ResearchGate

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: https://www.researchgate.net/publication/311909114

Mécaniques des Milieux continus Cours et Applications

Book · January 2016

CITATIONS
0

READS
12,061

1 author:

Deghboudj Samir
Université de Tébessa

38 PUBLICATIONS **22** CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:

Project

Determination of the in-plane shear rigidity modulus of a carbon non-crimp fabric from bias-extension data test View project

All content following this page was uploaded by Deghboudj Samir on 30 December 2016.

The user has requested enhancement of the downloaded file.

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Tébessi de Tébessa
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département de Génie Mécanique

POLYCOPIE DE COURS

Présentée par :
Dr : DEGHBOUDJ Samir

MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

COURS ET APPLICATIONS

Année 2016

Préface

La mécanique des milieux continus (en abrégée M.M.C), est une branche de la mécanique qui à pour objectifs l'étude des mouvements, des déformations, des champs de contraintes au sein de milieux continus (solide ou fluides). Cette branche qui peut être considérée comme étant la science de l'ingénieur par excellence, permet de comprendre et de décrire le monde matériel qui nous entoure et les phénomènes courants qui s'y déroulent. Elle est basée sur les lois universelles de la mécanique classique, appelées lois de conservations (masse, quantité de mouvement , moment de rotation et énergie) associées aux informations portées sur les propriétés intrinsèques du milieu étudié par les équations de constitution, telles que la loi de Hooke en élasticité et celle des gaz parfaits en dynamique des fluides. La mécanique des milieux continus permet d'analyser des phénomènes physiques grâce à une description mathématique rigoureuse.

Cet ouvrage est principalement inspiré des cours de mécanique de milieux continus et élasticité donnés par l'auteur au département de génie mécanique de l'université de Tébessa. Ce travail destiné aux étudiants de la spécialité génie mécanique et ceux des cursus proches tels que le génie civil et l'hydraulique qui poursuivent des études de Licence ou de Master, représente en fait l'effort de plusieurs années d'enseignement.

Le contenu et la progression de cet ouvrage ont été conçus avec trois objectifs :

1. Apporter à l'étudiant de la discipline les éléments nécessaires pour aborder des problèmes de mécanique des solides.
2. Soutenir et contribuer aux efforts de l'enseignement de cette discipline (MMC) en mettant à la disposition de l'étudiant un document rigoureux et pratique.
3. Présenter aux étudiants, cette discipline ainsi que ses capacités et ses limites pour qu'ils enrichissent leurs culture dans le domaine.

Cet ouvrage est divisé en cinq chapitres : le premier a été consacré à un rappel de mathématique comportant les outils de bases nécessaires aux développements des différents concepts de la MMC. Le deuxième chapitre présente les équations de base de la cinématique des milieux continus. Dans le troisième chapitre nous avons présenté les tenseurs de contraintes. Nous avons aussi présenté dans le quatrième chapitre la théorie des déformations. Pour terminer le cinquième chapitre présente la relation entre les contraintes et les déformations et les concepts fondamentaux des lois de comportements pour un milieu continu élastique.

Chapitre 1
Rappel de Mathématique

1.1 Définition

Lorsqu'on étudie les phénomènes physiques on rencontre deux sortes de grandeurs, les scalaires et les vecteurs. Un **scalaire** est défini par un seul nombre indépendamment des axes de références exemples: (masse, température, volume, pression....etc.). Un **vecteur** est inséparable de la notion de direction, il est défini par sa direction, sa longueur, son point d'application et par son sens.

1.2 Composantes d'un vecteur

Soit un repère orthonormé $R(O,\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$ muni d'une base orthogonale $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$ tel que : $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, si $\vec{V}$ est un vecteur de ce repère alors il peut être décomposé en trois composantes V_1, V_2, V_3 selon les trois axes de références $\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3$. Celles-ci s'appellent coordonnées rectangulaires. $\vec{V}$ peut s'écrire comme suit:

$$\vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3 \tag{1.1}$$

Ou bien :

$$\vec{V} = \sum_{i=1}^{3} V_i\vec{e}_i \tag{2.1}$$

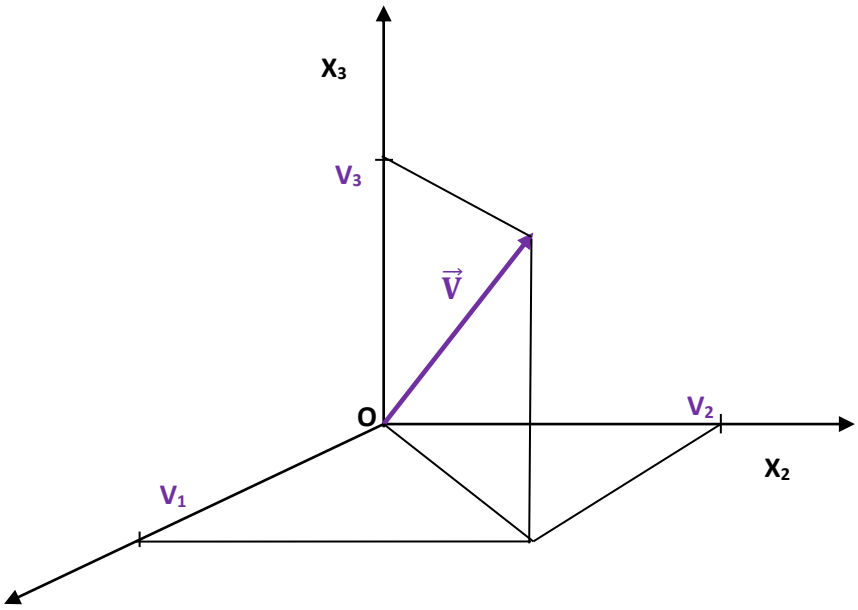


Fig.1.1 Coordonnées rectangulaires d'un vecteur

La convention d'Einstein permet d'écrire la relation (2.1) sous une autre forme plus simplifiée :

$$\vec{V} = V_i\vec{e}_i \tag{3.1}$$

1.3 Module d'un vecteur

On appelle module ou norme d'un vecteur sa longueur notée:

$$V = \|\vec{V}\| = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2} \tag{4.1}$$

1.4 Opérations sur les vecteurs

1.4.1 Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$, noté $\vec{U}.\vec{V}$ est défini par la relation suivante :

$$\vec{U}.\vec{V} = U.V.\cos(\vec{U},\vec{V}) \tag{5.1}$$

Le résultat du produit scalaire de deux vecteurs est un nombre.

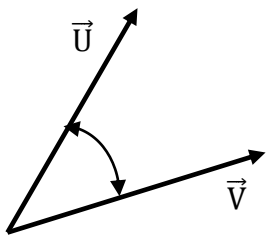


Fig.2.1 Produit scalaire de deux vecteurs

Si l'angle entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est égal à 90° alors le produit scalaire de ces vecteurs est nul. Dans la base orthogonale $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$:

$$\vec{e}_1.\vec{e}_2 = \vec{e}_3.\vec{e}_2 = \vec{e}_3.\vec{e}_1 = 0 \tag{6.1}$$

Si l'angle entre deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est égal à 0° alors le produit scalaire de ces vecteurs est U.V s'ils sont de même sens et –U.V s'ils sont opposés. Dans la base orthogonale $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$:

$$\vec{e}_1.\vec{e}_1 = \vec{e}_2.\vec{e}_2 = \vec{e}_3.\vec{e}_3 = 1 \tag{7.1}$$

Des deux dernières relations (6.1) et (7.1) on peut déduire la relation suivante:

$$\vec{e}_i.\vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases} \tag{8.1}$$

δ_{ij} est appelé symbole de Kronecker, il fait grand usage dans le calcul tensoriel.

1.4.2 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un vecteur $\vec{W}$, on le note:

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} \tag{9.1}$$

Le module de $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$ est défini par les modules de $\vec{U}$ et $\vec{V}$ et le sinus de l'angle formé par ces deux vecteurs.

$$|\vec{U} \wedge \vec{V}| = |\vec{U}|.|\vec{V}|.\sin(\vec{U}, \vec{V}) \qquad (10.1)$$

La direction de $\vec{W}$ est perpendiculaire au plan de $\vec{U}$ et $\vec{V}$, son sens est tel que $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ forment un dièdre direct .

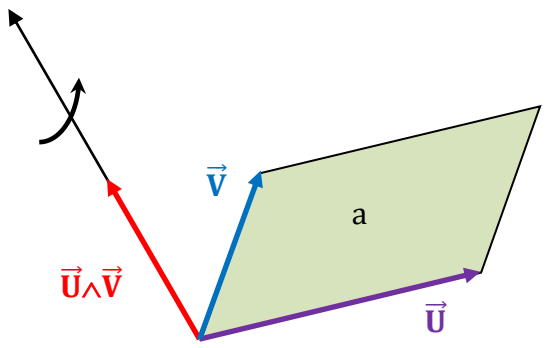


Fig.3.1 Produit vectoriel de deux vecteurs

Soient deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de composantes respectivement : $\vec{U}(U_1, U_2, U_3)$ et $\vec{V}(V_1, V_2, V_3)$ alors :

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix} \qquad (9.1)$$

Grace à la règle du déterminant on calcule ce produit vectoriel et on obtient:

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = (U_2V_3 - U_3V_2).\vec{e}_1 + (U_3V_1 - U_1V_3).\vec{e}_2 + (U_1V_2 - U_2V_1).\vec{e}_3 \qquad (10.1)$$

Propriétés :

Si une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est orthogonale alors en utilisant les propriétés du produit vectoriel on peut écrire :

$$\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_3 \qquad \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2 = 0$$

$$\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \qquad \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1 = 0 \qquad \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3 = 0$$

1.4.3 Produit Mixte

Le produit mixte est une combinaison des produits scalaire et vectoriel, de trois vecteurs $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$. Ce produit est noté : $\vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W})$ ou bien $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ Le produit mixte $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ est se calcule de la manière suivante :

$$\vec{U}.(\vec{V} \wedge \vec{W}) = \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{vmatrix} \qquad (11.1)$$

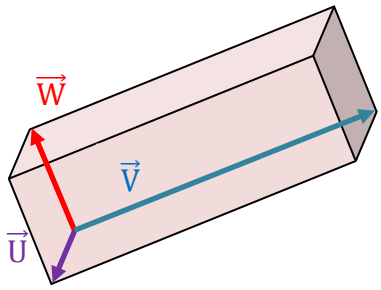


Fig.4.1 Produit mixte de trois vecteurs

1.5 Symbole de permutation ε_{ijk}

Le produit mixte $\vec{U}.(\vec{V}\wedge\vec{W})$ peut être exprimé en fonction des composantes des trois vecteurs $\vec{U},\vec{V},\vec{W}$ et du Symbole de permutation ε_{ijk}

$$\vec{U}.(\vec{V}\wedge\vec{W}) = \varepsilon_{ijk}.U_i.V_j.W_k \qquad (12.1)$$

ε_{ijk} Comporte trois indices, ce qui permet d'effectuer 6 permutations par rapport à ces indices. Par convention $\varepsilon_{ijk} = +1$ pour une permutation paire de (1,2,3), $\varepsilon_{ijk} = -1$ pour une permutation impaire de (1,2,3) et 0 si deux indices sont identiques.

- **Permutations possibles**

ε_{ijk}	Nombre de permutations	Type de permutations	Valeur affectée à ε_{ijk}
ε_{123}	0	Paire	+1
ε_{132}	1	Impaire	-1
ε_{213}	1	Impaire	-1
ε_{231}	2	Paire	1
ε_{312}	2	Paire	1
ε_{321}	1	impaire	-1

1.6 Différentiation d'un vecteur

Par rapport à un système de coordonnées $R(O,\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$, le vecteur $\vec{r}(u)$ joignant l'origine O du repère R à un point quelconque (x_1,x_2,x_3) est donné par :

$$\vec{r}(u) = x_1(u).\vec{e}_1 + x_2(u).\vec{e}_2 + x_3(u).\vec{e}_3 \qquad (13.1)$$

L'expression de la fonction vectorielle $\vec{r}(u)$, définie (x_1,x_2,x_3) comme des fonctions du paramètre (u). Quand ce dernier varie l'extrémité de $\vec{r}$ décrit la courbe (Γ) (figure 5.1).

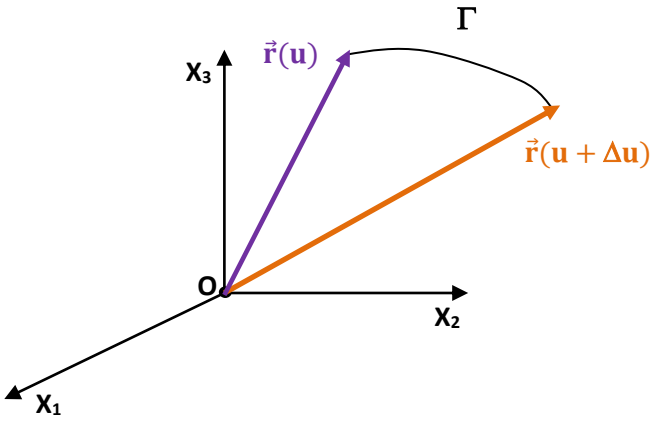


Fig.5.1 Différentiation d'un vecteur

Soit la différence vectorielle :

$$\Delta\vec{r}(u) = \vec{r}(u+\Delta u) - \vec{r}(u) \tag{14.1}$$

Et le rapport :

$$\frac{\Delta\vec{r}(u)}{\Delta u} = \frac{\vec{r}(u+\Delta u) - \vec{r}(u)}{\Delta u} \tag{15.1}$$

Si Δu est infiniment petite et tend vers zéro alors :

$$\frac{\lim}{\Delta u \to 0}\frac{\Delta\vec{r}(u)}{\Delta u} = \frac{d\vec{r}(u)}{du} \tag{16.1}$$

Cette limite représente le vecteur tangent à la courbe (Γ) au point (x_1, x_2, x_3)

$$\frac{d\vec{r}(u)}{du} = \frac{dx_1}{du}.\vec{e}_1 + \frac{dx_2}{du}.\vec{e}_2 + \frac{dx_3}{du}.\vec{e}_3 \tag{17.1}$$

Remarque:

- Dériver un vecteur revient à dériver ses composantes.
- Si le paramètre u correspond au temps alors $\frac{d\vec{r}}{dt}$ représente la vitesse et $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ l'accélération:

1.7 Champs Vectoriels

On parle du champ d'une grandeur physique si cette dernière et définie en chaque point d'un espace donné. Un champ est dit vectoriel s'il concerne une grandeur physique décrite non seulement par sa valeur mais aussi par une direction et un sens lui permettant d'être représentée par un vecteur. Un champ vectoriel peut être un champ de vitesse qui en chacun de ses points est associé à la vitesse de déplacement d'une substance ainsi qu'à la direction et au sens de son mouvement. Considérons l'écoulement d'un fluide, nous avons à chaque instant du temps (t) un champ vectoriel de vitesse noté $\vec{V}(M)$ caractérisant le déplacement des particules de ce fluide.

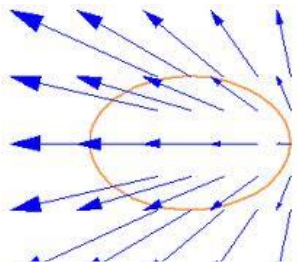


Fig.6.1 Champ vectoriel

1.7.1 Opérateur Hamiltonien

L'opérateur de Hamilton, ou Hamiltonien est un opérateur mathématique, noté ∇ (nabla) utilisé dans la mécanique classique, la physique statistique et la mécanique quantique.

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\ \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\ \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\ \vec{k} \tag{13.1}$$

- **Gradient d'une fonction scalaire**

Le gradient d'un scalaire est un vecteur. Si U= U (x, y, z) une fonction scalaire alors :

$$\overrightarrow{\text{grad}}.U = \vec{\nabla}.U = \frac{\partial U}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}.\vec{k}$$

Application :

Soit la fonction scalaire définie comme suit par $U(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Déterminer le gradient de cette fonction.

$\overrightarrow{\text{grad}}.U = \vec{\nabla}.U = 2x.\vec{i} + 2y.\vec{j} + 2z.\vec{k}$

- **Divergence d'un vecteur**

Soit un champ de vecteur differentiable alors la divergence de $\vec{V}$notée $\vec{\nabla}.\vec{V} = \text{div}\,\vec{V}$ est définie par la relation:

$$\vec{\nabla}.\vec{V} = \text{div}\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\ \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\ \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\ \vec{k}\right).\left(V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}\right) = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \tag{14.1}$$

La divergence d'un vecteur est un scalaire

- **Rotationnel d'un vecteur**

Soit $\vec{U}$ un vecteur différentiable, le rotationnel de $\vec{U}$ noté $\vec{\nabla}\wedge\vec{U}$ est :

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U_1 & U_2 & U_3 \end{vmatrix} \tag{15.1}$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{U} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial y} - \frac{\partial U_2}{\partial y}\right).\vec{e}_1 + \left(\frac{\partial U_1}{\partial z} - \frac{\partial U_3}{\partial x}\right).\vec{e}_2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} - \frac{\partial U_1}{\partial y}\right).\vec{e}_3 \tag{16.1}$$

1.7.2 Opérateur Laplacien

En analyse vectorielle, le Laplacien vectoriel est un opérateur différentiel pour les champs vectoriels. Noté Δ l'opérateur Laplacien est défini par :

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{17.1}$$

Soit U (x, y, z) une fonction scalaire alors :

$$\Delta U = \nabla^2 U = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla} U\right) = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}.\,U) \tag{18.1}$$

$$\Delta U = \mathrm{div}\vec{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\ \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\ \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\ \vec{k}\right).\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \tag{19.1}$$

1.8 Intégrales Vectoriels

Un domaine d'application important des intégrales curvilignes est en rapport avec le calcul du travail d'une force $\vec{F}$ exercée sur une particule se déplaçant le long d'un chemin **C**.

1.8.1 Intégrale simple

Soit $\vec{V}(m)$ un vecteur qui dépend d'un paramètre (m) tel que :

$$\vec{V}(m) = x(m).\vec{i} + y(m).\vec{j} + z(m).\vec{k} \tag{20.1}$$

Si x, y, z sont des fonctions continues alors :

$$\int \vec{V}(m)\,dm = \int \left(x(m).\vec{i} + y(m).\vec{j} + z(m).\vec{k}\right)dm \tag{20.1}$$

$$\int \vec{V}(m)\,dm = \vec{i}.\int x(m)dm + \vec{j}.\int y(m)dm + \vec{k}.\int z(m)dm \tag{21.1}$$

1.8.2 Intégrale double

Soient $\vec{A}$ un champ vectoriel , (S) une surface d'un volume (V) de ce champs $\vec{A}$ et (dS) un élément de la surface (S). Si $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à (dS), on appelle flux à travers (S) la quantité suivante :

$$\iint_{(s)} \vec{A}.\,d\vec{s} = \iint_{(s)} \vec{A}.\vec{n}.\,ds \tag{22.1}$$

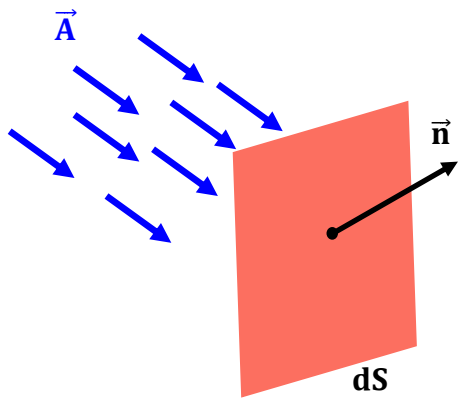


Fig.7.1 Flux à travers une surface

1.8.3 Théorème de Green-Ostrogradski,

En analyse vectorielle, le théorème de flux-divergence, appelé aussi théorème de Green-Ostrogradski, affirme l'égalité entre l'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel sur un volume dans R^3 et le flux de ce champ à travers la frontière du volume (qui est une intégrale de surface). Soit un volume (V) délimité par une surface (S) et $\vec{A}$ une fonction vectorielle, alors :

$$\iint_{(S)} \vec{A}.\,d\vec{s} = \iiint_{(V)} \nabla.\vec{A}\,.\,dV = \iiint_{(V)} \mathrm{div}.\vec{A}\,.\,dV \tag{23.1}$$

Avec :

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \tag{24.1}$$

1.9 Notation indicielle

Soit un repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$. En écriture indicielle, on peut écrire cette expression d'une façon simplifiée $R_1(O,\vec{x}_i)$ avec i = 1,2,3. Soit $\vec{V}$ un vecteur de composantes V_1, V_2, V_3 Par rapport à ce repère.

$$\vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3 = V_i\vec{e}_i \tag{25.1}$$

Lorsqu'on utilise la notation indicielle, Une répétition d'indice signifie une sommation par rapport à celui-ci (convention d'Einstein).Dans la relation (25.1) (i) est un indice muet qui varie de 1à3 dans l'espace 3D.

Remarque :
On aurai pu mettre (j) à la place de (i).

- **Expression d'un vecteur en fonction d'un vecteur**

Soit A une application linéaire qui est représentée dans la base orthogonale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ par une matrice [A] de dimension (3x3) :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{26.1}$$

Soient deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ linéairement dépendants tel que :

$$\vec{W} = A.\vec{V} \tag{26.1}$$

Les composantes de $\vec{W}$ sont données grâce à l'expression suivante :

$$\begin{cases} W_1 = a_{11}.V_1 + a_{12}.V_2 + a_{13}.V_3 \\ W_2 = a_{21}.V_1 + a_{22}.V_2 + a_{23}.V_3 \\ W_3 = a_{31}.V_1 + a_{32}.V_2 + a_{33}.V_3 \end{cases} \tag{27.1}$$

Cette expression peut être condensée en utilisant la notation indicielle.

$$W_i = A_{ij}.V_j \tag{28.1}$$

Dans cette expression l'indice (j) est muet, on aurait pu écrire :

$$W_i = A_{ik}.V_k \tag{29.1}$$

- l'indice (i) est un indice libre.
- sur une ligne, (i) est fixe et (j) varie de 1 à 3.
- sur une colonne (j) est fixe et (i) varie de 1 à 3.

En particulier, l'application identité [I] est représentée par la matrice de composantes δ_{ij} :

$$[A] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{30.1}$$

1.10 Changement de bases

Soit un espace vectoriel à 3 dimensions, considérons deux systèmes de coordonnées orthogonaux ayant le même origine et soit P un point quelconque de cet espace **(figure 8.1)**:

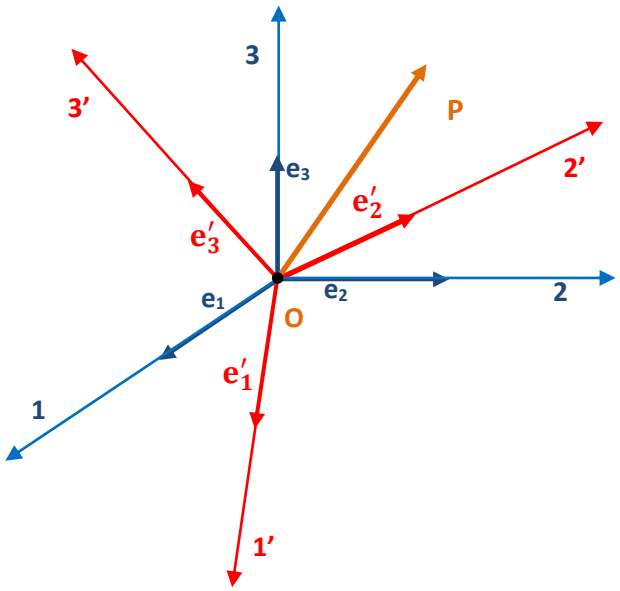


Fig.8.1 Changement de bases

Nous avons :

$$\overrightarrow{OP}_{/x_i} = x_1.\vec{e}_1 + x_2.\vec{e}_2 + x_3.\vec{e}_3 = x_i.\vec{e}_i \tag{31.1}$$

Et :

$$\overrightarrow{OP}_{/x'_i} = x'_1.\vec{e'}_1 + x'_2.\vec{e'}_2 + x'_3.\vec{e'}_3 = x'_i.\vec{e'}_i \tag{32.1}$$

Sachant que :

$$\overrightarrow{OP}_{/x_i} = \overrightarrow{OP}_{/x'_i} \tag{33.1}$$

On peut écrire:

$$\vec{e'}_1.\overrightarrow{OP}_{/x'_i} = |\vec{e'}_1|.|\overrightarrow{OP}_{/x'_i}|.\cos(\vec{e'}_1, \overrightarrow{OP}_{/x'_i}) = x'_1 \tag{34.1}$$

Ce qui conduit à :

$$x'_1 = \vec{e'}_1.\overrightarrow{OP}_{/x'_i} = \vec{e'}_1.\overrightarrow{OP}_{/x_i} = x_1\vec{e'}_1.\vec{e}_1 + x_2\vec{e'}_1.\vec{e}_2 + x_3\vec{e'}_1.\vec{e}_3 \tag{35.1}$$

De même :

$$x'_2 = \vec{e'}_2.\overrightarrow{OP}_{/x'_i} = \vec{e'}_2.\overrightarrow{OP}_{/x_i} = x_1\vec{e'}_2.\vec{e}_1 + x_2\vec{e'}_2.\vec{e}_2 + x_3\vec{e'}_2.\vec{e}_3 \tag{36.1}$$

Et :

$$x'_3 = \vec{e'}_3.\overrightarrow{OP}_{/x'_i} = \vec{e'}_3.\overrightarrow{OP}_{/x_i} = x_1\vec{e'}_3.\vec{e}_1 + x_2\vec{e'}_3.\vec{e}_2 + x_3\vec{e'}_3.\vec{e}_3 \tag{37.1}$$

On forme ainsi avec ses 3 équations le système suivant :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1\vec{e'}_1.\vec{e}_1 + x_2\vec{e'}_1.\vec{e}_2 + x_3\vec{e'}_1.\vec{e}_3 \\ x'_2 = x_1\vec{e'}_2.\vec{e}_1 + x_2\vec{e'}_2.\vec{e}_2 + x_3\vec{e'}_2.\vec{e}_3 \\ x'_3 = x_1\vec{e'}_3.\vec{e}_1 + x_2\vec{e'}_3.\vec{e}_2 + x_3\vec{e'}_3.\vec{e}_3 \end{cases} \tag{38.1}$$

D'un autre coté :

$$x_1 = \vec{e}_1.\overrightarrow{OP}_{/x_i} = \vec{e}_1.\overrightarrow{OP}_{/x'_i} = \overrightarrow{OP}_{/x'_i}.\vec{e}_1 = x'_1\overrightarrow{e'}_1.\vec{e}_1 + x'_2\overrightarrow{e'}_2.\vec{e}_1 + x'_3\overrightarrow{e'}_3.\vec{e}_1 \quad (39.1)$$

$$x_2 = \vec{e}_2.\overrightarrow{OP}_{/x_i} = \vec{e}_2.\overrightarrow{OP}_{/x'_i} = \overrightarrow{OP}_{/x'_i}.\vec{e}_2 = x'_1\overrightarrow{e'}_1.\vec{e}_2 + x'_2\overrightarrow{e'}_2.\vec{e}_2 + x'_3\overrightarrow{e'}_3.\vec{e}_2 \quad (40.1)$$

$$x_3 = \vec{e}_3.\overrightarrow{OP}_{/x_i} = \vec{e}_3.\overrightarrow{OP}_{/x'_i} = \overrightarrow{OP}_{/x'_i}.\vec{e}_3 = x'_1\overrightarrow{e'}_1.\vec{e}_3 + x'_2\overrightarrow{e'}_2.\vec{e}_3 + x'_3\overrightarrow{e'}_3.\vec{e}_3 \quad (41.1)$$

On forme aussi avec ses trois équations, le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 = x'_1\overrightarrow{e'}_1.\vec{e}_1 + x'_2\overrightarrow{e'}_2.\vec{e}_1 + x'_3\overrightarrow{e'}_3.\vec{e}_1 \\ x_2 = x'_1\overrightarrow{e'}_1.\vec{e}_2 + x'_2\overrightarrow{e'}_2.\vec{e}_2 + x'_3\overrightarrow{e'}_3.\vec{e}_2 \\ x_3 = x'_1\overrightarrow{e'}_1.\vec{e}_3 + x'_2\overrightarrow{e'}_2.\vec{e}_3 + x'_3\overrightarrow{e'}_3.\vec{e}_3 \end{cases} \quad (42.1)$$

Effectuons le produit scalaire :

$$\overrightarrow{e'}_1.\vec{e}_1 = \left|\overrightarrow{e'}_1\right|.|\vec{e}_1|.\cos\left(\overrightarrow{e'}_1, \vec{e}_1\right) = \cos\left(\overrightarrow{e'}_1, \vec{e}_1\right) = a_{11} \quad (43.1)$$

De même on peut utiliser la notation précédente pour les autres produits et on obtient :

$\overrightarrow{e'}_1.\vec{e}_2 = a_{12}$ $\quad$ $\overrightarrow{e'}_2.\vec{e}_1 = a_{21}$ $\quad$ $\overrightarrow{e'}_2.\vec{e}_3 = a_{23}$ $\quad$ $\overrightarrow{e'}_3.\vec{e}_2 = a_{32}$

$\overrightarrow{e'}_1.\vec{e}_3 = a_{13}$ $\quad$ $\overrightarrow{e'}_2.\vec{e}_2 = a_{22}$ $\quad$ $\overrightarrow{e'}_3.\vec{e}_1 = a_{31}$ $\quad$ $\overrightarrow{e'}_3.\vec{e}_3 = a_{33}$

En utilisant cette nouvelle notation les systèmes précédents (38.1) et (42.1) deviennent respectivement :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + a_{13}.x_3 \\ x'_2 = a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + a_{23}.x_3 \\ x'_3 = a_{31}.x_1 + a_{32}.x_2 + a_{33}.x_3 \end{cases} \quad (44.1)$$

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}.x'_1 + a_{21}.x'_2 + a_{31}.x'_3 \\ x_2 = a_{12}.x'_1 + a_{22}.x'_2 + a_{32}.x'_3 \\ x_3 = a_{13}.x'_1 + a_{23}.x'_2 + a_{33}.x'_3 \end{cases} \quad (45.1)$$

On peut condenser l'écriture en utilisant la notation indicielle, pour obtenir les relations de passage entre les deux systèmes de coordonnées.

$$x'_i = a_{ij}.x_j \quad (46.1)$$

$$x_1 = a_{ji}.x_j \quad (47.1)$$

Les coefficients a_{ij} forment une matrice de dimension (3x3) :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (48.1)$$

$$a_{ij} = [A] \quad (49.1)$$

$$a_{ji} = [A]^T \quad (50.1)$$

Les deux matrices $[A]$ et $[A]^T$ doivent vérifier la condition d'orthogonalité :

$$[A].[A]^T = [A]^T.[A] = [I] \tag{51.1}$$

Application

Soient un espace tridimensionnel et deux repères R et R' muni respectivement de deux bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$. Le second repère R' est obtenu à partir du premier par rotation d'un angle θ autour de la direction 3 **(figure 9.1)**.

