Cours de Mécanique des Milieux Continus

Année universitaire 2013 – 2014

Mouncif Sidki

sidkimouncif@hotmail.com

Licence- SMP5 Parcours Mécanique Faculté des sciences d'El Jadida Maroc

INTRODUCTION GENERALE

La MMC
Etude de l'équilibre et du mouvement des systèmes matériels continus déformables soumis à des sollicitations mécaniques~~ et t~~hermiques

Objectifs :
Déterminer les champs de déplacement, de vitesse, de densité volumique, de température, de contraintes, de déformation

Notion de milieu continu
Un domaine (D) d'un milieu matériel est dit *continu* si :

$\forall\ M(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ *et* $\forall\ \mathbf{t}$ on peut définir des grandeurs physiques locales relatives à ce milieu matériel

Echelle d'observation
La validité de l'hypothèse de continuité dépend de l'échelle d'observation.

Applications :
le calcul des structures
la biomécanique
la mécanique des fluides
le génie civil,
la recherche de nouveaux matériaux

Prérequis :
Maths : Algèbre et analyse tensorielle, Fonctions de plusieurs variables (dérivée partielle, différentielle)

Ouvrages intéressants :
Jean Coirier MMC cours et exercices corrigés, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aéronautique, Poitiers France. COI 531(026)

Jean Salençon MMC, I- Co~~ncepts~~ généraux, Ecole Polytechnique, Paris, France. SAL531

Paul Germain et Patrick Muller Introduction à la MMC, Université Pierre et Marie Curie. GER531

Michel Maya Cours de Mécanique des Milieux Continus, Ecole Nationale Supérieure des Arts et Métiers, Paris, Poitiers France
http://www.mmaya.fr/PDF/MMCWeb.pdf

Nicolas Moes MMC, Ecole Centrale de Nantes France.
https://pedagogie.ec-nantes.fr/meefi/Vibra/ecn/MMC-Cours.pdf

Eric Ringot, MMC Université Paul Sabatier, Toulouse, France
http://www.systemx.fr/meca/lm/mmc_general.pdf

PLAN DU COURS

Chap. 1 : Mouvement des milieux continus

Chap. 2 : Déformations des milieux continus

Chap. 3 : Contraintes dans un milieu continu

Chap. 4 : Lois de conservation

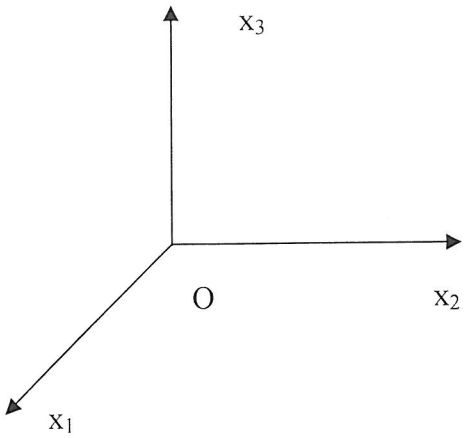
Chapitre 1 : Mouvement d'un milieu continu

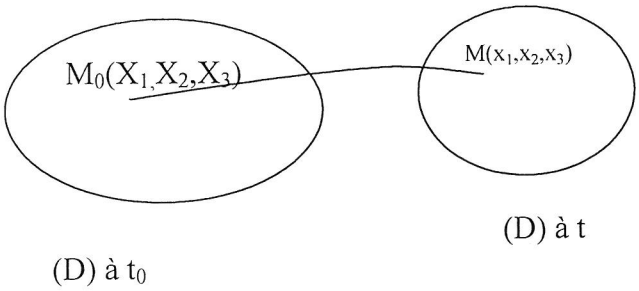
I Particule:

C'est un volume élémentaire composé d'un grand nombre de molécules entourant un point et possédant les mêmes propriétés physiques

II Description du mouvement :

II.1 Lagrangienne : Suivi des particules (une par une)





Nous avons : à t : $\boxed{x_i\,(X_1, X_2, X_3, t)}$

c.à.d. : l'identité d'une particule fluide M est décrite par la position M_0 qu'elle occupait à t_0.

C'est la description lagrangienne du mouvement. $(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \mathbf{t})$: variables de Lagrange

Pour toute grandeur physique G, nous avons $\boxed{G(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \mathbf{t})}$

Exemple : Mouvement défini par : $(x_1 = X_1\ (1 + \alpha t);\ x_2 = X_2;\ x_3 = X_3)$ (α cte)

Dérivée temporelle d'une grandeur :

Puisque $G(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \mathbf{t})$ alors $\boxed{\dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial G}{\partial t}}$

Pour une grandeur vectorielle, $\vec{G}(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, \mathbf{t})$ alors : $\boxed{\dfrac{d\vec{G}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial t}}$

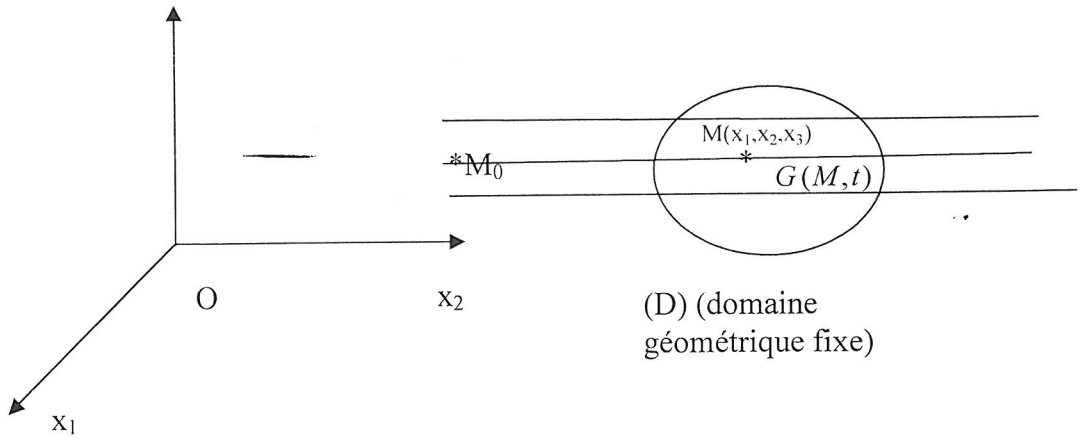
Exemple : Dans le mouvement défini par : $(x_1 = X_1\ (1 + \alpha t);\ x_2 = X_2;\ x_3 = X_3)$ (α cte),

Le vecteur vitesse est donnée par : $\vec{V} = \dfrac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial t} = \begin{pmatrix} a_1\alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur accélération est donné

par : $\vec{\gamma} = \dfrac{\partial^2 \overrightarrow{OM}}{\partial t^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

II.2) Description eulérienne :

L'attention est fixée sur les points géométriques M (x_1, x_2, x_3) d'un domaine (D) fixe et on observe les particules du milieu passant en ces points. (Photographie instantanée du mouvement).



A l'instant t, passe en M(x_1,x_2,x_3), une particule M_0 du milieu.

Les grandeurs physiques sont exprimées en fonction de M et t : $\boxed{G(M,t) = G(\mathbf{x_1},\ \mathbf{x_2},\ \mathbf{x_3},\ \mathbf{t})}$.

C'est la description eulérienne du mouvement. **(x_1, x_2, x_3, t)** sont appelées variables d'Euler

Exemple : Mouvement défini par : $\vec{V}(M,t)\begin{pmatrix} at \\ bx_1 \\ c \end{pmatrix}$

La grandeur vitesse est exprimée en variables d'Euler

Dérivée temporelle d'une grandeur :

Si la grandeur est scalaire alors $\dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial G}{\partial t} + \dfrac{\partial G}{\partial x_i}\dfrac{dx_i}{dt}$

Or $\dfrac{dx_i}{dt} = v_i$ alors : $\boxed{\dfrac{dG(M,t)}{dt} = \dfrac{\partial G}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\,G.\vec{V}}$ **avec** $(\overrightarrow{grad}\,G)_i = \dfrac{\partial G_i}{\partial x_j}$

Si la grandeur est vectorielle alors : $\dfrac{dG_i}{dt} = \dfrac{\partial G_i}{\partial t} + \dfrac{\partial G_i}{\partial x_j}v_j$

Soit encore: $\boxed{\dfrac{d\vec{G}(M,t)}{dt} = \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial t} + \overline{\overline{grad}}\,\vec{G}\ \ \vec{V}}$ **avec** $(\overline{\overline{grad}}\,\vec{G})_{ij} = \dfrac{\partial G_i}{\partial x_j}$

Exemple : Grandeur vitesse :

$\vec{\gamma}\,(M,t) = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \overline{\overline{grad}}\,\vec{V}\;\vec{V}$ ($\overline{\overline{grad}}\,\vec{V}$: matrice gradient de vitesse)

Ainsi dans le mouvement défini par : $\vec{V}(M,t)\begin{pmatrix} at \\ bx_1 \\ c \end{pmatrix}$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \overline{\overline{grad}}\,\vec{V} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\gamma}\,(M,t) = \begin{pmatrix} a \\ abt \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dérivée temporelle selon un champ de vitesses quelconque

Pour calculer la dérivée d'une grandeur scalaire $G(\vec{x},t)$, nous avons écrit:

$\dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial G}{\partial t} + \dfrac{\partial G}{\partial x_i}\dfrac{dx_i}{dt}$ et remplacé $\dfrac{dx_i}{dt}$ *par* v_i ; ce qui nous a donné : $\dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\partial G}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\,G.\vec{v}$

C'est une dérivation selon le champ des vitesses $\vec{v}$: **dérivation particulaire ou matérielle**

Si la dérivation s'effectue selon un champ de vitesse quelconque $\vec{w}$, Il suffit de remplacer $\dfrac{dx_i}{dt}$ *par* w_i, et nous aurons alors : $\boxed{\dfrac{\delta G}{\delta t} = \dfrac{\partial G}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\,G.\vec{w}}$

Dans le cas d'une grandeur vectorielle, nous obtenons : $\boxed{\dfrac{\delta \vec{G}}{\delta t} = \dfrac{\partial \vec{G}}{\partial t} + (\overline{\overline{grad}}\,\vec{G})\vec{w}}$

Relations entre dérivée particulaire (selon $\vec{v}$) et dérivée selon $\vec{w}$:

$\boxed{\dfrac{dG}{dt} = \dfrac{\delta G}{\delta t} + \overrightarrow{grad}\,G.\vec{v_r}}$ $\quad (\vec{v_r} = \vec{v} - \vec{w} : vitesse\ \ relative)$

$\boxed{\dfrac{d\vec{G}}{dt} = \dfrac{\delta \vec{G}}{\delta t} + (\overline{\overline{grad}}\,\vec{G})\,\vec{v_r}}$

Exemple:

Mesure de la variation temporelle de température d'un fluide:

a) Si le thermomètre est fixe, on va mesurer $\dfrac{\partial T}{\partial t}$ car : $\dfrac{\delta T}{\delta t} = \dfrac{\partial T}{\partial t}$

b) Si le thermomètre suit le mouvement du fluide, on va mesurer : $\dfrac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\,T.\vec{v}$ car : $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\,T.\vec{v}$

c) Si le thermomètre possède un mouvement propre $\vec{w} \neq \vec{v}$, on va mesurer $\dfrac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\,T.\vec{w}$ car: $\dfrac{\delta T}{\delta t} = \dfrac{\partial T}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\,T.\vec{w}$

II-3 Mouvements permanents- Mouvements uniformes :

Le Mouvement est dit permanent (ou stationnaire) si le champ des vitesses est indépendant de t : $\vec{V}(M)$

Le Mouvement est dit uniforme si le champ des vitesses est indépendant de M : $\vec{V}(t)$

II-4 Trajectoires , Lignes de courant, Lignes d'émission :

II-4.1 Trajectoire :

Définition : Lieu géométrique des positions successives d'une particule.

Equation : M ∈ trajectoire si $d\vec{M} = \vec{V}\,dt$ Soit encore si $\boxed{\frac{dx_1}{V_1} = \frac{dx_2}{V_2} = \frac{dx_3}{V_3} = dt}$

Après résolution : $\begin{cases} x_1 = x_1\,(X_1\,,\,X_2\,,\,X_3\,,\,t) \\ x_2 = x_2\,(X_1\,,\,X_2\,,\,X_3\,,\,t) \\ x_3 = x_3\,(X_1\,,\,X_2\,,\,X_3\,,\,t) \end{cases}$ équations paramétriques de la trajectoire

II.4.2. Ligne de courant :

Définition : Elle est définie à un instant donné t : courbe tangente aux vecteurs vitesse.

N.B. : -Ligne de courant ≠ trajectoire (cas général)
-Si le mouvement est permanent : Ligne de courant ≡ Trajectoire

En effet :
Soit une ligne de courant à un instant τ formée d'une infinité des points infiniment voisins:
$M_0, M_1, M_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, M_n, \ldots\ldots$

Question : Est-ce que cette LC peut être une trajectoire d'une particule P qui passe en M_0 à un instant t_0 ?
Autrement dit : Une particule P qui passe en M_0 à t_0 suivra-t-elle cette courbe géométrique qui est la ligne de courant à l'instant t ?

Réponse : Si le mouvement est permanent, les vitesses aux points $M_0, M_1, M_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, M_n, \ldots\ldots$ ne changent pas au cours du temps. La particule P suivra alors la LC . En effet lorsque la particule P arrive au point M_0 à l'instant t_0, elle aura la vitesse $\vec{V}(P,t_0) = \vec{V}(M_0,\tau)$ car $P \equiv M_0$ et mouvement permanent. La particule P passera donc au point infiniment voisin M_1 où sa vitesse sera : $\vec{V}(P,t_1) = \vec{V}(M_1,\tau)$ car $P \equiv M_1$ et mouvement permanent. La particule P passera donc au point infiniment voisin M_2 et ainsi de suite .....

Equation: $\forall$ M $\in$ LC (à t donné) $\quad \vec{dM} \;//\; \vec{V}$ (M, t)

on doit avoir $\begin{cases} dx_1 = \lambda V_1 \\ dx_2 = \lambda V_2 \\ dx_3 = \lambda V_3 \end{cases}$ λ paramètre

ou encore : $\boxed{\dfrac{dx_1}{V_1} = \dfrac{dx_2}{V_2} = \dfrac{dx_3}{V_3}}$

La résolution donne l'équation de la ligne de courant à t.

II.4.3. Ligne d'émission :

Définition : On appelle ligne d'émission d'un pont P, à un instant T : Le lieu des positions à l'instant T des particules qui sont passées en P aux instants antérieurs $t \leq T$

N.B : La ligne d'émission est donc relative à un point et à un instant.

Exemple : Ecoulement fluide bidimensionnel tel que :

$$\vec{V}(t) \begin{pmatrix} V_{10} + \alpha t \\ V_{20} \end{pmatrix} \quad V_{10}, V_{20}, \alpha \text{ ctes}$$

1°) Trajectoire. : $\dfrac{dx_1}{V_1} = \dfrac{dx_2}{V_2} = dt \quad \Rightarrow dx_1 = V_1 dt = (V_{10} + \alpha t)\, dt \quad et \quad dx_2 = V_{20} dt \quad \Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\alpha}{2} t^2 + V_{10} t + a_1 \\ x_2 = V_{20} t + a_2 \end{cases}$$ équations paramétriques

et par élimination de t :

$$x_1 = \frac{\alpha}{2V_{20}^2}(x_2 - a_2)^2 + \frac{V_{10}}{V_{20}}(x_2 - a_2) + a_1$$ équation de la trajectoire.

$\Rightarrow$ Trajectoires : Paraboles

2°) Ligne de courant à t_0.

$$\frac{dx_1}{V_1} = \frac{dx_2}{V_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_1}{V_{10} + \alpha t_0} = \frac{dx_2}{V_{20}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x_1}{V_{10} + \alpha t_0} = \frac{x_2}{V_{20}} + \text{cte}$$

Lignes de courant: droites

3°) Ligne d'émission à l'instant T relative au point $P(A_1, A_2)$

Un point de cette ligne d'émission est au point courant (x_1, x_2) à l'instant T :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\alpha}{2} T^2 + V_{10} T + a_1 \\ x_2 = V_{20} T + a_2 \end{cases}$$

Et était au point P(A_1,A_2) à $t \leq T$:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\alpha}{2} t^2 + V_{10} t + a_1 \\ A_2 = V_{20} t + a_2 \end{cases}$$

et par élimination de a_1 *et* a_2 entre ces deux relations, on obtient :

$$x_1 = \frac{\alpha}{2}(T^2 - t^2) + V_{10}(T - t) + A_1$$

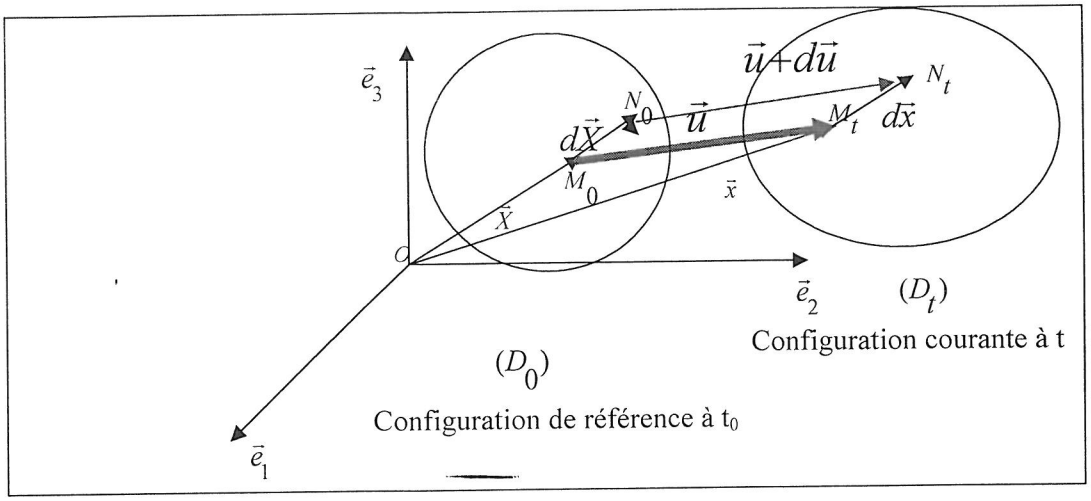
$$x_2 = V_{20}(T - t) + A_2$$

Ce sont les équations paramétriques de la ligne d'émission recherchée

Chapitre 2
Déformation d'un milieu continu

I Description de la transformation

Considérons la figure suivante schématisant la transformation d'un domaine d'un milieu continu entre les instants t_0 et t :



Vecteurs position :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_0 = X_1\,\vec{e}_1 + X_2\,\vec{e}_2 + X_3\,\vec{e}_3 = X_i\,\vec{e}_i = \vec{X}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_t = x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + x_3\,\vec{e}_3 = x_i\,\vec{e}_i = \vec{x}_i = \vec{x}}$$

Vecteur déplacement :

$$\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{OM}_t' - \overrightarrow{OM}_0 = \vec{x} - \vec{X}}$$

Description lagrangienne :

Variables de Lagrange : $(\vec{X}, t)$

Pour toute autre grandeur physique ~~G,~~ nous avons $G = G(\vec{X}, t)$

Description eulérienne:

Variables d'Euler $(\vec{x}, t)$

Pour toute autre grandeur physique G, nous avons $G = G(\vec{x}, t)$

II Tenseurs de la transformation

II-1 Tenseurs gradient déplacement:

En description lagrangienne : $\vec{u}(\vec{X},t) \Rightarrow$ *à t donné* : $\boxed{d\vec{u} = \overline{\overline{grad}}\,\vec{u}\,d\vec{X} = \overline{\overline{H}}\,d\vec{X}}$ avec $\boxed{H_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j}}$

$\overline{\overline{H}}$ tenseur gradient déplacement en description lagrangienne

En description eulérienne : $\boxed{\vec{u}(\vec{x},t) \Rightarrow \text{ à } t \text{ donné} : d\vec{u} = \overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{u}\,d\vec{x} = \overline{\overline{H}}^{*}\,d\vec{x}}$ avec $\boxed{H^{*}_{ij} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}}$

$\overline{\overline{H}}^{*}$ tenseur gradient déplacement en description eulérienne

II-2-Tenseur gradient

II-2-1-Définition

Au cours de la transformation le vecteur infinitésimal $d\vec{X}$ se transforme en $d\vec{x}$

