en XIV.19, on obtient :

$$\boxed{Q_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}, \text{ pour le circuit RLC série à la résonance},} \qquad \text{(XIV.22)}$$

XIV.8 : La largeur de bande d'un circuit

La plupart des circuits ont une impédance qui varie avec la fréquence ce qui veut dire qu'ils ne laissent pas passer toutes les fréquences de la même manière. Un exemple typique est donné par le circuit RLC série. Le courant connaît un maximum à la fréquence de résonance : celle-ci est favorisée, ainsi que les fréquences voisines. On définit la largeur de bande d'un circuit, BW (pour Band Width en anglais), comme la différence entre deux fréquences f_2 et f_1 auxquelles le courant ne vaut plus que $1/\sqrt{2}$ fois le courant maximum, ce qui correspond à une perte de puissance de 50% par rapport à celle de la fréquence de résonance :

$$\boxed{BW = f_2 - f_1} \qquad \text{(XIV.23)}$$

Cette définition est illustrée à la figure XIV.6.

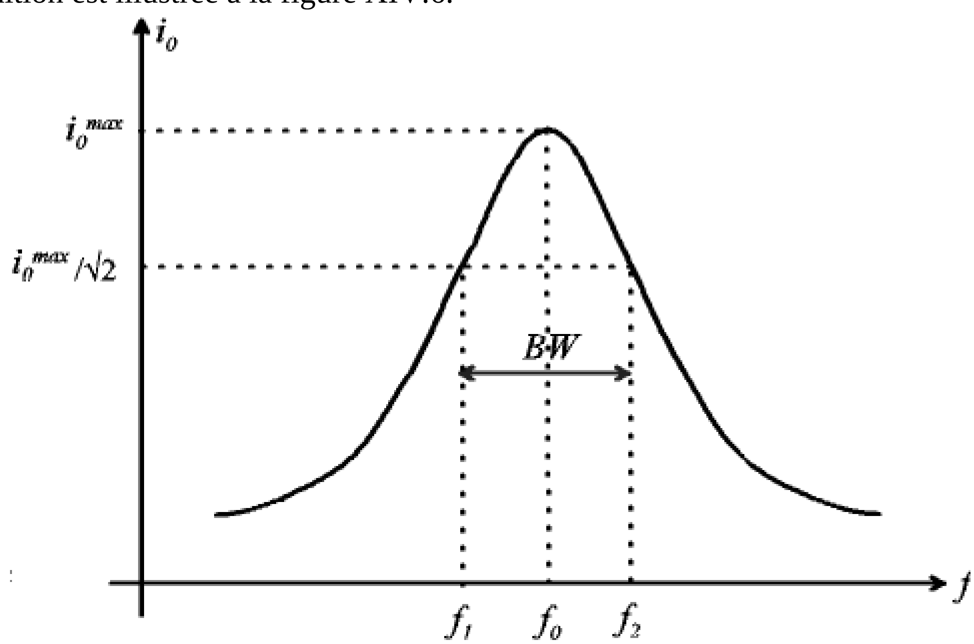


Figure XIV.6.

Nous allons voir maintenant que la largeur de bande d'un circuit peut être reliée au facteur de qualité, dans le cas du circuit RLC série.

Nous avons :

$$\mathbf{i_0^{max} = \frac{v_0}{R}}$$

Voyons maintenant à quelle fréquence, ce courant est réduit d'un facteur $\sqrt{2}$.

$$\mathbf{i_0 = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{R}},$$

ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\mathbf{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 = R^2},$$

dont les solutions sont :

$$\mathbf{\omega_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{2L}}$$

et

$$\mathbf{\omega_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + 4L/C}}{2L}}$$

La largeur de bande vaut donc :

$$\mathbf{BW = f_2 - f_1 = (\omega_2 - \omega_1)/2\pi = \frac{R}{2\pi L}}$$

En comparant au résultat (XIV.21) obtenu pour le facteur de qualité d'un tel circuit à la résonance, on voit que :

$$\boxed{\mathbf{Q_0 = \frac{f_0}{BW}\text{, pour le circuit RLC série}}} \tag{XIII.24}$$

ce qui montre que le facteur de qualité sera d'autant plus élevé que la largeur de bande est étroite relativement à la fréquence de résonance : il s'agit d'un circuit très sélectif.