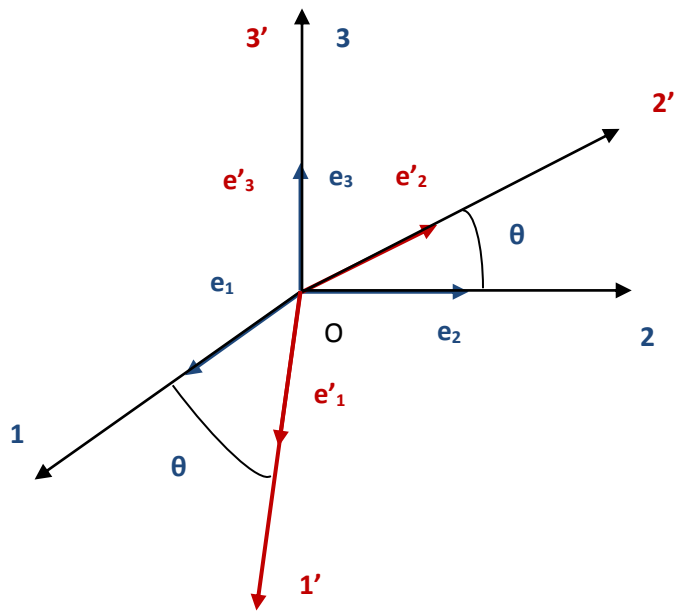


Fig.9.1 Rotation de base

La relation entre les bases $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e'}_1, \vec{e'}_2, \vec{e'}_3)$ s'écrit :

$$\vec{e'}_1 = \cos\theta.\vec{e}_1 + \sin\theta.\vec{e}_2$$

$$\vec{e'}_2 = -\sin\theta.\vec{e}_1 + \cos\theta.\vec{e}_2$$

Ainsi la matrice de changement de base est :

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.11 Définition des tenseurs

1.11.1 Définition

Un tenseur désigne un objet très général, dont la valeur s'exprime dans un espace vectoriel. On peut l'utiliser pour représenter des applications multilinéaires ou des multi vecteurs. On pourrait considérer qu'un tenseur est une généralisation à n indices du concept de matrice carrée. La différence est que la matrice n'est qu'un simple tableau de nombres qui peut être utilisé pour représenter des objets abstraits, alors que le tenseur est, comme les vecteurs et les applications multilinéaires, un objet abstrait dont les coordonnées changent lorsqu'on passe d'une représentation dans une base donnée à celle dans une autre base.

Un tenseur est un opérateur liant dans un même repère deux grandeurs physiques en un même point d'un espace à (n) dimensions. La notion de tenseur est nécessaire pour établir des relations entre effets physiques et causes dans un milieu continu. Dans un milieu continu, une cause appliquée selon une direction produit un effet orienté dans une autre direction. Les phénomènes physiques sont alors décrits par des tenseurs.

Les grandeurs, qui ne dépendent pas de la direction de mesure et mesurées par un seul nombre, sont représentés par des scalaire, ou tenseurs d'ordre 0. Les vecteurs sont des tenseurs d'ordre 1, ils représentent des grandeurs caractérisées par un nombre et une direction. Les grandeurs physiques plus complexes sont représentées par des tenseurs d'ordre supérieurs. Par rapport à un repère cartésien orthonormé un tenseur est défini comme étant un vecteur de dimension quelconque. Plusieurs notations sont adoptées pour représenter des tenseurs.

1.11.2 Ordre d'un tenseur

Un scalaire (T) est un tenseur d'ordre 0 et comporte 3^0 composantes.

Un vecteur ($\vec{T}$) est un tenseur d'ordre 1 et comporte 3^1 composantes $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$

Un tenseur (T_{ij}) est un tenseur d'ordre 2 qui comporte 3^2 composantes.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

Un tenseur d'ordre 3 (T_{ijk}) possède 3^3=27 composantes.

Un tenseur d'ordre 4 (T_{ijkl})possède 3^4=81 composantes.

Un tenseur cartésien d'ordre (n) possède (3^n) composantes est peut s'exprimer dans un repère R par :

$$T_{ijk.....} / O_{/x_i} \qquad (52.1)$$

Par rapport à un autre repère R' il est désigné par :

$$T'_{ijk.....}/\ O_{/x'_i} \tag{53.1}$$

T et T' sont reliés par la relation :

$$T'_{ijk.....} = a_{ir}.a_{js}.a_{kt}.a_{lu} \dots \dots T_{rstu.....} \tag{54.1}$$

Type	Scalaire	Vecteur	Tenseur
Ordre	0	1	2
Exemple	masse	déplacement	contrainte
Notation	ρ	$U = (U_1, U_2, U_3)$	$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$
Notation Matricielle	ρ	U_i	σ_{ij}
Nombre de composantes	$3^0 = 1$	$3^1 = 3$	$3^2 = 9$
Valeur indépendantes	1	3	9

1.11.3 Opérations sur les tenseurs

On peut effectuer deux types d'opérations sur les tenseurs, le produit tensoriel qui permet de construire un tenseur d'un ordre supérieur ou égal et la contraction entre tenseurs qui permet de construire un tenseur d'un ordre inférieur ou égal.

a) Le produit tensoriel

Le produit tensoriel noté $\otimes$ ou $\wedge$ pour le produit vectoriel permet :

1. de construire un vecteur à l'aide de deux vecteurs

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} \tag{55.1}$$

2. de construire un tenseur d'ordre 2 à partir de 2 vecteurs

$$\bar{\bar{C}} = \vec{A} \otimes \vec{B} \tag{56.1}$$

ou bien en notation indicielle

$$C_{ij} = A_i \bullet B_j \tag{57.1}$$

(à ne pas confondre avec le produit scalaire).

Application

Soit à effectuer le produit tensoriel d'un tenseur A d'ordre 2 et d'un vecteur d'ordre 1, le résultat est un tenseur C d'ordre 3 comportant 27 composantes :

$$C_{ijk} = A_{ij} \bullet B_k = \begin{bmatrix} C_{111} & C_{112} & C_{113} & C_{121} & C_{122} & C_{113} & C_{131} & C_{132} & C_{133} \\ C_{211} & C_{212} & C_{213} & C_{221} & C_{222} & C_{213} & C_{231} & C_{232} & C_{233} \\ C_{311} & C_{312} & C_{313} & C_{321} & C_{322} & 3_{213} & C_{331} & C_{332} & C_{333} \end{bmatrix}$$

Le produit d'un tenseur A d'ordre 2 et d'un autre tenseur B d'ordre 2, est un tenseur C d'ordre 4 comportant 81 composantes :

b) Contraction tensorielle

Contraction d'ordre1 notée •

1. Le produit simplement contracté ou contraction d'ordre 1 de deux vecteurs, donne un scalaire.

$$C = \vec{A} \,.\, \vec{B} \tag{58.1}$$

Ou bien en notation indicielle

$$C = A_j . B_j \tag{59.1}$$

Ici il s'agit du produit scalaire de deux vecteurs qui donne bien sure un scalaire.

2. Le produit simplement contracté ou contraction d'ordre 1 de d'un tenseur d'ordre 2 et d'un vecteur donne un vecteur.

$$\vec{C} = \overline{\overline{D}} \,.\, \vec{A} \tag{60.1}$$

Ou bien en notation indicielle

$$C_i = D_{ij} . A_j \tag{61.1}$$

Contraction d'ordre 2 notée :

1. Le produit doublement contracté ou contraction d'ordre 2 de deux tenseurs d'ordre 2 donne un scalaire.

$$C = \overline{\overline{A}} : \overline{\overline{B}} \tag{62.1}$$

Ou bien en notation indicielle

$$C = A_{ij} . B_{ji} \tag{63.1}$$

2. Le produit doublement contracté ou contraction d'ordre 2 de deux tenseurs d'ordres respectivement 4 et 2 donne un tenseur d'ordre 2.

$$C_{ij} = A_{ijkl} . B_{kl} \tag{64.1}$$

1.12 Matrices

1.12.1 Définition

On appelle matrice un tableau rectangulaire (ou carré) de nombres écrit entre crochets, une matrice de (m) lignes et (n) colonnes est dite matrice d'ordre (m x n)

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (65.1)$$

On note a_{ij} l'élément situé à l'intersection de la ligne (i) et de la colonne (j) (la ligne est toujours nommée en premier).

i : indice indiquant le numéro de la ligne
j : indice indiquant le numéro de la colonne
Si m = n la matrice est dite carrée
a_{11}, a_{22} ,....., a_{mn} : sont les éléments de la diagonale.

Application

Soit la matrice définit par ces éléments comme suit :

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

(n = 2 et m = 3) sont les dimensions de la matrice. Si m = 1, la matrice est appelée vecteur (plus précisément vecteur-colonne)

1.12.2 Quelques matrices carrées particulières

1. **Matrice unité :** Parfois notée I_n, n est la dimension de la matrice, par exemple soit la matrice unité I_4:

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (66.1)$$

2. **Matrice diagonale :** notée diag(D_{ii})

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \quad (67.1)$$

3. **Matrice triangulaire supérieure:** notée U

$$[U] = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ 0 & U_{22} & U_{23} \\ 0 & 0 & U_{33} \end{bmatrix} \quad (67.1)$$

4. **Matrice triangulaire inférieure:** notée L

$$[L] = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{22} & 0 \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{bmatrix} \quad (67.1)$$

5. **Matrice symétrique :** Une matrice carrée **A** est dite symétrique si $A_{ji} = A_{ij}$ pour tout (i) différent de (j).

1.12.3 Opérations sur les matrices

- **Addition et soustraction**

L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. Les matrices doivent avoir les mêmes dimensions. Si [A] et [B] sont deux matrices d'ordre (mxn) leur somme et une matrice [C] du même ordre telle que :

$$[C] = [A] + [B] \tag{68.1}$$

En écriture indicielle :

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \tag{69.1}$$

- **Application**

Soient deus matrice carrés [A] et [B] tels que : $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

Déterminer leur somme.

$$[C] = [A] + [B] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

- **Transposée d'une matrice**

La transposée $[A]^T$ d'une matrice [A] est la matrice obtenue en échangeant ses lignes par ses colonnes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

La transposée d'un vecteur-colonne est un vecteur-ligne.

Soit un vecteur colonne $\vec{X}(x_1, x_2, x_3)$ son transposé est $\vec{X}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

- **Application**

Déterminer la transposée de la matrice suivante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

1.12.4 Multiplication des matrices

- **Multiplication d'une matrice par un nombre :** Chaque terme de la matrice est multiplié par ce nombre.
- **Application**

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad 2.[A] = 2.\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Produit de deux matrices**

Le produit d'un vecteur ligne X^T par un vecteur colonne Y est défini comme suit :

$$X^T.Y = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n].\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1.y_1 + x_2.y_2 + \cdots .. x_n.y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i.y_i \tag{70.1}$$

Règle générale

Le produit de deux matrices A d'ordre (m x p) et B d'ordre (p x n) est une matrice C d'ordre (m x n). Les matrices A et B doivent vérifier la condition suivante : si A possède p colonnes B doit posséder obligatoirement p lignes. Les éléments de C sont donnés par la relation suivante :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj} \tag{71.1}$$

i=1..n j=1..m

- **Application**

Soient deux matrices A et B tels que :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

Déterminer le produit de ces deux matrices.

Les éléments de la matrice C = A.B sont donnés grâce à al relation (71.1).

P=3

i=1 j=1 $C_{11} = a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{12} + a_{13}.b_{13}$
i=1 j=2 $C_{12} = a_{11}.b_{12} + a_{12}.b_{22} + a_{13}.b_{32}$
i=1 j=3 $C_{13} = a_{11}.b_{13} + a_{12}.b_{23} + a_{13}.b_{33}$
i=2 j=1 $C_{21} = a_{21}.b_{11} + a_{22}.b_{21} + a_{23}.b_{31}$
i=2 j=2 $C_{22} = a_{21}.b_{12} + a_{22}.b_{22} + a_{23}.b_{32}$
i=2 j=3 $C_{23} = a_{21}.b_{13} + a_{22}.b_{23} + a_{23}.b_{33}$
i=3 j=1 $C_{21} = a_{31}.b_{11} + a_{32}.b_{21} + a_{33}.b_{31}$
i=3 j=2 $C_{32} = a_{31}.b_{11} + a_{32}.b_{22} + a_{33}.b_{32}$
i=3 j=3 $C_{21} = a_{31}.b_{13} + a_{32}.b_{23} + a_{33}.b_{33}$

- **Application**

Effectuer le produit suivant :

$$[A].[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 9 \end{bmatrix}$$

1.12.5 Produit d'une matrice par un vecteur

Le produit d'une matrice a_{ij} par un vecteur b_j est un vecteur c_i tel que :

$$C_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ik}.b_j \qquad (72.1)$$

- **Application**

Soient le produit d'une matrice A par un vecteur B tels que :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [B] = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Les éléments du vecteur [C] sont donnés grâce à al relation **(72.1)**.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3\ ]$$

i=1 $\quad C_1 = a_{11}.b_1 + a_{12}.b_2 + a_{13}.b_3$
i=1 $\quad C_2 = a_{21}.b_2 + a_{22}.b_2 + a_{23}.b_3$
i=1 $\quad C_3 = a_{31}.b_1 + a_{32}.b_2 + a_{33}.b_3$

1.12.6 Inversion des matrices carrées

Une matrice carré A est dite inversible ou régulière s'il existe une matrice carrée A^{-1} (appelée matrice inverse) telle que :

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I \qquad (73.1)$$

Si A^{-1} n'existe pas, la matrice A est dite singulière.

Chapitre 2
Cinématique des Milieux Continus

2.1 Introduction

La mécanique des milieux continus (en abrégée M.M.C), est une branche de la mécanique qui se propose d'étudier les mouvements, les déformations et les champs de contraintes au sein de milieux continus. C'est un vaste domaine qui a pour but l'étude des lois de mouvement des corps déformables (solides, liquides, gaz). Elle est caractérisée par l'interaction des lois de déformation avec celles de la thermodynamique. L'étude concerne des corps qui remplissent l'espace d'une façon continue, ininterrompue. La distance entre deux points de ces corps ne change pas au cours du mouvement. Les problèmes essentiels de la mécanique des milieux continus sont :

1. L'étude des mouvements des solides déformables.
2. L'étude des mouvements des corps flottants et immergés.
3. L'étude des mouvements non stationnaires des gaz $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$

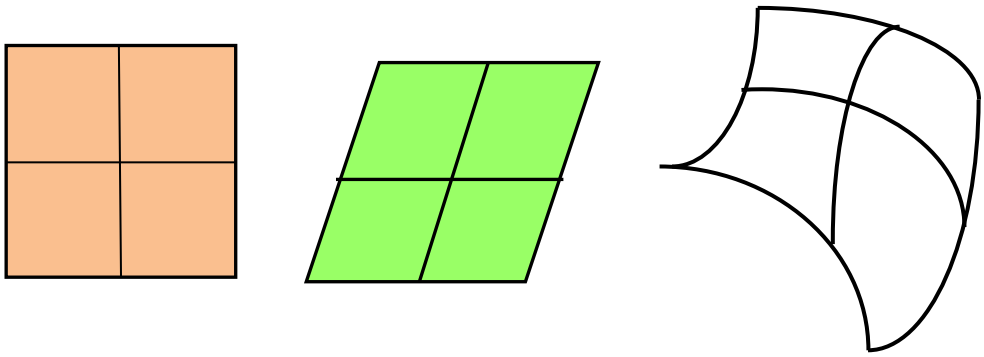


Fig.1.2 Exemples de déformations d'un milieu continu

2.2 Définitions d'un milieu continu

Définition 1 : Nous désignons par "milieu" tout solide (fluide, liquide, gaz ou plasma), déformable ou rigide, considéré d'un point de vue macroscopique.

Définition 2 : La mécanique des milieux continus tend à ignorer les détails de la structure moléculaire ou microscopique de la matière en supposant que les structures des matériaux réellement discontinues peuvent être remplacées par des milieux hypothétiques continus. Ceci implique que les caractéristiques physiques d'un volume infinitésimal (dV), peuvent être considérées les mêmes que celles obtenues pour des corps de dimensions finies.

Si une particule est définie par sa masse volumique (ρ), son volume élémentaire (dV), et par sa masse m alors:

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{1.2}$$

2.3 Principes et équations

Les lois fondamentales utilisées en mécanique des milieux continus sont :

La loi de conservation de la masse : Elle traduit le fait que la masse ne peut être, ni créée ni détruite et par conséquent elle est conservée.

La loi de conservation de la quantité de mouvement : Qui représente le principe fondamentale de la dynamique ou 2 ème loi de Newton, elle s'énonce comme suit : la somme de forces extérieures agissantes sur un corps est égale au produit de la masse de celui-ci par son accélération.

$$\sum F_i = m.\frac{d^2x_i}{dt^2} \tag{2.2}$$

La loi de conservation de l'énergie : Elle traduit le premier principe de la thermodynamique qui stipule que la quantité de chaleur gagnée par un corps sert à augmenter son énergie interne et/ou réaliser un travail.

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q \tag{3.2}$$

2.4 Le mouvement et ses représentations

2.4.1 Définition

La cinématique est l'étude du mouvement des corps sans tenir compte des causes qui le provoque. Le mouvement d'un corps déformable peut être décrit de deux manières : En suivant les particules dans leurs mouvements ou bien en se plaçant en un point fixe afin de les voir défiler. En mécanique, pour caractériser les mouvements des corps déformables on utilise une description eulérienne ou bien lagrangienne.

La description eulérienne : Cette description est très utilisée en mécanique des fluides, ainsi qu'en mécanique des milieux continus pour de grandes déformations. On cherche à déterminer la vitesse ($\vec{V}$) de la particule pour une position (M) donnée à un instant (t).

La description Lagrangienne : consiste à suivre dans le temps les particules d'un corps le long de leurs trajectoires. Ces deux approches permettent de décrire mathématiquement le mouvement des corps déformables.

2.4.2 Description Lagrangienne du mouvement

On définit le mouvement en considérant à chaque instant (t) les coordonnées matérielles d'un point M(x,y,z) appartenant à un solide (Ω_0) en fonction des coordonnées initiales M_0 (X,Y,Z) de ce point à l'instant t = 0.

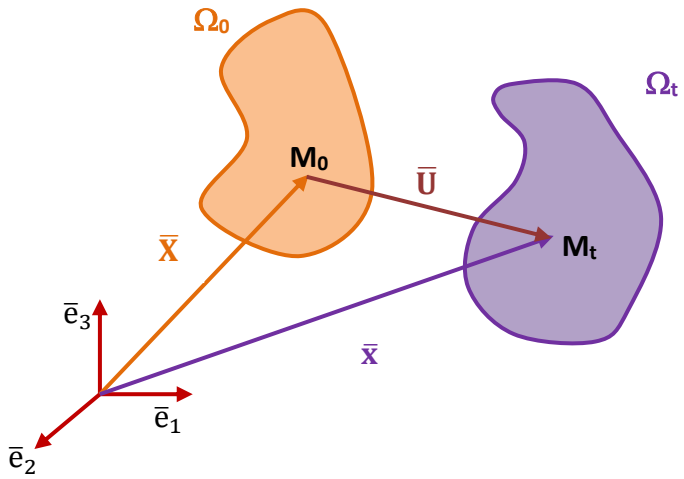


Fig.2.2 Description Lagrangienne du mouvement

Soient deux configurations (Ω_0) et (Ω), initiale et après mouvement d'un milieu continu. Le mouvement de ce milieu est complètement définit si le vecteur de position final ($\vec{r}$) est donné en fonction du vecteur position initial ($\vec{R}$) et du temps (t).

$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{R}, t) \tag{4.2}$$

Cette relation est équivalente à :

$$\begin{cases} x = x(X, Y, Z) \\ y = y(X, Y, Z) \\ z = z(X, Y, Z) \end{cases} \tag{5.2}$$

La relation **(4.2)** définit la description lagrangienne du mouvement en milieux continus. (x,y,z) sont dites les variables matérielles ou variables de Lagrange. On peut définir les grandeurs suivantes :

1. **Vitesse de Lagrange :** Elle est obtenue en dérivant le vecteur position ($\vec{r}$) par rapport au temps (t).

$$\vec{V} = \vec{V}(\vec{R}, t) = \frac{\partial \vec{r}(\vec{R}, t)}{\partial t} \tag{6.2}$$

2. **Accélération de Lagrange :** On définit l'accélération de Lagrange en dérivant deux fois par rapport au temps (t), le vecteur de position $(\vec{r})$ par rapport au temps (t).

$$\vec{A} = \vec{V}(\vec{R}, t) = \frac{\partial \vec{V}(\vec{R}, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \vec{r}(\vec{R}, t)}{\partial t^2} \tag{7.2}$$

3. **Le Jacobien:**

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X, Y, Z)} \tag{8.2}$$

4. **L'inverse du Jacobien:**

$$J^{-1} = \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(x, y, z)} \tag{9.2}$$

5. **Champs de déplacement :** le champ de déplacement est définit par le vecteur déplacement tel que :

$$\vec{U} = \vec{r} - \vec{R} \tag{10.2}$$

Par rapport à un repère orthonormé $R(X_1, X_2, X_3)$, les composantes du vecteur déplacement sont définies par :

$$\begin{cases} U_1 = x_1 - X_1 \\ U_2 = x_2 - X_2 \\ U_3 = x_3 - X_3 \end{cases} \tag{11.2}$$

Ou bien en notation indicielle :

$$U_i = x_i - X_i \tag{12.2}$$

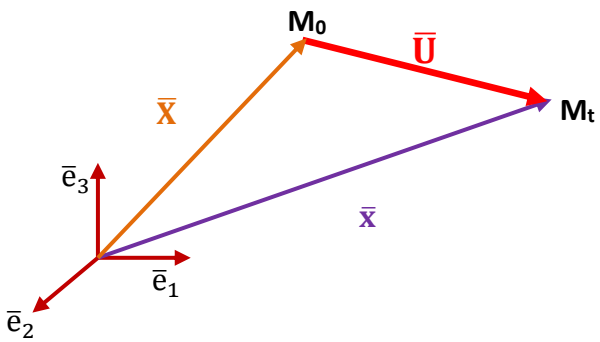


Fig.3.2 Vecteur déplacement

2.4.3 Description d'Euler

Au lieu de suivre chaque particule dans son mouvement Euler observe en fonction du temps les particules qui passent par un point géométrique (P) lié au repère, la vitesse dépend uniquement de $(\vec{r})$ et de du temps (t).

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \tag{13.2}$$

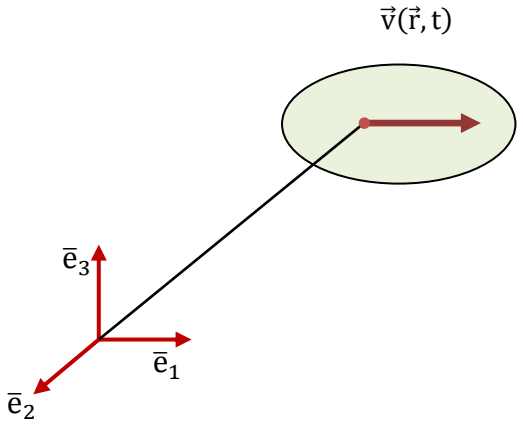


Fig.4.2 Description Eulérienne du mouvement

Les deux descriptions lagrangienne et eulériennes sont équivalentes. La description de Lagrange est adoptée plutôt dans l'étude des solides déformables. Dans le cas des fluides on préfère les variables d'Euler. La vitesse de Lagrange est égale à celle d'Euler.

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{V}(\vec{R},t) \tag{14.2}$$

Application :

Soit le mouvement décrit par les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{X_1}{1+tX_1} \\ x_2 = X_2 \\ x_3 = X_3 \end{cases}$$

Calculer les composantes du vecteur de vitesse en termes des variables lagrangiennes puis eulériennes.