Nous avons $x_i = x_i(X_j,t)$ *à t donné* : $d\,x_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j$

Soit encore $d\,x_i = F_{ij}\,dX_j$ avec $F_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial X_j}$

ou encore : $\boxed{d\vec{x} = \overline{\overline{F}}\,d\vec{X}}$ Le tenseur $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ est appelé **tenseur gradient**

La transformation inverse donne : $\boxed{d\vec{X} = \overline{\overline{F}}^{-1}\,d\vec{x} = \overline{\overline{F}}^{*}\,d\vec{x} = \overline{\overline{G}}\,d\vec{x}}$ avec $\boxed{G_{ij} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j}}$

Le tenseur $\overline{\overline{\mathbf{F}}}^{*}$ $(=\overline{\overline{G}})$ est appelé **tenseur gradient**

II-2-2 Expression de $\overline{\overline{F}}$ en fonction de $\overline{\overline{H}}$:

Nous avons : $\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$ Alors : $d\vec{x} = d\vec{X} + d\vec{u}$

Soit encore $dx_i = dX_i + du_i$

D'où $\dfrac{\partial x_i}{\partial X_j} dX_j = dX_i + \dfrac{\partial u_i}{\partial X_j} dX_j$

Ou encore : $\overline{\overline{\mathbf{F}}}d\vec{X} = \overline{\overline{I}}d\vec{X} + \overline{\overline{grad}}\,\vec{u}\,d\vec{X}$ D'où : $\boxed{\overline{\overline{F}} = (\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{H}})}$

II-2-3 Expression de $\overline{\overline{F}}^{*}$ en fonction de $\overline{\overline{H}}^{*}$:

$\overline{\overline{G}}$ peut être exprimé en fonction du tenseur déplacement:

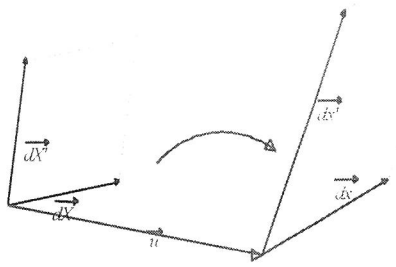
$\vec{x} = \vec{X} + \vec{u} \Rightarrow d\vec{X} = d\vec{x} - d\vec{u} \Rightarrow \overline{\overline{\mathbf{F}}}^{-1}\,d\vec{x} = d\vec{x} - \overline{\overline{H}}^{*}\,d\vec{x}$

D'où $\boxed{\overline{\overline{G}} = (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{H}}^{*})}$

II-3 Tenseurs des dilatations

II-3-1 Définition

Considérons la transformation des vecteurs infinitésimaux $d\vec{X}$ *et* $d\vec{X}'$, schématisée sur la figure suivante:



Nous avons: $d\vec{x} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}\, d\vec{X}$ et $d\vec{x}' = \overline{\overline{\mathbf{F}}}\, d\vec{X}'$ Ce qui nous donne : $d\vec{x}^T.d\vec{x}' = \left(\overline{\overline{\mathbf{F}}}\, d\vec{X}\right)^T.\overline{\overline{\mathbf{F}}}\, d\vec{X}'$

Soit encore : $d\vec{x}^T.d\vec{x}' = \left(d\vec{X}\right)^T \overline{\overline{\mathbf{F}}}^T \overline{\overline{\mathbf{F}}}\, d\vec{X}' = \left(d\vec{X}\right)^T \overline{\overline{\mathbf{C}}}\, d\vec{X}'$

$\boxed{\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}^T\, \overline{\overline{\mathbf{F}}}}$ **tenseur des dilatations** en description lagrangienne

Par ailleurs $d\vec{X}'^T.d\vec{X}' = \left(\overline{\overline{\mathbf{F}}}^{-1}\, d\vec{x}\right)^t.\overline{\overline{\mathbf{F}}}^{-1}\, d\vec{x}'$

$d\vec{X}'.d\vec{X}' = \left(d\vec{x}\right)^t \overline{\overline{F}}^{-1t}\, \overline{\overline{\mathbf{F}}}^{-1}\, d\vec{x}' = \left(d\vec{x}\right)^t \overline{\overline{\mathbf{C}}}^*\, d\vec{x}'$

avec $\boxed{\overline{\overline{\mathbf{C}}}^* = \overline{\overline{F}}^{-1t}\, \overline{\overline{\mathbf{F}}}^{-1} = \overline{\overline{G}}^t\, \overline{\overline{G}}}$ **tenseur des dilatations** en description eulérienne

II-3-2 Expression de $\overline{\overline{C}}$ en fonction de $\overline{\overline{H}}$:

$\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}^t\, \overline{\overline{\mathbf{F}}} = (\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{H}})^t (\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{H}})$

Soit encore :

$\boxed{\overline{\overline{\mathbf{C}}} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}^T\, \overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{I}} + (\overline{\overline{H}}^t + \overline{\overline{H}}) + \cancel{\overline{\overline{H}}^t\, \overline{\overline{H}}}}$

II-3-3 Expression de $\overline{\overline{C}}^*$ en fonction de $\overline{\overline{H}}^*$

Comme $\overline{\overline{G}} = (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{H}}^*)$

Alors : $\boxed{\overline{\overline{\mathbf{C}}}^* = (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{H}}^*)^t (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{H}}^*) = \overline{\overline{I}} - (\overline{\overline{H}}^{*t} + \overline{\overline{H}}^*) + \overline{\overline{H}}^{*t}\, \overline{\overline{H}}^*}$

II-4 Tenseur des déformations

II-4-1 Définition

Nous avons : $d\vec{x}.d\vec{x}' - d\vec{X}\, d\vec{X}' = d\vec{X}(\overline{\overline{\mathbf{C}}} - \overline{\overline{\mathbf{I}}})d\vec{X}' = d\vec{X}(2\overline{\overline{E}})d\vec{X}'$

Avec : $\boxed{\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\mathbf{C}}} - \overline{\overline{\mathbf{I}}})}$ Tenseur des déformations en description lagrangienne

Par ailleurs : $d\vec{x}.d\vec{x}' - d\vec{X}\,d\vec{X}' = d\vec{x}.d\vec{x}' - d\vec{x}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}^{*}\,d\vec{x}' = d\vec{x}\,(2\overline{\overline{E}}^{*})\,d\vec{x}'$

Avec : $\boxed{\overline{\overline{E}}^{*} = -\frac{1}{2}(\overline{\overline{\mathbf{C}}}^{*} - \overline{\overline{\mathbf{I}}})}$ tenseur des dilatations en description eulérienne

II-4-2 Expression de $\overline{\overline{E}}$ en fonction de $\overline{\overline{H}}$:

$$\boxed{\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{H}}^{t} + \overline{\overline{H}}) + \frac{1}{2}\overline{\overline{H}}^{t}\,\overline{\overline{H}}}$$

Soit encore:

$$\boxed{E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i}\frac{\partial u_k}{\partial X_j}\right)}$$ tenseur des déformation de Green- Lagrange

II-4-3 Expression de $\overline{\overline{E}}^{*}$ en fonction de $\overline{\overline{H}}^{*}$:

$$\boxed{\overline{\overline{E}}^{*} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{H}}^{*t} + \overline{\overline{H}}^{*}) - \frac{1}{2}\overline{\overline{H}}^{*t}\,\overline{\overline{H}}}$$

Soit encore :

$$\boxed{E^{*}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}$$ tenseur des déformation de Euler-Almansi

III Transformation des longueurs et des angles

III-1 Dilatation

Soit $d\vec{X} = dX\,\vec{e}$ un vecteur infinitésimal en M_0 porté par le vecteur unitaire $\vec{e}$

On définit la dilatation dans la direction $\vec{e}$ par:

$$\boxed{\lambda(M_0;\vec{e}) = \frac{dx}{dX} = \frac{\sqrt{d\vec{x}.d\vec{x}}}{dX} = \frac{1}{dX}\sqrt{d\vec{X}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,d\vec{X}} = \sqrt{\vec{e}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}}}$$

Si $\vec{e} = \vec{e}_i$ alors :

$$\boxed{\lambda(M_0;\vec{e}_i) = \sqrt{C_{ii}} = \sqrt{1 + 2E_{ii}}}$$

III-2 Allongement unitaire

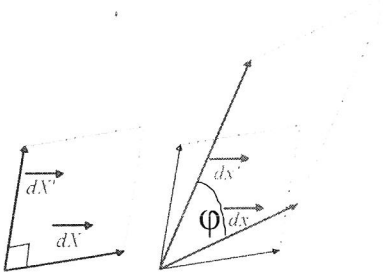
Allongement unitaire selon la direction $\vec{e}$:

$$\boxed{\delta(M_0;\vec{e}) = \frac{dx - dX}{dX} = \lambda(M_0;\vec{e}) - 1 = \frac{dx}{dX} = \sqrt{\vec{e}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}} - 1}$$

Si $\vec{e} = \vec{e}_i$ alors $\boxed{\delta(M_0;\vec{e}_i) = \sqrt{C_{ii}} - 1 = \sqrt{1 + 2E_{ii}} - 1}$

III-3 Glissement ou distorsion angulaire

Soient $d\vec{X} = dX\,\vec{e}$ et $d\vec{X}' = dX'\,\vec{e}'$ avec $\vec{e} \perp \vec{e}'$



On définit le glissement ou la distorsion angulaire au point M_0 dans les directions initialement perpendiculaires $\vec{e}$ *et* $\vec{e}'$ par : $\gamma\left(M_0;\vec{e},\vec{e}'\right)=\frac{\pi}{2}-\varphi$

Nous avons : $d\vec{x}\,.d\vec{x}' = d\vec{X}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,d\vec{X}'$

Or $d\vec{x}\,.d\vec{x}' = dx\,dx'\cos\varphi = dx\,dx'\sin\gamma$

Alors $dx\,dx'\sin\gamma = dX\;dX'\;\vec{e}\;\overline{\overline{\mathbf{C}}}\;\vec{e}'$

Soit encore $\sin\gamma = \frac{dX\,dX'}{dx\,dx'}\;\vec{e}\;\overline{\overline{\mathbf{C}}}\;\vec{e}'$ Ou encore : $\boxed{\sin\gamma = \frac{\vec{e}\;\overline{\overline{\mathbf{C}}}\;\vec{e}'}{\lambda(M_0,\vec{e})\lambda(M_0,\vec{e}')}}$

Dans le cas où $\vec{e} = \vec{e}_1$ *et* $\vec{e}' = \vec{e}_2$, nous avons :

$$\boxed{\gamma\left(M_0;\vec{e},\vec{e}'\right) = Arc\sin\left(\frac{C_{12}}{\sqrt{C_{11}}\sqrt{C_{22}}}\right) = Arc\sin\left(\frac{2E_{12}}{\sqrt{1+2E_{11}}\sqrt{1+2E_{22}}}\right)}$$

IV Transformation d'un volume infinitésimal

Considérons le volume infinitésimal dV formé par 3 vecteurs $\vec{A},\vec{B}$ *et* $\vec{C}$. Sa transformée est volume dv formé par les vecteurs $\vec{a},\vec{b}$ *et* $\vec{c}$.

Nous avons

$dV = \vec{A}.(\vec{B}\wedge\vec{C}) = \det(\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right])$ et $dv = \vec{a}.(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \det(\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right])$

Cherchons la relation entre dV et dv :

$dv = \det(\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]) = \det(\overline{\overline{F}}\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right]) = \det\overline{\overline{F}}\det(\left[\vec{A},\vec{B},\vec{C}\right]) = \det\overline{\overline{F}}dV$

Rappel : $\det(\overline{\overline{A}}\;\overline{\overline{B}}) = \det\overline{\overline{A}}\det\overline{\overline{B}}$

Donc finalement $\boxed{dv = \det\overline{\overline{F}}\,dV}$

La dilatation volumique est donée par: $\boxed{\frac{dv}{dV} = \det\overline{\overline{F}}}$

Applications directes

Application1

On considère une déformation homogène uniaxiale définie par les relations suivantes : $x_1 = \lambda X_1 ; x_2 = X_2 ; x_3 = X_3$

Déterminer les tenseurs : gradient, gradient des déplacements, des dilatations et des déformations $\overline{\overline{F}}, \overline{\overline{H}}$, $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ *et* $\overline{\overline{E}}$

Déterminer les dilatations et les glissements angulaires

Déterminer la dilatation volumique

Réponses :

$$\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \overline{\overline{H}} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda\left(M_0 ; \vec{e}\right) = \frac{dx}{dX} = \frac{\sqrt{d\vec{x}\,.d\vec{x}}}{dX} = \frac{1}{dX}\sqrt{d\vec{X}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,d\vec{X}} = \sqrt{\vec{e}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}}$$

$$\Rightarrow \lambda\left(M_0 ; \vec{e}_1\right) = \lambda ; \; \lambda\left(M_0 ; \vec{e}_2\right) = 1 ; \quad \lambda\left(M_0 ; \vec{e}_3\right) = 1$$

$$\sin\gamma(M_0', \vec{e}, \vec{e}') = \frac{\vec{e}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}'}{\lambda(M_0, \vec{e})\lambda(M_0, \vec{e}')}$$

$$\Rightarrow \sin\gamma(M_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\vec{e}_1\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}_2}{\lambda(M_0, \vec{e}_1)\lambda(M_0, \vec{e}_2)} = 0; \quad \sin\gamma(M_0, \vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0; \quad \sin\gamma(M_0, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$$

Dilatation volumique : $\dfrac{dv}{dV} = \det \overline{\overline{F}} = \lambda$

Application2

On considère une déformation homogène isotrope définie par les relations suivantes :

$x_1 = \lambda X_1 ; x_2 = \lambda X_2 ; x_3 = \lambda X_3$

Déterminer les tenseurs : gradient, gradient des déplacements, des dilatations et des déformations $\overline{\overline{F}}, \overline{\overline{H}}$, $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ *et* $\overline{\overline{E}}$.

Déterminer les dilatations et les glissements angulaires.

Déterminer la dilatation volumique

Réponses :

$$\overline{\overline{F}} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} ; \overline{\overline{H}} = \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{pmatrix} ; \overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} ; \quad \overline{\overline{E}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda\left(M_0 ; \vec{e}\right) = \frac{dx}{dX} = \frac{\sqrt{d\vec{x}\,.d\vec{x}}}{dX} = \frac{1}{dX}\sqrt{d\vec{X}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,d\vec{X}} = \sqrt{\vec{e}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}}$$

$$\Rightarrow \lambda\left(M_0 ; \vec{e}_1\right) = \lambda ; \; \lambda\left(M_0 ; \vec{e}_2\right) = \lambda ; \quad \lambda\left(M_0 ; \vec{e}_3\right) = \lambda$$

$$\sin\gamma(M_0, \vec{e}, \vec{e}') = \frac{\vec{e}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}'}{\lambda(M_0, \vec{e})\lambda(M_0, \vec{e}')}$$

$$\Rightarrow \sin\gamma(M_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2) = \frac{\vec{e}_1\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}_2}{\lambda(M_0, \vec{e}_1)\lambda(M_0, \vec{e}_2)} = 0; \quad \sin\gamma(M_0, \vec{e}_1, \vec{e}_3) = 0; \quad \sin\gamma(M_0, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 0$$

Dilatation volumique : $\dfrac{dv}{dV} = \det \overline{\overline{F}} = \lambda^3$

Application 3 :

On considère le champ de déplacement donné par les relations suivantes : $\vec{u}\left(\vec{X},t\right)=\vec{x}-\vec{X}=k\,X_2\,\vec{e}_1$

Déterminer les tenseurs : gradient, gradient des déplacements, des dilatations et des déformations lagrangiens et eulériens : $\overline{\overline{F}},\overline{\overline{F}}^*,\overline{\overline{H}},\overline{\overline{H}}^*\ \overline{\overline{\mathbf{C}}},\overline{\overline{C}}^*\ \overline{\overline{E}},\overline{\overline{E}}^*$.

Déterminer les dilatations et les glissements angulaires

Dilatation volumique : $\dfrac{dv}{dV}$

Réponses

Nous avons : $x_1=X_1+kX_2;\ \ x_2=X_2;\ \ x_3=X_3$

$$F_{ij}=\frac{\partial x_i}{\partial X_j};H_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial X_j};$$

$$\overline{\overline{F}}=\begin{pmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\overline{\overline{H}}=\begin{pmatrix}0&k&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{F}}^t\,\overline{\overline{F}}=\begin{pmatrix}1&k&0\\k&k^2+1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\ \overline{\overline{E}}=\frac{1}{2}(\overline{\overline{C}}-\overline{\overline{I}})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&k&0\\k&k^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\overline{\overline{F}}^*=?\ \overline{\overline{H}}^*=?$

Nous avons : $x_1=X_1+kX_2;\ \ x_2=X_2;\ \ x_3=X_3\Rightarrow X_1=x_1-kx_2;\ \ X_2=x_2\ ;\ \ x_3=X_3$

$$F^*_{ij}=\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\Rightarrow\overline{\overline{F}}^*=\begin{pmatrix}1&-k&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

Autre méthode : $\overline{\overline{F}}^*=\overline{\overline{F}}^{-1}(=\overline{\overline{G}})=\dfrac{1}{\det\overline{\overline{F}}}\begin{pmatrix}1&0&0\\-k&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^t;\det\overline{\overline{F}}=1\Rightarrow\overline{\overline{F}}^*=\begin{pmatrix}1&-k&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$

$$H^*_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Rightarrow\overline{\overline{H}}^*=\begin{pmatrix}0&k&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\ (u_1=x_1-X_1=\ kx_2;\ \ u_2=x_2-X_2=0\ ;\ \ u_3=x_3-X_3=0)$$

$$\overline{\overline{C}}^*=\overline{\overline{F}}^{-1t}\,\overline{\overline{F}}^{-1}=\overline{\overline{G}}^t\,\overline{\overline{G}}\Rightarrow\overline{\overline{C}}^*=\begin{pmatrix}1&-k&0\\-k&k^2+1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{E}}^*=-\frac{1}{2}(\overline{\overline{C}}^*-\overline{\overline{I}})=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&-k&0\\-k&k^2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

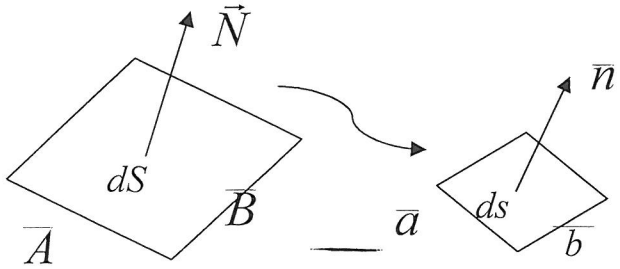
$$\lambda\left(M_0;\vec{e}\right)=\sqrt{\vec{e}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}}\Rightarrow\lambda\left(M_0;\vec{e}_1\right)=1;\ \lambda\left(M_0;\vec{e}_2\right)=\sqrt{k^2+1};\lambda\left(M_0;\vec{e}_3\right)=1$$

$$\sin\gamma(M_0,\vec{e}_1,\vec{e}_2)=\frac{\vec{e}_1\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}_2}{\lambda(M_0,\vec{e}_1)\lambda(M_0,\vec{e}_2)}=\frac{k}{\sqrt{k^2+1}};\ \ \sin\gamma(M_0,\vec{e}_1,\vec{e}_3)=0;\ \sin\gamma(M_0,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=0$$

Dilatation volumique : $\dfrac{dv}{dV}=\det\overline{\overline{F}}=1$

V Transformation d'une surface infinitésimale orientée

Considérons une surface élémentaire dS formée par les vecteurs $\vec{A}(=\overrightarrow{dX})\, et\, \vec{B}(=\overrightarrow{dX'})$ et orientée par le vecteur unitaire $\vec{N}$. Sa transformée est la surface ds formée par les vecteurs $\vec{a}(=\overrightarrow{dx})\, et\, \vec{b}(=\overrightarrow{dx'})$ et orientée par le vecteur unitaire $\vec{n}$.