XIV.9 : Application : le circuit RLC parallèle

Etudions maintenant le circuit de la figure XIV.7 qui comporte une résistance R, un inducteur d'inductance L et un condensateur de capacité C, montés en parallèle et alimentés par une source de f.é.m. alternative sinusoïdale de fréquence angulaire ω.

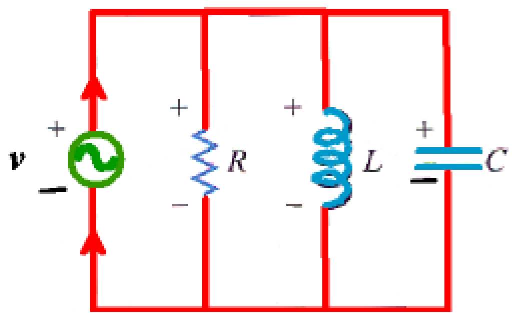


Figure XIV.7.

L'impédance

L'impédance complexe du circuit peut s'obtenir à partir de la relation (XIV.13) :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{-j/\omega C} + \frac{1}{\omega L j} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

Donc

$$Z = \frac{1}{\frac{1}{R} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)j} \qquad \text{(XIV.25)}$$

ce qui donne en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$Z = \frac{\frac{1}{R} - \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)j}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \qquad \text{(XIV.26)}$$

dont le module vaut :

$$|Z| = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}} \qquad \text{(XIV.27)}$$

Le courant

Dès lors, l'amplitude du courant délivré par la source est donnée par :

$$\boxed{i_0 = \frac{v_0}{|Z|} = v_0 \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \text{, pour le circuit RLC parallèle}} \quad \text{(XIV.28)}$$

On remarque que le courant va passer par un minimum pour $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Le déphasage

Le déphasage de la tension par rapport au courant est donné par la relation (XIV.16) :

$$tg\phi = \frac{I_m\{Z\}}{R_{e_e}\{Z\}} = \frac{-\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}{1/R}$$

Et

$$\boxed{tg\phi = R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)\text{, pour le circuit RLC parallèle}} \quad \text{(XIV.29)}$$

Ou encore (relation XIV.15) :

$$\cos\phi = \frac{R_e\{Z\}}{|Z|} = \frac{1 \Big/ \left(R\left[\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2\right]\right)}{1 \Big/ \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Donc :

$$\boxed{\cos\phi = \frac{1}{R\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}\text{, pour le circuit RLC parallèle}} \quad \text{(XIV.30)}$$

La puissance :

D'après la relation XIV.18, la puissance moyenne dissipée est donée par :

$$\langle p \rangle = i_{eff}\ v_{eff} . \cos\phi$$

$$= v_{eff} . \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} . v_{eff} . \frac{1}{R\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Conduisant à :

$$\boxed{< p > = \frac{v_{eff}^2}{R}, \text{ pour le circuit RLC parallèle,}} \qquad \text{(XIV.31)}$$

comme dans un circuit avec seulement une résistance R. Cette fois la puissance est indépendante du déphasage et de la fréquence car seul le courant qui passe dans la résistance, et n'est pas déphasé, contribue à l'énergie dissipée. Remarquons que V_{eff} / R est le courant efficace dans R et qu'il ne vaut pas I_{eff}, le courant efficace débité par la source.

Les phaseurs :

Les phaseurs des tensions du circuit peuvent s'écrire en observant que la tension aux bornes de chacun des éléments du circuit est la même et que c'est celle délivrée par la source :

$$v_R = v_C = v_L = v.$$

A ces tensions instantanées correspondent les phaseurs

$$\hat{v} = \hat{v}_R = \hat{v}_C = \hat{v}_L = v_0, \qquad \text{(XIV.32)}$$

en choisissant arbitrairement la phase de la source égale à zéro.