1. Variables de Lagrange.

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{\partial x_1}{\partial t} = \dfrac{-X_1^2}{(1+tX_1)^2} \\ V_2 = 0 \\ V_3 = 0 \end{cases}$$

2. Variables d'Euler.

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \vec{V}(\vec{R},t) \Rightarrow \begin{cases} v_1 = V_1 \\ v_2 = V_2 \\ v_3 = V_3 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{X_1}{1 + tX_1} \quad \Rightarrow X_1 = \frac{x_1}{1 - tx_1}$$

$$v_1 = V_1 \Rightarrow v_1 = \frac{-(\frac{x_1}{1 - tx_1})^2}{(1 + t(\frac{x_1}{1 - tx_1}))^2} = -x_1^2$$

$$v_2 = V_2 \Rightarrow v_2 = 0$$

$$v_3 = V_3 \Rightarrow v_3 = 0$$

2.4.4 Accélération d'Euler

L'accélération eulérienne $\vec{a}(\vec{r}, t)$ peut être exprimée en considérant une particule localisée par $\vec{r}(x, y, z)$ à l' instant (t), qui se déplace de ($\vec{r}$ +d$\vec{r}$) au temps (t + dt). Par définition l'accélération peut être calculée par la relation :

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{\Delta\vec{v}(\vec{r}, t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t) - \Delta\vec{v}(\vec{r}, t)}{\Delta t} \tag{15.2}$$

Rappel :

Soit f une fonction à deux variables (x,y) le développement en série de Taylor de cette fonction donne :

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \theta(h, k) \tag{16.2}$$

Avec :

$$h = x - x_0$$
$$k = y - y_0$$

Utilisons la relation **(16.2)** pour développer en série de Taylor l'expression de l'accélération d'Euler **(16.2).**

$$\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \vec{v}(\vec{r}, t) = d\vec{r}\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}} + dt\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \theta(\vec{r}, t) \tag{17.2}$$

L'expression de l'accélération devient :

$$\vec{a}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \vec{v}(\vec{r}, t)}{dt} = \frac{\vec{r}\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}} + dt\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \tag{18.2}$$

Finalement on obtient :

$$\vec{a}(\vec{r}, t) == \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}.\frac{\partial\vec{v}}{\partial\vec{r}} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\nabla).\vec{v} \tag{19.2}$$

$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$: accélération locale

$(\vec{v}.\nabla).\vec{v}$: accélération mobile

En écriture matricielle, si on projette la relation vectorielle **(19.2)** par rapport aux axes de coordonnées (x,y,z), on obtient:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial t} \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_y \end{pmatrix} \tag{20.2}$$

2.4.5 Lignes de courant

Une ligne de courant est une courbe de l'espace décrivant un fluide en mouvement et qui, à tout instant, possède en tout point une tangente parallèle à la vitesse des particules du fluide. Les lignes de courant sont solution de l'équation suivante :

$$dt = \frac{d\vec{r}}{\vec{v}} \tag{20.2}$$

Ou encore :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \tag{21.2}$$

2.4.6 Trajectoire

La trajectoire d'un point est l'ensemble des positions successives occupées par ce point au cours du temps. En sciences physiques, la trajectoire est la ligne décrite par n'importe quel point d'un objet en mouvement, par rapport à un repère donné. Pour déterminer la trajectoire on est amené à résoudre l'équation suivante :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{21.2}$$

Soit :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} \tag{22.2}$$

2.5 Conservation de masse et Jacobien

Soit un milieu matériel occupant la configuration initiale (C_0) à l'instant (t) = 0 et (C) au temps t, et soit (Ω) une partie de volume de ce milieu.

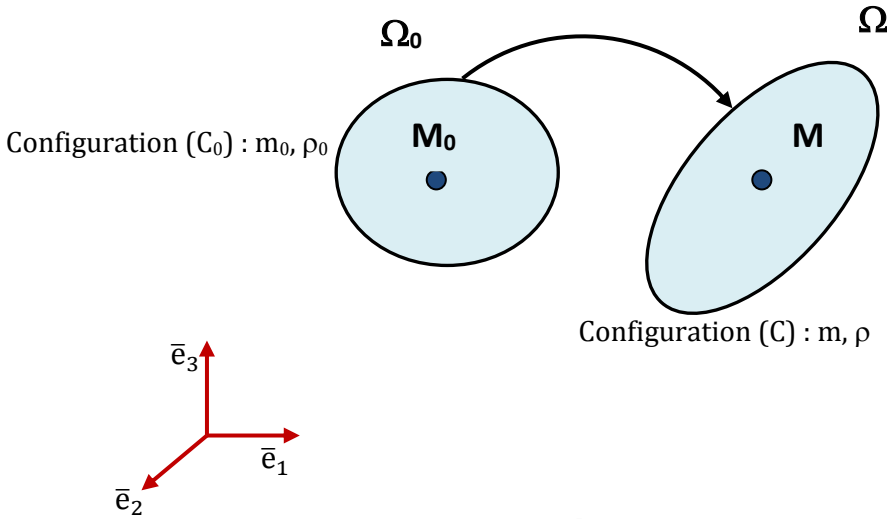


Fig.5.2 Conservation de masse

La masse volumique de ce milieu est définie par :

$$\rho = \frac{dm}{d\Omega} \tag{23.2}$$

Avec :
ρ : masse volumique
$d\Omega$: volume élémentaire
dm : masse élémentaire de la particule
$\rho(\vec{r},t)$: masse volumique du volume (Ω) de la configuration (C)
$\rho(\vec{R})$: masse volumique du volume (Ω) de la configuration (C_0)

Le principe de conservation de masse permet d'écrire :

$$\int \rho(\vec{r},t)dxdydz = \int \rho(\vec{R},t)dXdYdZ \tag{24.2}$$

Sachant que le Jacobien J de la transformation est donné par la relation :

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(X,Y,Z)} \;\Rightarrow\; J.dXdYdZ = dxdydz \tag{25.2}$$

Si on substitue (25.2) dans (24.2) on obtient:

$$\rho(\vec{r},t).J = \rho(\vec{R},t) = \rho_0 \;\Rightarrow\; \rho.J = \rho_0 \tag{26.2}$$

2.6 Equation de continuité

Considérons un milieu continu de volume (Ω) entouré par une surface (S), le flux de masse à travers un élément de surface (dS) est défini par la relation suivante :

$$\rho.\vec{V}.dS \tag{27.2}$$

Le flux total à travers la surface totale (S) est donné par la relation :

$$\iint \rho.\vec{V}.dS \tag{28.2}$$

Le taux de variation de la masse (m) dans (Ω) par unité de temps est :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\iiint \rho.d\Omega = \iiint \frac{d\rho}{dt}.d\Omega \tag{29.2}$$

S'il n'y a pas d'accumulation de masse m dans le volume (Ω), le flux de masse à travers (S) ne peut provenir que d'une diminution de la masse de l'intérieur de (Ω), alors :

$$\iint \rho.\vec{V}.dS = -\iiint \frac{d\rho}{dt}.d\Omega \tag{30.2}$$

Si on utilise le théorème d'Ostrogradsky ou de divergence on peut écrire :

$$\iint \rho.\vec{V}.dS = -\iiint \frac{d\rho}{dt}.d\Omega = \iiint \mathrm{div}(\rho\vec{V}).d\Omega \tag{31.2}$$

Ceci implique que :

$$\iiint \left(\frac{d\rho}{dt} + \mathrm{div}(\rho\vec{V})\right).d\Omega = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \mathrm{div}(\rho\vec{V}) = 0 \tag{32.2}$$

Cette relation représente l'équation intégrale de la conservation de la masse ou équation de continuité. Si la masse volumique (ρ) est constante, alors l'équation de continuité devient $\mathrm{div}(\rho\vec{V}) = 0$.

Chapitre 3
Tenseurs de contraintes

3.1 Introduction

L'étude d'un phénomène quelconque impliquant un mouvement (déformation d'une plaque, écoulement d'un fluide …) est basée sur la résolution d'équations mathématiques, décrivant les lois physiques qui régissent ce mouvement. Ces équations qui expriment généralement une conservation (de forces, de moments ou d'énergie) sont appelées les équations de conservation.

3.2 Forces dans un milieu continu

Considérons un milieu continu, il existe trois types de forces à savoir :

- Les forces intérieures
- Les forces massiques (volumiques) extérieures
- Les forces surfaciques

3.2.1 Forces intérieures

Ce sont les forces qui s'exercent entre les particules qui forment le milieu, elles sont de même module et de sens opposé, elles peuvent donc être négligées.

3.2.2 Forces massiques

Appelés forces de pesanteur, elles sont proportionnelles à la masse du milieu et s'exercent à travers son volume.

$$d\vec{F}_v = \rho . \vec{g} . dV \qquad (1.3)$$

ρ : masse volumique
$\vec{g}$: accélération de la pesanteur
dV : élément de volume

3.2.3 Forces surfaciques

Appelées aussi forces de contact, elles s'exercent suivant le principe de Cauchy qui dit (l'effet du matériau à l'extérieur de (S) sur la matériau à l'intérieur de (S) est équipollent à l'existence d'une force $d\vec{F}$ surfacique qui agit sur chaque élément de (S).

$$d\vec{F}_s = \vec{\tau} . dS \qquad (2.3)$$

$\vec{\tau}$: vecteur contrainte
dS : élément de surface

La force totale est donnée par la relation :

$$\vec{F}_s = \int_S \vec{\tau} . dS \qquad (3.3)$$

Le vecteur de contrainte $\vec{\tau}$ peut être défini en passant a la limite du rapport de $d\vec{F}_s$ sur dS quant celle-ci tend vers la valeur zéro :

$$\vec{\tau} = \lim_{ds \to 0} \frac{d\vec{F}}{dS} \tag{4.3}$$

3.3 Notion de contrainte

Un solide est en état de contrainte s'il est soumis à l'action de forces extérieures. Considérons un domaine (D) délimitant un solide (Ω) qui est en équilibre sous l'action de plusieurs forces extérieures F_i. Sous l'action de ses forces, le solide est en équilibre. On voit la naissance de contraintes à l'intérieur de (Ω). Soit (π) un plan virtuel qui partage (Ω) en deux parties **(figure 1.3)**.

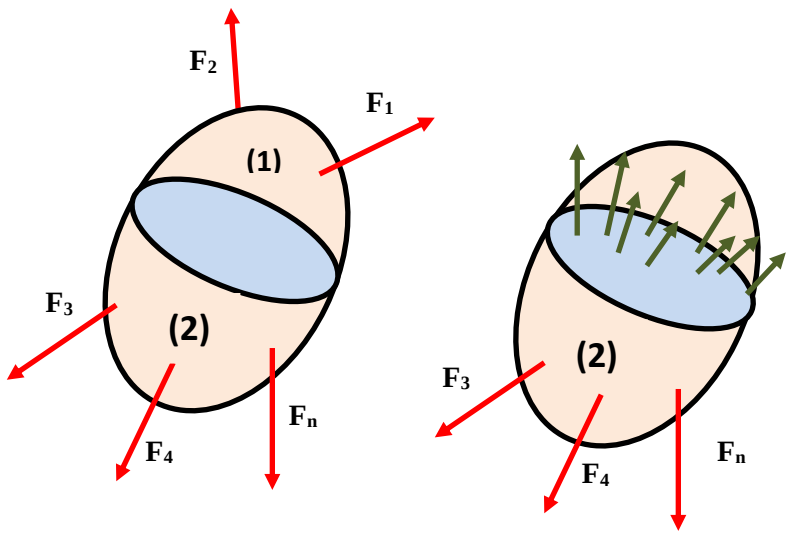


Fig.1.3 Coupure sur une facette

Isolant virtuellement la partie (2) et faisant apparaitre les contraintes internes **(figure 2.3)**.

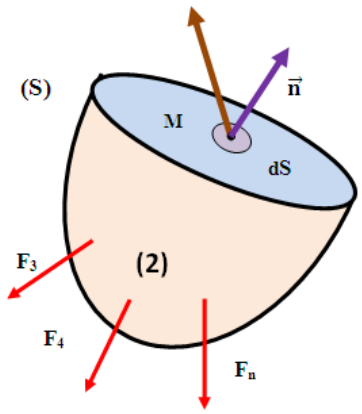


Fig.2.3 Etat de contraintes sur une facette

Appelons $d\vec{F}$ la résultante des efforts exercés par la partie (1) sur la partie (2) de (Ω), à travers l'élément de surface (dS), soit le rapport $\frac{d\vec{F}}{dS}$, en passant à la limite quand $dS \to 0$, on obtient la contrainte sur la section au point (M).

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \lim_{ds \to 0} \frac{d\vec{F}}{dS} \tag{5.3}$$

$\vec{T}(M,\vec{n})$ représente la contrainte au point M sur la facette dS, dont l'orientation est définie par la normale unitaire $\vec{n}$ extérieure à la facette (dS).

$$d\vec{F} = \vec{T}(M,\vec{n}).dS \tag{6.3}$$

Le vecteur de contrainte $(\vec{T})$ peut être décomposé en deux composantes selon deux directions. La première normale à la surface (dS), dont la normale unitaire est $(\vec{n})$. La seconde est tangentielle à (dS) et de normale unitaire $(\vec{t})$ **(figure 3.3)**.

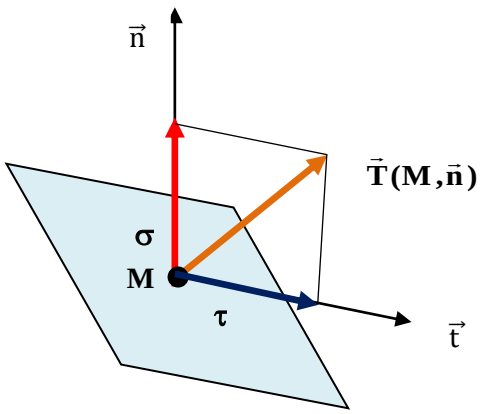


Fig.3.3 Composantes du vecteur contrainte

Projetons le vecteur $\vec{T}$ sur la normale $(\vec{n})$ et sur le plan perpendiculaire à cette normale $(\vec{t})$, soit alors :

$$\vec{T} = \vec{T}_n + \vec{T}_t \tag{7.3}$$

$\vec{T}_n$: Contrainte normale

$\vec{T}_t$: Contrainte tangentielle (cisaillement)

Notation universelle

$\vec{\sigma}_n$: Contrainte normale

$\vec{\tau}_t$: Contrainte tangentielle (cisaillement)

3.4 Tenseur de contraintes

Considérons une particule de forme parallélépipédique **(figure 4.3)** sollicitée par rapport à un repère cartésien $(O, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$.

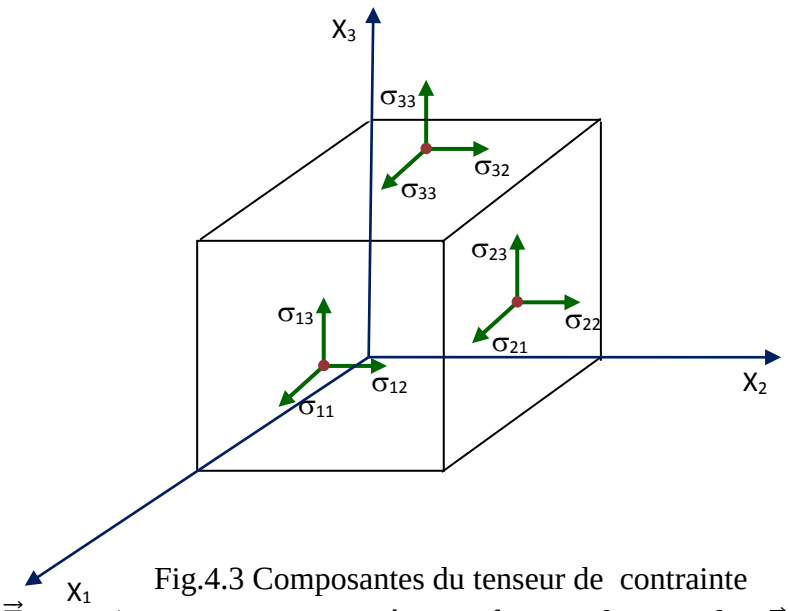


Fig.4.3 Composantes du tenseur de contrainte

Soient $\vec{T}_1$, $\vec{T}_2$ et $\vec{T}_3$ les contraintes associées aux facettes de normales $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$. Chacun de ces vecteurs de contraintes, peut être décomposé selon les trois axes $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$ **(figure 5.3)**. Les neufs composantes des trois vecteurs de contraintes peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{pmatrix} \tag{8.3}$$

$$\vec{T}_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{21} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

$$\vec{T}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{31} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{33} \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

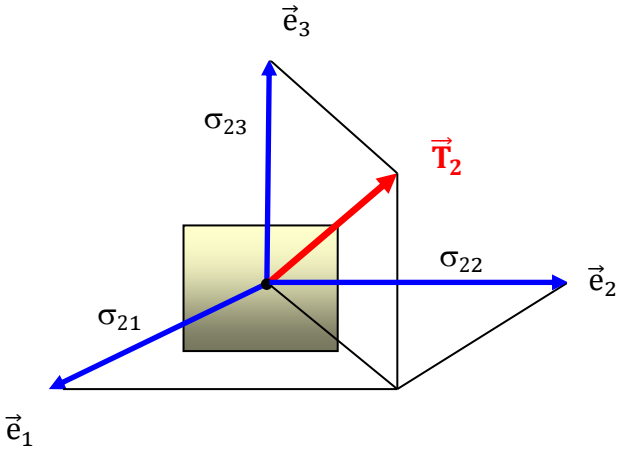


Fig.5.3 Composantes du tenseur de contrainte

Effectuons le produit scalaire :

$$\vec{T}_2.\vec{e}_1 = |\vec{T}_2|.|\vec{e}_1|.\cos(\vec{T}_2,\vec{e}_1)$$

Sachant que :

$$\cos(\vec{T}_2,\vec{e}_1) = \frac{\sigma_{21}}{T_2}$$

Alors :

$$\sigma_{21} = T_2.\cos(\vec{T}_2,\vec{e}_1)$$

Or :

$$|\vec{T}_2| = T_2$$

Et :

$$|\vec{e}_1| = 1$$

Donc :

$$\sigma_{21} = T_2.\cos(\vec{T}_2,\vec{e}_1) = \vec{T}_2.\vec{e}_1$$

De même :

$$\sigma_{22} = T_2.\cos(\vec{T}_2,\vec{e}_2) = \vec{T}_2.\vec{e}_2$$
$$\sigma_{23} = T_3.\cos(\vec{T}_2,\vec{e}_3) = \vec{T}_2.\vec{e}_3$$
$$\sigma_{11} = T_1.\cos(\vec{T}_1,\vec{e}_1) = \vec{T}_1.\vec{e}_1$$
$$\sigma_{12} = T_1.\cos(\vec{T}_1,\vec{e}_2) = \vec{T}_1.\vec{e}_2$$
$$\sigma_{31} = T_1.\cos(\vec{T}_3,\vec{e}_1) = \vec{T}_3.\vec{e}_1$$
$$\sigma_{33} = T_1.\cos(\vec{T}_3,\vec{e}_3) = \vec{T}_3.\vec{e}_3$$

On en déduit la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = \vec{T}_i.\vec{e}_j \tag{11.3}$$

i : indice indiquant la normale à la facette
j : indice indiquant la projection de la contrainte

Les composantes σ_{11} , σ_{22} et σ_{33} représentent les composantes normales du tenseur de contrainte σ_{ij}, tandis que les composantes non diagonales σ_{12} , σ_{23} et σ_{13} représentent les contraintes de cisaillement.

3.5 Vecteur contrainte sur une facette quelconque

Considérons une particule tétraédrique **(figure 6.3)**. Appliquons la loi fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{\gamma} \tag{12.3}$$

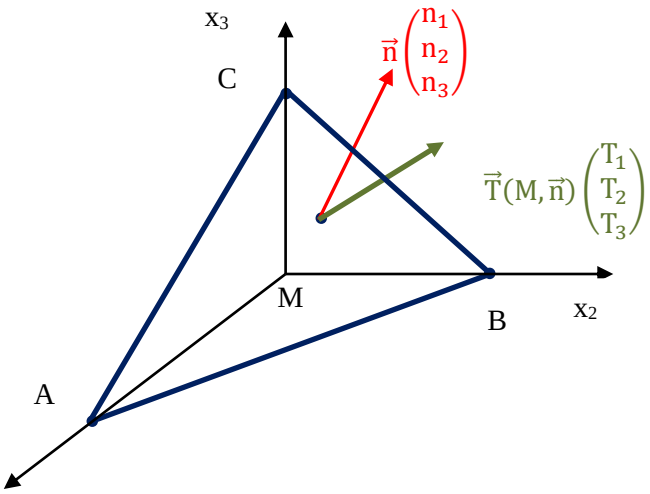


Fig.6.3 Com x1 ntes du tenseur de contraintes sur une particule de forme quelconque

Considérons le bilan des forces agissant sur la particule **(figure 6.3)** :

	Forces surfaciques				Forces volumiques
Facettes	ABC	MCA	MAB	MCB	
Aires	ds	$n_2.ds$	$n_3.ds$	$n_1.ds$	
$M\,\vec{x}_1$	T_1	$-\sigma_{21}$	$-\sigma_{31}$	$-\sigma_{11}$	$\rho.\gamma_1.dv$
$M\,\vec{x}_2$	T_2	$-\sigma_{22}$	$-\sigma_{32}$	$-\sigma_{12}$	$\rho.\gamma_2.dv$
$M\,\vec{x}_3$	T_3	$-\sigma_{23}$	$-\sigma_{33}$	$-\sigma_{13}$	$\rho.\gamma_3.dv$

Soit $d\vec{F}_1$ la résultante suivant l'axe $\vec{x}_1$ de toutes les actions s'exerçant sur la particule, alors on peut écrire :

$$d\vec{F}_1 = dm.\vec{\gamma}_1$$

$$d\vec{F}_1 = T_1.dS - (\sigma_{11}n_1dS + \sigma_{21}n_2dS + \sigma_{31}n_3dS) = T_1.dS - (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3)dS$$

D'autre part :

$$dF_1 = \rho.dV.\gamma_1$$

Alors :

$$T_1 - (\sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3) = \rho.\frac{dV}{dS}.\gamma_1$$

Si la particule est de dimensions très petites le rapport $\frac{dV}{dS}$ tends vers zéro et on peut écrire :

$$\begin{cases} T_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{21}n_2 + \sigma_{31}n_3 \\ T_2 = \sigma_{12}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{32}n_3 \\ T_3 = \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + \sigma_{33}n_3 \end{cases}$$

On peut conclure que le vecteur de contrainte $\vec{T}(T_1, T_2, T_2)$ dépend de la normale unitaire à la surface sollicitée $\vec{n}(n_1, n_2, n_2)$.

Donc :

$$\vec{T} = \sigma.\vec{n} \tag{13.3}$$

σ : Application linéaire qui lie $\vec{T}$ à $\vec{n}$

En notation indicielle :

$$T_j = \sigma_{ij}.n_i \tag{14.3}$$

σ_{ij} : Composantes du tenseur de second ordre dit tenseur cartésien de contrainte attaché à (M) ou tenseur de Cauchy.

En écriture matricielle :

$$(\vec{T}) = [\sigma](\vec{n}) \tag{15.3}$$

Ou :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{16.3}$$

La connaissance du tenseur de contrainte σ_{ij} suffit pour déterminer l'état de contraintes autour d'un point.

3.6 Symétrie du tenseur des contraintes

Etudions la rotation d'une particule parallélépipédique de dimensions (dx_1, dx_2, dx_2) (dx_1, dx_2, dx_3), autour de son centre de masse (P) **(figure 7.3)**.

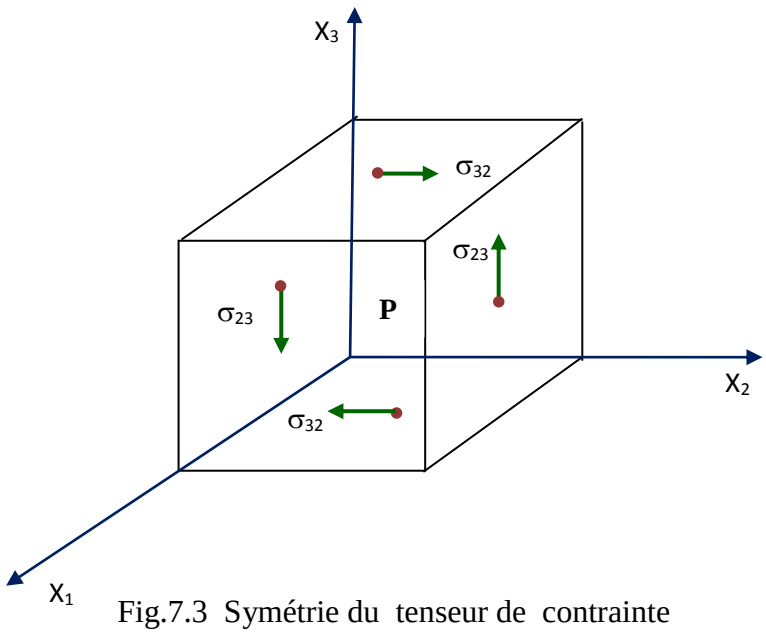


Fig.7.3 Symétrie du tenseur de contrainte

Ecrivons la loi fondamentale de la dynamique en projetant les vecteurs forces sur l'axe $P\vec{x}_1$ (seules les forces ayant un moment non nul par rapport à $P\vec{x}_1$ sont représentées).
Considérons les efforts :

$\pm\sigma_{23}dx_1.dx_3$: Forces élémentaires sur les deux facettes de normale $P\vec{x}_2$.

$\pm\sigma_{32}dx_1.dx_2$: Forces élémentaires sur les deux facettes de normale $P\vec{x}_3$.
Soit (M_1) le moment résultant de ses forces par rapport à $P\vec{x}_1$:

$$M_1 = \sigma_{23}dx_1.dx_3.\left(\frac{dx_2}{2}\right) + \sigma_{23}dx_1.dx_3.\left(\frac{dx_2}{2}\right) - \sigma_{32}dx_1.dx_2.\left(\frac{dx_3}{2}\right) - \sigma_{32}dx_1.dx_2.\left(\frac{dx_3}{2}\right)$$

Soit :

$$M_1 = \sigma_{23}dx_1.dx_3.dx_2 - \sigma_{32}dx_1.dx_2.dx_3$$

$\frac{dx_2}{2}$ et $\frac{dx_3}{2}$ représentent les bras des leviers.

Appliquons la loi fondamentale de la dynamique de rotation :

$$\sum M = I_1.\ddot{\theta}_1 \tag{17.3}$$

Avec :

$$I_1 = \frac{1}{12}m.(dx_2^2 + dx_3^2) = \frac{1}{12}\rho.dx_1.dx_2.dx_3.(dx_2^2 + dx_3^2) \tag{18.3}$$

Ce qui donne :

$$(\sigma_{23} - \sigma_{32}).dx_1.dx_2.dx_3 = \frac{1}{12}\rho.dx_1.dx_2.dx_3.(dx_2^2 + dx_3^2).\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{12}\rho.(dx_2^2 + dx_3^2).\ddot{\theta}_1 \tag{19.3}$$

Quand les dimensions de la particule sont très petites et tendent vers zéro on aura :

$$\sigma_{23} - \sigma_{32} = 0 \Rightarrow \sigma_{23} = \sigma_{32}$$

Il en est de même pour :

$$\sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \text{et} \quad \sigma_{13} - \sigma_{31} = 0 \Rightarrow \sigma_{13} = \sigma_{31}$$

Finalement on peut dire que :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{20.3}$$

D'où la symétrie du tenseur de contrainte. Si on remplace la relation **(20.3)** dans **(14.3)** on obtient :

$$T_i = \sigma_{ij}.n_j \tag{21.3}$$

En écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \tag{22.3}$$

3.7 Conséquences de la symétrie du tenseur de contrainte

- **réciprocité des contraintes tangentielles**

Sur deux facettes quelconques orthogonales, les contraintes tangentielles sont égales en module **(figure 8.3)**.

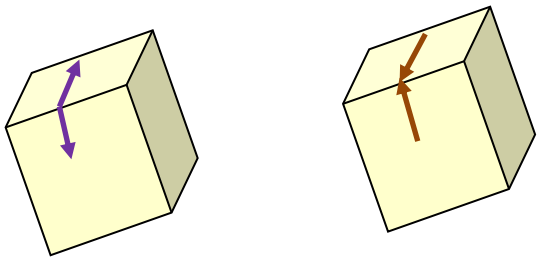


Fig.8.3 Réciprocité des contraintes tangentielles

3.8 Contraintes principales et invariants

La symétrie du tenseur de contraintes entraîne qu'il possède trois vecteurs propres $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ réels, appelés contraintes principales. En prenant ces trois vecteurs (directions principales) comme repère (repère principal) **(figure 9.3)**, le tenseur des contraintes devient diagonal.

- **Repère quelconque** $\mathbf{O}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- **Repère principal** $\mathbf{O}(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

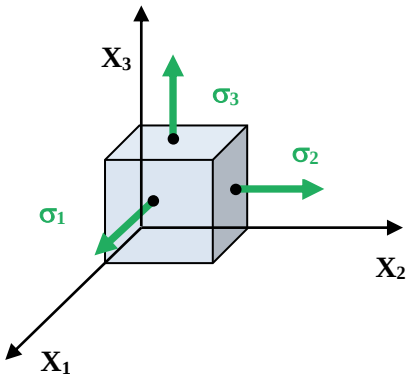


Fig.9.3 Contraintes principales

3.9 Intérêt des contraintes principales

La connaissance des contraintes principales est d'une grande importante et concerne essentiellement le calcul des structures en RDM. Un exemple important est celui du critère d'apparition de la rupture

$$\sigma_r = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \tag{23.3}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: Contraintes principales
σ_r : Contrainte de rupture

3.10 Interprétation physique

On peut trouver une particule contenant le point (P) et orientée de telle façon que ces facettes ne seront soumises qu'à des contraintes normales (contraintes principales) à l'exclusion de toutes les contraintes tangentielles **(figure 9.3)**.