Nous avons : $dS\,\vec{N} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ *et* $ds\,\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

On montre alors que : $\boxed{ds\vec{n} = \det \overline{\overline{F}}\ \overline{\overline{F}}^{t-1}\ dS\vec{N}}$

Démonstration :

Nous avons : $ds\,\vec{n} = \vec{a} \wedge \vec{b} \Rightarrow (ds\,\vec{n})_i = (\vec{a} \wedge \vec{b})_i \Rightarrow dsn_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$

$\vec{a} = \overline{\overline{F}}\vec{A}$, *et* $\vec{b} = \overline{\overline{F}}\vec{B} \Rightarrow a_j = F_{jq}A_q$ *et* $b_k = F_{kr}B_r \Rightarrow dsn_i = \varepsilon_{ijk}F_{jq}F_{kr}A_q\ B_r$

Multiplions les deux membres de l'équation $dsn_i = \varepsilon_{ijk}F_{jq}F_{kr}A_q\ B_r$ par F_{ip} et faisons la sommation sur i :

$F_{ip}n_i ds = \varepsilon_{ijk}F_{ip}F_{jq}F_{kr}A_q\ B_r$ *(N.B : Il n'y a pas de sommation sur p)*

Soit encore $F_{ip}n_i ds = \varepsilon_{pqr} \det \overline{\overline{F}}\ A_q\ B_r$

$F_{ip}n_i = \left(\overline{\overline{F}}^t\right)_{pi} n_i = \left(\overline{\overline{F}}^t \vec{n}\right)_p$

La relation $F_{ip}n_i ds = \varepsilon_{pqr} \det \overline{\overline{F}} A_q\ B_r$ peut alors s'écrire : $\left(\overline{\overline{F}}^t \vec{n}\, ds\right)_p = \det \overline{\overline{F}} \left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)_p$; $p = 1,2,3$

Donc $\overline{\overline{F}}^t \vec{n}\, ds = \det \overline{\overline{F}}\ \vec{N}\, dS$

D'où finalement : $\vec{n}\, ds = \det \overline{\overline{F}} \left(\overline{\overline{F}}^t\right)^{-1} \vec{N}\, dS$ CQFD

Rappels :

1) $(\vec{a} \wedge \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$

   $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1$; $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$; *Tous les autres* ε_{ijk} *sont nuls*

2) $\det \overline{\overline{A}} = \dfrac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} A_{ip} A_{jq} A_{kr}$

3) $\varepsilon_{ijk} A_{ip} A_{jq} A_{kr} = \varepsilon_{pqr} \det \overline{\overline{A}}$

VI Dilatations principales

$\overline{\overline{C}}$ est un tenseur symétrique donc diagonalisable

Il existe alors une base orthonormée (base formée à partir des vecteurs propres) : base principale $(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$

Où $\overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres ν_i sont positives car $\overline{\overline{C}}$ matrice définie positive (en effet $\overrightarrow{dX}\overline{\overline{C}}\,\overrightarrow{dX} = \overrightarrow{dx}.\overrightarrow{dx} = dx^2 \rangle 0$)

$\underline{\nu_i = ?}$

Nous avons : $\overline{\overline{C}}\,\overrightarrow{C_i} = c_i \overrightarrow{C_i}$

Alors, en multipliant à gauche par $\overrightarrow{C_i}^t$, il vient : $\overrightarrow{C_i}^t \overline{\overline{C}}\,\overrightarrow{C_i} = \overrightarrow{C_i}^t c_i \overrightarrow{C_i} = c_i \; car \; \overrightarrow{C_i}^t \overrightarrow{C_i} = \left\| \overrightarrow{C_i} \right\|^2 = 1$

D'où $c_i = \overrightarrow{C_i}^t \overline{\overline{C}}\,\overrightarrow{C_i}$

Or $\vec{e}^t \overline{\overline{C}}\vec{e} = \lambda^2 (M_0; \vec{e})$, alors $\boxed{c_i = \lambda^2 (M_0; \vec{C}_i)}$: $\lambda(M_0; \vec{C}_i)$ la dilatation dans la direction $\vec{C}_i$

Ainsi, $\boxed{\overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} \lambda^2_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2_3 \end{pmatrix}}$

Conséquence importante :

Nous avons : $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^t \overline{\overline{F}} \Rightarrow \det \overline{\overline{C}} = (\det \overline{\overline{F}})^2 \Rightarrow \det \overline{\overline{F}} = \sqrt{\det \overline{\overline{C}}}$ d'où : $\boxed{\det \overline{\overline{F}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$

Rappel :

Les invariants scalaires d'une matrice $\overline{\overline{T}}$ sont :

$T_I = tr\,\overline{\overline{T}}; \quad T_{II} = \frac{1}{2}\left(\left(tr\,\overline{\overline{T}} \right)^2 - tr\,(\overline{\overline{T}}^2) \right); \quad T_{III} = \det \overline{\overline{T}}$

VII Déformations principales

Nous avons : $\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{\mathbf{C}}} - \overline{\overline{\mathbf{I}}})$

Alors : $\overline{\overline{E}}\,\overrightarrow{C_i} = \frac{\lambda_i^2 - 1}{2}\overrightarrow{C_i}$

On déduit alors que la base principale de $\overline{\overline{E}}$ est la même que celle de $\overline{\overline{\mathbf{C}}}$ et les valeurs propres de $\overline{\overline{E}}$ sont

$e_i = \frac{\lambda_i^2 - 1}{2} = E_{ii}$ *:déformations principales*

Ainsi, nous avons $\boxed{\overline{\overline{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1^2 - 1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2^2 - 1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3^2 - 1}{2} \end{pmatrix}_{(\vec{C}_1 = \vec{E}_1, \vec{C}_2 = \vec{E}_2, \vec{C}_3 = \vec{E}_3)}}$

VIII Décomposition polaire

La relation $d\vec{x} = \overline{\overline{\mathbf{F}}}\, d\vec{X}$ montre que $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ transforme $d\vec{X}$ en $d\vec{x}$.

Cette transformation peut être décomposée en un mouvement de corps rigide (translation + rotation) suivi d'une déformation pure.

Mathématiquement, $\overline{\overline{\mathbf{F}}}$ étant inversible (puisque $\det \overline{\overline{\mathbf{F}}} \neq 0$), peut être écrit sous la forme : $\boxed{\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{R}}\,\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{V}}\,\overline{\overline{R}}}$

Où $\overline{\overline{R}}$ tenseur orthogonal i.e. $\overline{\overline{R}}^t\,\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{R}}\,\overline{\overline{R}}^t = \overline{\overline{I}}$ ($\Rightarrow \det \overline{\overline{R}} = 1$)

$\overline{\overline{U}}$, $\overline{\overline{V}}$ tenseurs symétriques définis positifs

$\overline{\overline{R}}$ représente le mouvement d'un corps indéformable

$\overline{\overline{U}}$, $\overline{\overline{V}}$ représentent le mouvement d'une déformation pure

$\underline{\overline{\overline{U}} = ?}$

Nous avons $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{F}}^t\,\overline{\overline{F}} = \overline{\overline{U}}^t\,\overline{\overline{R}}\,\overline{\overline{R}}^t\,\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{U}}^2$ $(puisque\ \overline{\overline{R}}\,\overline{\overline{R}}^t = \overline{\overline{I}})$

D'où $\boxed{\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{U}}^2 \Rightarrow \overline{\overline{U}}\ racine\ carrée\ de\ \overline{\overline{C}}}$

$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{U}}^2 \Rightarrow$ *les veteurs propres de* $\overline{\overline{U}}$ *sont identiques à ceux de* $\overline{\overline{C}}$

En effet, dans la base principale de $\overline{\overline{U}}$: $\overline{\overline{U}} = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 \end{pmatrix}_{(\vec{U}_1,\vec{U}_2,\vec{U}_3)}$

Ce qui entraine : $\overline{\overline{C}} = \begin{pmatrix} \nu_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3^2 \end{pmatrix}_{(\vec{U}_1,\vec{U}_2,\vec{U}_3)}$

D'où $(\vec{U}_1,\vec{U}_2,\vec{U}_3)$ base principale de $\overline{\overline{C}}$

Par ailleurs, nous avons montré que les valeurs propres de $\overline{\overline{C}}$ sont : $(\lambda_1^2,\lambda_2^2,\lambda_3^2)$

D'où $(\nu_1 = \lambda_1, \nu_2 = \lambda_2, \nu_3 = \lambda_3)$

Finalement : $\overline{\overline{U}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}_{(\vec{U}_1,\vec{U}_2,\vec{U}_3)}$

Par ailleurs, nous avons : $\overline{\overline{C}}^t = \overline{\overline{F}}\,\overline{\overline{F}}^t = \overline{\overline{V}}\,\overline{\overline{R}}\,\overline{\overline{R}}^t\,\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{V}}^2$ $(puisque\ \overline{\overline{R}}^t\,\overline{\overline{R}} = \overline{\overline{I}})$

d'où $\boxed{\overline{\overline{C}}^t = \overline{\overline{V}}^2 \Rightarrow \overline{\overline{V}}\ racine\ carrée\ de\ \overline{\overline{C}}^t}$

$\underline{\overline{\overline{R}} = ?}$

Nous avons $\boxed{\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{R}}\,\overline{\overline{U}} \Rightarrow \overline{\overline{R}} = \overline{\overline{F}}\,\overline{\overline{U}}^{-1}}$ ou encore $\boxed{\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{\overline{V}}\,\overline{\overline{R}} \Rightarrow \overline{\overline{R}} = \overline{\overline{F}}\,\overline{\overline{V}}^{-1}}$

IX Déformations infinitésimales d'un milieu continu

IX-1- Hypothèses des petites perturbations (H.P.P)

- *Déplacements infiniment petits / dimensions caractéristiques du système matériel étudié*
- *Les gradients des déplacements sont infiniment petits / l'unité* $\boxed{\left|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right| \langle\langle 1}$

IX-2- Conséquences des H.P.P:

1°) Pour toute grandeur physique G, $\boxed{\frac{\partial G}{\partial X_j} \approx \frac{\partial G}{\partial x_j}}$

Nous avons : $\frac{\partial G}{\partial X_1} = \frac{\partial G}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial X_1} + \frac{\partial G}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial X_1} + \frac{\partial G}{\partial x_3}\frac{\partial x_3}{\partial X_1}$

Comme : $\vec{x} = \vec{X} + \vec{u}$ soit : $x_i = X_i + u_i$

Alors $\frac{\partial x_1}{\partial X_1} = 1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}$; $\frac{\partial x_2}{\partial X_1} = \frac{\partial u_2}{\partial X_1}$; $\frac{\partial x_3}{\partial X_1} = \frac{\partial u_3}{\partial X_1}$

D'où : $\frac{\partial G}{\partial X_1} = \frac{\partial G}{\partial x_1}(1 + \frac{\partial u_1}{\partial X_1}) + \frac{\partial G}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial G}{\partial x_3}\frac{\partial u_3}{\partial X_1}$

Comme en HPP, $\left|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}\right| \langle\langle 1$ alors : $\frac{\partial G}{\partial X_1} \approx \frac{\partial G}{\partial x_1}$

2°) $\boxed{\overline{\overline{H}}^* \approx \overline{\overline{H}}}$

Nous avons : $\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{grad}}\,\vec{u}$; $H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$ et $\overline{\overline{H}}^* = \overline{\overline{grad}}^*\,\vec{u}$; $H^*_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

Comme en HPP : $\frac{\partial u_i}{\partial X_j} \approx \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ alors $H^*_{ij} = H_{ij}$

3°) $\boxed{\overline{\overline{E}}^* \approx \overline{\overline{E}} \approx \overline{\overline{\varepsilon}}}$

Nous avons $\overline{\overline{E}} = \frac{1}{2}(\overline{\overline{H}}^t + \overline{\overline{H}}) + \frac{1}{2}\overline{\overline{H}}^t\overline{\overline{H}}$ *et* $\overline{\overline{E}}^* = \frac{1}{2}(\overline{\overline{H}}^{*t} + \overline{\overline{H}}^*) + \frac{1}{2}\overline{\overline{H}}^{*t}\overline{\overline{H}}$

D'où en HPP : $\overline{\overline{E}}^* \approx \overline{\overline{E}} \approx \frac{1}{2}(\overline{\overline{H}}^t + \overline{\overline{H}}) = \overline{\overline{\varepsilon}}$

4°) $\boxed{\overline{\overline{C}} \approx \overline{\overline{I}} + 2\overline{\overline{\varepsilon}}}$

En effet $\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{I}} + 2\overline{\overline{E}} \approx \overline{\overline{I}} + 2\overline{\overline{\varepsilon}}$

5°) $\boxed{\lambda(M_0;\vec{e}) \approx 1 + \vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}}$

En effet, nous avons

$$\lambda(M_0;\vec{e}) = \frac{dx}{dX} = \sqrt{\vec{e}\,\overline{\overline{C}}\,\vec{e}} \approx \sqrt{\vec{e}(\overline{\overline{I}} + 2\overline{\overline{\varepsilon}})\vec{e}}$$

$$Comme\ \vec{e}\,\overline{\overline{I}}\,\vec{e} = 1\ alors : \lambda(M_0;\vec{e}) \approx \sqrt{1 + 2\vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}} \approx 1 + \vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}$$

Si $\vec{e}=\vec{e}_i$, alors : $\boxed{\lambda(M_0;\vec{e}_i)\approx 1+\varepsilon_{ii}}$

6°) $\boxed{\delta(M_0;\vec{e})\approx \vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}}$

En effet :

$$\delta(M_0;\vec{e})=\frac{dx-dX}{dX}=\lambda(M_0;\vec{e})-1=\sqrt{\vec{e}\,\overline{\overline{C}}\,\vec{e}}-1$$

$$en\ HPP:\delta(M_0;\vec{e})\approx 1+\vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}-1=\vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}$$

Si $\vec{e}=\vec{e}_i$ alors $\boxed{\delta(M_0;\vec{e}_i)\approx\varepsilon_{ii}}$

7°) $\boxed{\gamma(M_0;\vec{e},\vec{e}')\approx 2\vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}'}$

Le glissement angulaire est défini par

$$\gamma(M_0;\vec{e},\vec{e}')=\frac{\pi}{2}-\varphi$$

Et sa valeur est donnée par : $\sin\gamma=\dfrac{\vec{e}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}'}{\lambda(M_0,\vec{e})\lambda(M_0,\vec{e}')}$

En HPP : $\lambda(M_0;\vec{e})\approx 1+\vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}$ et $\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{I}}+2\overline{\overline{E}}\approx\overline{\overline{I}}+2\overline{\overline{\varepsilon}}\Rightarrow\vec{e}\,\overline{\overline{\mathbf{C}}}\,\vec{e}'=2\vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}'(car\ \vec{e}\,\overline{\overline{I}}\,\vec{e}'=\vec{e}.\vec{e}'=0)$

Alors $\sin\gamma\approx\gamma\approx\dfrac{2\vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}'}{(1+\vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e})(1+\vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e})}\approx 2\vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}'$

Si $\vec{e}=\vec{e}_1$ et $\vec{e}'=\vec{e}_2$, nous avons : $\boxed{\gamma(M_0;\vec{e}_1,\vec{e}_2)=2\varepsilon_{12}}$

8°) Décomposition du champ du déplacement

Nous avons : $\vec{x}=\vec{X}+\vec{u}$ Alors $d\vec{x}=d\vec{X}+d\vec{u}=(\overline{\overline{I}}+\overline{\overline{H}})d\vec{X}$

Décomposition de $\overline{\overline{H}}$:

Nous avons : $\overline{\overline{H}}=\frac{1}{2}(\overline{\overline{H}}+\overline{\overline{H}}^t)+\frac{1}{2}(\overline{\overline{H}}-\overline{\overline{H}}^t)$

Soit encore : $H_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}+\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j}-\frac{\partial u_j}{\partial X_i}\right)$

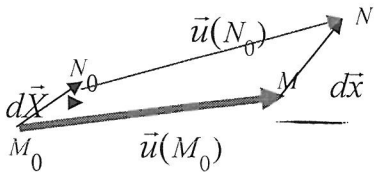
$\boxed{\frac{1}{2}(\overline{\overline{H}}+\overline{\overline{H}}^t)=\overline{\overline{\varepsilon}}}$ (tenseur des déformations en HPP)

$\boxed{\frac{1}{2}(\overline{\overline{H}}-\overline{\overline{H}}^t)=\overline{\overline{\omega}}}$ (tenseur des rotations : antisymétrique)

Nous pouvons alors écrire : $\boxed{\overline{\overline{H}}=\overline{\overline{\varepsilon}}+\overline{\overline{\omega}}}$

Alors en HPP : $d\vec{x}=d\vec{X}+d\vec{u}\approx(\overline{\overline{I}}+\overline{\overline{\varepsilon}}+\overline{\overline{\omega}})d\vec{X}=d\vec{X}+\overline{\overline{\varepsilon}}\,d\vec{X}+\overline{\overline{\omega}}\,d\vec{X}$

Supposons que $d\vec{X}$ représente, dans la configuration initiale, deux points infiniment voisins M_0 et N_0. Le vecteur $d\vec{x}$ représentera alors, dans la configuration courante les deux points M et N, transformés des deux points initiaux dans le champ de déplacement.



Nous avons : $d\vec{X} = \overrightarrow{M_0 N_0}$ *et* $d\vec{x} = \overrightarrow{MN}$

alors : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_0 N_0} + \bar{\bar{\varepsilon}}\,\overrightarrow{M_0 N_0} + \bar{\bar{\omega}}\,\overrightarrow{M_0 N_0}$

Comme $\overrightarrow{u(M_0)} = \overrightarrow{M_0 M}$ $\quad \overrightarrow{u(N_0)} = \overrightarrow{N_0 N}$

Alors : $\overrightarrow{M_0 M_0}(=\vec{0}) = \overrightarrow{M_0 N_0} + \overrightarrow{u(N_0)} + \overrightarrow{NM} - \overrightarrow{u(M_0)}$

D'où finalement : $\boxed{\overrightarrow{U(N_0)} = \overrightarrow{U(M_0)} + \bar{\bar{\varepsilon}}\,\overrightarrow{M_0 N_0} + \bar{\bar{\omega}}\,\overrightarrow{M_0 N_0}}$

Ainsi, le champ de déplacement HPP se décompose en :

- Translation
- Déformation pure
- Rotation

9°) Transformation d'un volume élémentaire

Nous avons $dv = \det \bar{\bar{F}}\, dV$. Par ailleurs puisque $\bar{\bar{C}} = \bar{\bar{F}}^t\, \bar{\bar{F}}$ alors : $\det \bar{\bar{C}} = (\det \bar{\bar{F}})^2$ d'où $\det \bar{\bar{F}} = \sqrt{\det \bar{\bar{C}}}$

Or $\bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} \lambda^2_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2_3 \end{pmatrix}_{(\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3)}$ (voir paragraphe VI) d'où : $\det \bar{\bar{F}} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$

Donc $\dfrac{dv}{dV} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$. Par ailleurs, en HPP, $\lambda_i = (1 + \varepsilon_{ii}) \Rightarrow \dfrac{dv}{dV} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \approx (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) \approx 1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$

Nous avons donc finalement : $\boxed{\dfrac{dv}{dV} \approx 1 + tr\,\bar{\bar{\varepsilon}} = div\,\vec{u}}$

10°) Décomposition polaire

Nous avons $\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \bar{\bar{R}}\,\bar{\bar{U}}$ En HPP $\bar{\bar{R}} = ?$ $\bar{\bar{U}} = ?$

$\bar{\bar{F}} = \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{H}} = \dfrac{1}{2}(\bar{\bar{H}} + \bar{\bar{H}}^t) + \dfrac{1}{2}(\bar{\bar{H}} - \bar{\bar{H}}^t)$

Soit encore : $F_{ij} = \delta_{ij} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

En HPP : $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = \varepsilon_{ij}$. Par ailleurs $\omega_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Alors en HPP : $\bar{\bar{F}} \approx \bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\varepsilon}} + \bar{\bar{\omega}}$ Soit encore : $\bar{\bar{F}} \approx (\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\omega}})(\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\varepsilon}})$ (*car* $\bar{\bar{\omega}}\,\bar{\bar{\varepsilon}}$ *négligeable*)

D'où finalement $\bar{\bar{\mathbf{F}}} = \bar{\bar{R}}\,\bar{\bar{U}}$ *avec* $\bar{\bar{R}} = (\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\omega}})$ *et* $\bar{\bar{U}} = (\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\varepsilon}})$

X-3 Problème inverse: conditions de compatibilité

Problème posé : Quelles sont les conditions qui permettent de reconstituer le champ de déplacement $\vec{u}$ (3 éléments : u_i) à partir de la connaissance du tenseur des déformations $\overline{\overline{\varepsilon}}$ (6 éléments : ε_{ij}) ?