Les phaseurs du courant dans chacun des éléments s'obtiennent à l'aide des relations (XIV.1), (XIV.3), (XIV.5) et (XIV.8) :

$$\hat{i}_R = \frac{v_0}{R} \qquad \text{(XIV.33)}$$

$$\hat{i}_C = \frac{v_0}{-X_C\, j} = \omega C\ v_0\ j \qquad \text{(XIV.34)}$$

$$\hat{i}_L = \frac{v_0}{X_L\, j} = -\frac{v_0}{\omega L}\ j \qquad \text{(XIV.35)}$$

Quant au phaseur correspondant au courant total délivré par la source il s'obtient soit par addition :

$$\mathbf{\hat{i}} = \mathbf{\hat{i}_R} + \mathbf{\hat{i}_C} + \mathbf{\hat{i}_L} = \mathbf{v_0}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}} + \left(\omega\mathbf{C} - \frac{\mathbf{1}}{\omega\mathbf{L}}\right)\mathbf{j}\right] \qquad \text{(XIV.36)}$$

en faisant appel à la loi des nœuds :

$$\mathbf{i} = \mathbf{i_R} + \mathbf{i_C} + \mathbf{i_L},$$

soit en partant de la définition de l'impédance (XIV.1) et de la valeur de celle-ci pour le circuit RLC parallèle (XIV.25) :

$$\mathbf{\hat{i}} = \mathbf{\hat{v}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{Z}} = \mathbf{v_0}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{R}} + \left(\omega\mathbf{C} - \frac{\mathbf{1}}{\omega\mathbf{L}}\right)\mathbf{j}\right]$$

Pour $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, le courant passe cette fois par un minimum, comme le montre la relation (XIV.28) et le déphasage est alors nul, comme l'indique la relation (XIV.29) ou (XIV.30).

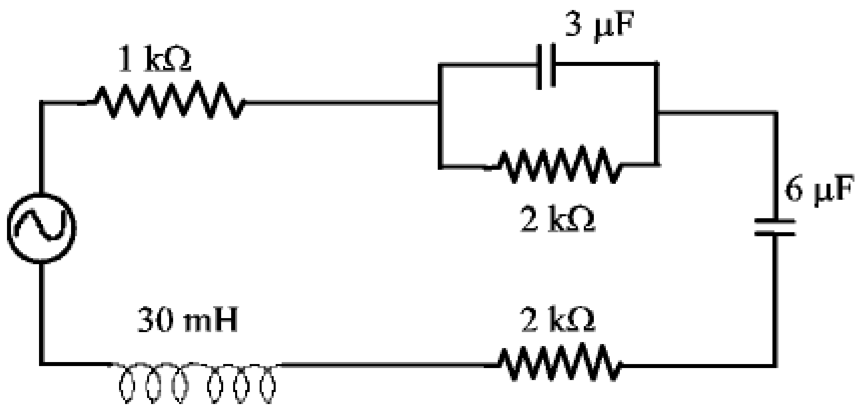
XIV.10 : Exercices

1. Une résistance de 25 Ω, un condensateur de 10 μf et un inducteur de 0,1 henry qui possède une résistance de 12 Ω sont connectés en série. Déterminer pour des fréquences de 100 Hz et de 1000 Hz : a) le module de l'impédance du circuit, b) le module de l'impédance de l'inducteur. (R : a) 103 Ω, 614 Ω ; b) 63 Ω, 628 Ω).

2. Un moteur, connecté à du 220 volts, 50 Hertz, est équivalent à une résistance de 80 ohm en série avec une self de 0,20 Henry. Que vaut le courant efficace circulant dans le moteur ? Quelle puissance électrique est fournie au moteur ?
 (R : 2, 16 A ; 374 W).

3. Soit une résistance de 2 kΩ en parallèle avec un condensateur de 3 μF. Calculez l'impédance complexe équivalente à une fréquence de 50 Hz.
 (R : 439 Ω – 828 j Ω).

4. Soit le circuit suivant alimenté par une source sinusoïde de 220 V efficace et 50 Hz :



a) Calculez son impédance complexe.
b) Calculez le module de l'impédance.
c) Quel serait le courant mesuré par un ampèremètre de résistance interne négligeable placé dans le circuit, en série avec la source ?
d) Quel est le déphasage de la source par rapport à ce courant ?
e) Quelle est la puissance moyenne dissipée par ce circuit ?
f) Ecrire le phaseur du courant délivré par la source ainsi que celui de la tension de la source en posant le déphasage du courant nul.

(R : a) (3,4 –1,3 j) kΩ ; b) 3,7 kΩ ; c) 59 mA ; d) –21° ; e) 12,1 W) ; f) $\hat{i} = 83\,\mathrm{mA}$ et $\hat{v} = 311\,e^{-j21°}\,\mathrm{V}$.