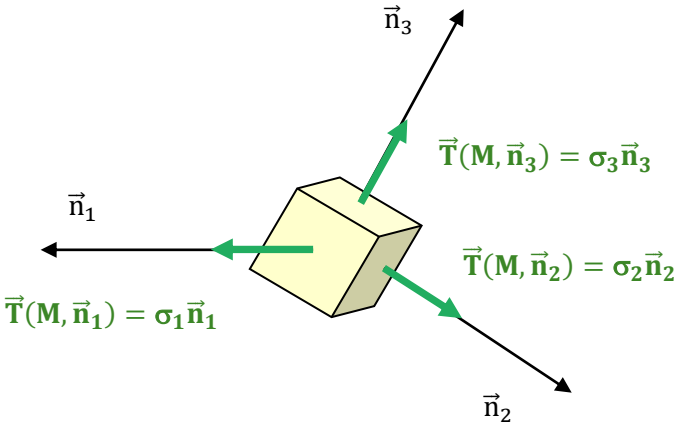


Fig.9.3 Interprétation des contraintes principales

3.11 Recherche des éléments principaux

Les contraintes principales s'obtiennent par résolution de l'équation caractéristique (24.3) à partir du repère initial quelconque $O(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$.

- **Equation caractéristique**

$$\det\left[\sigma_{ij} - \lambda.\delta_{ij}\right] = 0 \tag{24.3}$$

Soit :

$$P(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \tag{24.3}$$

$$P(\lambda)=(\sigma_{11}-\lambda)[(\sigma_{22}-\lambda).(\sigma_{33}-\lambda)-(\sigma_{23}^2)]-\sigma_{12}.[\sigma_{12}.(\sigma_{33}-\lambda)-\sigma_{13}.\sigma_{23}]+\sigma_{13}.[\sigma_{12}.\sigma_{23}-\sigma_{13}.(\sigma_{22}-\lambda)]=0$$

Soit après arrangement :

$$P(\lambda)=-\lambda+{}^3(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}).\lambda^2-(\sigma_{11}.\sigma_{22}+\sigma_{22}.\sigma_{33}+\sigma_{11}.\sigma_{33})-(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2).\lambda$$
$$+(\sigma_{11}.\sigma_{22}.\sigma_{33}+2.\sigma_{12}.\sigma_{13}.\sigma_{23}-\sigma_{11}.\sigma_{23}^2-\sigma_{22}.\sigma_{13}^2-\sigma_{23}.\sigma_{12}^2)=0$$

En introduisant les grandeurs I_1, I_2 et I_3 appelées invariants du tenseur des contraintes (24.3) devient :

$$P(\lambda)=-\lambda^3+I_1\lambda^2-I_2\lambda+I_3=0 \tag{25.3}$$

I_1, I_2 et I_3 sont définis par :

$$I_1=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}=\mathrm{trace}(\sigma_{ij}) \tag{26.3}$$

$$I_2=\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{11}\sigma_{33}-(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{13}^2) \tag{27.3}$$

$$I_3=\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}+2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23}-\sigma_{11}\sigma_{23}^2-\sigma_{22}\sigma_{13}^2-\sigma_{33}\sigma_{12}^2=\det(\sigma_{ij}) \tag{28.3}$$

Dans le repère principal $O(\vec{X}_1,\vec{X}_2,\vec{X}_3)$ les invariants I_1, I_2 et I_3 sont donnés par les relations suivantes :

$$I_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=\mathrm{trace}(\sigma) \tag{29.3}$$

$$I_2=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_1\sigma_3 \tag{30.3}$$

$$I_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3=\det(\sigma) \tag{31.3}$$

3.12 Déviateur des contraintes

On peut décomposer le tenseur de contraintes en la somme de deux tenseurs, un premier tenseur sphérique et un second déviatorique. σ représente la partie sphérique, elle est donnée par la relation **(33.3)**. S_{ij} est la partie déviatorique du tenseur de contraintes. Elle est donnée par la relation **(34.3)**.

$$\sigma_{ij}=\sigma.\delta_{ij}+S_{ij} \tag{32.3}$$

$$\sigma=\frac{I_1}{3}=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} \tag{33.3}$$

$$S_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{kk}.\delta_{ij} \tag{34.3}$$

$$S_{11}=\sigma_{11}-\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{2\sigma_{11}-\sigma_{22}-\sigma_{33}}{3}$$

$$S_{22}=\sigma_{22}-\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{2\sigma_{22}-\sigma_{11}-\sigma_{33}}{3}$$

$$S_{33}=\sigma_{33}-\frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})=\frac{2\sigma_{33}-\sigma_{11}-\sigma_{22}}{3}$$

$$S_{12}=\sigma_{12}$$

$$S_{13}=\sigma_{13}$$

$$S_{23}=\sigma_{23}$$

L'expression finale du tenseur déviatorique est donnée par la relation suivante :

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}}{3} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \frac{2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}}{3} \end{bmatrix} \tag{35.3}$$

Pour le tenseur déviatorique les invariants sont notés : J_1 ,J_2 ,J_3 et sont définis de la même manière que pour les invariants du tenseur des contraintes :

$$J_1 = \text{trace}(S_{ij}) = S_{11} + S_{22} + S_{33} = S_1 + S_2 + S_3 = 0 \tag{36.3}$$

$$J_2 = S_{11}S_{22} + S_{22}S_{33} + S_{11}S_{33} - (S_{12}^2 + S_{23}^2 + S_{13}^2) \tag{37.3}$$

$$J_3 = \det(S_{ij}) = S_1S_2S_3 \tag{38.3}$$

- **Remarque**

Les invariants sont utilisés en plasticité des solides (Critère de Von Mises).

3.13 Tenseur de contraintes particuliers

3.13.1 Etat de contraintes uni axial (traction ou compression simple)

L'état de contraintes en un point (M) est dit uni axial **(figure 10.3)**, si le tenseur des contraintes s'écrit sous la forme suivante :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{39.3}$$

Soit :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma . \vec{e}_1 \tag{40.3}$$

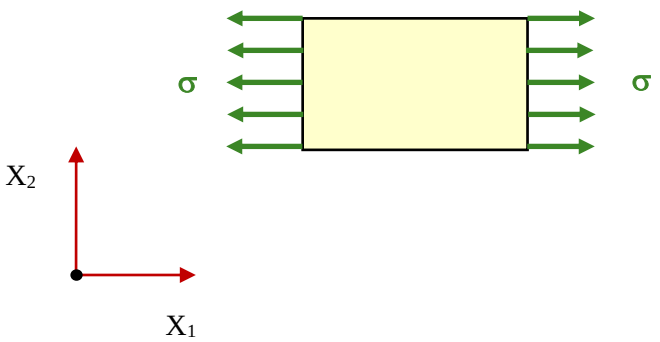


Fig.10.3 Etat de contraintes uni-axial

Cet état de contraintes est appelé état de traction simple si σ est positif et état de compression simple si σ est négatif. Si $\sigma > 0$, il s'agit d'une traction et si $\sigma < 0$ c'est une compression.

3.13.2 Etat plan de contrainte

En un point (M), l'état de contrainte est plan **(figure 11.3)**, si le tenseur des contraintes est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{41.3}$$

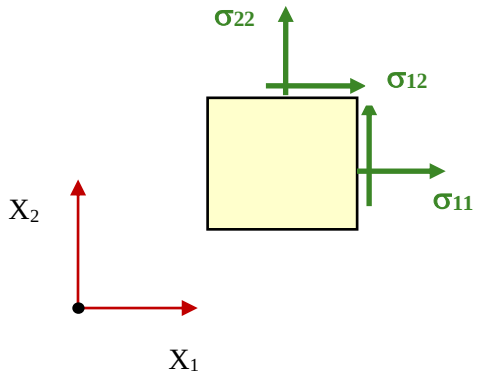


Fig.11.3 Etat plan de contraintes

Dans cet état plan de contraintes **(figure 11.3)**, les contraintes évoluent dans le plan $0(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$. Si de plus, nous avons $\sigma_{33} \neq 0$, on parle de pseudo état plan de contraintes.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{42.3}$$

3.13.3 Etat de contraintes isotrope

L'état de contraintes en un point (M) est isotrope **(figure 12.3),** si quelque soit la facette, nous avons $\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma.\vec{n}$, ainsi les trois contraintes principales sont égales et le tenseur de contraintes est de la forme suivante quelque soit le repère :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \tag{43.3}$$

Si $\sigma > 0$, il s'agit d'une tension et si $\sigma < 0$ c'est une compression.

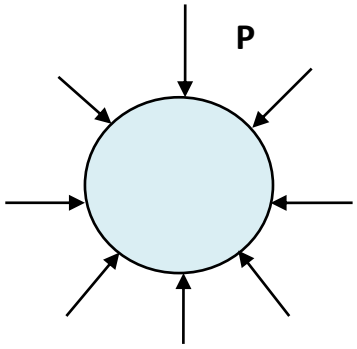


Fig.12.3 Etat de contrainte isotrope

3.13.4 Etat de cisaillement simple

Si l'état de contraintes en (M) est un état de cisaillement simple **(figure 13.3)** par rapport aux deux directions $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$, le tenseur des contraintes se réduit à :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{44.3}$$

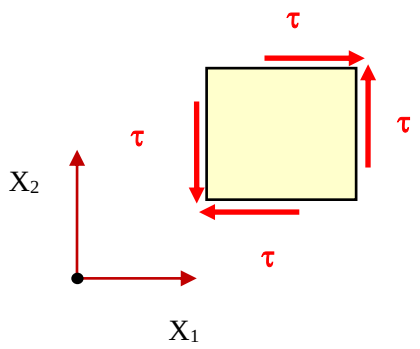


Fig.13.3 Etat de cisaillement simple

3.14 Mesure de contraintes

Les contraintes sont des forces par unité de surface (pression), l'unité de mesure des contraintes dans le système international (SI) est le Pascal (1 Pa = 1 N/m^2) dont le multiple est le méga pascal (1 MPa = 10^6 Pa = 10^6 N/m^2).

3.15 Représentation géométrique des cercles de Mohr

La représentation de Mohr consiste à représenter l'état de contraintes tridimensionnel, d'un point (P) sur un graphe bidimensionnel appelé plan de Mohr ou encore plan des contraintes : normales σ_N et tangentielles τ_t . Les axes de cordonnées choisis sont les axes principaux dont les contraintes principales sont des valeurs distinctes prises par convention dans l'ordre $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Soit un point P d'un milieu continu en état de contrainte **(figure 14.3)** la composante σ_N du vecteur contrainte $\vec{T}(P, \vec{n})$ est donnée par la relation :

$$\sigma_N = \vec{T}(P, \vec{n}).\vec{n} \tag{45.3}$$

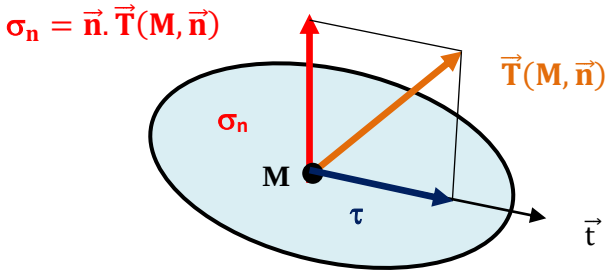


Fig.14.3 Composantes du vecteur contrainte

Pour chaque facette de normale unitaire $\vec{n}$ on obtient un point (M), extrémité du vecteur contrainte $\vec{T}(P,\vec{n})$. On se propose de chercher le lieu géométrique de ce point (M). Si on fait varier cette facette dans le plan de Mohr $O(\vec{\sigma}_N, \vec{\tau}_t)$.

Sachant que :

$$\vec{T} = \vec{\sigma}_N + \vec{\tau}_t \tag{46.3}$$

Alors :

$$T^2 = \sigma_N^2 + \tau_t^2 \tag{47.3}$$

En écriture indicielle l'expression de σ_N devient :

$$\sigma_N = \vec{T}(P,\vec{n}).\vec{n} = T_i n_i = n_i \sigma_{ij} n_j \tag{48.3}$$

Alors :

$$\sigma_N = n_i \sigma_{ij} n_j \tag{49.3}$$

Soit alors en écriture matricielle :

$$\sigma_N = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} (n_1 \quad n_2 \quad n_2) \tag{50.3}$$

En développant la relation (50.3) par rapport au repère quelconque $O(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ on obtient :

$$\sigma_N = \sigma_{11} n_1^2 + \sigma_{22} n_2^2 + \sigma_{33} n_3^2 + 2\sigma_{12} n_1 n_2 + 2\sigma_{13} n_1 n_3 + 2\sigma_{23} n_2 n_3 \tag{51.3}$$

En raisonnant dans le repère principal $O(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ où $\sigma_{ij}=0$ pour $i \neq j$ nous aurons:

$$\sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \tag{52.3}$$

Et :

$$T^2 = \sigma_N^2 + \tau_t^2 = T.T = T_i T_i = (\sigma_{ij} n_j).(\sigma_{ij} n_j) = (\sigma_{ij})^2 (n_j)^2 \tag{53.3}$$

Alors :

$$\sigma_N = \sigma_N^2 + \tau_t^2 = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \tag{54.3}$$

La normale unitaire est définie par la relation suivante :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \tag{55.3}$$

Alors :

$$\begin{cases} \sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \\ \sigma_N^2 + \tau_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \end{cases} \tag{56.3}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_N \\ \sigma_N^2 + \tau_t^2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{57.3}$$

La résolution de ce système d'équations, par la méthode de Cramer par exemple, par rapport à n_1^2, n_2^2 et n_3^2 , nous ramène à un résultat qui peut nous aider à trouver le lien géométrique du point (M) extrémité du vecteur contrainte $\vec{T}(P, \vec{n})$.

On obtient :

$$n_1^2 = \frac{\begin{bmatrix} \sigma_N^2 + \tau_t^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_N & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{\sigma_N^2 + \tau_t^2 - \sigma_N(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \tag{58.3}$$

De même :

$$n_2^2 = \frac{\sigma_N^2 + \tau_t^2 - \sigma_N(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1\sigma_3}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)} \tag{59.3}$$

$$n_3^2 = \frac{\sigma_N^2 + \tau_t^2 - \sigma_N(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \tag{60.3}$$

Posons :

- $\boldsymbol{\sigma_N^2 + \tau_t^2 - \sigma_N(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 = K_1 n_1^2}$ avec $K_1 = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)$

Cette équation est l'équation d'un cercle de centre :

$$C_1 = \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$$

Et de rayon :

$$R_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$$

De même :

- $\boldsymbol{\sigma_N^2 + \tau_t^2 - \sigma_N(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1\sigma_3 = K_2 n_2^2}$ avec $K_2 = (\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_2 - \sigma_3)$

Cette équation est l'équation d'un cercle de centre :

$$C_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$$

Et de rayon :

$$R_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

Et :

- $\boldsymbol{\sigma_N^2+\tau_t^2-\sigma_N(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2=K_3n_3^2}$ avec $K_3=(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)$

Cette équation est l'équation d'un cercle de centre :

$$C_3=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$$

Et de rayon :

$$R_3=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

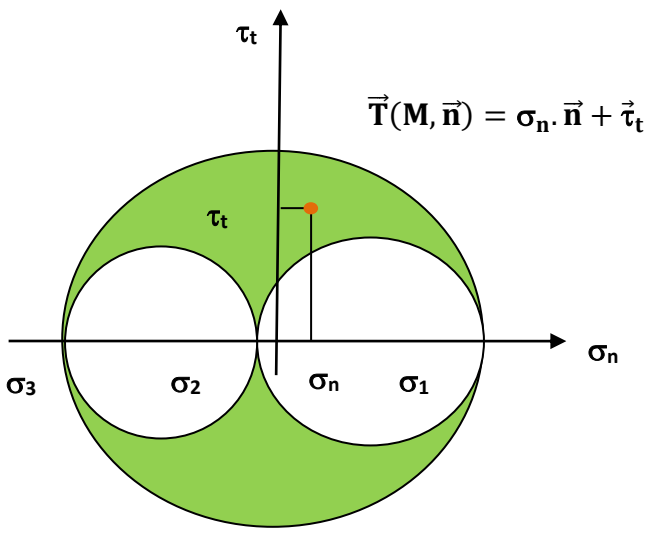


Fig.15.3 Représentation graphique des cercles de Mohr

Discussions des cas : sachant que : n_1^2, n_2^2 et n_3^2 sont strictement positifs et par convention on prend $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ nous avons :

$\boldsymbol{K_1=(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)>0}$. Ce qui implique que : $\boldsymbol{\sigma_N^2+\tau_t^2-\sigma_N(\sigma_2+\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3>0}$ et cela signifie qu'on est à l'extérieur du cercle (C_1).

$\boldsymbol{K_2=(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_2-\sigma_3)<0}$. Ce qui implique que : $\boldsymbol{\sigma_N^2+\tau_t^2-\sigma_N(\sigma_1+\sigma_3)+\sigma_1\sigma_3<0}$ et cela signifie qu'on est à l'intérieur du cercle (C_2).

$\boldsymbol{K_3=(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_2)>0}$. Ce qui implique que : $\boldsymbol{\sigma_N^2+\tau_t^2-\sigma_N(\sigma_1+\sigma_2)+\sigma_1\sigma_2>0}$ et cela signifie qu'on est à l'extérieur du cercle (C_3).

Conclusion : Lorsqu'on fait varier la facette de normale unitaire $\vec{n}$, le lieu géométrique du point (M) extrémité du vecteur contrainte $\vec{T}(P,\vec{n})$ varie dans la zone coloré en bleu **(figure 16.3)**.

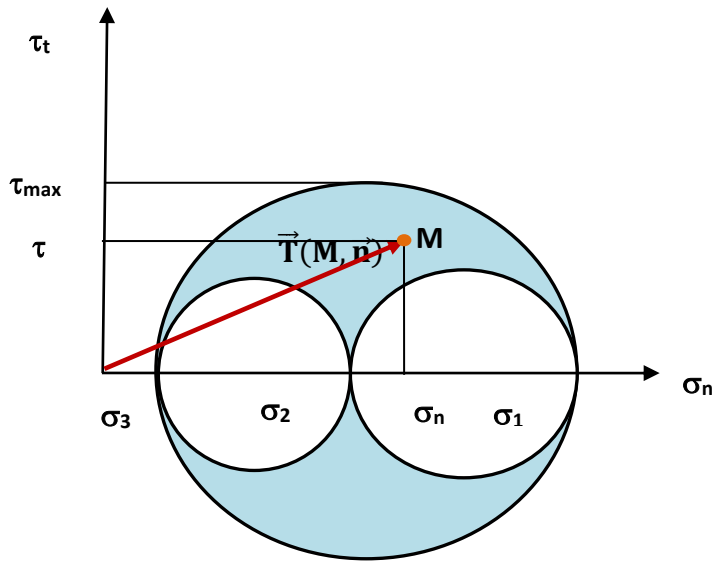
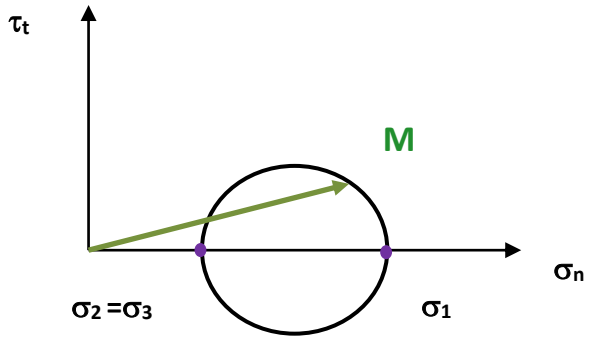


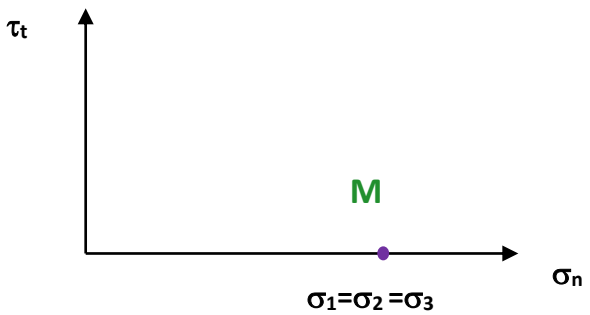
Fig.16.3 Lieu géométrique du point (M) extrémité de $\vec{T}(P,\vec{n})$

Remarques

- Si $\sigma_2 = \sigma_3$ le tri cercles de Mohr se réduit à un seul cercle, et le lieu géométrique du point (M) est le périmètre de ce cercle.



- Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ le tri cercle de Mohr ainsi que le lieu géométrique du point M se réduit à un point.



3.16 Cercles de Mohr cas de l'état plan de contraintes

Considérons l'état plan de contraintes défini dans le plan $O(\vec{x}_1,\vec{x}_2)$ par le tenseur suivant **(figure 17.3)** :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{61.3}$$

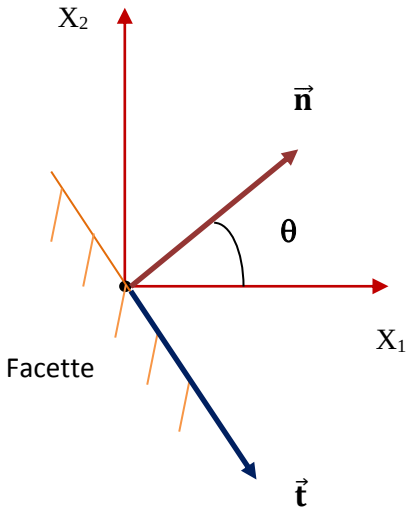


Fig.17.3 Etat plan de contraintes dans le plan $O(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$

Faisons varier la normale unitaire $\vec{n}$ dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, la direction tangentielle de la normale unitaire $\vec{t}$ est située à $\frac{\pi}{2}$ de $\vec{n}$. Le vecteur contrainte $\vec{T}$ est défini dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ par ses deux composantes T_1 et T_2 :

$$\vec{T}\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \tag{62.3}$$

En utilisant la relation (21.3) on peut écrire :

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{63.3}$$

$$\begin{cases} T_1 \\ T_2 \end{cases} = \begin{matrix} \sigma_{11}\cos\theta + \sigma_{12}\sin\theta \\ \sigma_{12}\cos\theta + \sigma_{22}\sin\theta \end{matrix} \tag{64.3}$$

Calculons les composantes normale σ_N et tangentielle τ_t du vecteur contrainte $\vec{T}$.

- **Contrainte normale**

$$\sigma_N = n_i \sigma_{ij} n_j = (\cos\theta \quad \sin\theta) \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \tag{65.3}$$

$$\sigma_N = \sigma_{11}\cos^2\theta + \sigma_{22}\sin^2\theta + 2\,\sigma_{12}\sin\theta\cos\theta \tag{66.3}$$

- **Contrainte tangentielle :**

Pour déterminer la contrainte tangentielle τ_t projetons le vecteur contrainte $\vec{T}$ suivant la direction $\vec{t}$.

$$\tau_t = T_2 \cos\theta - T_1 \sin\theta \qquad (67.3)$$

Si on remplace (64.3) dans (67.3) on aura :

$$\tau_t = \sigma_{12} \cos^2\theta + \sigma_{22} \sin\theta \cos\theta - \sigma_{11} \sin\theta \cos\theta - \sigma_{12} \sin^2\theta \qquad (68.3)$$

Soit après réarrangement :

$$\tau_t = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin\theta \cos\theta + \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \qquad (69.3)$$

Les expressions de σ_N et de τ_t sont des fonctions de l'angle θ, si on passe à 2θ en utilisant les transformations trigonométriques suivantes :

$$\begin{cases} \sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{cases} \qquad (70.3)$$

On aura :

$$2\, \sigma_{12} \sin\theta \cos\theta = \sigma_{12} \sin 2\theta$$

Et :

$$\sigma_{11} \cos^2\theta + \sigma_{22} \sin^2\theta = \frac{\sigma_{11} \cos^2\theta + \sigma_{22} \sin^2\theta + \sigma_{11} \cos^2\theta + \sigma_{22} \sin^2\theta}{2}$$

Ajoutons et retranchons les termes : $\sigma_{11} \sin^2\theta$ et $\sigma_{22} \cos^2\theta$ à cette expression :

$$\sigma_{11} \cos^2\theta + \sigma_{22} \sin^2\theta$$

$$= \frac{\sigma_{11} \cos^2\theta + \sigma_{11} \sin^2\theta - \sigma_{11} \sin^2\theta + \sigma_{22} \sin^2\theta + \sigma_{11} \cos^2\theta + \sigma_{22} \cos^2\theta - \sigma_{22} \cos^2\theta + \sigma_{22} \sin^2\theta}{2}$$

$$\sigma_{11} \cos^2\theta + \sigma_{22} \sin^2\theta$$

$$= \frac{\sigma_{11}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sigma_{22}(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + \sigma_{11} \cos^2\theta - \sigma_{22} \cos^2\theta + \sigma_{22} \sin^2\theta - \sigma_{11} \sin^2\theta}{2}$$

$$\sigma_{11} \cos^2\theta + \sigma_{22} \sin^2\theta = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + (\sigma_{11} - \sigma_{22})(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{2}$$

$$\sigma_{11} \cos^2\theta + \sigma_{22} \sin^2\theta = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} + \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{2} \cos(2\theta)$$

L'expression finale de σ_N devient :

$$\sigma_N = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2} + \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{2} \cos(2\theta) + \sigma_{12} \sin 2\theta \qquad (71.3)$$

L'expression finale de τ_t devient :

$$\tau_t = -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin\theta \cos\theta + \sigma_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$\tau_t = -\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta \qquad (72.3)$$

Par rapport au repère principal $O(\vec{X}_1, \vec{X}_2)$ l'expression du tenseur de contrainte est donnée par la relation suivante :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{73.3}$$

Alors :

$$\sigma_N = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}\cos(2\theta) \tag{74.3}$$

Et :

$$\tau_t = -\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)}{2}\sin 2\theta \tag{75.3}$$

Ces équations représentent les équations paramétriques d'un cercle dit cercle de Mohr , de centre :

$$C = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Et de rayon :

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

3.17 Angle de cisaillement nul

L'angle θ qui correspond à un cisaillement nul est noté θ_0. Sa valeur est donnée par la relation suivante :

$$\tau_t = -\frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{2}\sin 2\theta_0 + \sigma_{12}\cos 2\theta_0 = 0 \tag{76.3}$$

Ce qui implique que :

$$\mathrm{tg}\, 2\theta_0 = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} \tag{77.3}$$

- **Application**

En un point (M) d'un milieu continu l'état de contrainte est donné par le tenseur suivant :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 10 \\ 0 & 10 & 40 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer les contraintes principales σ_1 , σ_2 et σ_3
2. Déterminer les contraintes : totale T, normale σ_N et tangentielle τ_t , suivant une facette de normale unitaire $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\vec{e}_2$

1. Contraintes principales

$$\det\left[\sigma_{ij} - \lambda.\delta_{ij}\right] = 0$$

$$\det = \begin{bmatrix} 120-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 40-\lambda & 10 \\ 0 & 10 & 40-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(120-\lambda)[(40-\lambda)^2 - 10^2] = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 120 \\ \lambda_2 = 30 \\ \lambda_3 = 50 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sigma_1 = 120 \ \text{Mpa} \\ \sigma_2 = 30 \ \text{Mpa} \\ \sigma_3 = 50 \ \text{Mpa} \end{cases}$$

2. Contrainte totale

$$T_i = \sigma_{ij}.n_j$$

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & 10 \\ 0 & 10 & 40 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T_1 = 40\sqrt{3} = 69.28 \ \text{Mpa} \\ T_2 = \frac{40}{3}\sqrt{6} = 32.65 \ \text{Mpa} \\ T_3 = \frac{10}{3}\sqrt{6} = 8.16 \ \text{Mpa} \end{cases}$$