Nous avons : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ *et* $\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

Alors :

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\, \partial x_k} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\, \partial x_k}\right)$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j\, \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\, \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j\, \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\, \partial x_k}\right)$$

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)\right)$$

Soit encore : $\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i}$

Ou encore en changeant l'indice k en l : $\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_l} = \frac{\partial \varepsilon_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{lj}}{\partial x_i}$

Comme $\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_l\, \partial x_k} = \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x_k\, \partial x_l}$ alors nous obtenons :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_l\, \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{kj}}{\partial x_l\, \partial x_i} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{il}}{\partial x_k\, \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{lj}}{\partial x_k\, \partial x_i} = 0}$$

Soit sous forme développée :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^{\,2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^{\,2}} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1\, \partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2\, \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^{\,2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^{\,2}} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2\, \partial x_3} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3\, \partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^{\,2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^{\,2}} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{31}}{\partial x_3\, \partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1\, \partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2}\right) = 0$$

Ce sont, les conditions de compatibilité. Si elles sont vérifiées, il est possible de reconstituer le champ de déplacement à partir du tenseur des déformations

Démarche à suivre:

1) On détermine les composantes du tenseur antisymétrique $\overline{\overline{\omega}}$ à l'aide des différentielles totales exactes :

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i}\right) dx_k$$

2) On détermine les composantes du champ de déplacement à l'aide des différentielles totales exactes : $du_i = u_{i,j} dx_j = \left(\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}\right) dx_j$

3) On calcule les constantes d'intégration apparues dans les étapes 1) et 2) à partir des conditions aux limites

Remarque : Ces conditions de compatibilité sont en fait les conditions d'intégrabilité de la différentielle :

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

Rappel : *La différentielle* $A(x,y)dx + B(x,y)dy$ est intégrable *si* $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$

Forme intrinsèque des conditions de compatibilité :

$$\overline{\overline{grad}}(\overrightarrow{div}\overline{\overline{\varepsilon}}) + \overline{\overline{grad}}^t(\overrightarrow{div}\overline{\overline{\varepsilon}}) - \overline{\overline{grad}}(\overrightarrow{grad}(tr(\overline{\overline{\varepsilon}})) - \overline{\overline{\Delta\varepsilon}} = \overline{\overline{0}}$$

Rappel :

- $\left[\overline{\overline{grad}}\vec{V}\right]_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$

- $\left[\overrightarrow{div}\overline{\overline{A}}\right]_i = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_k} \Rightarrow \overrightarrow{div}\overline{\overline{A}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

- $\left[\overline{\overline{\Delta\varepsilon}}\right]_{ij} = \Delta\varepsilon_{ij} \Rightarrow \overline{\overline{\Delta\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \Delta\varepsilon_{11} & \Delta\varepsilon_{12} & \Delta\varepsilon_{13} \\ \Delta\varepsilon_{21} & \Delta\varepsilon_{22} & \Delta\varepsilon_{23} \\ \Delta\varepsilon_{31} & \Delta\varepsilon_{32} & \Delta\varepsilon_{33} \end{pmatrix}$

Application

Dans un cube occupant le domaine $0 \le x_i \le a$, le tenseur des déformations en HPP est donné par :

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} -3\alpha x_1 x_2 & -4\alpha x_1^2 & 0 \\ -4\alpha x_1^2 & 5\alpha x_1 x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \alpha \text{ constante réelle}$$

1- Déterminer les composantes du tenseur antisymétrique $\overline{\overline{\omega}}$ et les composantes du champ de déplacement $\vec{u}$ dans le cube.

Conditions aux limites :

- Le sommet situé sur l'origine O est maintenu fixe
- Le sommet de coordonnées $(a,0,0)$ est maintenu le long de $O\vec{e}_1$
- Le sommet de coordonnées $(0,a,0)$ est maintenu dans le plan $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

2- Dans quelle région du cube, une petite fibre de direction $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$ s'est –elle rétrécie

Réponse :

1- Nous avons : $d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{kj}}{\partial x_i} \right) dx_k$, soit :

$$d\omega_{12} = (-3\alpha x_1 + 8\alpha x_1)dx_1 + (0 - 5\alpha x_2)dx_2 + (0-0)dx_3$$

$$d\omega_{23} = (0-0)dx_1 + (0-0)dx_2 + (0-0)dx_3$$

$$d\omega_{31} = (0-0)dx_1 + (0-0)dx_2 + (0-0)dx_3$$

$$\omega_{12}(x_1,x_2,x_3)=\frac{5}{2}\alpha x_1^2-\frac{5}{2}\alpha x_2^2+\omega_{12}(0,0,0)$$

L'intégration donne : $\omega_{23}(x_1,x_2,x_3)=\omega_{23}(0,0,0)$

$$\omega_{13}(x_1,x_2,x_3)=\omega_{13}(0,0,0)$$

On ne connait pas les CL sur ω_{ij} ; mais on connait les CL sur u_i.

En effet, la CL n°1 entraine : $\cancel{u_i(0,0,0)}=0$. La CL n°2 entraine : $u_2(a,0,0)=u_3(a,0,0)=0$. La CL n°3 entraine : $u_3(0,a,0)=0$

Pour le champ des déplacements, nous avons : $du_i=u_{i,j}dx_j=\left(\varepsilon_{ij}+\omega_{ij}\right)dx_j$; soit encore

$$du_1=-3\alpha x_1x_2dx_1+(-\frac{3}{2}\alpha x_1^2-\frac{5}{2}\alpha x_2^2+\omega_{12}(0,0,0))dx_2-\omega_{31}(0,0,0)dx_3$$

$$du_2=dx_1+(-\frac{13}{2}\alpha x_1^2+\frac{5}{2}\alpha x_2^2-\omega_{12}(0,0,0))+5\alpha x_1x_2dx_2+\omega_{23}(0,0,0)dx_3$$

$$du_3=\omega_{31}(0,0,0)dx_1-\omega_{23}(0,0,0)dx_2+0dx_3$$

L'intégration donne alors :

$$u_1=-\frac{3}{2}\alpha x_1^2x_2-\frac{5}{6}\alpha x_2^3+\omega_{12}(0,0,0))x_2-\omega_{31}(0,0,0)x_3+u_1(0,0,0)$$

$$u_2=-\frac{13}{6}\alpha x_1^3+\frac{5}{2}\alpha x_1x_2^2-\omega_{12}(0,0,0)x_1+\omega_{23}(0,0,0)x_3+u_2(0,0,0)$$

$$u_3=\omega_{31}(0,0,0)x_1-\omega_{23}(0,0,0)x_2+\cancel{u_3(0,0,0)}$$

En tenant compte des CL on trouve $\begin{cases} u_1(0,0,0)=0;\ \ u_2(0,0,0)=0;\ u_3(0,0,0)=0 \\ \omega_{31}(0,0,0)=0;\omega_{23}(0,0,0)=0;\ \ \omega_{12}(0,0,0)=-\frac{13}{6}\alpha a^2 \end{cases}$

Le champ des déplacements est alors donné par : $\vec{u}=\begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\alpha x_1^2x_2dx_1-\frac{5}{6}\alpha x_2^3-\frac{13}{6}\alpha a^2x_2 \\ -\frac{13}{6}\alpha x_1^3+\frac{5}{2}\alpha x_1x_2^2+\frac{13}{6}\alpha a^2x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Le tenseur des rotations est donné par : $\overline{\overline{\omega}}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2}\alpha x_1^2-\frac{5}{2}\alpha x_2^2-\frac{13}{6}\alpha a^2x_2 & 0 \\ -\frac{5}{2}\alpha x_1^2+\frac{5}{2}\alpha x_2^2+\frac{13}{6}\alpha a^2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

2) Il ya rétrécissement de la petite fibre de direction $\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)$ si $\delta(\vec{e})\langle 0$

Or $\delta(\vec{e})=\vec{e}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{e}=2\varepsilon x_1x_2-8\varepsilon x_1^2$; $\delta(\vec{e})\langle 0 \Rightarrow x_1(x_2-4x_1)\langle 0$.

$x_1(x_2-4x_1)\langle 0$ est la région du cube où il ya rétrécissement de la fibre

X-4 : Représentation graphique d'un état de déformation

X-4-1 : Ellipsoïde des déformations

Dans la base principale $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$, le tenseur des déformations HPP s'écrit:

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

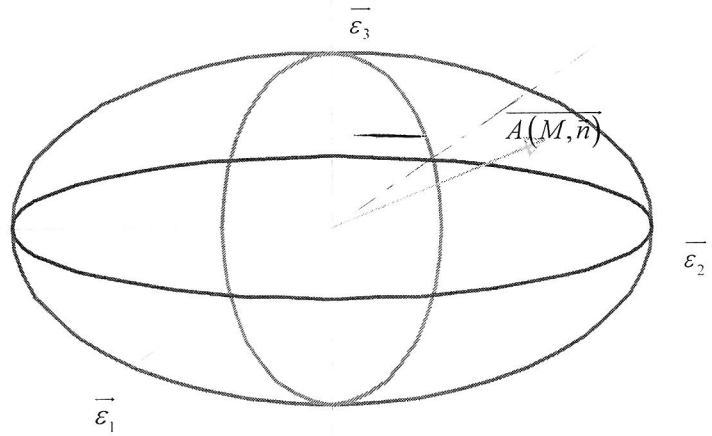
Considérons un vecteur unitaire quelconque : $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}_{(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)}$

Le vecteur déformation $\vec{A} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{n}$ s'écrit : $\begin{cases} A_1 = \varepsilon_1 n_1 \\ A_2 = \varepsilon_2 n_2 \\ A_3 = \varepsilon_3 n_3 \end{cases}$

Or le vecteur $\vec{n}$ est unitaire : $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

Alors : $\boxed{\dfrac{A_1^2}{\varepsilon_1^2} + \dfrac{A_2^2}{\varepsilon_2^2} + \dfrac{A_3^2}{\varepsilon_3^2} = 1}$

On peut dire alors que dans le repère principal, l'extrémité du vecteur déformation $\vec{A} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{n}$ décrit un ellipsoïde: ellipsoïde des déformations (ellipsoïde de Lamé)

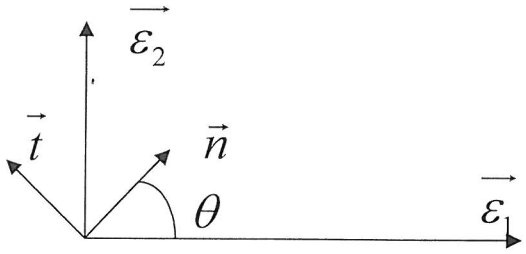


X-4-2 : Cercle de Mohr des déformations

Dans la base principale $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$, le tenseur des déformations HPP s'écrit: $\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$

Considérons un vecteur unitaire du plan $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$: $\vec{n} = \cos\theta\,\vec{\varepsilon}_1 + \sin\theta\,\vec{\varepsilon}_2$

Soit $\vec{t}$ le vecteur $\vec{t} = -\sin\theta\,\vec{\varepsilon}_1 + \cos\theta\,\vec{\varepsilon}_2$



Nous avons : $\vec{A} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{n} = (\vec{n}\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{n})\vec{n} + (\vec{t}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{n})\vec{t}$ (un vecteur quelconque s'exprime : $\vec{A} = (\vec{A}.\vec{n})\vec{n} + (\vec{A}.\vec{t})\vec{t}$)

Or $en\,HPP : \delta(M_0;\vec{n}) \approx \vec{n}\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{n}$ et $\frac{\gamma}{2}(M_0;\vec{t},\vec{n}) \approx \vec{t}\,\overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{n}$ Alors : $\underline{\vec{A} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{n} = \delta\,\vec{n} + \frac{\gamma}{2}\vec{t}}$

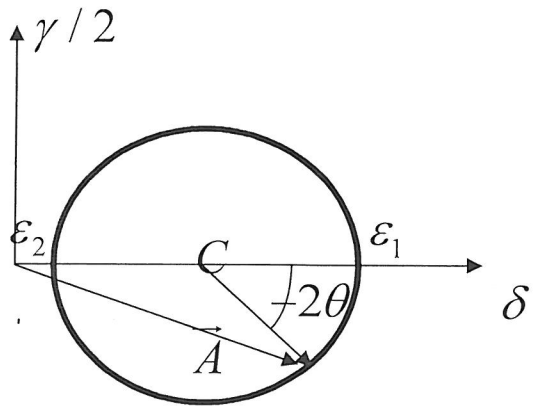
Cherchons la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\vec{A} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{n}$ lorsque θ varie :

On peut montrer aisément que : $\begin{cases} \delta = \varepsilon_1 \cos^2\theta + \varepsilon_2 \sin^2\theta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos(-2\theta) \\ \frac{\gamma}{2} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\cos\theta\sin\theta = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\sin(-2\theta) \end{cases}$

Nous avons alors $(\delta - \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2})^2 + (\frac{\gamma}{2})^2 = (\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2})^2$

L'extrémité du vecteur $\vec{A} = \overline{\overline{\varepsilon}}\,\vec{n}$ décrit le cercle de centre $(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}, 0)$ et de rayon $(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2})$ lorsque θ varie (on suppose ici $\varepsilon_1 \rangle \varepsilon_2$) : C'est **le cercle de Mohr des déformations.**

Illustration :



L'allongement unitaire maximum est obtenu pour $-2\theta = 0$ $soit$ $\theta = 0$ et on a : $\delta_{max} = \varepsilon_1$

L'allongement unitaire minimum ~~est obt~~enu pour $-2\theta = -\pi$ $soit$ $\theta = \pi/2$ et on a : $\delta_{max} = \varepsilon_2$

Les glissements angulaires extremum sont obtenus pour :

$-2\theta = -3\pi/2\,et - 2\theta = -\pi/2$ $soit$ $\theta = 3\pi/4$ et $\theta = \pi/4$ et on a : $(\frac{\gamma}{2})_{max} = \pm(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$

Détermination des directions et valeurs principales à partir du cercle de Mohr :

Nous avons : $\delta = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos(-2\theta)$

Ainsi, en mesurant trois allongements unitaires selon trois directions différentes, nous obtiendrons trois équations qui permettront de déterminer $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$ *et* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$

Exemple :

Soient $(\delta_a, \delta_b, \delta_c)$ allongements unitaires selon les directions $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ avec :

$(\vec{\varepsilon}_1, \vec{a}) = \theta\,(inconnu)$; $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{b}) = \theta + \alpha$; $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{c}) = \theta + 2\alpha$

Nous avons :

$$\delta_a = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos(-2\theta)$$

$$\delta_b = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos(-2(\theta + \alpha))$$

$$\delta_c = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}\cos(-2(\theta + 2\alpha))$$

Exemple : $\alpha = \pi / 4$

Posons : $d = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$ *et* $r = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$

On trouve alors : $\begin{cases} d = \frac{\delta_a + \delta_c}{2} \\ r = \sqrt{(\delta_c - \delta_a)^2 + (\delta_a + \delta_c - 2\delta_b)^2} \\ tg2\theta = \frac{\delta_b - d}{\delta_a - d} \end{cases}$

Ainsi si $(\delta_a, \delta_b, \delta_c)$ sont connus,

- on détermine d et r ce qui permet d'avoir : $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$; $(\varepsilon_1 = d + r$ *et* $\varepsilon_2 = d - r)$
- on détermine $\theta = 0$ ce qui permet d'avoir : $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$

Mesure des déformations (Jauge de déformation)

La jauge de déformation est un fil électrique résistif déformable.

Sa résistance électrique est donnée par : $R = \frac{\rho L}{S}$

ρ : Résistivité électrique du fil

S : section du fil

L : longueur du fil

La jauge est collée sur la surface libre du solide à étudier selon une direction choisie.

Toute variation δL de la longueur du fil entraine une variation de sa résistance électrique δR selon :

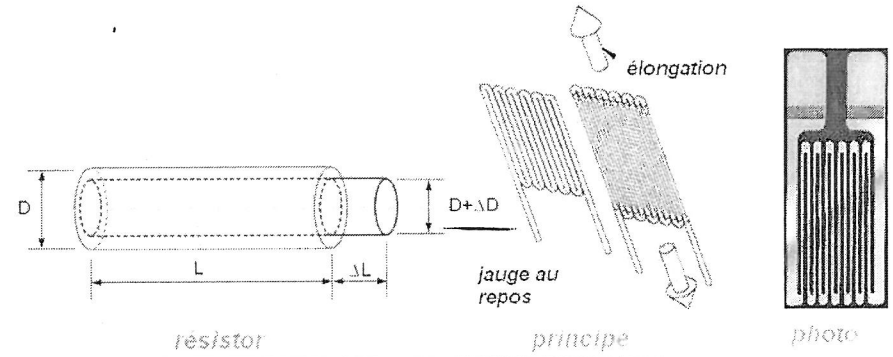
$$\frac{\delta R}{R} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta S}{S}$$

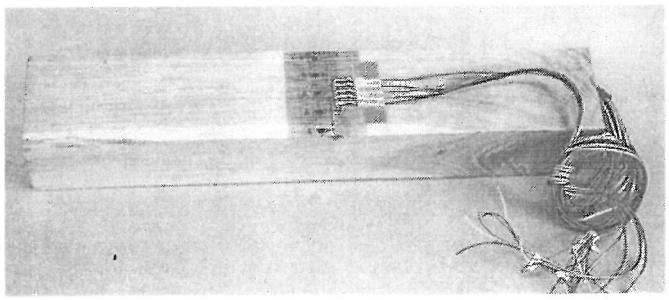
$S = \pi r^2 \Rightarrow \frac{\delta S}{S} = 2\frac{\delta r}{r} = -2\nu_{fil}\frac{\delta L}{L}$; ν_{fil} : coefficient de Poisson du fil (C'est le rapport entre l'allongement unitaire longitudinal $\frac{\delta L}{L}$ et l'allongement unitaire transversal $\frac{\delta r}{r}$; Notons bien que ces deux allongements sont de signes opposés)

Par ailleurs, on montre que $\frac{\delta \rho}{\rho}$ *est proportionnel à* $\frac{\delta L}{L}$

Nous pouvons donc écrire : $\boxed{\frac{\delta R}{R} = k\frac{\delta L}{L}}$ (k facteur de jauge)

Ainsi, si l'on mesure δR, on détermine δL.





XI Cinématique de la déformation

Jusqu'à présent, nous avons étudié la transformation d'un milieu matériel continu entre deux instants : initial et final. Dans ce paragraphe, nous nous intéresserons à sa transformation entre deux instants voisins t et t+dt.

XI-1 Tenseur gradient de vitesse

1°) En description lagrangienne :

Nous avons $\frac{d}{dt}(d\vec{x}) = \frac{d}{dt}\left(\overline{\overline{F}}(\vec{X},t)d\vec{X}\right) = \frac{d\overline{\overline{F}}(\vec{X},t)}{dt}d\vec{X}$

Or $\left[\frac{d\overline{\overline{F}}(\vec{X},t)}{dt}\right]_{ij} = \frac{dF_{ij}(\vec{X},t)}{dt} = \frac{\partial F_{ij}(\vec{X},t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j}\right) = \frac{\partial}{\partial X_j}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial v_i}{\partial X_j}$

Alors : $\boxed{\frac{d\overline{\overline{F}}}{dt} = \overline{\overline{grad}}\,\vec{v}}$; $\overline{\overline{grad}}\,\vec{v}$ **tenseur gradient de vitesse** en description lagrangienne

d'où finalement : $\boxed{\frac{d}{dt}(d\vec{x}) = \overline{\overline{grad}}\,\cancel{\vec{v}\,d\vec{X}}}$

2°) En description eulérienne

Nous avons montré que $\left[\frac{d\overline{\overline{F}}(\vec{X},t)}{dt}\right]_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial X_j}$

Par ailleurs $\frac{\partial v_i}{\partial X_j} = \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial X_j}$

D'où : $\frac{d\overline{\overline{F}}}{dt} = \overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}\,\overline{\overline{F}}$

On déduit que : $\frac{d}{dt}(d\vec{x}) = (\overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}\,\overline{\overline{F}})\overrightarrow{dX} = \overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}(\overline{\overline{F}}\,\overrightarrow{dX}) = \overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}\,\overrightarrow{dx}$ soit finalement $\boxed{\frac{d}{dt}(d\vec{x}) = \overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}\,\overrightarrow{dx}}$

$\overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}$ **tenseur gradient de vitesse** en description eulérienne

Rappel : $\left[\overline{\overline{A}}\,\overline{\overline{F}}\right]\vec{X} = \overline{\overline{A}}\left[\overline{\overline{F}}\,\vec{X}\right]$

XI-2 Tenseur des taux de déformation

1°) En description lagrangienne :

$$\frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x}')=\frac{d}{dt}\left(\left(\overline{\overline{F}}d\vec{X}\right).\left(\overline{\overline{F}}\,d\vec{X}'\right)\right)=\frac{d}{dt}\left(d\vec{X}.\overline{\overline{C}}\,d\vec{X}'\right)$$

Comme $\overline{\overline{C}}=\overline{\overline{I}}+2\overline{\overline{E}}$

Alors $\frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x}')=\frac{d}{dt}\left(d\vec{X}.d\vec{X}'+\cancel{2\,d\vec{X}.}\,\overline{\overline{E}}\,d\vec{X}'\right)$

Soit encore :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x}')=2\,d\vec{X}.\frac{d\overline{\overline{\mathbf{E}}}}{dt}d\vec{X}'}$$

Le tenseur $\frac{d\overline{\overline{\mathbf{E}}}}{dt}(\vec{X},t)=\frac{\partial\overline{\overline{\mathbf{E}}}}{\partial t}(\vec{X},t)=\dot{\overline{\overline{\mathbf{E}}}}(\vec{X},t)$ est appelé **taux de déformation Lagrangien**

2°) En description eulérienne

Nous avons :

$$\frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x}')=\frac{d(d\vec{x})}{dt}.d\vec{x}'+d\vec{x}.\frac{d(d\vec{x}')}{dt}=\left(\overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}\,d\vec{x}\right)'.\overrightarrow{dx}'+\overrightarrow{dx}'.\left(\overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}\,d\vec{x}'\right)=d\vec{x}\underbrace{\left[\left(\overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}\right)'+\left(\overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}\right)\right]}_{2\overline{\overline{D}}}\overrightarrow{dx}'$$

Finalement $\boxed{\frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x}')=d\vec{x}\,2\overline{\overline{D}}\,d\vec{x}'}$ avec : $\boxed{\overline{\overline{D}}=\frac{1}{2}(\overline{\overline{grad}}^{*t}\,\vec{v}+\overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v})}$ ou encore $\boxed{D_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i})}$

$\overline{\overline{D}}$ est le **tenseur des taux de déformation** (en description eulérienne)

Remarque :

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

En HPP $E_{ij} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \varepsilon_{ij}$

Donc en HPP, Nous avons : $\boxed{D_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}}$

Interprétation : Champ de vitesse

Pour deux points infiniment voisins M et N, nous avons $d\vec{v} = \overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}\,\overrightarrow{dM}$

Soit encore : $\vec{v}(N) = \vec{v}(M) + \overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v}\,\overrightarrow{MN}$

Ou encore : $\vec{v}(N) = \vec{v}(M) + \frac{1}{2}(\overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v} + \overline{\overline{grad}}^{*t}\,\vec{v})\,\overrightarrow{MN} + \frac{1}{2}(\overline{\overline{grad}}^{*}\,\vec{v} - \overline{\overline{grad}}^{*t}\,\vec{v})\,\overrightarrow{MN}$

D'où : $\boxed{\vec{v}(N) = \vec{v}(M) + \overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{MN} + \overline{\overline{\Omega}}\,\overrightarrow{MN}}$ Soit encore $\boxed{\vec{v}(N) = \vec{v}(M) + \overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{MN} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MN}}$

$\boxed{\overline{\overline{D}} \text{ tenseur des taux de déformation}: D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}$

$\boxed{\overline{\overline{\Omega}} \text{ tenseur des taux de rotation}: \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)}$

$\boxed{\vec{\Omega} \text{ vecteur tourbillon}; \vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\vec{v}}$

Autre écriture :

$$\vec{v}(N) = \vec{v}(M) + \overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{MN} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{MN} \Rightarrow \frac{d(\overrightarrow{MN})}{dt} = \overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{MN} + \overline{\overline{\Omega}}\,\overrightarrow{MN}$$

Comme $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{dM}$ alors : $\boxed{\frac{d(\overrightarrow{dM})}{dt} = \overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{dM} + \overline{\overline{\Omega}}\,\overrightarrow{dM} = \overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{dM} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{dM}}$

XI-3 Taux d'allongement unitaire-Taux de glissement angulaire

Nous avons : $\frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x}) = d\vec{x}\,2\overline{\overline{D}}\,d\vec{x}$

Posons : $d\vec{x} = dl\,\vec{e}_1$;

alors : $\frac{d}{dt}(dl^2) = dl^2\,\vec{e}_1\,2\overline{\overline{D}}\,\vec{e}_1 = dl^2\,2D_{11}$

soit encore $2\frac{d(dl)}{dt}dl = 2dl^2\,D_{11}$

D'où $\boxed{\frac{1}{dl}\frac{d(dl)}{dt} = D_{11}}$ **taux d'allongement unitaire selon** $\vec{e}_1$

Par ailleurs, soient $d\vec{x} = dl_1\,\vec{e}_1$ et $d\vec{x}' = dl_2\,\vec{e}_2$

Nous avons: $\frac{d}{dt}(d\vec{x}.d\vec{x}') = d\vec{x}\,2\overline{\overline{D}}\,d\vec{x}'$

Soit encore : $\frac{d(dl_1\,dl_2\vec{e}_1\,\vec{e}_2)}{dt} = dl_1\,dl_2\,\vec{e}_1\,2\overline{\overline{D}}\,\vec{e}_2 = dl_1\,dl_2\,2D_{12}$

En négligeant le taux d'allongement unitaire et supposant le glissement angulaire faible, on obtient :

$$\frac{d(dl_1\,dl_2\vec{e}_1\,\vec{e}_2)}{dt} \approx dl_1\,dl_2\,\frac{d(\vec{e}_1.\vec{e}_2)}{dt} = dl_1\,dl_2\,\frac{d(\cos(\pi/2-\gamma)}{dt} = dl_1\,dl_2\,\frac{d(\sin\gamma)}{dt} = dl_1\,dl_2\,\frac{d(\gamma)}{dt}$$

D'où finalement : $\boxed{\dot{\gamma} = 2D_{12}}$ **Taux de glissement angulaire selon les directions** $\vec{e}_1$ *et* $\vec{e}_2$

XI-4 Taux de dilatation volumique

Pour simplifier les calculs, considérons un parallélépipède infinitésimal en M orienté selon les directions principales de $\overline{\overline{D}}$

Nous avons $dv = (\overrightarrow{dM_1}, \overrightarrow{dM_2}, \overrightarrow{dM_3})$

Alors $\frac{d(dv)}{dt} = (\frac{d(\overrightarrow{dM_1})}{dt}, \overrightarrow{dM_2}, \overrightarrow{dM_3}) + (\overrightarrow{dM_1}, \frac{d(\overrightarrow{dM_2})}{dt}, \overrightarrow{dM_3}) + (\overrightarrow{dM_1}, \overrightarrow{dM_2}, \frac{d(\overrightarrow{dM_3})}{dt})$

Or $\frac{d(\overrightarrow{dM_i})}{dt} = \overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{dM_i} + \overline{\overline{\Omega}}\,\overrightarrow{dM_i} = \overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{dM_i} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{dM_i}$

Et puisque $\overrightarrow{dM_i}$ // *directions propres de* $\overline{\overline{D}}$

Alors $\overline{\overline{D}}\,\overrightarrow{dM_i} = d_i\,\overrightarrow{dM_i}$

Nous pouvons alors écrire :

$$\frac{d(dv)}{dt} = (d_1\overrightarrow{dM_1} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{dM_1}, \overrightarrow{dM_2}, \overrightarrow{dM_3}) + (\overrightarrow{dM_1}, d_2\overrightarrow{dM_2} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{dM_2}, \overrightarrow{dM_3}) + (\overrightarrow{dM_1}, \overrightarrow{dM_2}, d_3\overrightarrow{dM_3} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{dM_3})$$

ou encore $\frac{d(dv)}{dt} = d_1(\overrightarrow{dM_1}, \overrightarrow{dM_2}, \overrightarrow{dM_3}) + (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{dM_1}, \overrightarrow{dM_2}, \overrightarrow{dM_3}) + ...$

Le terme : $(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{dM_1}, \overrightarrow{dM_2}, \overrightarrow{dM_3}) = \vec{0}$ *car* $\overrightarrow{dM_i}$ *mutuellement orthogonaux.*

D'où $\frac{d(dv)}{dt} = (d_1 + d_2 + d_3)(\overrightarrow{dM_1}, \overrightarrow{dM_2}, \overrightarrow{dM_3})$

Soit encore : $\frac{d(dv)}{dt} = (d_1 + d_2 + d_3)dV$

D'où finalement : $\boxed{\frac{1}{dv}\frac{d(dv)}{dt} = (d_1 + d_2 + d_3) = div\vec{v}}$ **Taux de dilatation volumique**

Ainsi, un mouvement sans variation de volume est caractérisé par la condition $div\,\vec{v} = 0$

Exemple : Fluide incompressible

XI-5 Taux de variation d'un vecteur aire : $\vec{n}dS$

Nous avons : $ds\vec{n} = \det \overline{\overline{F}}\ \overline{\overline{F}}'^{-1}\ dS\vec{N}$

Par souci de simplification, posons $J = \det \overline{\overline{F}}$ *et* $\overline{\overline{G}} = \overline{\overline{F}}^{-1}$

$$\frac{d(\vec{n}ds)}{dt} = \frac{dJ}{dt}\overline{\overline{G}}'\ \vec{N}dS + J\ \frac{d\overline{\overline{G}}'}{dt}\vec{N}dS$$

Nous avons $\frac{dJ}{dt} = J\ div\vec{v}$.

Calculons alors $\frac{d\overline{\overline{G}}'}{dt}$ (Notons que $\frac{d\overline{\overline{G}}'}{dt} = \left[\frac{d\overline{\overline{G}}}{dt}\right]'$)

Nous avons : $\overline{\overline{F}}\ \overline{\overline{G}} = \overline{\overline{I}} \Rightarrow \frac{d\overline{\overline{F}}}{dt}\overline{\overline{G}} + \overline{\overline{F}}\frac{d\overline{\overline{G}}}{dt} = \overline{\overline{0}}$

Comme $\frac{d\overline{\overline{F}}}{dt} = (\overline{\overline{grad\vec{v}}})\overline{\overline{F}}$ alors : $\overline{\overline{F}}\frac{d\overline{\overline{G}}}{dt} = -\left[(\overline{\overline{grad\vec{v}}})\overline{\overline{F}}\right]\overline{\overline{G}}$

Posons $\overline{\overline{L}} = \overline{\overline{grad\vec{v}}}$

Alors $\frac{d\overline{\overline{F}}}{dt} = \overline{\overline{L}}\,\overline{\overline{F}}$ et $\overline{\overline{F}}\frac{d\overline{\overline{G}}}{dt} = -\left[\overline{\overline{L}}\,\overline{\overline{F}}\right]\overline{\overline{G}} = -\overline{\overline{L}}\left[\overline{\overline{F}}\,\overline{\overline{G}}\right] = -\overline{\overline{L}}\,\overline{\overline{I}} = -\overline{\overline{L}}$

$$\overline{\overline{F}}\frac{d\overline{\overline{G}}}{dt} = -\overline{\overline{L}} \Rightarrow \frac{d\overline{\overline{G}}}{dt} = -\overline{\overline{F}}^{-1}\overline{\overline{L}} = -\overline{\overline{G}}\,\overline{\overline{L}} \Rightarrow \frac{d\overline{\overline{G}}'}{dt} = -\overline{\overline{L}}'\,\overline{\overline{G}}'$$

La relation $\frac{d(\vec{n}ds)}{dt} = \frac{dJ}{dt}\overline{\overline{G}}'\ \vec{N}dS + J\ \frac{d\overline{\overline{G}}'}{dt}\vec{N}dS$ s'écrit alors : $\frac{d}{dt}(\vec{n}ds) = J\left(div\,\vec{v}\right)\overline{\overline{G}}'\ \vec{N}dS - J(\overline{\overline{L}}'\,\overline{\overline{G}}')\ \vec{N}dS$

Comme $(\overline{\overline{L}}'\,\overline{\overline{G}}')\ \vec{N} = \overline{\overline{L}}'\,(\overline{\overline{G}}'\ \vec{N})$ alors : $\frac{d}{dt}(\vec{n}ds) = J\left(div\,\vec{v}\right)\overline{\overline{G}}'\ \vec{N}dS - J\overline{\overline{L}}'\,(\overline{\overline{G}}'\ \vec{N})dS$

En utilisant à nouveau la relation $ds\vec{n} = \det \overline{\overline{F}}\ \overline{\overline{F}}'^{-1}\ dS\vec{N}$ (soit encore : $ds\vec{n} = J\ \overline{\overline{G}}'\ dS\vec{N}$), nous obtenons finalement : $\boxed{\frac{1}{ds}\frac{d}{dt}(\vec{n}ds) = \left(div\,\vec{v}\right)\vec{n} - \left(\overline{\overline{grad\,\vec{v}}}\right)'\vec{n}}$

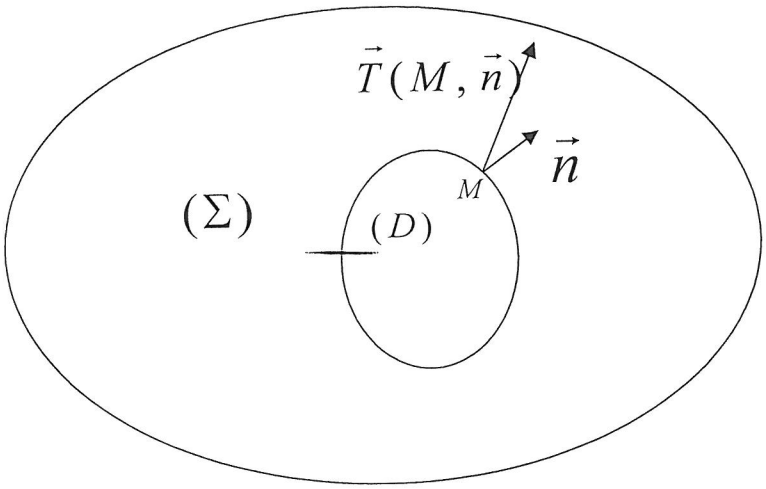
Chapitre 3 Contraintes dans un milieu continu

I-Classification et modélisation des efforts

I-1 Classification

Les efforts exercés sur tout domaine (D) d'un système matériel (Σ) sont de deux types :

- Les efforts exercés sur (D) par les systèmes extérieurs au système (Σ) : efforts extérieurs.
- Les efforts exercés sur (D) par le complémentaire de (D) dans (Σ) : efforts intérieurs.



I-2 Modélisation

Les efforts extérieurs sont généralement des actions à distance facilement modélisables par une densité de forces (force d'attraction terrestre, force électromagnétique, force d'inertie……

Les efforts intérieurs sont des actions locales de liaisons moléculaires dont la modélisation n'est pas aisée.

Dans ce cours, nous utiliserons, pour la modélisation de ces efforts intérieurs, le postulat de Cauchy.

II Postulat de Cauchy- Vecteur contrainte

Postulat de Cauchy :

- *Les efforts exercés sur une partie (D) d'un système matériel par le complémentaire de (D) dans le système (Σ) peuvent être représentés par une répartition surfacique de forces.*
- *Cette densité surfacique ne dépend du domaine considéré que par la normale extérieure au domaine pour le point d'étude*

Ainsi, sur chaque surface élémentaire ds autour d'un point M et orientée par la normale $\vec{n}$, les éléments du système (Σ) situés dans la région de M et n'appartenant pas à la partie (D) exercent sur les éléments du système (Σ) appartenant à la partie (D) une force élémentaire $d\vec{F}$ déterminée par : $d\vec{F} = \vec{T}(M,\vec{n})ds$

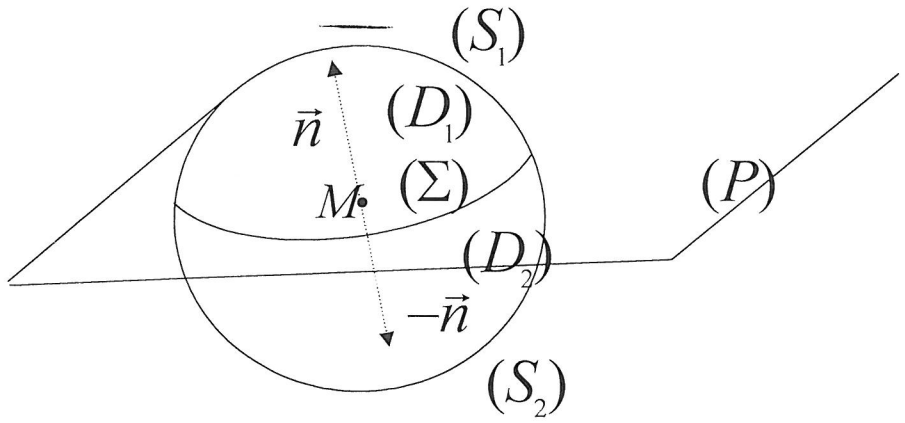
$\boxed{\vec{T}(M,\vec{n}) = \dfrac{d\vec{F}}{ds}}$: **vecteur contrainte** en M dans la direction $\vec{n}$.

N.B : $\vec{T}(M,\vec{n})$ **est défini en description eulérienne**

Remarques :

- $\vec{T}(M,\vec{n})$ est en $N/m^2 : Pa\ (Pascal)$
- $\vec{T}(M,-\vec{n}) = -\vec{T}(M,\vec{n})$

Démonstration : Soit *(P)* le plan perpendiculaire à $\vec{n}$ passant par M et coupant un domaine (D) selon une surface (Σ). Soit $(D_1),(D_2)$ *tels que* : $(D)=(D_1)\cup(D_1)$. Soient $(S_1),(S_2)$ *et* $(S)=(S_1)\cup(S_2)$ les frontières de respectives de $(D_1),(D_2)$ *et* $(D)=(D_1)\cup(D_1)$.(voir figure).