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + T_3^2} = 77.02 \ \text{Mpa}$$

3. Contrainte normale

$$\sigma_N = n_i\sigma_{ij}n_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40\sqrt{3} & \frac{40}{3}\sqrt{6} & \frac{10}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} = 66.66 \ \text{Mpa}$$

4. Contrainte tangentielle

$$\tau = \sqrt{T^2 - \sigma_N^2} = 38.58 \ \text{Mpa}$$

3.18 Equations d'équilibres

Soit une particule parallélépipédique de dimensions $(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$. Ecrivons la loi de conservation de mouvement suivant l'axe $\vec{x}_1$.

$$\int_V \rho.\vec{g}.dV + \int_S \vec{\tau}.dS = \int_V \rho.\vec{\gamma}.dV \tag{78.3}$$

$\int_V \rho.\vec{g}.dV$: force de pesanteur

$\int_S \vec{\tau}.dS$: force de surface

$\int_V \rho.\vec{\gamma}.dV$: force d'inertie

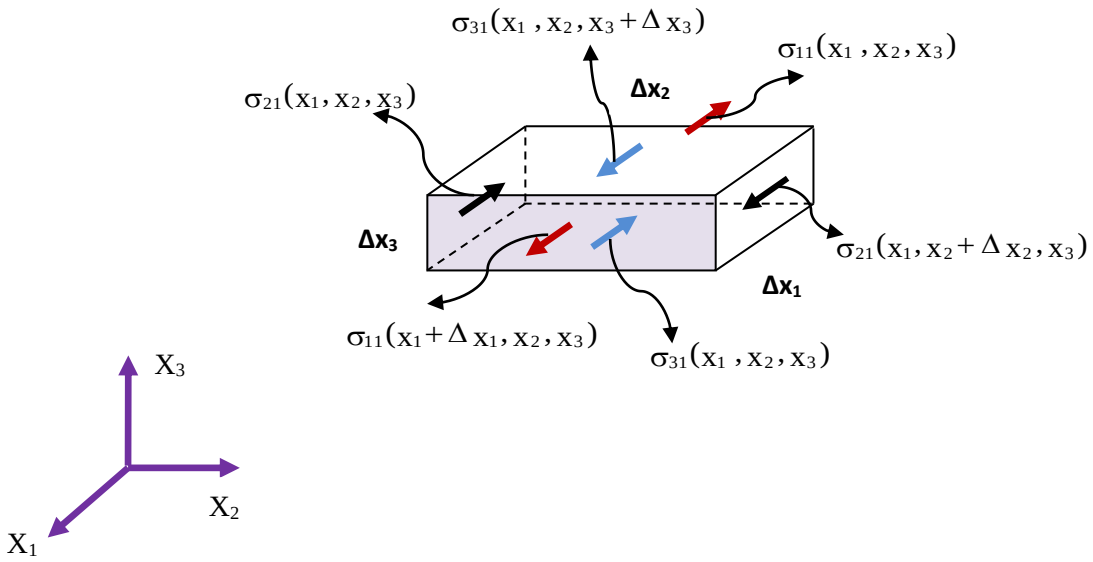


Fig.18.3 Particule soumise à un chargement extérieur

- **Forces de surface**

$$\int_S \vec{\tau}.dS = \iint_{\Delta x_2 \Delta x_3} (\sigma_{11}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3))dx_2 dx_3 + \iint_{\Delta x_1 \Delta x_3} (\sigma_{21}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3)$$

$$- \sigma_{21}(x_1, x_2, x_3))dx_1 dx_3 + \iint_{\Delta x_1 \Delta x_2} (\sigma_{31}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3))dx_1 dx_2$$

Développons en série de Taylor :

$$\sigma_{11}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) + \frac{\partial \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}\Delta x_1 - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}\Delta x_1$$

Soit :

$$\sigma_{11}(x_1 + \Delta x_1, x_2, x_3) - \sigma_{11}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}\Delta x_1$$

De même :

$$\sigma_{21}(x_1, x_2 + \Delta x_2, x_3) - \sigma_{21}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2}\Delta x_2$$

$$\sigma_{31}(x_1, x_2, x_3 + \Delta x_3) - \sigma_{31}(x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}\Delta x_3$$

Ce qui conduit à :

$$\int_S \vec{\tau}.dS = \iint_{\Delta x_2 \Delta x_3} \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} \Delta x_1 dx_2 dx_3\right) + \iint_{\Delta x_1 \Delta x_3} \left(\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_1 \Delta x_2 dx_3\right) + \iint_{\Delta x_1 \Delta x_2} \left(\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_1 dx_2 \Delta x_3\right)$$

Le volume de la particule est donné par la relation suivante :

$$V = dx_1 dx_2 dx_3 \tag{79.3}$$

La particule étant de dimensions infinies on peut utiliser l'approximation $dx \approx \Delta x$

Alors l'expression finale des forces de surface est :

$$\int_S \vec{\tau}.dS = \iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3 \tag{80.3}$$

- **Forces de volume**

$$\iint_V \rho(\gamma_{x1} - g_{x1}).dx_1 dx_2 dx_3 \tag{81.3}$$

Projetons cette la relation **(81.3)** suivant l'axe $\vec{x}_1$:

$$\int_V \rho.\vec{\gamma}.dV - \int_V \rho.\vec{g}.dV = \int_V \rho.(\vec{\gamma} - \vec{g}).dV \tag{81.3}$$

A la fin la projection sur l'axe $\vec{x}_1$ de toutes les forces de surface et de volume conduit à la relation suivante :

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho g_{x1} = \rho \gamma_{x1} = \rho.\frac{dx_1^2}{dt^2} \tag{82.3}$$

De la même manière la projection sur les deux autres axes $\vec{x}_2$ et $\vec{x}_3$ conduit à :

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho g_{x2} = \rho \gamma_{x2} = \rho.\frac{dx_2^2}{dt^2} \tag{84.3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho g_{x3} = \rho \gamma_{x3} = \rho.\frac{dx_3^2}{dt^2} \tag{85.3}$$

On pose :

$$\rho g_{xi} = f_i \tag{86.3}$$

L'expression finale des équations d'équilibre devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3} + f_1 = \rho.\frac{dx_1^2}{dt^2} \\ \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} + f_2 = \rho.\frac{dx_2^2}{dt^2} \\ \frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3} + f_3 = \rho.\frac{dx_3^2}{dt^2} \end{cases} \tag{87.3}$$

En notation indicielle :

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \mathrm{div}(\sigma_{ij}) = \rho.\frac{dx_i^2}{dt^2} \tag{88.3}$$

3.19 Contraintes octaédriques

Les contraintes ont tendance à se propager suivant des plans également inclinées par rapport aux trois axes du repère principal $O(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$. La normale unitaire $\vec{n}$ forme des angles égaux avec les axes $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$. Dans ce cas elle est appelée trisectrice du dièdre formé par les axes $\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3$. La contrainte suivant cette direction est appelée contrainte octaédrique.

3.19.1 Contrainte normale octaédrique

Soient σ_1, σ_2 et σ_3 les contraintes principales, la normale suivant la trisectrice est définie comme suit :

$$n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{89.3}$$

Sachant que la contrainte normale dans le repère principal est donnée par la relation **(52.3)** :

$$\sigma_N = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

Alors si on substitue **(89.3)** dans **(52.3)** on obtient:

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{I_1}{3} \tag{90.3}$$

3.19.2 Contrainte tangentielle octaédrique

La contrainte tangentielle est donnée par la relation **(47.3)** :

$$T^2 = \sigma_N^2 + \tau_t^2$$

Alors si on substitue **(90.3)** dans **(47.3)** on obtient:

$$\tau_{oct}^2 = T^2 - \sigma_{oct}^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - (\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3))^2 \tag{91.3}$$

Après développement de cette expression la contrainte tangentielle octaédrique est donnée par la relation :

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9}\left(2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1.\sigma_2 - 2\sigma_2.\sigma_3 - 2\sigma_1.\sigma_3\right) \tag{92.3}$$

Soit aussi :

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9}\left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right) \tag{93.3}$$

Chapitre 4
Théorie des déformations

4.1 Généralités

On dit qu'un corps est déformé lorsqu'il y a changement des positions relatives des points de ce corps. Le cas le plus simple est celui d'une barre suspendue verticalement et soumise à un effort (F) sur ses deux extrémités **(figure 1.4)**.

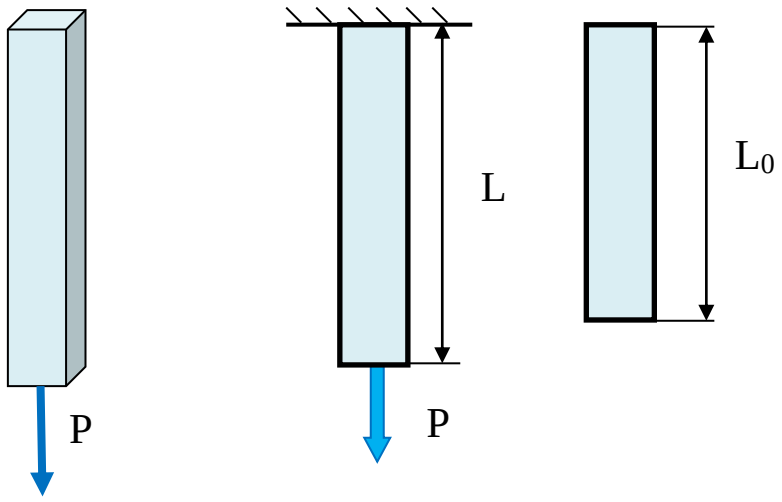


Fig.1.4 Barre soumise à son propre poids

Si on note par (L_0) sa longueur avant chargement et par (L) celle après déformation, alors la quantité ($\frac{L-L_0}{L}$) est appelée déformation longitudinale ou extension notée (ε) .Un autre type de déformation est celle reliée au changement de l'angle que fait entre eux les deux cotés d'un élément appelé généralement distorsion et notée (γ) **(figure 1.4)**.

Fig.2.4 Exemple de déformation angulaire (distorsion)

4.2 Définition

On appelle déformation, un changement de distance entre deux points matériels d'un milieu continu, elle s'accompagne généralement d'un déplacement ainsi que d'un changement de forme.

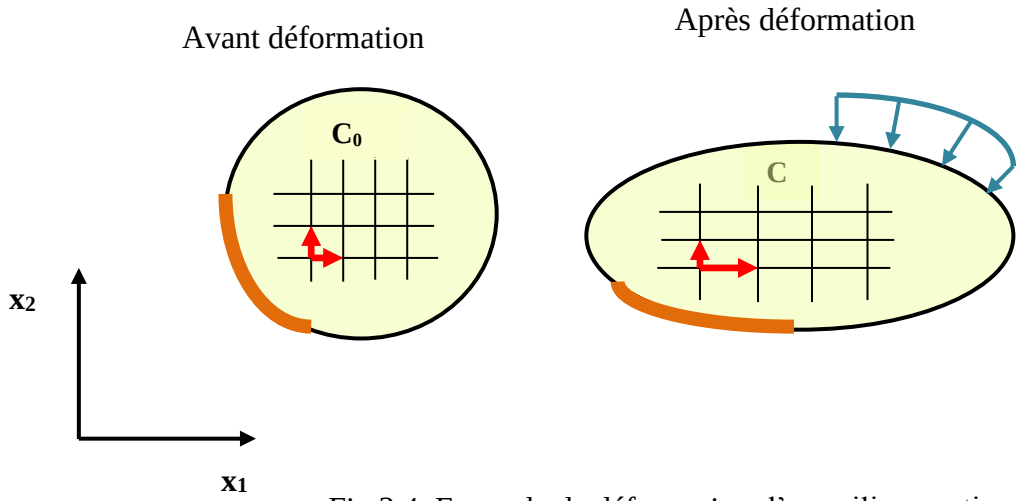


Fig.3.4 Exemple de déformation d'un milieu continu

4.3 Exemple de déformations simples

Nous présentons ci-dessous quelques exemples de déformation de milieux continus :

- **Cisaillement simple :** cas d'une plaque sollicitée dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ **(figure 4.4)**, les équations du mouvement sont de la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 + b(t).X_2 \\ x_2(t) = X_2 \\ x_3(t) = X_3 \end{cases} \qquad (1.4)$$

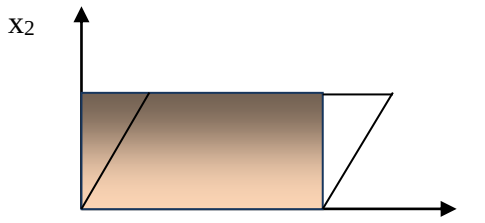


Fig.4.4 cisaillement simple

- **déformation triaxiale homogène :** cas d'un cube en acier chauffé, celui-ci se dilate selon les trois directions $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ **(figure 5.4)**. les équations du mouvement sont de la forme :

$$\begin{cases} x_1(t) = \lambda_1(t).X_1 \\ x_2(t) = \lambda_2(t).X_2 \\ x_3(t) = \lambda_3(t).X_3 \end{cases} \qquad (2.4)$$

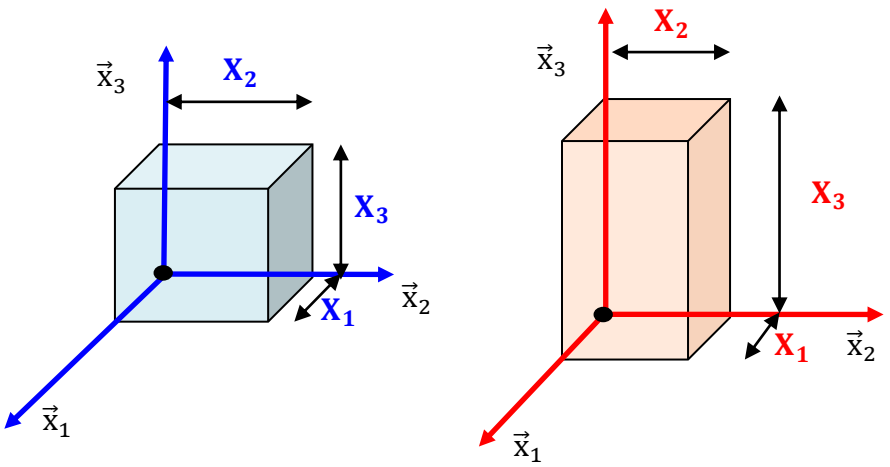


Fig.5.4 Déformation cubique d'un milieu continu

4. 4 Déplacement

Soit un milieu continu de configuration initiale (M_0) et (M) à l'instant (t). Un point matériel (M) appartenant à ce milieu est positionné initialement par $\vec{R}$ (à t = 0) et $\vec{r}$ (à l'instant (t)). Le vecteur déplacement noté $\vec{U}$ est donné par la relation :

$$\vec{U} = \vec{r} - \vec{R} \tag{3.4}$$

Ce vecteur peut être exprimé en coordonnées lagrangienne :

$$\vec{U} = \vec{U}(X_j, t) \tag{4.4}$$

Ou bien eulérienne :

$$\vec{u} = \vec{u}(x_j, t) \tag{5.4}$$

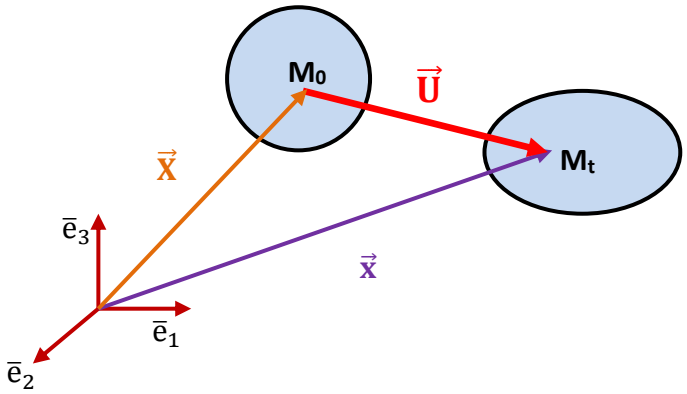


Fig.6.4 Vecteur déplacement

Application :

Pour le cas du cisaillement simple on se propose de déterminer les composantes du vecteur déplacement en coordonnées lagrangienne puis eulérienne.

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 + b(t).X_2 \\ x_2(t) = X_2 \\ x_3(t) = X_3 \end{cases}$$

Le vecteur de déplacement est donné par la relation vectorielle :

$\vec{U} = \vec{r} - \vec{R}$

Ou indicielle :

$U_i = x_i - X_i$

- **Coordonnées de Lagrange :** $U_i = U(X_i)$

$$\begin{cases} U_1 = x_1 - X_1 = X_1 + b(t).X_2 - X_1 = b(t).X_2 \\ U_2 = x_2 - X_2 = X_2 - X_2 = 0 \\ U_3 = x_3 - X_3 = X_3 - X_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{U} = \begin{pmatrix} b(t).X_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- **Coordonnées d'Euler :** $u_i = u(x_i)$

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 + b(t).X_2 \\ x_2(t) = X_2 \\ x_3(t) = X_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} X_1 = x_1 - b(t).x_2 \\ X_2 = x_2 \\ X_3 = x_3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_1 = x_1 - (x_1 - b(t).x_2) = b(t).x_2 \\ u_2 = x_2 - X_2 = 0 \\ u_3 = x_3 - X_3 \end{matrix}$$

Alors :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} b(t).x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.5 Gradient de déformation

Pour exprimer le gradient de déformation, considérons un voisinage V(x) d'un point matériel, positionné par (x) et appartenant à un milieu continu; soit (y) un point appartenant au voisinage de V(x) et proche de (x) **(figure 7.4)**. Le déplacement à l'intérieur de V(x) peut être représenté par un développement en série de Taylor du vecteur position $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

$$\begin{cases} x_i = x_i(X_j, t) \\ y_i = x_i + \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} \end{cases} \tag{6.4}$$

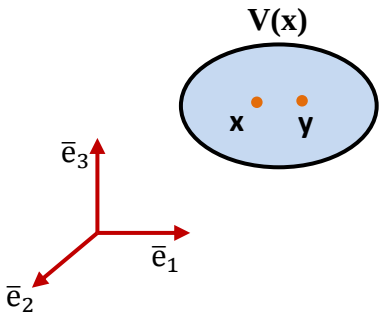


Fig.7.4 Voisinage d'un point matériel

On définit le tenseur gradient de la transformation d'ordre deux, appelé aussi application linéaire tangente qui sert au transport matériel d'un vecteur de la configuration (C_0) à la configuration (C_t) par :

$$[F] = F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{7.4}$$

Ce tenseur qui fait grand usage dans l'étude des grandes transformations est une quantité très importante dans la description des déformations d'un milieu continu. Il permet de relier la position relative de deux particules avant et après déformation. On défini le tenseur gradient de la transformation inverse $[F]^{-1}$ par :

$$[F]^{-1} = F_{ij}{}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \tag{8.4}$$

- **Application**

Une dilatation uniforme est représentée par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t) = a(t).X_1 \\ x_2(t) = a(t).X_2 \\ x_3(t) = a(t).X_3 \end{cases}$$

On se propose de déterminer les composantes du tenseur gradient de cette transformation.

Tenseur gradient de déformation :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

4.6 Relation entre le vecteur déplacement et le gradient de déformation

On cherche à trouver une relation entre le tenseur gradient de déformation et le vecteur déplacement donné par la relation **(3.4)**.

En écriture indicielle le vecteur déplacement est donné par la relation suivante :

$$U_i = x_i - X_i \tag{9.4}$$

Si on dérive cette expression par rapport à X_j on obtient :

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \frac{\partial X_i}{\partial X_j} \tag{10.4}$$

Sachant que :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial X_j} = 1 & \text{si } i = j \\ \dfrac{\partial X_i}{\partial X_j} = 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} \tag{11.4}$$

Si on substitue **(7.4)** dans **(10.4)** on obtient:

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} - \delta_{ij} = F_{ij} - \delta_{ij} \tag{12.4}$$

Ce qui conduit finalement à :

$$F_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \delta_{ij} \tag{13.4}$$

4.7 Tenseurs de déformation

Pour définir quelques tenseurs de déformation on considère la déformation d'un petit élément linéaire (vecteur) de cordonnées (dX_i), celui-ci subit une déformation et devient (dx_i) **(figure 8.4)**.

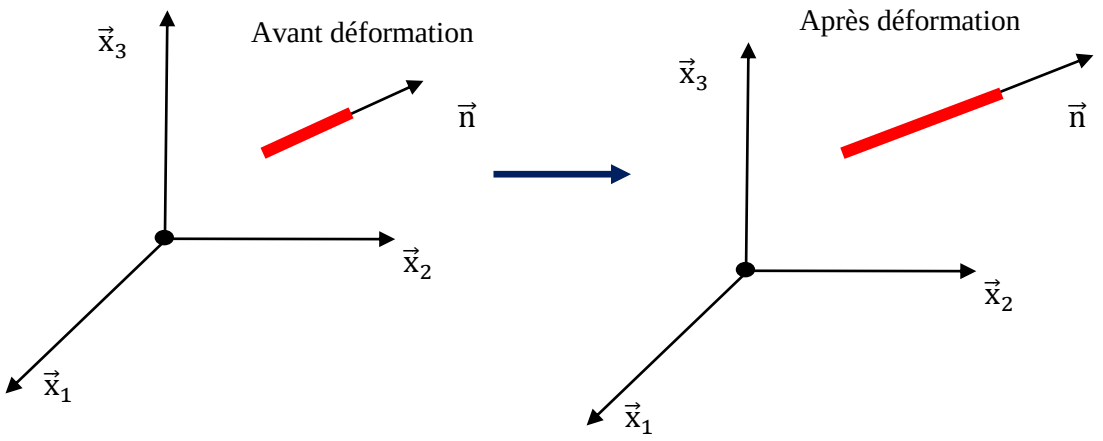


Fig.8.4 Déformation d'un élément

Notons (dS) et (ds) les longueurs respectives des vecteurs (dX_i) et (dx_i) alors :

$$dS^2 = dS.dS = \overrightarrow{dS}.\overrightarrow{dS} = dX_m.dX_m = \left(\frac{\partial X_m}{\partial x_i}dx_i\right).\left(\frac{\partial X_m}{\partial x_j}dx_j\right) = \frac{\partial X_m}{\partial x_i}.\frac{\partial X_m}{\partial x_j}dx_i.dx_j \tag{14.4}$$

Ceci permet de définir le tenseur de déformation dit tenseur de Cauchy-Green gauche :

$$[c] = c_{ij} = \frac{\partial X_m}{\partial x_i} . \frac{\partial X_m}{\partial x_j} = [F^{-1}]^T [F^{-1}] \tag{15.4}$$

Si on substitue la relation **(15.4)** dans **(14.4)** on obtient:

$$dS^2 = c_{ij} . dx_i . dx_j \tag{16.4}$$

Cette relation permet de donner la longueur initiale de l'élément avant déformation en fonction du tenseur de Cauchy-Green gauche et des longueurs de l'élément après déformation.

Nous avons aussi :

$$ds^2 = ds . ds = \overrightarrow{ds} . \overrightarrow{ds} = dx_m . dx_m = \left(\frac{\partial x_m}{\partial X_i} dX_i\right) . \left(\frac{\partial x_m}{\partial X_j} dX_j\right) = \frac{\partial x_m}{\partial X} . \frac{\partial x_m}{\partial X_j} dX_i . dX_j \tag{17.4}$$

Ceci qui permet de définir le tenseur de déformation de Cauchy-Green droit :

$$[C] = C_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial X_i} . \frac{\partial x_m}{\partial X_j} = [F]^T [F] \tag{18.4}$$

Si on substitue la relation **(18.4)** dans **(17.4)** on obtient:

$$ds^2 = C_{ij} . dX_i . dX_j \tag{19.4}$$

Cette relation exprime la longueur de l'élément après déformation en fonction du tenseur de Green-Cauchy droit et de la longueur de l'élément avant déformation.

Calculons la différence $D = ds^2 - dS^2$ (résultante de déformation).

$$D = ds^2 - dS^2 = \frac{\partial x_m}{\partial X_i} . \frac{\partial x_m}{\partial X_j} dX_i . dX_j - dX_m . dX_m = C_{ij} . dX_i . dX_j - dX_m . dX_m \tag{20.4}$$

$$D = ds^2 - dS^2 = C_{ij} . dX_i . dX_j - dX_i . dX_j . \delta_{ij} = (C_{ij} - \delta_{ij}) . dX_i . dX_j \tag{21.4}$$

On pose :

$$C_{ij} - \delta_{ij} = 2 . E_{ij} \tag{22.4}$$

Alors :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij}) \tag{23.4}$$

Dans la relation **(23.4)** E_{ij} représente le tenseur de déformation dit tenseur de Green-Lagrange.

Ainsi :

$$D = ds^2 - dS^2 = 2.E_{ij}.dX_i.dX_j \tag{24.4}$$

Le même raisonnement conduit à:

$$D = ds^2 - dS^2 = dx_m.dx_m - c_{ij}.dx_i.dx_j \tag{25.4}$$

Ce qui conduit à:

$$D = \delta_{ij}.dx_i.dx_j - c_{ij}.dx_i.dx_j = (\delta_{ij} - c_{ij}).dx_i.dx_j = 2.e_{ij}.dx_i.dx_j \tag{26.4}$$

Si on pose :

$$\delta_{ij} - c_{ij} = 2.e_{ij} \tag{27.4}$$

Alors :

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - c_{ij}) \tag{28.4}$$

Cette relation permet de définir le tenseur d'Euler-Almansi e_{ij}.

4.8 Relation entre le tenseur de déformation et le vecteur déplacement

Exprimons le tenseur de déformation de Lagrange E_{ij} et celui d'Euler-Almansi e_{ij} en fonction du vecteur déplacement $\vec{U}$.

Sachant que :

$$2.E_{ij} = C_{ij} - \delta_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial X_i}.\frac{\partial x_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \tag{29.4}$$

Et :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \tag{29.4}$$

Alors :

$$2.E_{ij} = \left(\delta_{mi} + \frac{\partial U_m}{\partial X_i}\right).\left(\delta_{mj} + \frac{\partial U_m}{\partial X_j}\right) - \delta_{ij} \tag{30.4}$$

Ce qui implique que :

$$2.E_{ij} = \delta_{mi}.\delta_{mj} + \delta_{mi}.\frac{\partial U_m}{\partial X_j} + \delta_{mj}.\frac{\partial U_m}{\partial X_i} + \frac{\partial U_m}{\partial X_i}.\frac{\partial U_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \tag{31.4}$$

Ce qui conduit à :

$$2.E_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_m}{\partial X_i}.\frac{\partial U_m}{\partial X_j} - \delta_{ij} \tag{32.4}$$

Soit :

$$2.E_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_m}{\partial X_i}.\frac{\partial U_m}{\partial X_j} \tag{33.4}$$

Ce qui implique que :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_m}{\partial X_i}.\frac{\partial U_m}{\partial X_j}\right) \tag{34.4}$$

Le même raisonnement conduit une relation entre le tenseur de déformation d'Euler-Almansi e_{ij} et le vecteur déplacement $\overrightarrow{U}$:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_m}{\partial x_i}.\frac{\partial u_m}{\partial x_j}\right) \tag{35.4}$$

Application 1 : Déterminer les tenseurs de déformation : F_{ij} , ${F_{ij}}^T$, ${F_{ij}}^T.F_{ij}$ et C_{ij} pour le cas du cisaillement simple. Que peut-on conclure ?

- Les équations du cisaillement simple :

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 + b.X_2 \\ x_2(t) = X_2 \\ x_3(t) = X_3 \end{cases}$$

- Calcul du tenseur de déformation F_{ij} :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcul du tenseur de déformation ${F_{ij}}^T$:

$${F_{ij}}^T = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcul du tenseur de déformation $F_{ij}.{F_{ij}}^T$:

$$F_{ij}.{F_{ij}}^T = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Calcul du tenseur de déformation C_{ij} :

$$C_{ij} = \frac{\partial x_m}{\partial X_i}.\frac{\partial x_m}{\partial X_j}$$

i=1 j=1 m=1,2,3

$$C_{11} = \frac{\partial x_1}{\partial X_1}.\frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial x_2}{\partial X_1}.\frac{\partial x_2}{\partial X_1} + \frac{\partial x_3}{\partial X_1}.\frac{\partial x_3}{\partial X_1} = 1$$

i=1 j=2 m=1,2,3

$$C_{12} = \frac{\partial x_1}{\partial X_1}.\frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial x_2}{\partial X_1}.\frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial x_3}{\partial X_1}.\frac{\partial x_3}{\partial X_2} = b$$

i=1 j=3 m=1,2,3

$$C_{13} = \frac{\partial x_1}{\partial X_1}.\frac{\partial x_1}{\partial X_3} + \frac{\partial x_2}{\partial X_1}.\frac{\partial x_2}{\partial X_3} + \frac{\partial x_3}{\partial X_1}.\frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 0$$

i=2 j=2 m=1,2,3

$$C_{22} = \frac{\partial x_1}{\partial X_2}.\frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial x_2}{\partial X_2}.\frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial x_3}{\partial X_2}.\frac{\partial x_3}{\partial X_2} = b^2 + 1$$

i=2 j=3 m=1,2,3

$$C_{23} = \frac{\partial x_1}{\partial X_2}.\frac{\partial x_1}{\partial X_3} + \frac{\partial x_2}{\partial X_2}.\frac{\partial x_2}{\partial X_3} + \frac{\partial x_3}{\partial X_2}.\frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 0$$

i=2 j=1 m=1,2,3

$$C_{21} = \frac{\partial x_1}{\partial X_2}.\frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial x_2}{\partial X_2}.\frac{\partial x_2}{\partial X_1} + \frac{\partial x_3}{\partial X_2}.\frac{\partial x_3}{\partial X_1} = b$$

i=3 j=2 m=1,2,3

$$C_{32} = \frac{\partial x_1}{\partial X_3}.\frac{\partial x_1}{\partial X_2} + \frac{\partial x_2}{\partial X_3}.\frac{\partial x_2}{\partial X_2} + \frac{\partial x_3}{\partial X_3}.\frac{\partial x_3}{\partial X_2} = 0$$

i=3 j=3 m=1,2,3

$$C_{33} = \frac{\partial x_1}{\partial X_3}.\frac{\partial x_1}{\partial X_3} + \frac{\partial x_2}{\partial X_3}.\frac{\partial x_2}{\partial X_3} + \frac{\partial x_3}{\partial X_3}.\frac{\partial x_3}{\partial X_3} = 1$$

i=3 j=1 m=1,2,3

$$C_{31} = \frac{\partial x_1}{\partial X_3}.\frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial x_2}{\partial X_3}.\frac{\partial x_2}{\partial X_1} + \frac{\partial x_3}{\partial X_3}.\frac{\partial x_3}{\partial X_1} = 0$$

Alors :

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut conclure que : $C_{ij} = F_{ij}.F_{ij}^{T}$ de même que $c_{ij} = \left(F_{ij}^{-1}\right)^{T}\left(F_{ij}^{-1}\right)$

Application 2 : pour ce même cas, déterminer les tenseurs de déformation de Lagrange E_{ij} d'Euler-Almansi e_{ij}.

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(C_{ij} - \delta_{ij})$$

Sachant que :

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & b & 0 \\ 0 & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ b & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Les équations du cisaillement simple en coordonnées eulériennes:

$$\begin{cases} X_1 = x_1 - b.x_2 \\ X_2 = x_2 \\ X_3 = x_3 \end{cases}$$

$$c_{ij} = \left(F_{ij}^{-1}\right)^{T}\left(F_{ij}^{-1}\right)$$

$$F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(F_{ij}^{-1}\right)^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b & 0 \\ -b & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - c_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -b & 0 \\ -b & 1+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -b & 0 \\ -b & -b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On peut conclure que les tenseurs : C_{ij} , c_{ij} , E_{ij} et e_{ij} sont des tenseurs symétriques.

4.9 Hypothèses des petits déplacements

Si on néglige les termes non linéaires dans l'expression des tenseurs de Lagrange et d'Euler-Almansi, on obtient les tenseurs de déformations infinitésimales.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) \tag{36.4}$$

Et :

$$e'_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{37.4}$$

Cette simplification n'est possible que dans le cas des déplacements très petits.

4.10 Variation de longueur

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{dS}_0$ et $\overrightarrow{dS'}_0$ qui sont déformés suivants deux directions $\vec{n}$ et $\vec{n}'$. Après déformations ces deux vecteurs deviennent respectivement $\overrightarrow{ds}$ et $\overrightarrow{ds'}$ **(figure 9.4)**.

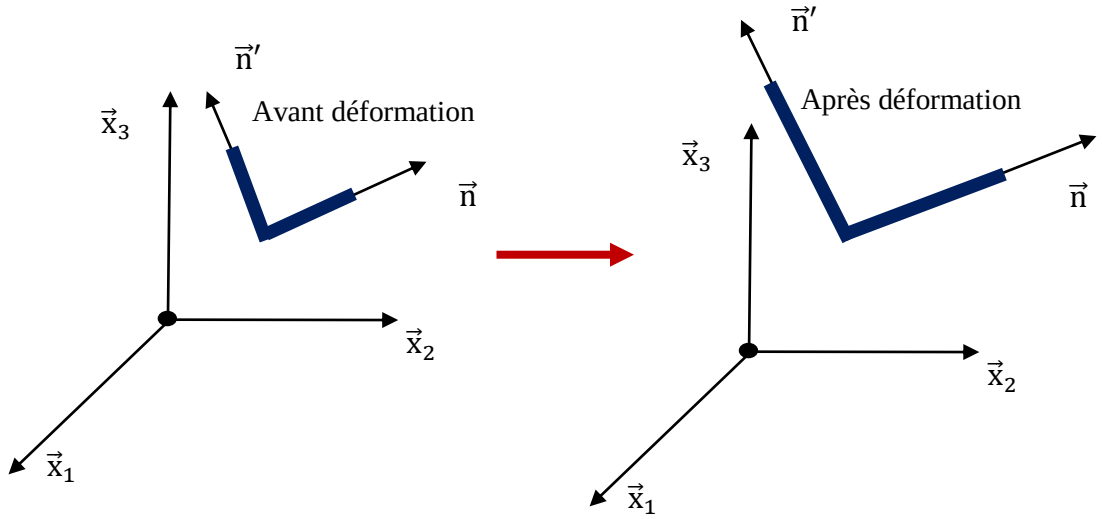


Fig. 9.4 Déformation d'un élément (variation de longueur)

On suppose que les déformations sont des dilatations pures (sans variation angulaires entre $\overrightarrow{ds}$ et $\overrightarrow{ds}$).

Nous avons :

$$\overrightarrow{dS_0} = dS_0.\vec{n} = \overrightarrow{dX_i} \tag{38.4}$$

Et :

$$\overrightarrow{dS'}_0 = dS'_0.\overrightarrow{n'} = \overrightarrow{dX_j} \tag{39.4}$$

Si on suppose que $\overrightarrow{dS_0} = \overrightarrow{dS'}_0$ et $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{ds'}$

Alors :

$$\overrightarrow{ds}.\overrightarrow{ds} - \overrightarrow{dS_0}.\overrightarrow{dS'}_0 = ds^2 - dS_0^2 = 2E_{ij}dX_idX_j = 2E_{ij}.ds_0.n_ids_0.n_j = 2E_{ij}ds_0^2n_i.n_j \tag{40.4}$$

Donc :

$$\frac{ds^2 - dS_0^2}{ds_0^2} = 2E_{ij}n_i.n_j \tag{41.4}$$

Le tenseur de déformation de Lagrange permet de calculer la variation relative des carrés de longueur d'un vecteur infiniment petit d'orientation quelconque.

Cas particulier : L'allongement ou dilatation dans la direction $(\vec{n})$ la quantité $\varepsilon(\vec{n})$ est le rapport de la variation de la longueur d'un vecteur matériel $(ds - dS_0)$ dirigé selon la direction $(\overrightarrow{n})$ à sa longueur initiale.

$$\varepsilon(\vec{n}) = \frac{ds - dS_0}{dS_0} \tag{42.4}$$

D'après la relation **(42.4)** nous avons :

$$ds = dS_0(1 + \varepsilon(\vec{n})) \tag{43.4}$$

Et d'après la relation **(41.4)** on peut écrire que :

$$ds^2 = ds_0^2(1 - 2E_{ij}n_i.n_j) \tag{44.4}$$

A partir des deux relations **(42.4)** et **(44.4)** on peut écrire :

$$ds = dS_0\sqrt{1 - 2E_{ij}n_i.n_j} = dS_0(1 + \varepsilon(\vec{n})) \tag{45.4}$$

Alors :

$$\varepsilon(\vec{n}) = \sqrt{(1 + 2E_{ij}n_i.n_j)} - 1 \tag{46.4}$$

4.11 Variation de volume

Soit (V_0) le volume initial d'une particule et soit (V) son volume final, sachant que :

$$V = V_0.J \tag{47.4}$$

Dans la relation (47.4) J représente le Jacobien de la transformation.

Appelons (θ) la variation relative du volume (V)

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V_0 . J - V_0}{V_0} = J - 1 \tag{48.4}$$

Sachant que :

$$J = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right) = \det(F_{ij}) \tag{49.4}$$

Alors :

$$\theta = \det(F_{ij}) - 1 \tag{50.4}$$

4.12 Interprétation du tenseur des déformations infinitésimales

4.12.1 Eléments de la diagonale

Considérons un élément $(d\overrightarrow{X})$ de longueur initiale (dS_0) qui après déformation devient $(d\vec{x})$ de longueur (ds). Sachant que la dilatation linéaire est donnée par la relation **(42.4)** :

$$\varepsilon(\vec{n}) = \frac{ds - dS_0}{dS_0}$$

Et d'autre part nous avons d'après la relation **(46.4)** :

$$\varepsilon(\vec{n}) = \sqrt{(1 + 2E_{ij}n_i . n_j)} - 1 = (1 + 2E_{ij}n_i . n_j)^{\frac{1}{2}} - 1$$

Dans le cas des petites déformations, le tenseur de déformation E_{ij} est dit tenseur de déformation infinitésimal et on peut écrire que : $E_{ij} = \varepsilon_{ij}$

Alors si on utilise l'hypothèse des petites approximations on obtient:

$$\varepsilon(\vec{n}) = (1 + 2E_{ij}n_i . n_j)^{\frac{1}{2}} - 1 = 1 + \frac{1}{2} . 2 . E_{ij}n_i . n_j - 1 = \varepsilon_{ij}n_i . n_j \tag{51.4}$$

Et enfin nous avons :

$$\varepsilon(\vec{n}) = \varepsilon_{ij}n_i . n_j = [\vec{n}]^T . [\varepsilon] . [\vec{n}] \tag{52.4}$$

ε_{ii} représente la déformation d'un élément suivant l'axe $\vec{X}_i$

Application : Calculons la déformation suivant la direction $\vec{X}_1$ de normale unitaire le vecteur unitaire $\vec{e}_1$.

$$\varepsilon(\vec{e}_1) = (1 \quad 0 \quad 0)\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{11}$$

Ce qui conduit à :

$$\varepsilon(\vec{e}_1) = \varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1}$$

De même :

$$\varepsilon(\vec{e}_2) = \varepsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial X_2}$$

Et :

$$\varepsilon(\vec{e}_3) = \varepsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial X_3}$$

4.12.2 Eléments non diagonaux du tenseur de déformation :

Soient deux vecteurs infinitésimaux (MN_1) et (MN_2) tels qu'à l'état non déformé :

$$\overrightarrow{MN}_1 = \vec{e}_1 . dx_1 \tag{53.4}$$

Et :

$$\overrightarrow{MN}_2 = \vec{e}_2 . dx_2 \tag{54.4}$$

Après déformation les points (M) , (N_1) et (N_2) deviennent respectivement (M') , (N'_1) et (N'_2) **(figure 10.4)**.

Nous avons :

$$\overrightarrow{M'N'}_1 = \overrightarrow{MN}_1 + d_1\vec{U}(M) \tag{55.4}$$

Sachant que d'après la **(figure 10.4)** nous avons :

$$d_1\vec{U}(M) = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} dx_1 . \vec{e}_1 + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} dx_2 . \vec{e}_2 \tag{56.4}$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial X_1} dx_1 = \varepsilon_{11} dx_1 \tag{57.4}$$

Cette quantité représente l'allongement de (MN_1) suivant la direction $\vec{e}_1$ et ε_{11} l'allongement unitaire au point (M) dans la direction $\vec{e}_1$.

De même :

$$\overrightarrow{M'N'}_2 = \overrightarrow{MN}_2 + d_2\vec{U}(M) \tag{58.4}$$

Et :

$$d_2\vec{U}(M) = \frac{\partial U_1}{\partial X_2} dx_1 . \vec{e}_1 + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} dx_2 . \vec{e}_2 \tag{59.4}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial X_2} dx_2 = \varepsilon_{22} dx_2 \tag{60.4}$$

Cette quantité représente l'allongement de (MN_2) suivant la direction $\vec{e}_2$ et ε_{22} l'allongement unitaire au point (M) dans la direction $\vec{e}_2$.

L'angle (γ_1) entre les directions (MN_1) et $(M'N'_1)$ avant et après déformation est donné par la relation :

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial X_1}dx_2}{dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_1}dx_1} \tag{61.4}$$

Dans le cas des petites déformations on peut utiliser les approximations suivantes : $dx_1 \backsimeq dx_2$ et $1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \backsimeq 1$. Ainsi la relation **(61.4)** devient :

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial X_1}dx_2}{dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_1}dx_1} = \frac{\frac{\partial U_2}{\partial X_1}}{1 + \frac{\partial U_1}{\partial X_1}} \backsimeq \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \tag{62.4}$$

Finalement on obtient :

$$\gamma_1 = \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \tag{63.4}$$

Et :

$$\gamma_2 = \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \tag{64.4}$$

On en déduit que l'angle qui est égal à $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ avant déformation est diminué après déformation d'un angle :

$$\gamma_{12} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial U_2}{\partial X_1} + \frac{\partial U_1}{\partial X_2} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} \tag{65.4}$$

Dans la relation **(65.4)** ε_{12} représente la moitié de la déformation au point (M) entre (MN_1) et (MN_2) ou encore déformation de cisaillement entre les directions $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$.

Finalement, les 9 quantités obtenues constituent les composantes du tenseur de déformation, dans le cadre d'une théorie de petites déformations. Ce tenseur est un tenseur d'ordre 2 symétrique et s'écrit sous forme matricielle :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{66.4}$$

Les composantes de ce tenseur sont déterminées à partir de la relation **(36.4) :**

- Les éléments diagonaux

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial X_2} \qquad \varepsilon_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial X_3}$$

- Les éléments non diagonaux

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\right) \qquad \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_1}\right) \qquad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial X_3} + \frac{\partial U_3}{\partial X_2}\right)$$

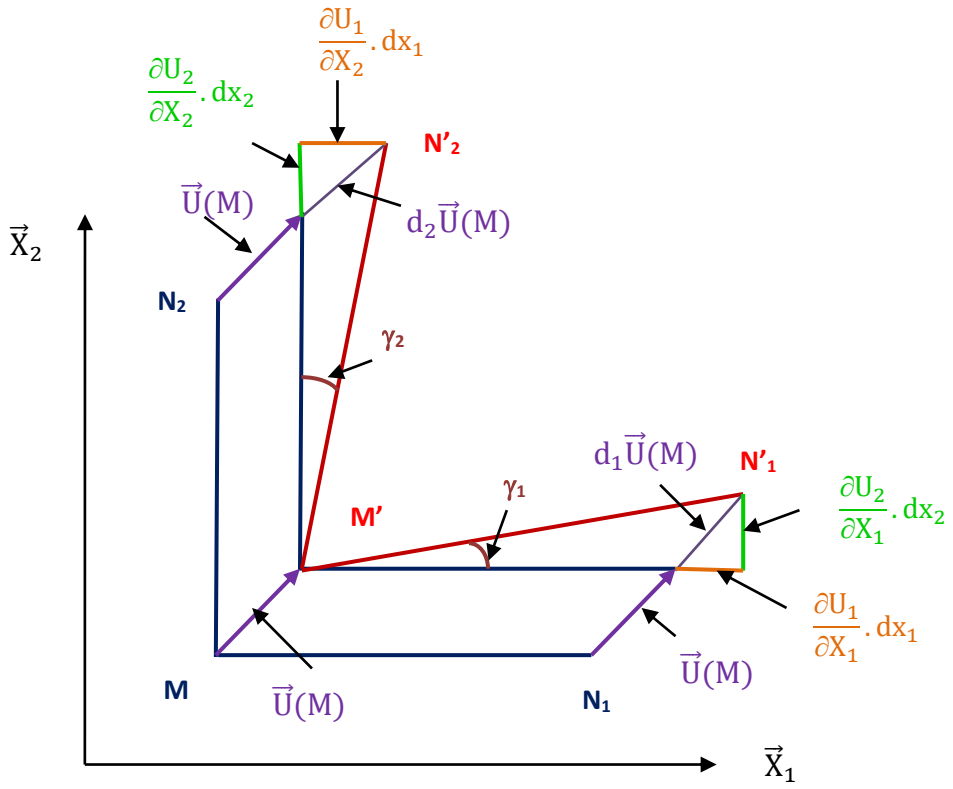


Fig.10.4 Eléments non diagonaux du tenseur de déformation

Application :

On veut déterminer expérimentalement le tenseur de déformation (ε_{ij}) au point (M) d'un ouvrage. On place autour de ce point un dispositif de mesure composé de 6 jauges de mesure permettant la mesure directe des allongements unitaires suivant 6 directions considérées **(figure 11.4)**. On appelle ε_A , ε_B, ε_C , ε_D, ε_E, ε_F les mesures effectuées. Déterminer le tenseur de déformation (ε_{ij}) si : $\varepsilon_A = 6.10^{-3}$, $\varepsilon_B = 4.5.10^{-3}$, $\varepsilon_C = 3.10^{-3}$, $\varepsilon_D = 1.5.10^{-3}$ $\varepsilon_E = 0$, $\varepsilon_F = 3.10^{-3}$

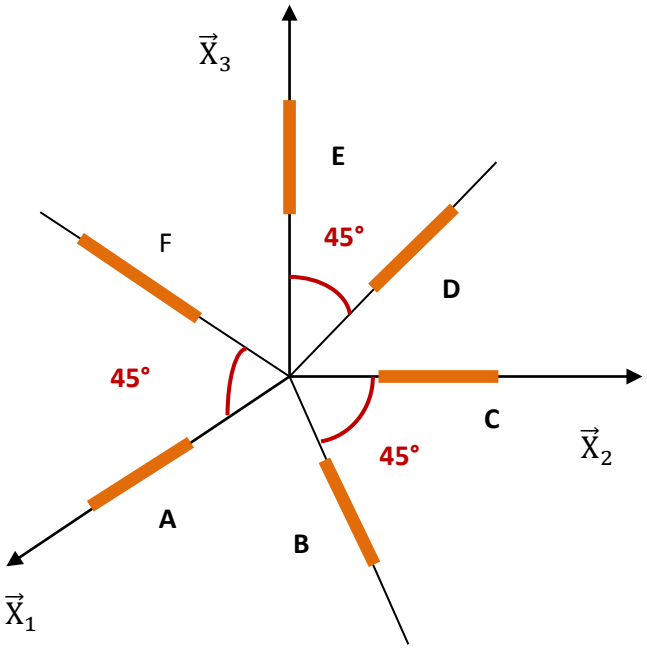


Fig.11.4 Dispositif de mesure composé de 6 jauges

- **Calcul de ε_{ij}**

Les six directions sont définies par les normales unitaires par rapport au repère $(O, \vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$.

$$\vec{n}_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n}_B \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n}_c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{n}_D \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \vec{n}_E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{n}_F \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Sachant que :

$$\varepsilon(\vec{n}) = \varepsilon_{ij} n_i . n_j$$

$$\varepsilon(\vec{n}_A) = \varepsilon_{ij} n_i . n_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{11}$$

$$\varepsilon(\vec{n}_B) = \varepsilon_{ij} n_i . n_j = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}$$

$$\varepsilon(\vec{n}_C) = \varepsilon_{ij} n_i . n_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{12}$$

$$\varepsilon(\vec{n}_D) = \varepsilon_{ij} n_i . n_j = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon_{22} + \frac{1}{2}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}$$

$$\varepsilon(\vec{n}_E) = \varepsilon_{ij} n_i . n_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_{33}$$

$$\varepsilon(\vec{n}_F) = \varepsilon_{ij} n_i . n_j = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{13}$$

Sous forme matricielle les six équations deviennent :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_A \\ \varepsilon_B \\ \varepsilon_C \\ \varepsilon_D \\ \varepsilon_E \\ \varepsilon_F \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

La résolution de ce système d'équations permet de déterminer les composantes de ε_{ij}

$$\varepsilon_{ij} = 10^{-3} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.13 Tenseur de rotation

Considérons un petit élément cubique qui subit un déplacement (MM') sans se déformer **(figure 12.4)**. Les composantes du tenseur de déformation (ε_{ij}) ne sont pas suffisantes pour définir la nouvelle position de cet élément. Il serait donc nécessaire de prendre en considération la rotation rigide de l'élément, autour des axes $(\vec{X}_1, \vec{X}_2, \vec{X}_3)$ dont les composantes sont notées : $\omega_{12}, \omega_{21}, \omega_{13}, \omega_{31}, \omega_{23}, \omega_{32}$.

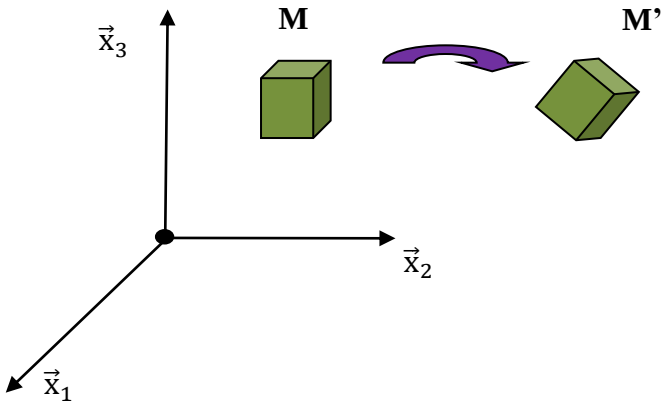


Fig.12.4 Rotation rigide d'un solide

Pour exprimer les composantes du tenseur de rotation en fonction des composantes du vecteur déplacement : U_1 , U_2 , U_3 considérons le cas plan de la figure ci dessous :

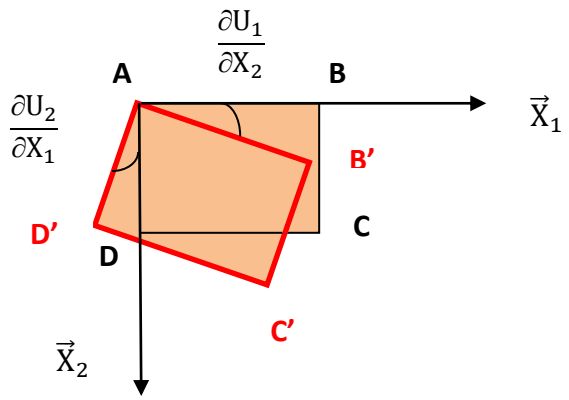


Fig.13.4 Rotation rigide dans un plan

Si U_1 et U_2 sont les composantes du vecteur déplacement, l'angle de rotation est égal à $(\frac{\partial U_1}{\partial X_2})$ ou $(-\frac{\partial U_2}{\partial X_1})$ ainsi la rotation est complètement définie par la relation suivante :

$$\omega_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} - \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\right) \tag{67.4}$$

D'une manière générale nous avons :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) \tag{68.4}$$

$$\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{bmatrix} \tag{69.4}$$

Remarque :

1. Le tenseur de rotation ω_{ij} est antisymétrique.
2. Les éléments de la diagonale de ce tenseur ω_{ij} sont nuls.
3. Le tenseur $\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j}\right)$ est un tenseur symétrique d'ordre 2 qui peut être exprimé comme étant la somme d'un tenseur symétrique et autre anti symétrique tel que :

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} - \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \qquad (70.4)$$

4. Le trace du tenseur (ε_{ij}) est définit par la quantité (θ) qui représente la somme des déformations longitudinales. Cette quantité qui exprime la variation par unité de volume est aussi appelée dilatation cubique.

$$\theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} + \frac{\partial U_3}{\partial X_3} = \mathrm{div}(\vec{U}) \qquad (71.4)$$

5. Si le tenseur de déformation est connu, les déformations principales ainsi que les directions principales associées, sont déterminés de la même manière que celle des contraintes principales et cela en passant par la résolution de l'équation caractéristique :

$$\det(\varepsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}) \qquad (72.4)$$

Chapitre 5
Relation entre contraintes et déformations
(Lois de comportements)

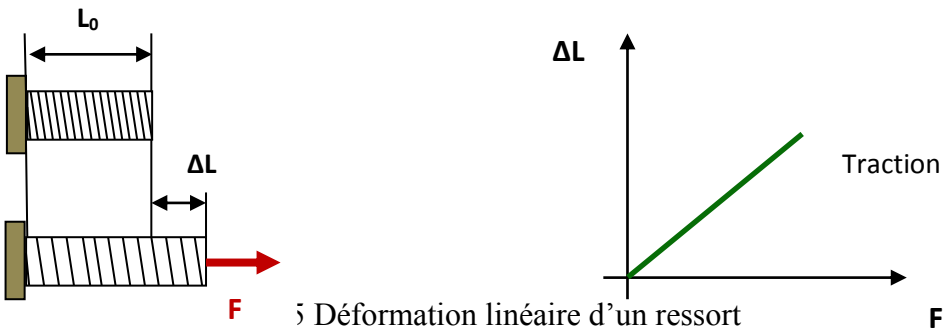
5.1 Introduction

La déformation élastique est une déformation réversible, le milieu retourne à son état initial lorsqu'on supprime les sollicitations. La déformation élastique est un domaine important de la mécanique des milieux continus. L'élasticité linéaire concerne les petites déformations propositionnelles aux sollicitations. Dans cette théorie l'allongement est proportionnel à la force dans le cas d'un étirement, l'angle est proportionnel au couple dans le cas d'une torsion. Aux plus grandes déformations, l'élasticité devient non linéaire pour certains matériaux, pour d'autre la fracture ou le fluage interviennent. Dans la théorie de l'élasticité, le matériau est homogène s'il possède les mêmes propriétés physiques et chimiques en tous ses points. Le matériau est isotrope s'il possède les mêmes propriétés physiques et chimiques dans toutes les directions.

5.2 Déformation élastique des solides

Le cas le plus simple qui illustre la déformation élastique est celui des ressorts **(figure 1.5)**. Dans ce cas la force applique sur le ressort est proportionnelle à l'allongement obtenu. Le coefficient de proportionnalité est appelé raideur du ressort. Lorsque les déformations sont linéaires le coefficient de proportionnalité est appelé raideur du ressort et on le note souvent (K).

$$F = K.\Delta L \qquad (1.5)$$



5 Déformation linéaire d'un ressort

5.3 Limite d'élasticité

La déformation élastique intervient pour des faibles sollicitations. Si l'on augmente les sollicitations, on change de mode de déformation. Lorsque on exerce une traction ou une compression on constate que la longueur de la pièce varie. La variation relative des dimensions de la pièce est proportionnelle à l'allongement relatif (ε). Le coefficient de proportionnalité s'appelle coefficient de Poisson.

Exemple 1 :

Soit un cylindre de rayon (r_0) de longueur initiale (L_0). Ce cylindre est soumis à une force de traction ($\vec{F}$). Sa longueur devient (L) et son rayon devient (r).