Appliquons la RFD aux domaines $(D_1),(D_2)$ *et* $(D)=(D_1)\cup(D_1)$:

$$\int_{D_1}\rho\vec{\gamma}dv = \int_{D_1}\vec{f}dv + \int_{S_1}\vec{T}(M,\vec{n})ds + \int_{\Sigma}\vec{T}(M,\vec{n})ds \quad (1)$$

$$\int_{D_2}\rho\vec{\gamma}dv = \int_{D_2}\vec{f}dv + \int_{S_2}\vec{T}(M,-\vec{n})ds + \int_{\Sigma}\vec{T}(M,-\vec{n})ds \quad (2)$$

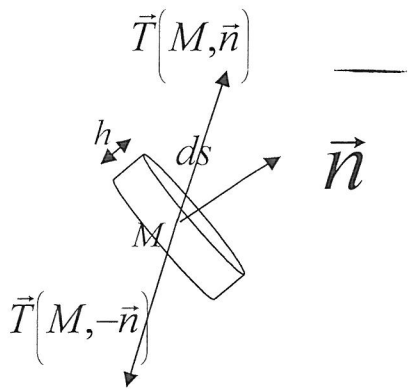
$$\int_{D}\rho\vec{\gamma}dv = \int_{D}\vec{f}dv + \int_{S}\vec{T}(M,\vec{n})ds \quad (3)$$

(3)- ((1)+(2)) donne: $\int_{\Sigma}\vec{T}(M,\vec{n})ds + \int_{\Sigma}\vec{T}(M,-\vec{n})ds = \vec{0}$

Cette relation étant valable quelque soit la surface (Σ) entourant M, alors $\vec{T}(M,-\vec{n}) = -\vec{T}(M,\vec{n})$

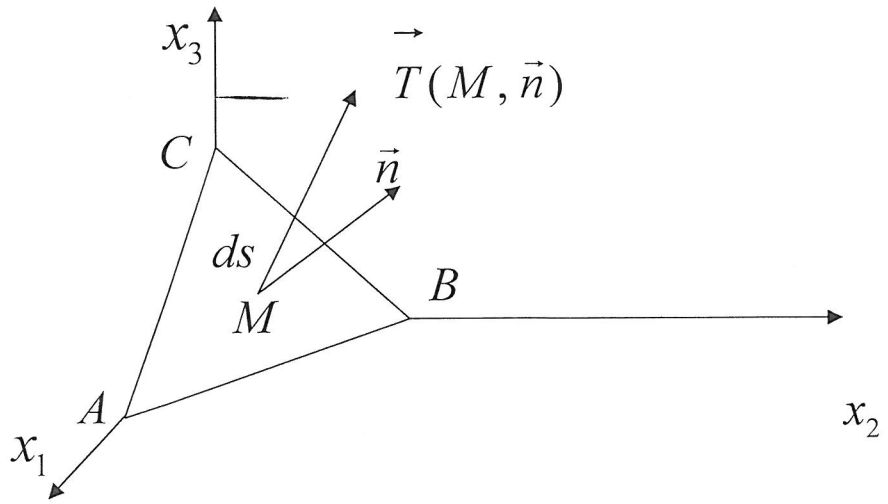
Autre démontration

(L'application de la RFD à un cylindre élémentaire de hauteur h montre aisément que lorsque h tend vers 0, nous obtenons : $\vec{T}(M,-\vec{n}) = -\vec{T}(M,\vec{n})$*)*



III Tenseur des contraintes

Soit ds un élément de surface triangulaire ABC entourant un point M. Soit O' un point infiniment voisin de M



Appliquons La RFD à un domaine matériel élémentaire de forme tétraédrique O'ABC ayant trois faces de normales $-\vec{e}_1, -\vec{e}_2$ *et* $-\vec{e}_3$:

$\vec{\gamma} dm = \vec{T}(M,\vec{n})\,ds + \vec{T}(M,-\vec{e}_2)\,ds_2 + \vec{T}(M,-\vec{e}_3)\,ds_3 + \vec{f}dv$; $\vec{f}$ densité de forces volumiques (actions à distance)

Alors : $\vec{\gamma} dm = \vec{T}(M,\vec{n})\,ds - \vec{T}(M,\vec{e}_1)\,ds_1 - \vec{T}(M,\vec{e}_2)\,ds_2 - \vec{T}(M,\vec{e}_3)\,ds_3 + \vec{f}dv$

Les arêtes de O'ABC étant en $o(\varepsilon)$ alors $\vec{\gamma} dm$ *et* $\vec{f}dv$ *sont en* $o(\varepsilon^3)$ et les forces de surface sont en $o(\varepsilon^2)$

D'où $\vec{T}(M,\vec{n})\,ds = \vec{T}(M,\vec{e}_1)\,ds_1 + \vec{T}(M,\vec{e}_2)\,ds_2 + \vec{T}(M,\vec{e}_3)\,ds_3$

Or $ds_i = n_i ds$ *avec* $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ (voir démonstration en fin de paragraphe)

Alors $\vec{T}(M,\vec{n})\,ds = \vec{T}(M,\vec{e}_1)\,n_1 + \vec{T}(M,\vec{e}_2)\,n_2 + \vec{T}(M,\vec{e}_3)\,n_3$

Posons :

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = T_1\vec{e}_1 + T_2\vec{e}_2 + T_3\vec{e}_3$$

$$\vec{T}(M,\vec{e}_1) = \sigma_{11}\vec{e}_1 + \sigma_{12}\vec{e}_2 + \sigma_{13}\vec{e}_3$$

$$\vec{T}(M,\vec{e}_2) = \sigma_{21}\vec{e}_1 + \sigma_{22}\vec{e}_2 + \sigma_{23}\vec{e}_3$$

$$\vec{T}(M,\vec{e}_3) = \sigma_{31}\vec{e}_1 + \sigma_{32}\vec{e}_2 + \sigma_{33}\vec{e}_3$$

Alors $\begin{cases} T_1 = n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{12} + n_3\sigma_{13} \\ T_2 = n_1\sigma_{21} + n_2\sigma_{22} + n_3\sigma_{23} \\ T_3 = n_1\sigma_{31} + n_2\sigma_{32} + n_3\sigma_{33} \end{cases}$

Soit encore : $\boxed{T_i = \sigma_{ij} n_j}$

Ou encore : $\boxed{\vec{T}(M,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}\vec{n}}$ $\overline{\overline{\sigma}}$: **tenseur des contraintes** en M (tenseur de Cauchy)

Interprétation :

σ_{ii} : Force qui agit perpendiculairement à la surface unité normale à Ox_i

σ_{ij} : Force qui agit tangentiellement à la surface unité normale à Ox_i et qui est parallèle à Ox_j

N.B : $\boxed{\overline{\overline{\sigma}} \text{ est un tenseur symétrique}}$ (démonstration voir chapitre 4)

Démonstration : $ds_i = n_i ds$

Nous avons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2ds\,\vec{n} = 2ds\left(n_1\vec{e}_1 + \vec{e}_2 n_2 + n_3\vec{e}_3\right)$ (1)

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AO'} + \overrightarrow{O'B}) \wedge (\overrightarrow{AO'} + \overrightarrow{O'C}) \\
&= \overrightarrow{AO'} \wedge \overrightarrow{O'C} + \overrightarrow{O'B} \wedge \overrightarrow{AO'} + \overrightarrow{O'B} \wedge \overrightarrow{O'C} \\
&= \overrightarrow{O'C} \wedge \overrightarrow{O'A} + \overrightarrow{O'A} \wedge \cancel{\overrightarrow{O'B} \wedge} + \overrightarrow{O'B} \wedge \overrightarrow{O'C} \\
&= 2ds_2\vec{e}_2 + 2ds_3\vec{e}_3 + +2ds_1\vec{e}_1 \quad (2)
\end{aligned}$$

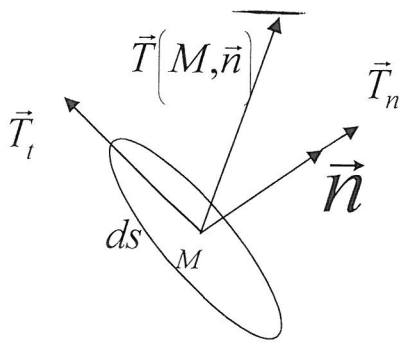
(1) et (2) conduisent finalement à : $ds_i = n_i ds$

IV Contrainte normale- Contrainte tangentielle

Nous avons $\vec{T}(M,\vec{n}) = T_n\vec{n} + T_t\vec{t}$ avec $T_n = \vec{T}(M,\vec{n}).\vec{n} = \overline{\overline{\sigma}}\vec{n}.\vec{n}$ et $T_t = \vec{T}(M,\vec{n}).\vec{t} = \overline{\overline{\sigma}}\vec{n}.\vec{t}$

T_n Contrainte normale : projection de $\vec{T}(M,\vec{n})$ sur la normale $\vec{n}$

T_t Contrainte tangentielle ou de cisaillement : projection de $\vec{T}(M,\vec{n})$ sur le plan tangent en M à (D)



V Contraintes principales

$\overline{\overline{\sigma}}$ étant symétrique à coefficients réels, il est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles.

Il existe alors une base principale orthonormée $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3)$ Où $\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}}$

σ_i **: contraintes principales**

Remarque : Les éléments de surface dont les normales sont orientées selon les directions principales ne subissent pas de contraintes tangentielles (cisaillement)

En effet, par exemple $\vec{n} = \vec{\sigma}_1$;

$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma_1\vec{\sigma}_1 \Rightarrow T_t(M,\vec{\sigma}_1) = 0$$

VI Invariants du tenseur des contraintes

La détermination des valeurs principales du tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}}$ conduit aussi à la détermination de trois invariants scalaires de ce tenseur : coefficients du polynôme caractéristique $P_{\overline{\overline{\sigma}}}(\lambda) = \det(\overline{\overline{\sigma}} - \lambda\,\overline{\overline{I}}) = -\lambda^3 + \xi_I\,\lambda^2 - \xi_{II}\,\lambda + \xi_{III}$.

Avec : $\xi_I = tr\,\overline{\overline{\sigma}}$; $\xi_{II} = \frac{1}{2}\left(\left(tr\,\overline{\overline{\sigma}}\right)^2 - tr\left(\overline{\overline{\sigma}}^2\right)\right)$; $\xi_{III} = \det\overline{\overline{\sigma}}$

Soit encore sous forme indicielle : $\boxed{\begin{cases} \xi_I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ \xi_{II} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\,\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\,\sigma_{ij}\right) = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\ \xi_{III} = \det\left(\sigma_{ij}\right) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{cases}}$

VII Décomposition du tenseur des contraintes

On décompose le tenseur des contraintes en une somme d'un tenseur sphérique $\overline{\overline{\sigma}}_S$ et d'un tenseur déviateur (ou déviatorique) $\overline{\overline{\sigma}}_D$ comme suit :

$$\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}_S + \overline{\overline{\sigma}}_D \quad où \quad \begin{cases} \overline{\overline{\sigma}}_S = s\overline{\overline{I}} = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \quad avec:\ s = \dfrac{\sigma_{kk}}{3} = \dfrac{tr\,\overline{\overline{\sigma}}}{3} \ \text{(contrainte moyenne)} \\ \overline{\overline{\sigma}}_D = \begin{pmatrix} \sigma_{11} - s & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - s & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - s \end{pmatrix} \end{cases}}$$

Remarques :

1- $tr\left(\overline{\overline{\sigma}}_D\right) = 0 \Rightarrow tr\left(\overline{\overline{\sigma}}\right) = tr\left(\overline{\overline{\sigma}}_S\right)$

2- Le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}_D$ est symétrique et admet les mêmes directions principales que le tenseur $\overline{\overline{\sigma}}$

VIII Tenseur des contraintes particuliers

1) Tenseur sphérique

Il est de la forme : $\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}}$ $\Rightarrow \vec{T}(M,\vec{n}) // \vec{n}$

Exemples :

- Fluides à l'équilibre avec $\sigma = -p$: *pression hydrostatique*
- Réservoir sphérique sous pression extérieure uniforme p

2) Tenseur de révolution

Il est de la forme : $\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 = \sigma_2 \end{pmatrix}}$

Exemple :

- Eprouvette dans une cellule à la pression uniforme p et à laquelle on superpose une force longitudinale F : $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} -(p+F/S) & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$; S section de l'éprouvette.

3) Tenseur uniaxial

$\overline{\overline{\sigma}}$ est uniaxial dans la direction $\vec{e}_1$ si : $\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

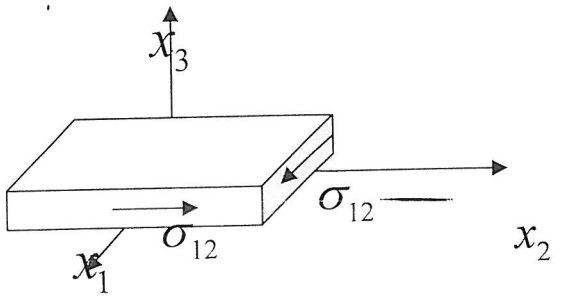
Si $\sigma_1 \rangle 0$: tenseur de traction simple

Si $\sigma_1 \langle 0$: tenseur de compression simple

Exemple : Eprouvette soumise à une force de traction F : $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} F/S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; S section de l'éprouvette.

4) Tenseur de cisaillement simple

$\overline{\overline{\sigma}}$ est de cisaillement simple (ou pur) dans les directions $\vec{e}_1$ *et* $\vec{e}_2$ si : $\boxed{\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$



$\vec{T}(M,\vec{e_1}) = \sigma_{12}\vec{e_2}$; $\vec{T}(M,\vec{e_2}) = \sigma_{12}\vec{e_1}$

Remarques :

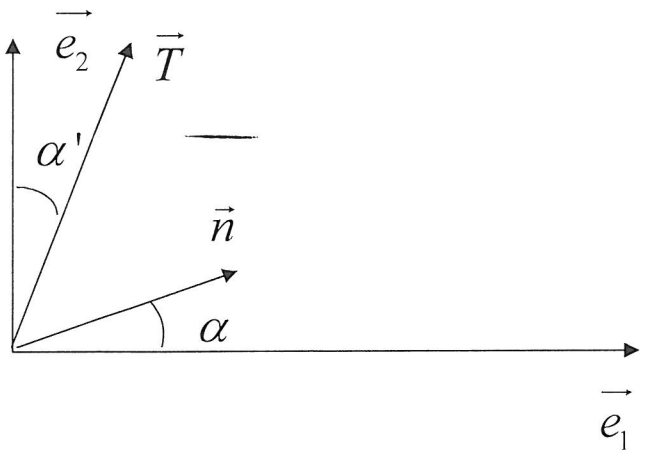
1- $\vec{T}(M,\vec{e_3})=\vec{0}$

2- $\forall \vec{n} \in Plan(\vec{e_1},\vec{e_2})$; $\vec{n}$ *et* $\vec{T}(M,\vec{n})$ *sont symétriques / bissetrice de l'angle* $(\vec{e_1},\vec{e_2})$

Effet :

$$\vec{n}=\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{T}(M,\vec{n})=\begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_2\sigma_{12} \\ n_1\sigma_{12} \\ 0 \end{pmatrix}=\sigma_{12}\begin{pmatrix} n_2 \\ n_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\vec{n},\vec{e_1})=\cos\alpha=n_1 \quad et \quad \cos(\vec{T}(M,\vec{n}),\vec{e_2})=\cos\alpha'=\frac{\vec{T}(M,\vec{n}).\vec{e_2}}{\left\|\vec{T}(M,\vec{n})\right\|}=n_1 \Rightarrow \alpha=\alpha' \quad \text{(voir figure)}$$



3- Contraintes principales de $\overline{\overline{\sigma}}$: $\sigma_1=\sigma_{12}$; $\sigma_2=-\sigma_{12}$; $\sigma_3=0$

4- *Directions principales* : $\left(\frac{\vec{e_1}+\vec{e_2}}{\sqrt{2}},\frac{\vec{e_2}-\vec{e_1}}{\sqrt{2}},\vec{e_3}\right)$

5) Tenseur de contraintes planes

$\overline{\overline{\sigma}}$ tenseur de contraintes planes dans le plan $(\vec{e_1},\vec{e_2})$ si : $\boxed{\overline{\overline{\sigma}}=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

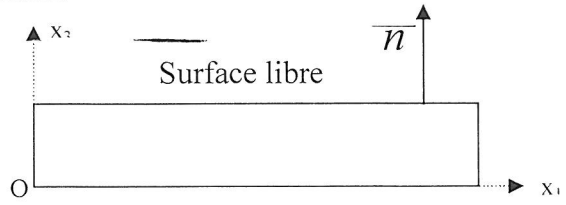
Remarques :

1- $\forall \vec{n} \quad \vec{T}(M,\vec{n}) \in Plan(\vec{e_1},\vec{e_2})$

2- $\vec{e_3}$ est un vecteur propre de $\overline{\overline{\sigma}}$ associé à la valeur propre $\sigma_3=0$

Exemple :

Surfaces libres d'un matériau



En tout point de la surface libre : $\vec{T}(M,\vec{n}) = \vec{0} \Rightarrow \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{13} = 0 \\ \sigma_{23} = 0 \\ \sigma_{33} = 0 \end{cases}$

Ainsi, en tout point de la surface libre : $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

IX Contraintes en description lagrangienne

Le vecteur contrainte, au point M et à l'instant t (description eulérienne), est défini par : $\vec{T}(M,\vec{n}) = \dfrac{d\vec{F}}{ds} \Rightarrow d\vec{F} = \vec{T}(M,\vec{n})\,ds$

Comme $\vec{T}(M,\vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}\ \vec{n}$ *alors* : $d\vec{F} = \overline{\overline{\sigma}}\ \vec{n}\,ds$

Par ailleurs, nous avons la relation entre les vecteurs aire initial et final ($dS\vec{N}$ *et* $ds\vec{n}$):

$\vec{n}ds = \det \overline{\overline{F}}\ \overline{\overline{F}}'^{-1}\ \vec{N}dS$

Pour éviter toute confusion de notation, posons $J = \det \overline{\overline{F}}$ *et* $\overline{\overline{G}} = \overline{\overline{F}}^{-1}$

Alors : $\vec{n}ds = J\ \overline{\overline{G}}'\ \vec{N}dS$, d'où $d\vec{F} = J\overline{\overline{\sigma}}\left[\overline{\overline{G}}'\ \vec{N}dS\right] = J\left[\overline{\overline{\sigma}}\,\overline{\overline{G}}'\right]\vec{N}dS$

Introduisons alors le tenseur : $\boxed{\overline{\overline{\Pi}} = J\overline{\overline{\sigma}}\,\overline{\overline{G}}'}$

Nous aurons : $\boxed{d\vec{F} = \overline{\overline{\Pi}}\,\vec{N}\,dS}$

$\overline{\overline{\Pi}}$ est appelé **tenseur des contraintes de Boussineq ou de Piola-Lagrange**

La relation $d\vec{F} = \overline{\overline{\Pi}}\,\vec{N}\,dS$ montre que $\overline{\overline{\Pi}}$ présente cependant un inconvénient majeur.. $d\vec{F}$ est défini en description eulérienne tandis que $\vec{N}\,dS$ est défini en description lagrangienne. Il est alors impératif d'introduire une ***force fictive*** lagrangienne $d\vec{F}_0$ définie par : $d\vec{F} = \overline{\overline{F}}\ d\vec{F}_0$ ou $d\vec{F}_0 = \overline{\overline{G}}\ d\vec{F}$.

Nous aurons alors : $d\vec{F}_0 = \overline{\overline{G}}\ d\vec{F} = \overline{\overline{G}}\left[\overline{\overline{\Pi}}\,\vec{N}\right]dS = J\overline{\overline{G}}\left[\overline{\overline{\sigma}}\,\overline{\overline{G}}'\ \vec{N}\right]dS = J\left[\overline{\overline{G}}\,\overline{\overline{\sigma}}\,\overline{\overline{G}}'\right]\vec{N}dS$

En posant : $\boxed{\overline{\overline{S}} = J\overline{\overline{G}}\,\overline{\overline{\sigma}}\,\overline{\overline{G}}'}$

Nous pouvons écrire : $\boxed{d\vec{F}_0 = \overline{\overline{S}}\ \vec{N}dS}$

$\overline{\overline{S}}$ est appelé : **tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff**

Remarque :

$\overline{\overline{\sigma}}$ est un tenseur purement eulérien

$\overline{\overline{\Pi}}$ est un tenseur hybride lagrangien-eulérien.

$\overline{\overline{S}}$ est un tenseur purement lagrangien.

X Représentation graphique d'un état de contrainte

X-1 Ellipsoïde des contraintes

Dans la base principale $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3)$ le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

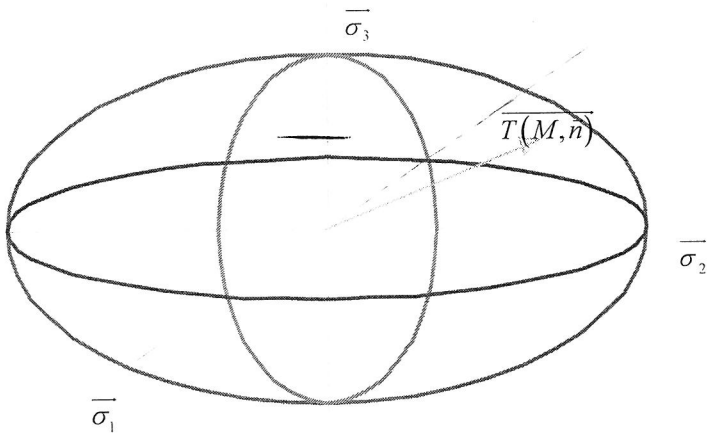
Considérons un vecteur unitaire quelconque : $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}_{(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3)}$

Le vecteur contrainte $\vec{T} = \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}$ s'écrit : $\begin{cases} T_1 = \sigma_1 n_1 \\ T_2 = \sigma_2 n_2 \\ T_3 = \sigma_3 n_3 \end{cases}$

Or le vecteur $\vec{n}$ est unitaire : $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

Alors : $\boxed{\dfrac{T_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{T_2^2}{\sigma_2^2} + \dfrac{T_3^2}{\sigma_3^2} = 1}$

On peut dire alors que dans le repère principal, l'extrémité du vecteur contrainte $\vec{T} = \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}$ décrit un ellipsoïde: ellipsoïde des contraintes (ellipsoïde de Lamé)



X-2 Cercle de Mohr des contraintes

Dans la base principale $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3)$ le tenseur des contraintes et le vecteur normal s'écrivent :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}_{(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3)}$$

Supposons par exemple ici que $\sigma_1 \rangle \sigma_2 \rangle \sigma_3$

Le vecteur contrainte $\vec{T} = \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}$ s'écrit : $\begin{cases} T_1 = \sigma_1 n_1 \\ T_2 = \sigma_2 n_2 \\ T_3 = \sigma_3 n_3 \end{cases}$

La contrainte normale est donnée par : $T_n = \vec{T}.\vec{n} \Rightarrow T_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$ (1)

Le carré du module de la contrainte est donné par : $T^2 = T_n^2 + T_t^2 \Rightarrow T_n^2 + T_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2$ (2)

Par ailleurs, nous avons : $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ (3)

Associons à l'extrémité de $\vec{T}$ un point $A(T_n, T_t)$ dans le plan (T_n, T_t) repéré en coordonnées cartésiennes et cherchons le lieu géométrique de A pour différentes directions de $\vec{n}$

Pour cela, on résout le système linéaire en (n_1^2, n_2^2, n_3^2) formé par les trois équations précédentes (1), (2) et (3):

On trouve alors : $$\begin{cases} n_1^2 = \dfrac{T_t^2 + (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ n_2^2 = \dfrac{T_t^2 + (T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ n_3^2 = \dfrac{T_t^2 + (T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases} \quad \text{(I)}$$

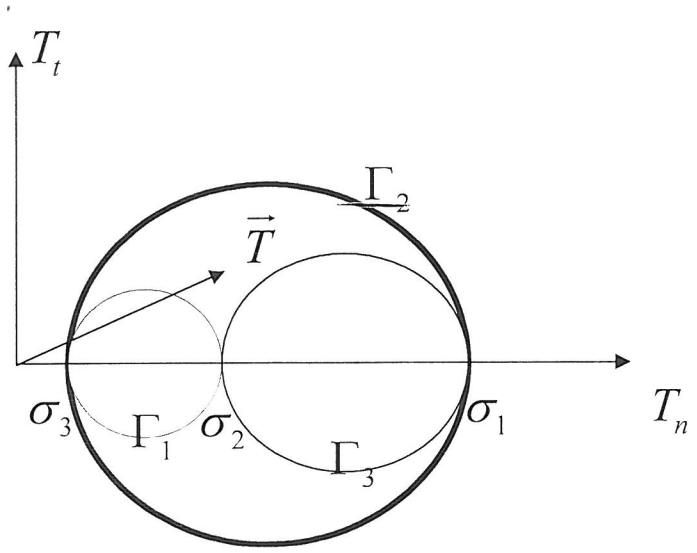
Rappel : Nous avons supposé ici que $\sigma_1 \rangle \sigma_2 \rangle \sigma_3$

(n_1^2, n_2^2, n_3^2) étant positifs, alors : $$\begin{cases} T_t^2 + (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3) \geq 0 \\ T_t^2 + (T_n - \sigma_3)(T_n - \sigma_1) \leq 0 \\ T_t^2 + (T_n - \sigma_1)(T_n - \sigma_2) \geq 0 \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Soit encore : $$\boxed{\begin{cases} T_t^2 + (T_n - \dfrac{\sigma_2 + \sigma_3}{2})^2 - (\dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2})^2 \geq 0 \\ T_t^2 + (T_n - \dfrac{\sigma_3 + \sigma_1}{2})^2 - (\dfrac{\sigma_3 - \sigma_1}{2})^2 \leq 0 \\ T_t^2 + (T_n - \dfrac{\sigma_1 + \sigma_2}{2})^2 - (\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2})^2 \geq 0 \end{cases}} \quad \text{(III)}$$

Ce système d'inéquations montre que le point $A(T_n, T_t)$ doit se trouver dans la région limitée par les trois cercles : Γ_1 *de centre* $(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}, 0)$ *et de rayon* : $\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$; Γ_2 *de centre* $(\frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}, 0)$ *et de rayon* : $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$; Γ_3 *de centre* $(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0)$ *et de rayon* : $\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ **.Ce sont les cercles de Mohr ou le tricercle de Mohr.**

Illustration :



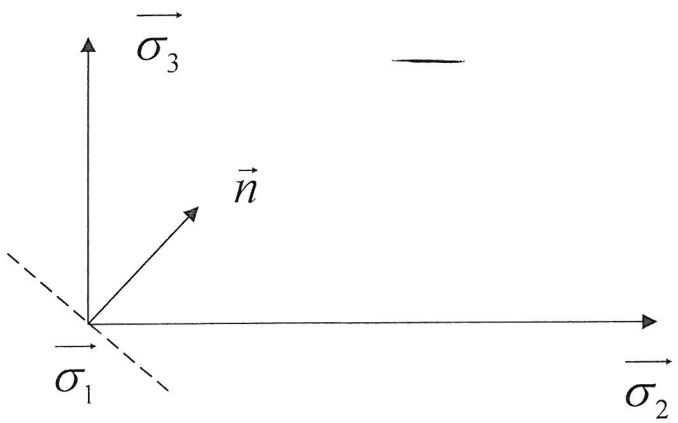
<u>Propriétés des cercles de Mohr :</u>

1°) Si $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$ alors $T_n = \sigma_0$ *et* $T_t = 0$. Les trois cercles se réduisent au point $A(\sigma_0, 0)$
Exemple : Fluides parfaits

2°) Si $\sigma_1 = \sigma_2 \neq \sigma_3$ alors $\Gamma_1 \equiv \Gamma_2$ *et* Γ_3 *se réduit à un point* .

3°) Si $A(T_n, T_t)$ se trouve sur les cercles limites, la facette orientée par $\vec{n}$ contient alors une direction principale.
En effet, par exemple si A se trouve sur Γ_1 alors nous avons d'après les équations II.1 et I.1:

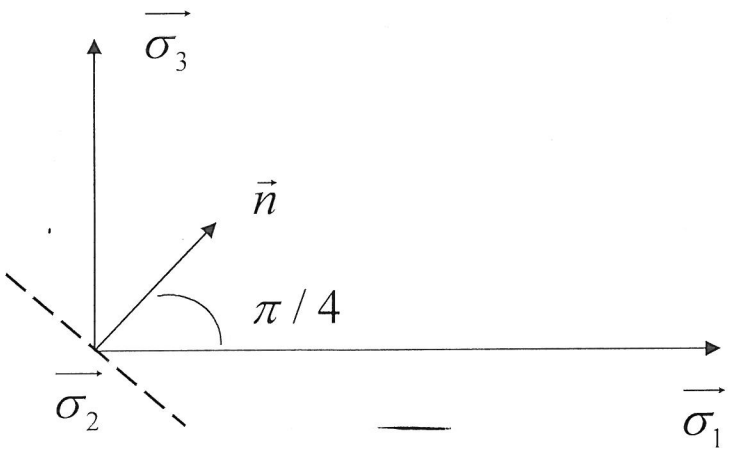
$T_t^2 + (T_n - \sigma_2)(T_n - \sigma_3) = 0 \Rightarrow n_1 = 0$. Ainsi : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}_{(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3)}$ et la facette de normale $\vec{n}$ contient alors la direction principale $\vec{\sigma}_1$.



4°) Dans le cas choisi $\sigma_1 \rangle \sigma_2 \rangle \sigma_3$, nous avons : $\boxed{T_{t_{max}} : \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}}$ *(Dans le cas général :* $T_{t_{max}} = \frac{1}{2}\sup|\sigma_i - \sigma_j|$*)*

et la valeur correspondante de T_n est $\boxed{T_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}}$

La normale orientant la ~~facette~~ sur laquelle s'exercent ces contraintes est telle que : $n_1^2 = n_3^2 = \frac{1}{2}$ *et* $n_2 = 0$ (D'après les systèmes (I) et (II))



<u>Cas particulier</u> : $\vec{n} \in plan(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)$

Dans la base principale $(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{\sigma}_3)$ le tenseur des contraintes et le vecteur normal s'écrivent :

$$\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le vecteur contrainte $\vec{T} = \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}$ s'écrit : $\begin{pmatrix} \sigma_1 n_1 = \sigma_1 \cos\theta \\ \sigma_2 n_2 = \sigma_2 \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

Associons à l'extrémité de $\vec{T}$ un ~~point~~ $A(T_n, T_t)$ dans le plan (T_n, T_t) repéré en coordonnées cartésiennes et cherchons le lieu géométrique de A pour différentes directions de $\vec{n}$ (différentes valeurs de θ)

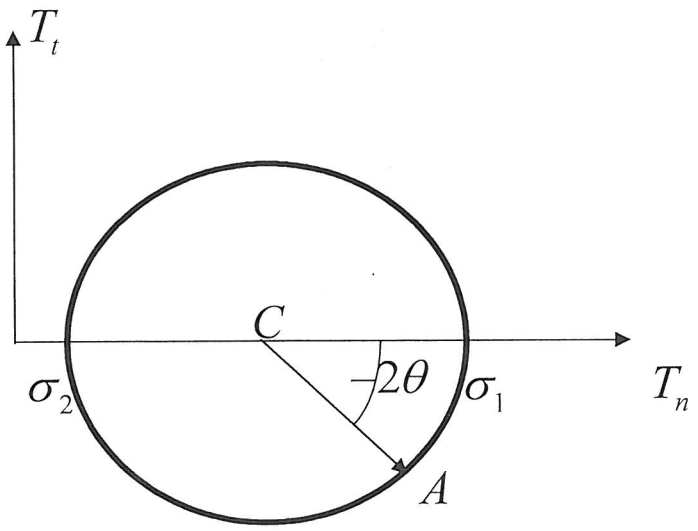
Nous avons :

$$A(T_n, T_t) = \begin{pmatrix} T_n = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta \\ T_t = -\sigma_1 \cos\theta \sin\theta + \sigma_2 \cos\theta \sin\theta \end{pmatrix}$$

car : $T_n = \vec{T}.\vec{n} = \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}.\,\vec{n}$ *et* $T_t = \vec{T}.\vec{t} = \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}.\,\vec{t}$ *avec* $\vec{t} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$

$A(T_n, T_t)$ peut encore s'écrire : $A(T_n, T_t) = \begin{pmatrix} T_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos(-2\theta) \\ T_t = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin(-2\theta) \end{pmatrix}$

Le lieu géométrique de $A(T_n,T_t)$ sur le plan (T_n,T_t) est donc le cercle de centre $C\ (\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2},0)$ *et de rayon* : $\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$



Remarques :

- Lorsque l facette tourne de θ autour de $M\vec{\sigma}_3$ dans le plan réel, le point figuratif $A(T_n,T_t)$ tourne de -2θ autour de C dans le plan image (T_n,T_t)
- T_t est extremum pour $-2\theta=-\pi/2$ *et* $-2\theta=-3\pi/2$ *i.e.* $\theta=\pi/4$ *et* $\theta=3\pi/4$

Recherche des contraintes et axes principaux à partir du cercle de Mohr

Considérons le cas des tenseurs de la forme : $\overline{\overline{\sigma}}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & 0\\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{33}\end{pmatrix}$

Notons tout d'abord que $M\vec{\sigma}_3(=\underline{M\vec{e}_3})$ est un axe principal associé à la valeur propre $\sigma_3=\sigma_{33}$

Cherchons alors : $M\vec{\sigma}_1$ **et** $M\vec{\sigma}_2$

$\vec{\sigma}_1$ *et* $\vec{\sigma}_2$ étant dans le plan $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, travaillons avec le tenseur plan $\overline{\overline{\sigma}}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$

$T_n=\vec{T}.\vec{n}=\overline{\overline{\sigma}}\vec{n}.\vec{n}$ *et* $T_t=\vec{T}.\vec{t}=\overline{\overline{\sigma}}\vec{n}.\vec{t}$ *avec* $\vec{n}=\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$ *et* $\vec{t}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{cases}T_n=\left[\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}\\ T_t=\left[\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{pmatrix}\end{cases}$$

Pour $\theta = 0$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\Rightarrow \begin{cases} T_n = \sigma_{11} \\ T_t = \sigma_{12} \end{cases} \Rightarrow A \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix}$

Pour $\theta = \pi / 2$; $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\Rightarrow \begin{cases} T_n = \sigma_{22} \\ T_t = -\sigma_{12} \end{cases} \Rightarrow A' \begin{pmatrix} \sigma_{22} \\ -\sigma_{12} \end{pmatrix}$

Construction géométrique

On place A et A'. Soit $C = AA' \cap MT_n$; On trace le cercle de centre C et passant par A et A'

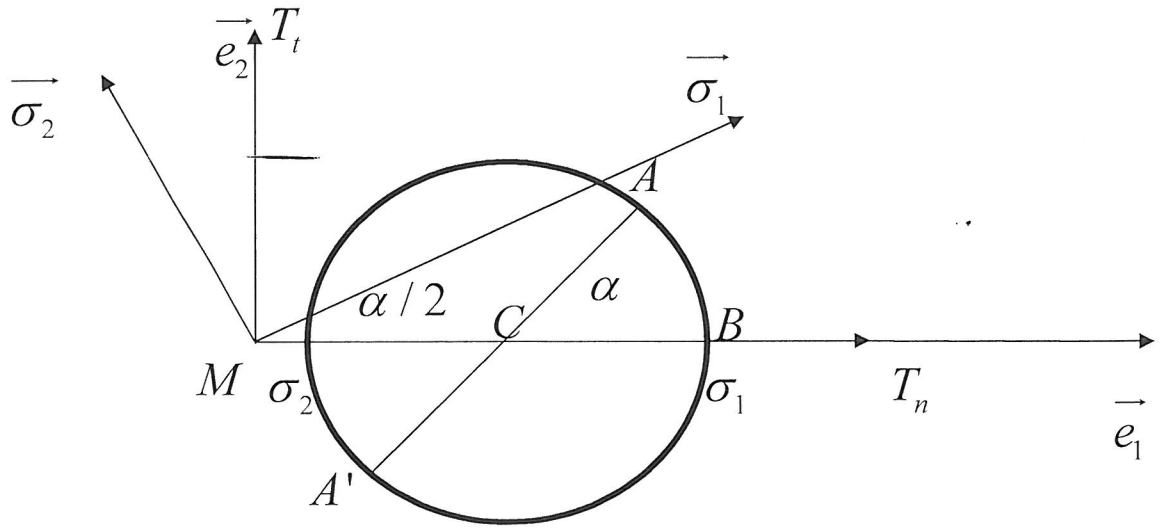
Alors σ_1 *et* σ_2 (valeurs propres) se déterminent par l'intersection du cercle avec MT_n

On passe de A à B $(B = Cercle \cap MT_n)$ par une rotation d'angle $-\alpha \Rightarrow angle\ (M\vec{e}_1, M\vec{\sigma}_1) = \dfrac{\alpha}{2}$

En effet : A *correspond à* $\vec{T}(M, \vec{n} = \vec{e}_1)$ *et* B *correspond à* $\vec{T}(M, \vec{n} = \vec{\sigma}_1)$

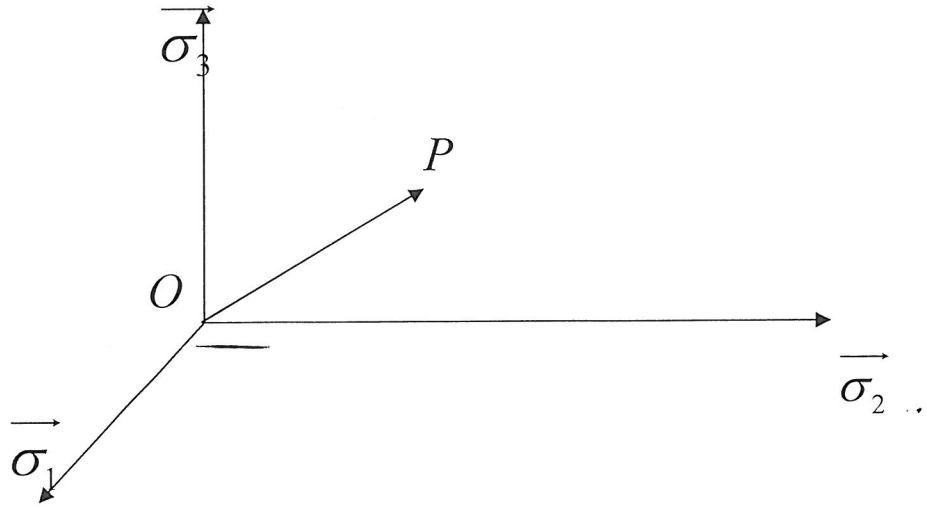
On passe de A à B par une rotation d'angle : $-\alpha$. Donc on passe de $\vec{e}_1$ *à* $\vec{\sigma}_1$ par une rotation d'angle : $\alpha / 2$.

On superpose alors $M\vec{e}_1$ *à* MT_n pour représenter l'orientation de $M\vec{\sigma}_1$ *par rapport à* $M\vec{e}_1$



X-3 Représentation géométrique des tenseurs de contraintes

Le tenseur des contraintes $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ peut être représenté par un point image P d'un espace cartésien orthonormé $O\sigma_1\sigma_2\sigma_3$



Précautions à prendre :

- Deux tenseurs qui ont les mêmes contraintes principales mais des directions principales différentes ont une même image
- L'ordre des σ_i est quelconque
- $\overline{\overline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ est représenté en réalité par 6 points image dans le cas général car la numérotation des σ_i est arbitraire.

Propriétés :

- L'image d'un tenseur sphérique est :

  la droite (Δ) *d'équation* : $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ *de vecteur unitaire* $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$: axe hydrostatique

- L'image d'un tenseur uniaxial est l'un des axes $O\sigma_i$
- L'image d'un déviateur est le plan $(\pi) \perp (\Delta)$, *passant par O, et d'équation* : $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$
- La décomposition d'un tenseur en un tenseur sphérique et un tenseur déviateur correspond à la projection perpendiculaire sur (Δ) *et* (π)
- Les projections des axes $O\sigma_i$ *sur* (π) donne les axes $O\sigma_i'$ faisant entre eux un angle de $2\pi/3$

Chapitre 4
Lois de conservation

I) Expression générale d'une loi de conservation

Une loi de conservation d'une grandeur physique peut s'énoncer de la manière générale suivante :

Dans un domaine (D), la variation d'une grandeur physique A au cours de l'intervalle de temps dt est égale à la somme de la quantité produite ou extraite à l'intérieur de (D) et de la quantité échangée à travers la frontière ∂D de (D)

Soit encore :

$$\boxed{\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{d}{dt}\int_D \mathbf{a}\, dv = \int_D \mathbf{a}_v\, dv + \int_{\partial D} \mathbf{a}_s\, ds}$$

$\mathbf{a}$: La densité volumique dans (D)

$\mathbf{a}_v$: La densité volumique produite ou extraite par unité de temps dans (D)

$\mathbf{a}_s$: La densité surfacique associée au flux de $\mathbf{A}$ échangé à travers ∂D

II) Loi de conservation de la masse

II-1) Forme intégrale

Pour tout domaine (D) d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement (donc constitué toujours des mêmes particules), sa variation de masse au cours du temps est nulle:

$$\boxed{\frac{dm}{dt} = 0} \quad \text{Comme } m = \int_D \rho\, dv \quad \text{alors : } \boxed{\frac{d}{dt}\int_D \rho\, dv = 0}$$

Par ailleurs, nous avons (Théorème de transport voir Annexe) :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\, dv = \int_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv + \int_{\partial D} \rho\, \vec{v}.\vec{n}\, ds$$

alors : $\boxed{\int_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv + \int_{\partial D} \rho\, \vec{v}.\vec{n}\, ds = 0}$

soit encore, en utilisant le théorème de la divergence : $\boxed{\int_D \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dv + \int_D div(\rho\, \vec{v})\, dv = 0}$

II-2) Forme locale

En utilisant le théorème de l'intégrale nulle, on obtient la forme locale de la loi de conservation de la masse (ou **équation de la continuité**):

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho\, \vec{v}) = 0}$$

De plus nous avons les relations :

$$div(\rho\, \vec{v}) = \rho\, div(\vec{v}) + \vec{v}.\overrightarrow{grad\, \rho} \quad et \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{grad\, \rho}$$

On obtient alors une autre forme de l'équation de continuité : $\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div(\vec{v}) = 0}$

Conséquence :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_D \rho f\, dv = \int_D \rho \frac{df}{dt}\, dv}$$ C'est le **théorème de Reynolds**

Démonstration :