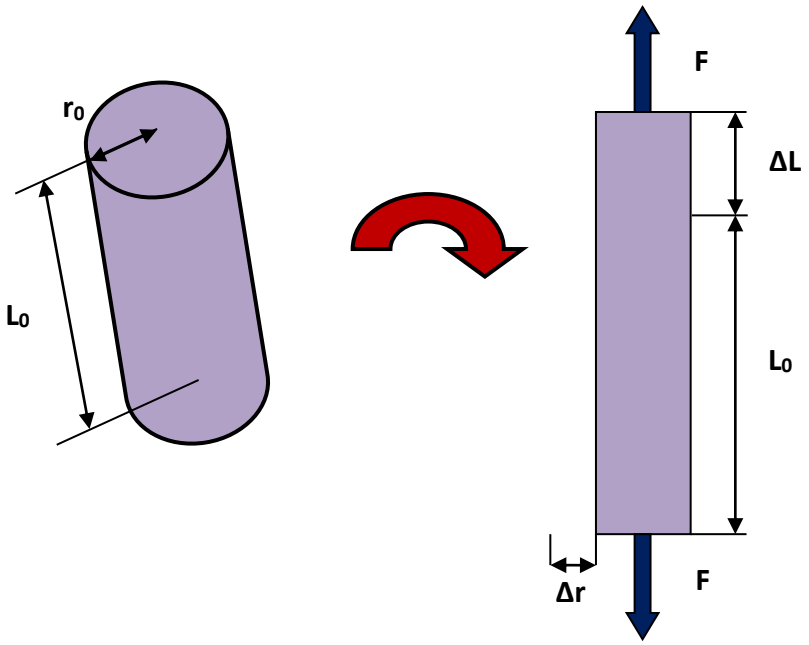


Fig. 2.5 Déformation d'un cylindre

On remarque qu'il y'a proportionnalité entre la variation de longueur (ΔL) et celle du rayon (Δr).

$$\frac{\Delta r}{r_0} = \frac{\Delta L}{L_0} = -\nu.\varepsilon \qquad (2.5)$$

Dans la relation **(2.5)**, (ε) représente la déformation relative et (ν) le coefficient de Poisson.

Exemple 2 :

Soit une barre prismatique de longueur initiale (L_0) et de dimensions (a_0x b_0), soumise à une force de traction ($\vec{F}$). Après déformation sa longueur devient (L) et ses cotés deviennent (ax b) **(figure 3.5)**.

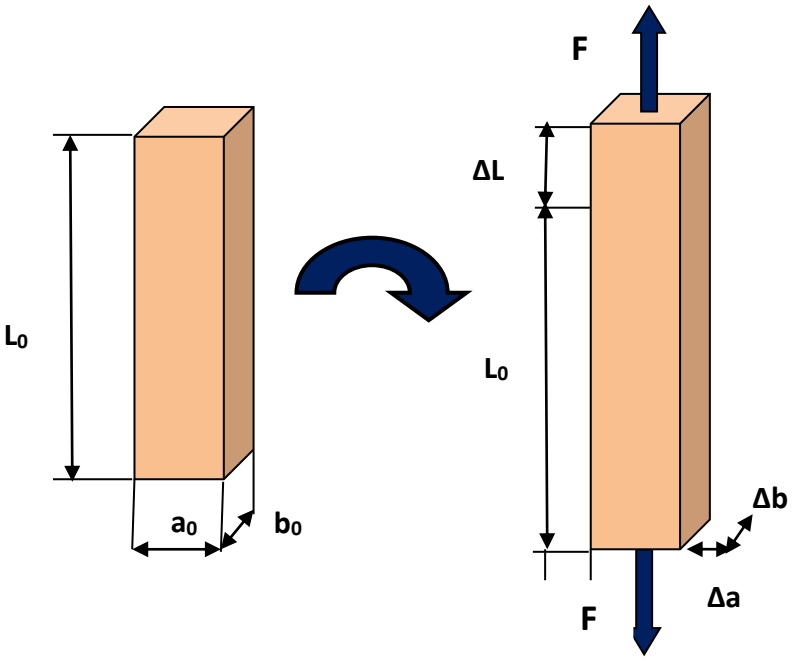


Fig.3.5 Déformation d'une barre prismatique

Il existe une proportionnalité entre la variation de la longueur (L) et celle des cotés (ax b) de telle sorte que :

$$\frac{\Delta a}{a_0} = -\nu.\frac{\Delta L}{L_0} = -\nu.\varepsilon \qquad (3.5)$$

Et :

$$\frac{\Delta b}{b_0} = -\nu.\frac{\Delta L}{L_0} = -\nu.\varepsilon \qquad (3.5)$$

5.4 Loi de Hooke

C'est grâce à la propriété élastique des corps déformables qu'on a pu relier la déformation à la contrainte et établir une relation entre les deux phénomènes (loi de Hooke). La première formulation de cette relation a été établie expérimentalement par Hooke, qui avait suspendue une barre de section (S) à son propre poids. Le cas pratique le plus simple est celui d'une poutre de section (S_0) tendue par une force ($\vec{F}$) suivant un axe passant par son centre de gravité **(figure 4.5)**, produisant ainsi une contrainte (σ) uniforme sur sa section telle que :

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \qquad (5.5)$$

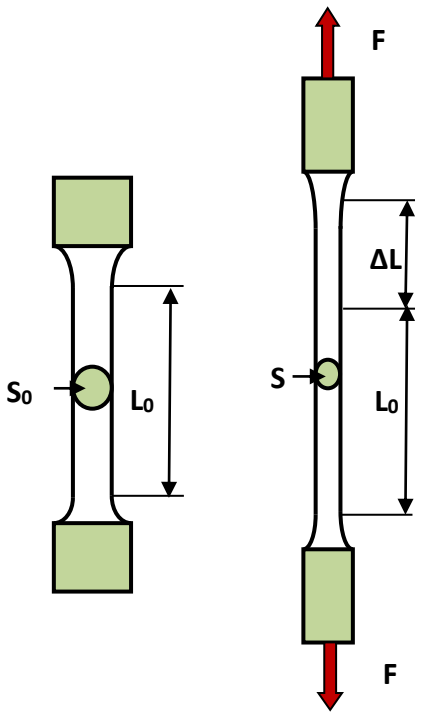


Fig. 4.5 Eprouvette soumise à un essai de traction simple

Grâce à un système d'enregistrement pouvant donner instantanément les valeurs de l'effort de traction ($\vec{F}$) et de l'allongement correspondant (ΔL) ou bien les valeurs de la contrainte (σ) et la déformation (ε). On peut obtenir une courbe (force - déplacement) ou bien (contrainte-déformation) représentée sur la figure **(figure 6.5)**.

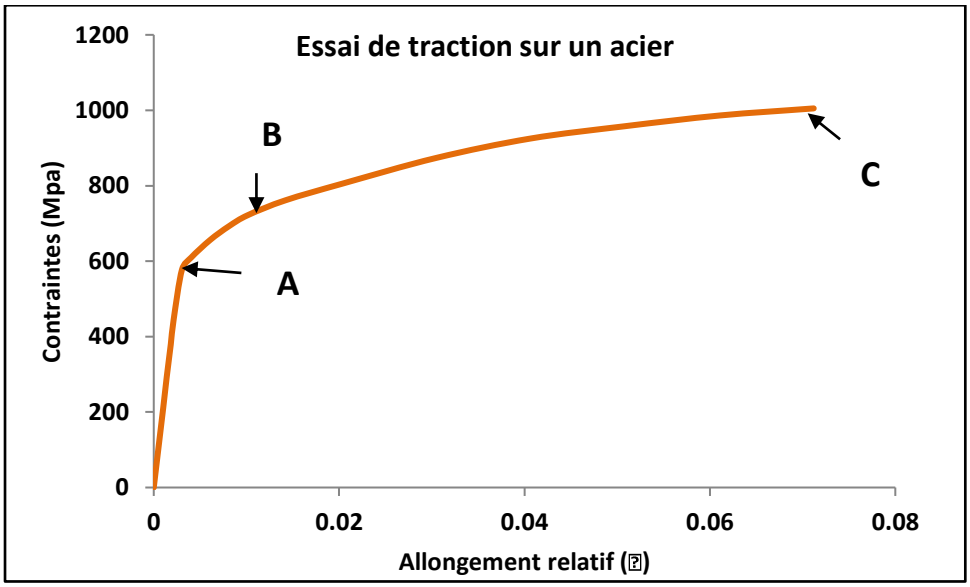


Fig. 6.5 Courbe (contrainte- déformation)

Cette courbe comporte 03 phases :

Phase OA : Elle correspond aux déformations élastiques (les allongements sont proportionnels aux charges. Dans cette phase le matériau subit une transformation réversible, quand la charge est supprimée l'éprouvette retourne à l'état initial. Le coefficient de proportionnalité entre la contrainte et déformation est appelé module Young ou module d'élasticité longitudinale noté (E). Durant cette phase (OA) le matériau à un comportement élastique linéaire.

A partir de la courbe précédente **(figure 6.5)** on peut déduire plusieurs caractéristiques du matériau :

Phase OA :

- **Module de Young**

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E \tag{6.5}$$

$$\sigma = E.\varepsilon \tag{7.5}$$

Cette relation représente la loi de Hooke. La pente de la courbe est appelée module de Young (E), ou bien module d'élasticité longitudinale.

- **Limite élastique Re /σe**

Elle correspond à la valeur de l'effort ou de la contrainte limite se trouvant à la fin de la phase (OA). Les déformations dans cette phase (OA) sont généralement très petites ce qui permet d'utiliser l'approximation des petits déplacements.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right) \tag{8.5}$$

Phase (AB + BC) : Cette phase correspond au domaine plastique dans le quel lorsqu'on supprime la charge l'éprouvette ne revient plus à l'état initial. Cependant elle conserve une déformation permanente dite plastique. La zone (AB) est appelée zone de plasticité répartie où les allongements sont uniformément réparties dans la section de l'éprouvette. La zone (BC) est appelée zone de plasticité localisée où les allongements sont localisées et la déformation a lieu dans une zone très limitée de l'éprouvette. La section diminue rapidement c'est ce qu'on appelle le phénomène de striction.

D'après la courbe précédente **(figure 6.5)** sur la phase (AB + BC) on peut déduire les caractéristiques suivantes:

- **La charge de rupture Rr /σr**
- **L'allongement relatif en %**

$$A = \frac{L - L_0}{L_0} x100 \qquad (9.5)$$

- **La striction relative en %**

$$A = \frac{S_0 - L}{S_0} x100 \qquad (9.5)$$

5.5 Solide élastique isotrope

Approche expérimentale :

Considérons un barreau conçu à partir d'un matériau élastique isotrope. On le soumet à un essai de traction triaxial. Ce barreau est équipé de 3 jauges extentiométriques qui ont pour but de mesurer les déformations selon les trois directions $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ **(figure 7.5).**

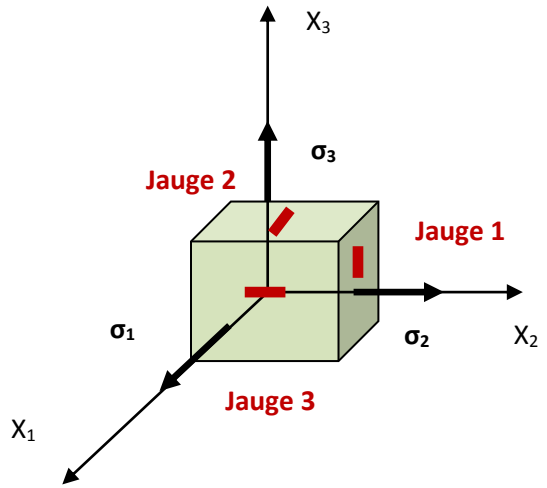


Fig.7.5 Barreau soumis à un état de traction triaxial

La jauge 1 : enregistre les déformations suivant la direction 3

La jauge 2 : enregistre les déformations suivant la direction 1

La jauge 3 : enregistre les déformations suivant la direction 2

Constatations

Jauge N° 2 : Le matériau s'allonge dans la direction $(\vec{x}_1)$ selon le principe de la loi de Hooke :

$$\sigma_1 = E.\varepsilon_1 \qquad (10.5)$$

Ainsi :

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \qquad (11.5)$$

On remarque aussi des contractions enregistrées par les deux autres jauges latérales (**Jauge N° 1** et **Jauge N° 3)**.

Alors :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -\upsilon.\varepsilon_1 = -\upsilon.\frac{\sigma_1}{E} \tag{12.5}$$

On peut conclure qu'une contrainte (σ_1) provoque à la fois les déformations (ε_1) , (ε_2) et (ε_3). Dans ce cas le tenseur de contrainte due à la première sollicitation (σ_1) est de la forme :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13.5}$$

Le tenseur de déformation engendré est de la forme :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{E}.\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\upsilon.\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\upsilon.\sigma_1 \end{bmatrix} \tag{14.5}$$

Si on réalise des essais dans les deux autres directions $(\vec{x}_2)$ et $(\vec{x}_3)$ on obtient un résultat similaire à un indice prés, et la superposition des trois essais de traction donne :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\sigma_1}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_2 + \sigma_3) \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\sigma_1}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_1 + \sigma_3) \\ \varepsilon_3 = \dfrac{\sigma_1}{E} - \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_1 + \sigma_2) \end{cases} \tag{15.5}$$

Ces équations traduisent la loi de Hooke en axes principaux.

5.6 Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke peut être exprimée par rapport à un système d'axes quelconques. On pose :

$$-3p = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \tag{16.5}$$

Si on substitue **(16.5)** dans **(15.5)** on aura :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 3p.\dfrac{\upsilon}{E} + \dfrac{(1+\upsilon)}{E}\sigma_1 \\ \varepsilon_2 = 3p.\dfrac{\upsilon}{E} + \dfrac{(1+\upsilon)}{E}\sigma_2 \\ \varepsilon_3 = 3p.\dfrac{\upsilon}{E} + \dfrac{(1+\upsilon)}{E}\sigma_3 \end{cases} \tag{17.5}$$

Sachant que :

$$\varepsilon(\vec{n}) = [\vec{n}]^T.[\varepsilon].[\vec{n}] \tag{18.5}$$

En axes principaux :

$$\varepsilon(\vec{n}) = \varepsilon_1 . n_1^2 + \varepsilon_2 . n_2^2 + \varepsilon_3 . n_3^2 \tag{19.5}$$

Si on substitue **(17.5)** dans **(19.5)** on aura :

$$\varepsilon(\vec{n}) = 3p.\frac{\upsilon}{E}(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2) + \frac{(1+\upsilon)}{E}.(\sigma_1 . n_1^2 + \sigma_2 . n_2^2 + \sigma_3 . n_3^2) \tag{20.5}$$

Or la normale unitaire $\vec{n}$ est donnée par la relation :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \tag{21.5}$$

Et la contrainte normale par la relation :

$$\sigma_N = \sigma_1 . n_1^2 + \sigma_2 . n_2^2 + \sigma_3 . n_3^2 \tag{22.5}$$

En axes quelconques nous avons la contrainte normale ainsi que la déformation normale sont données grâce aux relations suivantes :

$$\sigma_N = n_i \sigma_{ij} n_j \tag{23.5}$$

Et :

$$\varepsilon(\vec{n}) = n_i \varepsilon_{ij} n_j \tag{24.5}$$

Alors :

$$\varepsilon(\vec{n}) = n_i \varepsilon_{ij} n_j = 3p.\frac{\upsilon}{E} + \frac{(1+\upsilon)}{E}.(n_i \sigma_{ij} n_j) \tag{25.5}$$

Or :

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 = n_i n_j \delta_{ij} \tag{26.5}$$

Donc :

$$n_i \varepsilon_{ij} n_j = 3p.\frac{\upsilon}{E}(n_i n_j \delta_{ij}) + \frac{(1+\upsilon)}{E}.(\sigma_{ij} n_i n_j) \tag{27.5}$$

Finalement on obtient l'expression de la relation de Hooke généralisée en axes quelconques :

$$\varepsilon_{ij} = 3p.\frac{\upsilon}{E}(\delta_{ij}) + \frac{(1+\upsilon)}{E}.(\sigma_{ij}) \tag{28.5}$$

Application 1 : On se propose de déterminer les composantes du tenseur de déformation à partir de la relation de la loi de Hooke suivante :

$$\varepsilon_{ij} = 3p.\frac{\upsilon}{E}(\delta_{ij}) + \frac{(1+\upsilon)}{E}.(\sigma_{ij})$$

i=1 j=1

$$\varepsilon_{11} = -(\sigma_{11+}\sigma_{22+}\sigma_{33}).\frac{\upsilon}{E} + \frac{(1+\upsilon)}{E}\sigma_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{22+}\sigma_{33})$$

i=1 j=2

$$\varepsilon_{22} = -(\sigma_{11+}\sigma_{22+}\sigma_{33}).\frac{\upsilon}{E} + \frac{(1+\upsilon)}{E}\sigma_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11+}\sigma_{33})$$

i=3 j=3

$$\varepsilon_{33} = -(\sigma_{11+}\sigma_{22+}\sigma_{33}).\frac{\upsilon}{E} + \frac{(1+\upsilon)}{E}\sigma_{33} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11+}\sigma_{22})$$

i=1 j=2 / i=2 j=1

$$\varepsilon_{12} = \frac{(1+\upsilon)}{E}\sigma_{12} = \varepsilon_{21}$$

i=1 j=3 / i=3 j=1

$$\varepsilon_{13} = \frac{(1+\upsilon)}{E}\sigma_{13} = \varepsilon_{31}$$

i=2 j=3 / i=3 j=2

$$\varepsilon_{23} = \frac{(1+\upsilon)}{E}\sigma_{23} = \varepsilon_{32}$$

5.7 Module de cisaillement

On appelle module de cisaillement transversal la quantité notée (G) ou encore (μ) tel que :

$$\frac{1}{2G} = \frac{1}{2\mu} = \frac{(1+\upsilon)}{E} \qquad (29.5)$$

Ou encore :

$$G = \mu = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \qquad (30.5)$$

5.8 Module de Young et coefficient de Poisson

La loi de Hooke généralisée peut être écrite sous une autre forme appelée équation de constitution d'un milieu élastique.

$$\sigma_{ij} = \lambda.\theta.\delta_{ij} + 2\mu.\varepsilon_{ij} \qquad (31.5)$$

μ, λ sont dit coefficients de Lamé et θ la dilatation cubique donnée par la relation :

$$\theta = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \qquad (32.5)$$

Considérons les éléments diagonaux du tenseur de contrainte :

$$\sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \qquad (33.5)$$

Si on remplace **(32.5)** dans l'équation de constitution **(30.5)** on obtient :

$$\sigma_{ii} = \lambda.\theta.\delta_{ii} + 2\mu.\varepsilon_{ii} \qquad (34.5)$$

Or :

$$\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3 \qquad (35.5)$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial U_i}{\partial X_i} = \theta \tag{36.5}$$

Alors :

$$\sigma_{ii} = \lambda.\theta.3 + 2\mu.\theta \tag{37.5}$$

Donc :

$$\theta = \frac{\sigma_{ii}}{3\lambda + 2\mu} \tag{38.5}$$

Si on substitue (θ) dans l'équation de constitution **(30.5)** on obtient :

$$\sigma_{ij} = \lambda.\frac{\sigma_{ii}}{(3\lambda + 2\mu)}.\delta_{ij} + 2\mu.\varepsilon_{ij} \tag{39.5}$$

Finalement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} - \lambda\frac{\sigma_{ii}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}.\delta_{ij} \tag{40.5}$$

Application 2 :

On se propose de déterminer les composantes du tenseur de déformation (ε_{ij}).

i=1 j=1

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{11} - \lambda\frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

Après arrangement :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\left(\sigma_{11} - \frac{\lambda(\sigma_{22} + \sigma_{33})}{2.(\lambda + \mu)}\right)$$

i=2 j=2

$$\varepsilon_{22} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\left(\sigma_{22} - \frac{\lambda(\sigma_{11} + \sigma_{33})}{2.(\lambda + \mu)}\right)$$

i=2 j=2

$$\varepsilon_{33} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}\left(\sigma_{33} - \frac{\lambda(\sigma_{11} + \sigma_{22})}{2.(\lambda + \mu)}\right)$$

i=1 j=2 / i=2 j=1

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{12} = \varepsilon_{21}$$

i=1 j=3 / i=3 j=1

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{13} = \varepsilon_{31}$$

i=2 j=3 / i=3 j=2

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2\mu}\sigma_{23} = \varepsilon_{32}$$

Par comparaison avec les résultats de **l'application 1** on peut déduire que :

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \tag{41.5}$$

Ce qui conduit à une relation entre le module de Young (E) et les coefficients de Lamé (λ) et (μ) :

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \tag{42.5}$$

Nous avons aussi :

$$\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} = \upsilon \tag{43.5}$$

Alors :

$$\lambda = \frac{-2\upsilon\mu}{2\upsilon - 1} \tag{44.5}$$

Si on substitue **(40.5)** dans la relation **(38.5)** on obtient :

$$E = \frac{\mu\left(3\left(\frac{-2\upsilon\mu}{2\upsilon-1}\right)+2\mu\right)}{\frac{-2\upsilon\mu}{2\upsilon-1}+\mu} = 2\mu(1+\upsilon) \tag{45.5}$$

Finalement on aboutit à une relation entre le module de cisaillement (μ) et celui de Young (E).

$$\mu = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \tag{46.5}$$

5.9 Tenseurs d'élasticité

Les champs de déformation et de contrainte dans un milieu continu sont liés par des lois appelées lois de comportement. Ces lois caractérisent le comportement mécanique de ce milieu. Le comportement élastique d'un milieu continu est caractérisé par une relation linéaire liant les contraintes aux déformations :

$$[\sigma] = [C].[\varepsilon] \tag{47.5}$$

En notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{48.5}$$

Le comportement élastique d'un milieu continu est aussi caractérisé par une relation linéaire liant les déformations aux contraintes:

$$[\varepsilon] = [S].[\sigma] \tag{49.5}$$

En notation indicielle :

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \tag{50.5}$$

(C_{ijkl}) et (S_{ijkl}) représentent respectivement les tenseurs de rigidité et de souplesse. Compte tenu de la symétrie des deux tenseurs (σ_{ij}) et (ε_{ij}) on peut dire que ces deux tenseurs sont aussi symétrique et on peut écrire que :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \tag{51.5}$$

A cause de sa symétrie, le tenseur d'élasticité fait apparaitre (21) coefficients au lieu de (36).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \bullet & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \bullet & \bullet & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{55} & C_{56} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \tag{52.5}$$

Et :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ \bullet & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ \bullet & \bullet & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{55} & S_{56} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{53.5}$$

5.10 Notation de Voigt

La notation de Voigt est une convention qui est employée pour réduire le nombre d'indices utilisés pour décrire un tenseur symétrique. Le principe de la notation de Voigt est illustré par le cas des tenseurs symétriques de second ordre, tels que le tenseur de contraintes et celui de déformation. Soit le tenseur de second ordre représenté par la matrice suivante :

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{54.5}$$

Cette matrice contient (9) coefficients. Par raison de symétrie le nombre de coefficients se réduit à (6) seulement. Connaitre ses (6) coefficients suffit pour représenter complètement le tenseur (a_{ij}). La notation de Voigt consiste à rassembler deux indices en un seul suivant la convention suivante dans le but de simplifier l'écriture.

$11 \rightarrow 1$ 32 ou $23 \rightarrow 4$

$22 \rightarrow 2$ 31 ou $13 \rightarrow 5$

$33 \rightarrow 3$ 21 ou $12 \rightarrow 6$

Exemple : Considérons la loi de Hooke qui lie les contraintes aux déformations :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

Par exemple pour la composante σ_{13} :
i=1 , j=3 , k=1,2,3 et l=1,2,3

$$\sigma_{13} = C_{1311}\varepsilon_{13} + C_{1322}\varepsilon_{22} + C_{1333}\varepsilon_{33} + C_{1323}\varepsilon_{23} + C_{1332}\varepsilon_{32} + C_{1331}\varepsilon_{31} + C_{1313}\varepsilon_{13} + C_{1321}\varepsilon_{21} + C_{1312}\varepsilon_{12}$$

Sachant que les tenseurs $(C_{ijkl}\varepsilon_{kl})$ et (ε_{kl}) sont symétriques alors :

$$\sigma_{13} = C_{1311}\varepsilon_{13} + C_{1322}\varepsilon_{22} + C_{1333}\varepsilon_{33} + 2.C_{1332}\varepsilon_{32} + 2.C_{1331}\varepsilon_{31} + 2.C_{1321}\varepsilon_{21}$$

Le coefficient 2 est intégré par convention dans les composantes de déformation ce qui donne :

$$\sigma_{13} = C_{1311}\varepsilon_{13} + C_{1322}\varepsilon_{22} + C_{1333}\varepsilon_{33} + C_{1332}\varepsilon_{32} + C_{1331}\varepsilon_{31} + C_{1321}\varepsilon_{21}$$

On passe ainsi de la notation complète à celle de Voigt par les relations suivantes :

$\sigma_\alpha = \sigma_{ij}$	$C_{\alpha\beta}C_{ijkl}$
$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{ij}$	Pour α=1,2,3
$\varepsilon_\alpha = 2.\varepsilon_{ij}$	Pour α=4,5,6

Le tenseur des contraintes prends la forme d'un vecteur (σ_i) tel que :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (55.5)$$

De même le tenseur de déformation prends la forme d'un vecteur (ε_α) :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_6 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 & \frac{1}{2}\varepsilon_4 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (56.5)$$

5.11 Milieux anisotrope

Dans le cas général, la matrice de rigidité et celle de souplesse font apparaitre chacune (21) coefficients indépendants. Ce cas correspond à un matériau non homogène, ne possédant aucune propriété de symétrie, un tel matériau est dit **triclinique.**

Les matrices de rigidité et de souplesse sont de la forme :

- **Matrice de rigidité pour un matériau triclinique:**

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \bullet & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \bullet & \bullet & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{55} & C_{56} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{66} \end{bmatrix} \tag{57.5}$$

- **Matrice de souplesse pour un matériau triclinique :**

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ \bullet & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ \bullet & \bullet & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{55} & S_{56} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{66} \end{bmatrix} \tag{58.5}$$

En réalité la plupart des matériaux anisotropes possèdent des structures présentant une ou plusieurs symétries ; ce qui permet alors de réduire le nombre de constantes indépendantes des matrices de rigidité et de souplesse, nécessaires à la description du comportement mécanique des matériaux. On peut citer ici quelques cas :

- **Matériau monoclinique :** Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un seul plan de symétrie. Les matrices de rigidité et celle de souplesse sont écrites comme suit :

- **Matrice de rigidité pour un matériau monoclinique:**

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ \bullet & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ \bullet & \bullet & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & C_{44} & C_{45} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{55} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{66} \end{bmatrix} \tag{59.5}$$

- **Matrice de souplesse pour un matériau monoclinique :**

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ \bullet & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ \bullet & \bullet & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & S_{44} & S_{45} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{55} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{66} \end{bmatrix} \tag{60.5}$$

- **Matériau orthotrope :** Un matériau monoclinique est un matériau qui possède (3) plans de symétries perpendiculaires (2) à (2). La forme de la matrice de rigidité et celle de souplesse sont écrites comme suit :
- **Matrice de rigidité pour un matériau orthotrope :**

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & C_{44} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{55} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{66} \end{bmatrix} \tag{61.5}$$

- **Matrice de souplesse pour un matériau orthotrope :**

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & S_{44} & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{55} & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & S_{66} \end{bmatrix} \tag{62.5}$$

- **Matériau isotrope :** Un matériau est dit isotrope si ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions. Dans ce cas le nombre de constantes d'élasticité est réduit à (2) et la matrice de rigidité prend la forme suivante :
- **Matrice de rigidité pour un matériau isotrope :**

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \frac{1}{2}.(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \frac{1}{2}.(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \frac{1}{2}.(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix} \tag{63.5}$$

Les coefficients de la matrice de rigidité sont exprimés en fonction des coefficients de Lamé (μ) et (λ) :

$$C_{11} = \lambda + 2\mu \tag{64.5}$$

$$\mu = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \tag{65.5}$$

$$C_{12} = \lambda \tag{66.5}$$

5.12 Coefficient du tenseur d'élasticité pour un milieu isotrope

Si le milieu considéré est isotrope l'équation de constitution s'écrit comme suit :

$$\sigma_{ij} = \lambda.\theta.\delta_{ij} + 2\mu.\varepsilon_{ij} \tag{67.5}$$

Cette relation est appelée aussi relation de Lamé où (μ) et (λ) sont les coefficients de Lamé et (θ) la dilatation cubique.