Nous avons :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho f\, dv = \int_D \frac{\partial \rho f}{\partial t}\, dv + \int_{\partial D} \rho f\ \vec{v}.\vec{n}\, ds \text{ (d'après le théorème de transport)}$$

$$= \int_D \left[\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \underbrace{div(\rho f\ \vec{v})}_{\rho f div(\vec{v}) + \vec{v}.\overrightarrow{grad}(\rho f)} \right] dv$$

$$= \int_D \left[\frac{\partial \rho f}{\partial t} + \vec{v}.\overrightarrow{grad}(\rho f) + \rho f div(\vec{v}) \right] dv$$

$$= \int_D \left[\underbrace{\frac{d\rho f}{dt}}_{\rho \frac{df}{dt} + f\frac{d\rho}{dt}} + \rho f div(\vec{v}) \right] dv = \int_D \left[\rho \frac{df}{dt} + f\underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div(\vec{v})\right)}_{=0 (\text{équation de continuité})} \right] dv = \int_D \rho \frac{df}{dt}\, dv$$

Rappels :

Théorème de la divergence :

Si $\vec{A}$ champ vectoriel différentiable sur (D) alors : $\int_{\partial D} \vec{A}.\vec{n}\, ds = \int_{(D)} div(\vec{A})\, dv$

Si $\overline{\overline{A}}$ champ matriciel différentiable sur (D) alors :

$$\int_{\partial D} \overline{\overline{A}}\ \vec{n}\, ds = \int_{(D)} div(\overline{\overline{A}})\, dv\ ;\quad (\overrightarrow{div\overline{\overline{A}}})_i = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \quad (\text{que l'on note } A_{ij,j})$$

Théorème de l'intégrale nulle :

Soit φ fonction contiune sur un domaine (D). Si $\int_D \varphi(M)\, dv = 0\ \forall (D') \subset (D)$ *alors* $\varphi = 0$ *dans* (D)

III) Loi de conservation de la quantité de mouvement

III-1) Forme intégrale

Pour tout domaine (D) d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement, Le PFD s'écrit : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R}^{ext} \\ \dfrac{d\vec{\sigma}(O)}{dt} = \vec{M}^{ext}(O) \end{cases}}$

Avec $\begin{cases} \vec{p} = \int_D \rho \vec{V}(M,t)\,dv & \text{: quantité de mouvement domaine (D)} \\ \vec{\sigma}(O) = \int_D \vec{OM} \wedge \rho \vec{V}(M,t)\,dv & \text{: moment cinétique, au point O, du domaine (D)} \end{cases}$

et $\begin{cases} \vec{R}^{ext} = \int_D \vec{f}(M,t)\,dv + \int_{\partial D} \vec{T}(M,\vec{n})\,ds \\ \vec{M}^{ext}(O) = \int_D \vec{OM} \wedge \vec{f}(M,t)\,dv + \int_{\partial D} \vec{OP} \wedge \vec{T}(M,\vec{n})\,ds \end{cases}$

$\vec{f}(M,t)$ densité volumique de force au point M ; $\vec{T}(M,\vec{n})$: contrainte au point M

Ainsi le PFD s'écrit : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\int_D \rho \vec{V}(M,t)\,dv\right) = \int_D \vec{f}(M,t)\,dv + \int_{\partial D} \vec{T}(M,\vec{n})\,ds \\ \dfrac{d}{dt}\left(\int_D \vec{OM} \wedge \rho \vec{V}(M,t)\,dv\right) = \int_D \vec{OM} \wedge \vec{f}(M,t)\,dv + \int_{\partial D} \vec{OM} \wedge \vec{T}(M,\vec{n})\,ds \end{cases}}$

III-2) Forme locale

La RFD (forme intégrale) s'écrit : $\dfrac{d}{dt}\left(\int_D \rho \vec{v}(M,t)\,dv\right) = \int_D \vec{f}(M,t)\,dv + \int_{\partial D} \vec{T}(M,\vec{n})\,ds$

Comme $\dfrac{d}{dt}\int_D \rho f\,dv = \int_D \rho \dfrac{df}{dt}\,dv$ (Théorème de Reynolds)

Alors : $\int_D \rho \dfrac{d\vec{v}}{dt}\,dv = \int_D \vec{f}(M,t)\,dv + \int_{\partial D} \vec{T}(M,\vec{n})\,ds$

Soit encore : $\int_D \rho \dfrac{d\vec{v}}{dt}\,dv = \int_D \vec{f}(M,t)\,dv + \int_{\partial D} \overline{\overline{\sigma}}\,\vec{n}\,ds$

En utilisant le théorème de la divergence, nous aurons :

$$\int_D \rho \frac{d\vec{v}}{dt}\,dv = \int_D \vec{f}(M,t)\,dv + \int_D div\overline{\overline{\sigma}}\,dv \qquad \left((div\overline{\overline{\sigma}})_i = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \ (\textit{que l'on note } \sigma_{ij,j})\right)$$

D'où finalement : $\boxed{\rho \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + div\overline{\overline{\sigma}}}$ ou encore en notation indicielle : $\boxed{\rho \dfrac{dv_i}{dt} = f_i + \sigma_{ij,j}}$

Par ailleurs, l'équation des moments s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_D \vec{OM} \wedge \rho\vec{v}(M,t)\,dv\right) = \int_D \vec{OM} \wedge \vec{f}(M,t)\,dv + \int_{\partial D} \vec{OM} \wedge \vec{T}(M,\vec{n})dS$$

Soit encore d'après le théorème de Reynolds :

$$\int_D \rho \frac{d(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v})}{dt}\,dv = \int_D \vec{OM} \wedge \vec{f}\,dv + \int_{\partial D} \vec{OM} \wedge \vec{T}dv$$

Rappel :

$(\vec{A} \wedge \vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$

avec : $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = +1;\quad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1;$ *Tous les autres* ε_{ijk} *sont nuls*

Alors, nous aurons en notation indicielle:

$$\int_D \rho \frac{d(\varepsilon_{ijk} x_j v_k)}{dt}\,dv = \int_D \varepsilon_{ijk} x_j f_k\,dv + \int_{\partial D} \varepsilon_{ijk} x_j T_k\,ds$$

Comme $\int_{\partial D} \varepsilon_{ijk} x_j T_k\,ds = \int_{\partial D} \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl} n_l ds = \int_D (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl})_{,l}\,dv$

Alors : $\int_D \rho \frac{d(\varepsilon_{ijk} x_j v_k)}{dt}\,dv = \int_D \varepsilon_{ijk} x_j f_k\,dv + \int_D (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl})_{,l}\,dv$

Soit encore : $\rho \frac{d(\varepsilon_{ijk} x_j v_k)}{dt} = \varepsilon_{ijk} x_j f + (\varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl})_{,l}$

Puisque $\frac{d(x_j)}{dt} = v_j$; $\frac{d(v_k)}{dt} = \gamma_k$; $\quad x_{j,l} = \delta_{j,l}$

Alors $\underbrace{\rho\varepsilon_{ijk} v_j v_k}_{=0\ (\vec{v}\wedge\vec{v})_i} + \rho\varepsilon_{ijk} x_j \gamma_k = \varepsilon_{ijk} x_j f_k + \varepsilon_{ijk} x_j \sigma_{kl,l} + \varepsilon_{ijk}\sigma_{kl}$

Soit encore : $\varepsilon_{ijk} x_j \underbrace{\left[\rho\gamma_k - f_k - \sigma_{kl,l}\right]}_{=0\ (RI\text{-}D)} = \varepsilon_{ijk}\sigma_{kl}$

D'où : $\boxed{\varepsilon_{ijk}\sigma_{kl} = 0}$

pour $i = 1$: $\varepsilon_{123}\sigma_{32} + \varepsilon_{132}\sigma_{23} = 0 \Rightarrow \sigma_{32} = \sigma_{23}$

pour $i = 2$: $\varepsilon_{231}\sigma_{13} + \varepsilon_{213}\sigma_{31} = 0 \Rightarrow \sigma_{31} = \sigma_{13}$

pour $i = 3$: $\varepsilon_{312}\sigma_{21} + \varepsilon_{321}\sigma_{12} = 0 \Rightarrow \sigma_{21} = \sigma_{12}$

Donc finalement Le tenseur des contraintes est symétrique : $\boxed{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$

IV) Loi de conservation de l'énergie

IV-1 Premier Principe de la Thermodynamique

IV-1-1) Forme intégrale

Pour tout domaine (D) d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement, le PPT s'écrit : $\boxed{\frac{d\xi}{dt} = P_{ext} + \dot{Q}}$

ξ : Énergie totale de (D) ; $\xi = K + E$; K énergie cinétique de(D) ; E énergie interne de (D)

$P_{ext} = \frac{\delta W_{ext}}{\delta t}$: Puissance des efforts extérieurs

$\dot{Q} = \frac{\delta Q}{\delta t}$: Quantité de chaleur par unité de temps(ou taux de chaleur) apportée à (D)

Nous avons :

$\boxed{\xi = \int_D \rho (e + \frac{v^2}{2}) dv}$: e énergie interne massique (ou spécifique)

$$\boxed{P_{ext} = \int_D \vec{f}.\vec{v}\, dv + \int_{\partial D} \vec{T}(M;\vec{n}).\vec{v}\, ds}$$

$$\boxed{\dot{Q}(= \frac{\delta Q}{\delta t}) = \int_D r\, dv + \int_{\partial D} q\, ds = \int_D r\, dv - \int_{\partial D} \vec{q}.\vec{n}\, ds}$$

Pour la détermination de $\dot{Q}$, on suppose ici que les échanges de chaleur sont de deux types : surfacique par conduction et volumique par rayonnement

r : densité volumique du taux de chaleur reçu par rayonnement
q densité surfacique du taux de chaleur reçu par conduction :
$\vec{q}$ *tel que* : $q = -\vec{q}.\vec{n}$ vecteur densité de flux de chaleur (*le signe – provient du fait que q doit être positif si le système reçoit de la chaleur*)

Donc finalement, le premier principe de la thermodynamique donne :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\int_D \rho \left(e + \frac{v^2}{2}\right) dv\right) = \int_{\partial D} \vec{T}(M;\vec{n}).\vec{v}\, ds + \int_D \vec{f}.\vec{v}\, dv - \int_{\partial D} q\, ds + \int_D r\, dv}$$

IV-1-2) Forme locale

Le théorème de l'énergie cinétique permet d'écrire (voir fin du paragraphe):

$$\frac{d}{dt}\left(\int_D \rho \frac{v^2}{2}\, dv\right) = \int_D \vec{T}.\vec{v}\, ds + \int_D \vec{f}.\vec{v}\, dv - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv$$

Alors le PPT s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_D \rho e\, dv\right) = \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv + \int_{\partial D} q\, ds + \int_D r\, dv$$

$$\Rightarrow \int_D \rho \frac{de}{dt}\, dv = \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv \int_{\partial D} q\, ds + \int_D r\, dv \quad \text{(théorème de Reynolds)}$$

$$\Rightarrow \int_D \rho \frac{de}{dt}\, dv = \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv - \int_{\partial D} \vec{q}.\vec{n}\, ds + \int_D r\, dv$$

$$\Rightarrow \int_D \rho \frac{de}{dt}\, dv = \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv - \int_D div\vec{q}\, dv + \int_D r\, dv$$

D'où la forme locale du premier principe de la thermodynamique : $\boxed{\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ij}\, v_{i,j} - q_{i,i} + r}$

Autre écriture :

Nous avons : $\sigma_{ij}\, v_{i,j} = \sigma_{ij}\, D_{ij}$

En effet : $\sigma_{ij}\, v_{i,j} = \sigma_{ij}\, v_{j,i}$

Et puisque : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ *alors* : $\sigma_{ij}\, v_{i,j} = \sigma_{ij}\, v_{j,i}$

Donc $\sigma_{ij}\, v_{i,j} = \sigma_{ij} \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = \sigma_{ij}\, D_{ij}$ $(\overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}})$

Le premier principe de la thermodynamique peut alors s'écrire : $\boxed{\rho \frac{de}{dt} = \sigma_{ij}\, D_{ij} - q_{i,j} + r}$ ou encore $\boxed{\rho \frac{de}{dt} = \overline{\overline{\sigma}} : \overline{\overline{D}} - div\vec{q} + r}$

Théorème de l'énergie cinétique

Montrons que : $\frac{d}{dt}\left(\int_D \rho \frac{v^2}{2}\, dv\right) = \int_D \vec{T}.\vec{v}\, ds + \int_D \vec{f}.\vec{v}\, dv - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv$

Nous avons montré que le PFD s'écrit localement sous la forme : $\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \sigma_{ij,j}$

Multiplions ces équations par v_i :

$$\rho v_i \frac{dv_i}{dt} = f_i v_i + \sigma_{ij,j} v_i$$

La somme de ces équations donne alors : $\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \vec{f}.\vec{v} + \frac{\partial \sigma_{ij} v_i}{\partial x_j} - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

$$or\ \frac{\partial \sigma_{ij} v_i}{\partial x_j} = div(v_i \overrightarrow{\sigma_i})\ \ avec\ \overrightarrow{\sigma_i} = \begin{pmatrix} \sigma_{i1} \\ \sigma_{i2} \\ \sigma_{i3} \end{pmatrix}$$

Donc : $\rho \frac{d}{dt}(\frac{v^2}{2}) = \vec{f}.\vec{v} + div(v_i \overrightarrow{\sigma_i}) - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$

L'intégration donne : $\int_D \rho \frac{d}{dt}(\frac{v^2}{2}) dv = \int_D \vec{f}.\vec{v} dv + \int_D div(v_i \overrightarrow{\sigma_i})\, dv - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv$

Soit encore : $\frac{d}{dt}(\int_D \rho \frac{v^2}{2} dv) = \int_D \vec{f}.\vec{v}\ dv + \int_{\partial D} (v_i \overrightarrow{\sigma_i}.\vec{n})\, ds - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv$ (théorèmes de Reynolds et de la divergence)

L'intégrale : $\int_D (v_i \overrightarrow{\sigma_i}.\vec{n})\, ds$ peut se mettre sous la forme : $\int_{\partial D} v_i \sigma_{ij} n_j\, ds = \int_{\partial D} v_i T_i\, ds = \int_{\partial D} \vec{T}.\vec{v}\ ds$

D'où : $\boxed{\frac{d}{dt}(\int_D \rho \frac{v^2}{2} dv) = \int_D \vec{f}.\vec{v}\, dv + \int_{\partial D} \vec{T}.\vec{v}\, ds - \int_D \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv}$ CQFD

Interprétation :

$\frac{d}{dt}(\int_D \rho \frac{v^2}{2} dv) = \frac{dK}{dt}$: Variation temporelle de l'énergie cinétique de (D)

$$\left.\begin{array}{l} \int_D \vec{f}.\vec{v} dv\ : Puissance\ des\ forces\ de\ volume \\ \int_{\partial D} \vec{T}.\vec{v} ds\ : Puissance\ des\ forces\ de\ surface \end{array}\right\} \text{Puissance des forces extérieures}$$

$-\int_D \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dv$: Puissance des forces intérieures

ANNEXE

Dérivée d'une intégrale de volume ($I = \int_{(D)} b(\vec{x},t)dv$)

1ère démonstration :

Comme $dv = \det \overline{\overline{F}}dV = JdV$

Alors : $I = \int_{(D)} b(\vec{x},t)dv = \int_{(D)} \overline{B(\vec{X},t)}JdV$ *avec* $B(\vec{X},t) = b(\vec{x}(\vec{X}),t)$

$$\frac{dI}{dt} = \int_{(D)} (\frac{dB}{dt}J + B\frac{dJ}{dt})dV$$

Comme : $\frac{1}{J}\frac{dJ}{dt} = div\vec{v}$ (En effet, nous avons montré *(paragraphe* IX) que :

$\frac{1}{dv}\frac{d(dv)}{dt} = div\vec{v}$ .Par ailleurs $dv = \det \overline{\overline{F}}dV = JdV$ D'où : $\frac{1}{J}\frac{dJ}{dt} = div\vec{v}$)

Alors $\frac{dI}{dt} = \int_{(D)} (\frac{dB}{dt}J + B\,J\,div\vec{v})dV$

Soit encore en description eulérienne :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\int_{(D)} b(\vec{x},t)dv) = \int_{(D)} (\frac{db}{dt} + \cancel{b\ div\vec{v}})dv}$$

2ème forme :

Nous avons $\frac{db}{dt} + b\ div\vec{v} = \frac{\partial b}{\partial t} + \overrightarrow{grad}\,b.\vec{v} + b\ div\vec{v}$

Et puisque $divb\vec{v} = b\ div\vec{v} + \overrightarrow{grad}\,b.\vec{v}$

Alors $\frac{db}{dt} + b\ div\vec{v} = \frac{\partial b}{\partial t} + divb\vec{v}$

Nous avons alors : $\boxed{\frac{d}{dt}(\int_{(D)} b(\vec{x},t)dv) = \int_{(D)} (\frac{\partial b}{\partial t} + divb\vec{v})dv}$

3ème forme :

Nous avons $\int_{(S)} b\vec{v}.\vec{n}ds = \int_{(D)} \cancel{divb\vec{v}}dv$ (Théorème d'Ostogradski)

Alors : $\boxed{\frac{d}{dt}(\int_{(D)} b(\vec{x},t)dv) = \int_{(D)} \frac{\partial b}{\partial t}dv + \int_{(S)} b\,\vec{v}.\vec{n}ds}$

2ème démonstration :

Soit (D_t) le domaine à l'instant t

Soit $(D_{t+\Delta t})$ le domaine à l'instant $t+\Delta t$

$$\frac{dI}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t}$$

Faisons la décomposition suivante :

$(D_t) = (D_I) + (D_{II})$

$(D_{t+\Delta t}) = (D_{II}) + (D_{III})$

Alors

$$I(t) = \int_{D_t} b(\vec{x},t)dv = \int_{D_I} b(\vec{x},t)\,dv + \int_{D_{II}} b(\vec{x},t)\,dv$$

$$I(t+\Delta t) = \int_{D_{t+dt}} b(\vec{x},t+\Delta t)dv = \int_{D_{II}} b(\vec{x},t+\Delta t)\,dv + \int_{D_{III}} b(\vec{x},t+\Delta t)\,dv$$

D'où :

$$I(t+\Delta t) - I(t) = \int_{D_{II}} b(\vec{x},t+\Delta t)\,dv - \int_{D_{II}} b(\vec{x},t)\,dv + \int_{D_{III}} b(\vec{x},t+\Delta t)\,dv - \int_{D_I} b(\vec{x},t)\,dv$$

$$= \int_{D_{II}} (b(\vec{x},t+\Delta t) - b(\vec{x},t))dv + \int_{D_{III}} b(\vec{x},t+\Delta t)\,dv - \int_{D_I} b(\vec{x},t)\,dv$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \int_{D_{II}} \frac{(b(\vec{x},t+\Delta t) - b(\vec{x},t))}{\Delta t} dv + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{D_{III}} b(\vec{x},t+\Delta t)dv + \int_{D_I} b(\vec{x},t)\,dv\right]$$

Or $\lim_{\Delta t \to 0} \int_{D_{II}} \frac{(b(\vec{x},t+\Delta t) - b(\vec{x},t))}{\Delta t} dv = \int_{D_t} \frac{\partial b(\vec{x},t)}{\partial t} dv$ $\quad (car\ lorsque\ \Delta t \to 0\ \ D_{II} \to D_t)$

Par ailleurs : $Pour\ \ D_{III}$: $dv = d\vec{x}.\vec{n}\,ds = \left(\vec{v}\Delta t\right).\vec{n}\,ds$ et

$Pour\ \ D_I$: $dv = -d\vec{x}.\vec{n}\,ds = -\left(\vec{v}\,\Delta t\right).\vec{n}\,ds$

Alors :

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{I(t+\Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \int_{D_t} \frac{\partial b(t)}{\partial t} dv + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\int_{D_{III}} b(\vec{x},t+\Delta t)\vec{v}.\vec{n}ds\Delta t + \int_{D_I} b(\vec{x},t)\vec{v}.\vec{n}ds\Delta t\right]$$

Or lorsque $lorsque\ \Delta t \to 0$; $b(\vec{x},t+\Delta t) \to b(\vec{x},t)$ et $D_I \cup D_{III} \to S_t$

Alors, nous avons finalement : $\boxed{\frac{dI}{dt} = \int_{D_t} \frac{\partial b(\vec{x},t)}{\partial t} dv + \int_{S_t} b(\vec{x},t)\vec{v}.\vec{n}ds}$