Sachant que :

Sachant que :

$$\theta = \frac{\partial U_i}{\partial X_i}$$

Et :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)$$

Alors :

$$\varepsilon_{ii} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_i} + \frac{\partial U_i}{\partial X_i}\right) = \frac{\partial U_i}{\partial X_i} = \theta = \varepsilon_{kk} \tag{68.5}$$

Et :

$$\sigma_{ij} = \lambda.\varepsilon_{kk}.\delta_{ij} + 2\mu.\varepsilon_{ij} \tag{69.5}$$

Application 3 : On se propose de déterminer les composantes du tenseur de rigidité (C_{ijkl}) en fonction des coefficients de Lamé.

D'après la relation **(69.5)** :

i=1, j=1

$$\sigma_{11} = \lambda.(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu.\varepsilon_{11} = (\lambda + 2\mu).\varepsilon_{11} + \lambda.(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})$$

i=2, j=2

$$\sigma_{22} = \lambda.(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu.\varepsilon_{22} = (\lambda + 2\mu).\varepsilon_{22} + \lambda.(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{33})$$

i=3, j=3

$$\sigma_{33} = \lambda.(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu.\varepsilon_{33} = (\lambda + 2\mu).\varepsilon_{33} + \lambda.(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$$

i=1, j=2

$$\sigma_{12} = 2\mu.\varepsilon_{12} = \sigma_{21}$$

i=1, j=3

$$\sigma_{13} = 2\mu.\varepsilon_{13} = \sigma_{31}$$

i=2, j=3

$$\sigma_{23} = 2\mu.\varepsilon_{23} = \sigma_{32}$$

Sous forme matricielle et en utilisant la notation de l'ingénieur on obtient une relation entre les composantes du vecteur de contraintes et celle du vecteur de déformation:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2.\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \lambda + 2.\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \lambda + 2.\mu & 0 & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & 2.\mu & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 2.\mu & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 2.\mu \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \qquad (70.5)$$

La loi de comportement est caractérisée par deux écritures différentes. On utilise soit les coefficients de Lamé (μ) et (λ), soit le module de Young (E) et le coefficient de Poisson (ν). On préfère souvent l'emploi de ces deux dernières grandeurs qu'on peut facilement les déterminer par un simple essai de traction. Le tableau suivant résume la valeur de ses grandeurs pour quelques matériaux.

Matériaux	**E (GPa)**	**(ν)**	**ρ(Kg/dm^3)**
Acier de construction	210	0.285	7.8
Acier Inox 18-12	203	0.29	7.9
Fonte grise	90 à 120	0.29	7.1 à 7.2
Alliage TA6V	105	0.25	7.8
Aluminium	71	0.34	2.6
Zinc	78	0.21	7.15
Titane	105	0.34	4.5
Verre	60	0.25	2.8
Béton en compression	10 à 13	0.15	2 à 2.4
Caoutchouc	0.2	0.5	1.8
Bois (Pin)	7	0.2	0.4
Marbre	26	0.3	2.8
Graphite	250 à 350	0.3 à 0.4	1.75 à 1.92
Elastomère	0.2	0.5	1

5.13 Relation entre déformations et contraintes

L'expression de la relation de Hooke généralisée conduit à l'écriture suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \dfrac{\sigma_{11}}{E} + \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{\sigma_{22}}{E} + \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) \\ \varepsilon_{33} = \dfrac{\sigma_{33}}{E} + \dfrac{\upsilon}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{cases} \tag{71.5}$$

Une contrainte tangentielle (τ_{ij}) qui agit sur une facette quelconque d'un solide produit une déformation angulaire $(\varepsilon_{ij})/(\gamma_{ij})$. Cette relation entre les deux grandeurs est donnée par la relation **(28.5)**:

$$\varepsilon_{ij} = 3p.\frac{\upsilon}{E}(\delta_{ij}) + \frac{(1+\upsilon)}{E}.(\sigma_{ij})$$

Pour les déformations angulaires (distorsions) nous avons :

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad \delta_{ij} = 0$$

Alors :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{(1+\upsilon)}{E}.\sigma_{ij} = \frac{(1+\upsilon)}{E}.\tau_{ij} \tag{72.5}$$

Et sachant que d'après la relation **(42.5)** nous avons:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\upsilon)}$$

Alors :

$$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\mu} = \frac{\tau_{ij}}{G} \tag{73.5}$$

Finalement on obtient :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33})$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} + \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{\mu} = \frac{\tau_{12}}{G} = \gamma_{21}$$

$$\gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{\mu} = \frac{\tau_{13}}{G} = \gamma_{31}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\tau_{23}}{\mu} = \frac{\tau_{23}}{G} = \gamma_{32}$$

5.14 Problèmes particulier d'élasticité

5.14.1 Contraintes planes

Un solide est en état de contraintes planes par rapport à un plan $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$ **(figure 8.5)**, si en tout point (M) de se solide le tenseur de contraintes par rapport à un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{74.5}$$

Les composantes (σ_{11}) , (σ_{22}) et (σ_{12}) sont indépendantes de la direction $(\vec{x}_3)$ qui représente une direction principale pour tous les points d $\vec{x}_3$ lide.

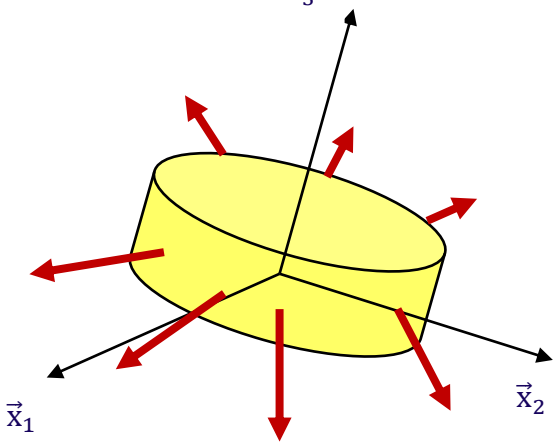


Fig.8.5 Etat de contraintes planes

Le tenseur de déformation est de la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{75.5}$$

La loi de comportement qui permet de relier les contraintes aux déformations **(42.5)** s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\upsilon^2} \begin{bmatrix} 1 & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\upsilon}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \tag{76.5}$$

Avec :

$$\gamma_{12} = 2.\varepsilon_{12} \tag{77.5}$$

Et :

$$\varepsilon_{33} = \frac{-\upsilon}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \tag{78.5}$$

L'état de déformation est complètement défini par les trois grandeurs : (ε_{11}) , (ε_{22}) et (ε_{12})

Les déformations et les contraintes ne dépendent que des déplacements (U_1) et (U_2)

Domaine d'application : L'approximation des contraintes planes convient aux plaques minces sollicitées dans leur plan (plaque sollicitée en traction) **(figure 9.5)**.

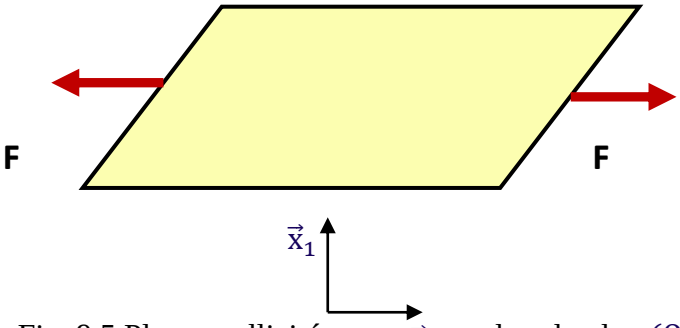


Fig. 9.5 Plaque sollicitée en t n dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$

5.14.2 Déformation planes

Un solide est en état de déformations planes dans un plan $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2)$, si en tout point (M) de se solide et par rapport à un repère $(O, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ le champ de déplacement est de la forme :

$$\begin{cases} U_1 = U_1(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ U_2 = U_2(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \\ U_3 = 0 \end{cases} \tag{79.5}$$

Le tenseur de déformation est alors de la forme :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{80.5}$$

En tout point de ce solide les déformations et les contraintes sont indépendantes de la direction $(\vec{x}_3)$ et le tenseur de contrainte est de la forme :

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \tag{81.5}$$

La loi de comportement qui permet de relier les contraintes aux déformations **(42.5)** s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2\mu & \upsilon & 0 \\ \upsilon & 1+2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} \tag{82.5}$$

Domaine d'application :

L'approximation des contraintes planes s'applique dans le cas d'un cylindre dont la dimension dans la direction de l'axe $(\vec{x}_3)$ est très grande et si les forces appliquées au cylindre sont normales à cette direction.

5.15 Equations de compatibilité

Les composantes du tenseur de déformation sont complètement déterminées en un point quelconque par les trois composantes (U_1) , (U_1) et (U_3) du vecteur déplacement $\vec{U}$ **(8.5)**.

Imaginons une structure divisée avant sa déformation en petits cubes **(figure 10.5)**. Si chaque élément subit une déformation à part, les cubes deviennent des parallélépipèdes et leurs arrangement pour former un corps déformé continu peut devenir un problème.

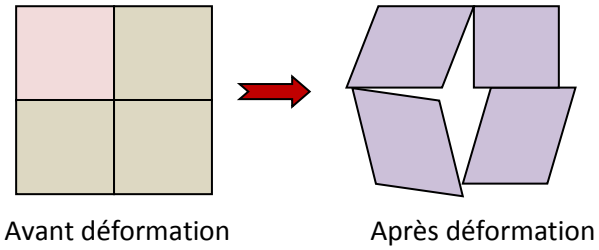


Fig. 10.5 Déformation d'un corps discontinu

Pour assurer cette continuité les composantes du tenseur de déformation doivent satisfaire certaines relations qui sont appelées : les équations de compatibilité.

Sachant que :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \tag{83.5}$$

Dérivons cette relation deux fois par rapport à la variable (X_2) :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 . \partial X_2^2} \tag{84.5}$$

De même :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 . \partial X_1^2} \tag{85.5}$$

Ajoutons les relations **(84.5)** et **(85.5)** :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 . \partial X_2^2} + \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 . \partial X_1^2} \tag{86.5}$$

Or :

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\right) \tag{87.5}$$

Et :

$$2 . \varepsilon_{12} = \gamma_{12} = \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1} \tag{88.5}$$

Dérivons l'expression de la relation **(88.5)** deux fois par rapport aux variables (X_1) et (X_2) :

$$\frac{\partial^2\gamma_{12}}{\partial X_1\partial X_2}=\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial X_2}\right)=\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial X_2^2}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial X_1\partial X_2}\right)=\frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1\partial X_2^2}+\frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2\partial X_1^2} \tag{89.5}$$

Les relations **(86.5)** et **(89.5)** sont identiques alors :

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial X_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial X_1^2}=\frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1\partial X_2^2}+\frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2\partial X_1^2}=\frac{\partial^2\gamma_{12}}{\partial X_1\partial X_2} \tag{90.5}$$

La relation **(90.5)** représente la première équation de compatibilité. La deuxième et la troisième s'obtiennent à un indice prés de la même manière:

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{11}}{\partial X_3^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial X_1^2}=\frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1\partial X_3^2}+\frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3\partial X_1^2}=\frac{\partial^2\gamma_{13}}{\partial X_1\partial X_3} \tag{91.5}$$

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{22}}{\partial X_3^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{33}}{\partial X_2^2}=\frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2\partial X_3^2}+\frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3\partial X_2^2}=\frac{\partial^2\gamma_{13}}{\partial X_2\partial X_3} \tag{92.5}$$

En plus si :

$$\gamma_{12}=\frac{\partial U_1}{\partial X_2}+\frac{\partial U_2}{\partial X_1} \tag{93.5}$$

Alors :

$$\frac{\partial\gamma_{12}}{\partial X_3}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial X_2\partial X_3}+\frac{\partial^2 U_2}{\partial X_1\partial X_3} \tag{94.5}$$

Nous avons aussi :

$$\gamma_{13}=\frac{\partial U_1}{\partial X_3}+\frac{\partial U_3}{\partial X_1} \tag{95.5}$$

Alors :

$$\frac{\partial\gamma_{13}}{\partial X_2}=\frac{\partial^2 U_1}{\partial X_2\partial X_3}+\frac{\partial^2 U_3}{\partial X_2\partial X_1} \tag{96.5}$$

$$\gamma_{23}=\frac{\partial U_2}{\partial X_3}+\frac{\partial U_3}{\partial X_2} \tag{97.5}$$

Alors :

$$\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial X_1}=\frac{\partial^2 U_2}{\partial X_1\partial X_3}+\frac{\partial^2 U_3}{\partial X_1\partial X_2} \tag{98.5}$$

Ajoutons les relations **(96.5)** et **(97.5)** et retranchons **(98.5)** pour obtenir :

$$\frac{\partial\gamma_{13}}{\partial X_3}+\frac{\partial\gamma_{13}}{\partial X_2}-\frac{\partial\gamma_{23}}{\partial X_1}=2.\frac{\partial^2 U_1}{\partial X_2\partial X_3} \tag{99.5}$$

Dérivons les deux membres de la relation **(99.5)** fois par rapport à la variable (X_1) :

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_3}+\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2}-\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1}\right)=2.\frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_2 \partial X_3}=2.\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial^3 U_1}{\partial X_2 \partial X_3}\right)=2.\frac{\partial^2}{\partial X_2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1}\right) \tag{100.5}$$

$$2.\frac{\partial^2}{\partial X_2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1}\right)=2.\frac{\partial^2}{\partial X_2}(\varepsilon_{11})=2.\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} \tag{101.5}$$

Cette relation représente la quatrième équation de compatibilité. La cinquième et la sixième s'obtiennent à un indice de la même manière :

$$\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3}-\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2}\right)=2.\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} \tag{102.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_3}\left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2}-\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3}\right)=2.\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2} \tag{103.5}$$

Les six équations appelées équations de constituions reliant les composantes de déformation entre elles traduisent la continuité dans le matériau.

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2}=\frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_2^2}+\frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \partial X_1^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2}=\frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_3^2}+\frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3 \partial X_1^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial X_1 \partial X_3} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2}=\frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \partial X_3^2}+\frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3 \partial X_2^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} \\
\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_3}+\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2}-\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1}\right)=2.\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} \\
\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3}-\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2}\right)=2.\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} \\
\frac{\partial}{\partial X_3}\left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1}+\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2}-\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3}\right)=2.\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2}
\end{gathered} \tag{104.5}$$

5.16 Influence de la température

Sous l'effet de la chaleur les corps se dilatent. Soit un milieu continu exposé à un champ de température. Si la variation de température (ΔT) dans ce milieu est continue et uniforme dans cet élément. Cette variation de température influence surtout le tenseur de déformation :

$$\varepsilon_{11}^T=\varepsilon_{22}^T=\varepsilon_{33}^T=\alpha.\Delta T \tag{106.5}$$

Et :

$$\gamma_{12}^T=\gamma_{13}^T=\gamma_{23}^T=0 \tag{107.5}$$

Dans la relation **(106.5)** (α) représente le coefficient de dilatation thermique. Si un corps est soumis en plus des actions mécaniques externes à une variation de température (ΔT) , on applique le principe de la superposition des déformation. Les composantes du tenseur de déformation deviennent :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \alpha.\Delta T \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) + \alpha.\Delta T \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{E} + \frac{\upsilon}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha.\Delta T \\
\varepsilon_{12} &= \frac{\sigma_{12}}{2\mu} \\
\varepsilon_{13} &= \frac{\sigma_{13}}{2\mu} \\
\varepsilon_{23} &= \frac{\sigma_{23}}{2\mu}
\end{aligned} \tag{108.5}$$

5.17 Résolution d'un problème de mécanique des solides déformables

Un problème général de la mécanique des solides déformable se pose de la manière suivante : soit un solide déformable (D) entouré d'une surface (S). Ce système est soumis à des forces volumiques $\vec{F}(M,t)$ de composantes (F_i) et à des conditions sur la frontière (S) appelées conditions aux limites ou conditions aux frontières **(figure 11.5)**.

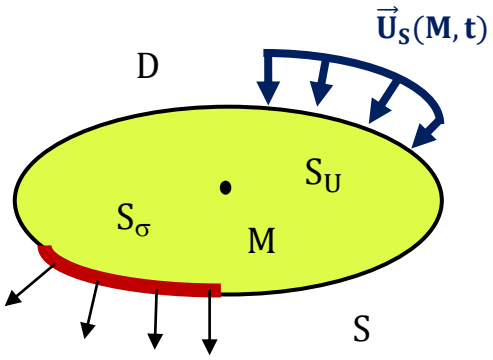


Fig. 11.5 $\vec{T}_S(M,t)$ aux limites d'un problème

Les conditions aux limites peuvent être de deux types : Sur une partie (S_u) de la frontière (S) sont imposés des déplacements $\vec{U}_S(M,t)$ tel que $\forall\ M \in (S_u)$:

$$\vec{U}(M,t) = \vec{U}_S(M,t) \tag{109.5}$$

Sur la frontière complémentaire (S_σ) de (S) sont imposées des forces surfaciques $\vec{T}_S(M,t)$ (ou bien absence de forces surfaciques c'est-à-dire une surface libre $(\vec{T}_S(M,t) = 0)$ tel que tel que $\forall\ M \in (S_\sigma)$:

$$\vec{T}(M,t) = \vec{T}_S(M,t) \tag{110.5}$$

Sous l'effet des actions imposées (forces volumiques, conditions aux limites) le solide (D) se déforme. Le problème de la mécanique des solides déformables, consiste à déterminer le champ de déplacement $\vec{U}(M,t)$ et le champ de contraintes $\sigma(M,t)$ en tout point (M) du solide (D) vérifiant les conditions suivantes :

- **Loi fondamentale de la dynamique :**

Pour un problème dynamique :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = \mathrm{div}(\sigma_{ij}) = \rho.\frac{dx_i^2}{dt^2} \tag{111.5}$$

Pour un problème statique :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0 \tag{112.5}$$

- **Relation déformation et déplacement :**

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\right) \tag{113.5}$$

- **Les équations de compatibilité :**

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_2^2} + \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \partial X_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial X_1 \partial X_2} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1^2} = \frac{\partial^3 U_1}{\partial X_1 \partial X_3^2} + \frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3 \partial X_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{13}}{\partial X_1 \partial X_3} \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_2^2} = \frac{\partial^3 U_2}{\partial X_2 \partial X_3^2} + \frac{\partial^3 U_3}{\partial X_3 \partial X_2^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{23}}{\partial X_2 \partial X_3} \\
\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_3} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1}\right) = 2.\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial X_2 \partial X_3} \\
\frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3} - \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2}\right) = 2.\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial X_1 \partial X_3} \\
\frac{\partial}{\partial X_3}\left(\frac{\partial \gamma_{23}}{\partial X_1} + \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial X_2} - \frac{\partial \gamma_{12}}{\partial X_3}\right) = 2.\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial X_1 \partial X_2}
\end{gathered} \tag{114.5}$$

- **Les conditions aux limites :**

Sur (S_u) :

$$\vec{U}(M,t) = \vec{U}_S(M,t) \tag{115.5}$$

Sur (S_σ) :

$$\vec{U}(M,t) = \vec{U}_S(M,t) \tag{116.5}$$

- **La loi de comportement du matériau**

Elle caractérise son comportement mécanique et lie les contraintes aux déformations.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{117.5}$$

• Bibliographie

[1] E.J. HEARN, Mechanics of Materials 1: An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials, University of Warwick United Kingdom, 3rd edition.

[2] E.J. HEARN, Mechanics of Materials 2: An Introduction to the Mechanics of Elastic and Plastic Deformation of Solids and Structural Materials, University of Warwick United Kingdom, 3rd edition.

[3] Y.C.FUNG, P. HALL, A first course in continuum mechanics, University of New Jersey, 3rd edition,(1977).

[4] Y.DEBARD, Résistance des Matériaux Elasticité Plane, Université du Maine, Le Mans.

[5] S.TIMOSHENKO, J.N.GOODIER, Theory of elasticity, Edition McGRAW HILL, (1951).

[6] S.FOREST, M.AMESTROY, Mécanique des milieux continus, Ecole des Mines de Paris,(2010).

[7] L.MICHAEL, R.DAVID, Introduction to Continum Mechanics, 3rd Edition, BUTTER WORTH HEINEMANN, (1993).

[8] A.HADDAD,L.KHEZZAR, Mécanique des milieux continus, Edition BERTI,(1999).

[9] J.M. BERTHELOT, Matériaux Composites Comportement Mécanique et Analyse des Structures, 3rd Edition.

[10] S.TIMOSHENKO, J.N.GOODIER, History of strength materials, Edition McGRAW HILL, (1953).

[11] G. DUVAULT, Mécanique des Milieux Continus, Edition MASSON, Paris.

[12] J.OBALA , Exercices et Problèmes de Mécanique des Milieux Continus, Edition MASSON, Paris,(1981).

[13] M.L.FARES, Principes Physiques du Comportement Mécanique des Matériaux, Publication de l'université de Annaba.

[14] N. BOURAHLA, Résistance des Matériaux de Base, Université Saad Dahlab Blida, Edition GEOTEC.

[15] S. BELKAHLA, Cours d'Elasticité Plasticité, Publication de l'université de Annaba.

[16] O. RAHMANI, S.KEBDANI, Introduction à la Méthode des Eléments Finis pour les Ingénieurs, Edition OPU.

[17] P.CHADWICK, Continum Mechanics Theory and Problems, Edition ALLEN & UNWIN,(1976).

[18] C.TRUESDELL, A First Course in Continum Mechanics Vol 1 General Concepts , N.Y ACADEMIC PRESS.

[19] O. PANTALE, Lois Constitutives en Grandes Déformations , Notes de Cours, Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes, (2008).

[20] M. BRUNET, Analyse non linéaire des matériaux et des structures, Notes de Cours, Institut National des Sciences Appliquées INSA de Lyon, (2010).

[21] A. BERTRAM, « Elasticity and Plasticity of Large Deformations », SPRINGER VERLAG, 2nd Edition, (2008).

[22] Y. BASAR, D. WEICHERTR, Nonlinear Continuum Mechanics of solide, Fundamental mathematical and physical concepts, SPRINGER VERLAG, (1999).

[23] N. MOËS, Mécanique des milieux continus, Cours de mécanique des milieux continus, Ecole centrale de Nantes, (2012).

[24]] F. SIDORODFF, Cours sur les grandes transformations et endommagement, Rapport Greco N° 51, Sophia-Antipolis, (1982).

[25] F. SIDORODFF, Mécanique des milieux continus, Cours de mécanique des milieux continus, Ecole Centrale de Lyon, (2010).

[26] J. BONET, D. RICHARD, Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis ,University of Wales Swansea University of Wales, CAMBRIDGE University Press 2nd Edition,(2008).

[27] W. LAI, D. RUBIN, E. KREMPL, Introduction to Continuum Mechanics , Elsevier Butterworth-Heinemann, (1993).

•Sommaire

Préface 1

Chapitre 1 : Rappel de Mathématique

1.1 Définition 2

1.2 Composantes d'un vecteur 2

1.3 Module d'un vecteur 3

1.4 Opérations sur les vecteurs 3

1.4.1 Produit scalaire 3

1.4.2 Produit vectoriel 3

1.4.2 Produit mixte 4

1.5 Symbole de permutation ε_{ijk} 5

1.6 Différentiation d'un vecteur 5

1.7 Champs Vectoriels 6

1.7.1 Opérateur Hamiltonien 7

1.7.2 Opérateur Laplacien 8

1.8 Intégrales Vectoriels 8

1.8.1 Intégrale simple 8

1.8.2 Intégrale double 8

1.8.3 Théorème de Green-Ostrogradski, 9

1.9 Notation indicielle 9

1.10 Changement de bases 10

1.11 Définition des tenseurs 14

1.11.1 Définition 14

1.11.2 Ordre d'un tenseur 14

1.11.3 Opérations sur les tenseurs **15**

1.12 Matrices **16**

1.12.1 Définition **16**

1.12.2 Quelques matrices carrées particulières **17**

1.12.3 Opérations sur les matrices **18**

1.12.4 Multiplication des matrices **19**

1.12.5 Produit d'une matrice par un vecteur **20**

1.12.6 Inversion des matrices carrées **20**

Chapitre 2 : Cinématique des Milieux Continus

2.1 Introduction **21**

2.2 Définitions d'un milieu continu **21**

2.3 Principes et équations **22**

2.4 Le mouvement et ses représentations **22**

2.4.1 Définition **22**

2.4.2 Description Lagrangienne du mouvement **23**

2.4.3 Description d'Euler **24**

2.4.4 Accélération d'Euler **26**

2.4.5 Lignes de courant **27**

2.4.6 Trajectoire **27**

2.5 Conservation de masse et Jacobien **27**

2.6 Equation de continuité **28**

Chapitre 3 : Tenseurs de contraintes

3.1 Introduction **30**

3.2 Forces dans un milieu continu **30**

3.2.1 Forces intérieures **30**

3.2.2 Forces massiques **30**

3.2.3 Forces surfaciques **30**

3.3 Notion de contrainte **31**

3.4 Tenseur de contraintes **32**

3.5 Vecteur contrainte sur une facette quelconque **34**

3.6 Symétrie du tenseur des contraintes **36**

3.7 Conséquences de la symétrie du tenseur de contrainte **38**

3.8 Contraintes principales et invariants **38**

3.9 Intérêt des contraintes principales **39**

3.10 Interprétation physique **39**

3.11 Recherche des éléments principaux **39**

3.12 Déviateur des contraintes **40**

3.13 Tenseur de contraintes particuliers **41**

3.13.1 Etat de contraintes uni axial (traction ou compression simple) **41**

3.13.2 Etat plan de contrainte **42**

3.13.3 Etat de contraintes isotrope **42**

3.13.4 Etat de cisaillement simple **43**

3.14 Mesure de contraintes **43**

3.15 Représentation géométrique des cercles de Mohr **43**

3.16 Cercles de Mohr cas de l'état plan de contraintes **47**

3.17 Angle de cisaillement nul **50**

3.18 Equations d'équilibres **51**

3.19 Contraintes octaédriques **54**

3.19.1 Contrainte normale octaédrique **54**

3.19.2 Contrainte tangentielle octaédrique **54**

Chapitre 4 : Théorie des déformations

4.1 Généralités **56**

4.2 Définition **57**

4.3 Exemple de déformations simples **57**

4. 4 Déplacement **56**

4.5 Gradient de déformation **59**

4.6 Relation entre le vecteur déplacement et le gradient de déformation **60**

4.7 Tenseurs de déformation **61**

4.8 Relation entre le tenseur de déformation et le vecteur déplacement **63**

4.9 Hypothèses des petits déplacements **66**

4.10 Variation de longueur **66**

4.11 Variation de volume **67**

4.12 Interprétation du tenseur des déformations infinitésimales **68**

4.12.1 Eléments de la diagonale **68**

4.12.2 Eléments non diagonaux du tenseur de déformation : **69**

4.13 Tenseur de rotation **73**

Chapitre 5 : Relation entre contraintes et déformations

(Lois de comportements)

5.1 Introduction **76**

5.2 Déformation élastique des solides **76**

5.3 Limite d'élasticité **77**

5.4 Loi de Hooke **78**

5.5 Solide élastique isotrope **81**

5.6 Loi de Hooke généralisée **82**

5.7 Module de cisaillement **84**

5.8 Module de Young et coefficient de Poisson **84**

5.9 Tenseurs d'élasticité **86**

5.10 Notation de Voigt **87**

5.11 Milieux anisotrope **88**

5.12 Coefficient du tenseur d'élasticité pour un milieu isotrope **91**

5.13 Relation entre déformations et contraintes **93**

5.14 Problèmes particulier d'élasticité **94**

5.14.1 Contraintes planes **94**

5.14.2 Déformation planes **95**

5.15 Equations de compatibilité **96**

5.16 Influence de la température **98**

5.17 Résolution d'un problème de mécanique des solides déformables **99**

Bibliographie **102**

Sommaire **104**

View publication stats