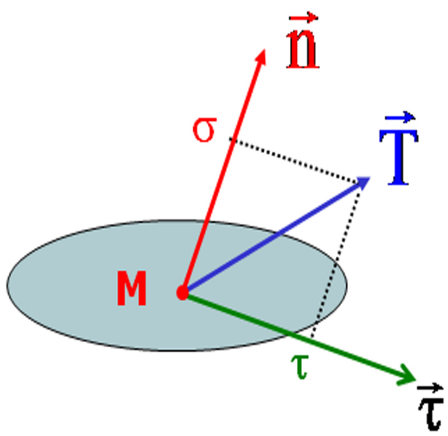
Les TD avec solution

MMC



$$\vec{T}(M,\vec{n}) = \sigma\,\vec{n} + \tau\,\vec{t}$$

متمنياتنا للجميع بالتوفيق والنجاح

2016/2017

www.clubnajah.com

Clubnajah2013@gmail.com www.facebook.com/succes.club

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2015/2016
Filière SMP6

Mécanique des milieux continus

TD1

Exercice 1 : Montrer qu'en un point d'un milieu continu où deux contraintes principales sont nulles, la direction du vecteur contrainte est indépendante de la normale à l'élément de surface considérée

Exercice 2 : Soit le tenseur des contraintes défini par : $\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ MPa

au point M dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

1 – Déterminer la composante normale et la composante tangentielle du vecteur contrainte en M suivant le plan de normale $\vec{x}$, puis suivant le plan de normale $\vec{n}(1,1,1)$.

2 - Quelles sont les contraintes principales et les directions principales des contraintes ?

Exercice 3 : L'état des contraintes d'un milieu continu est défini dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ par :

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \ ; \ \sigma_{12} = \tau$$

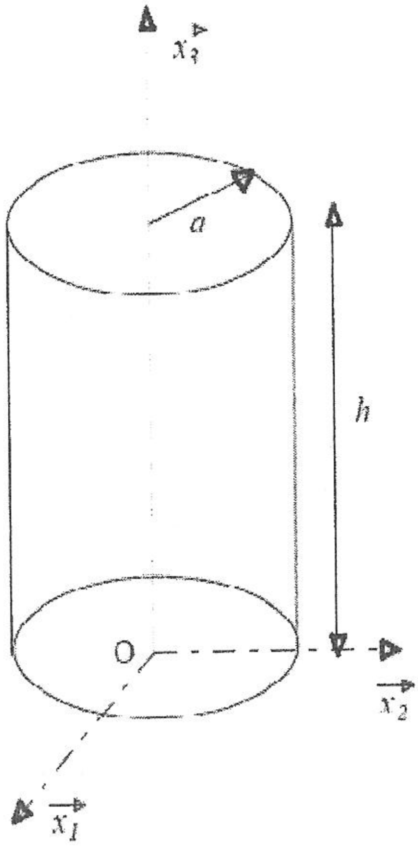
a) Calculer la contrainte normale et la contrainte tangentielle par rapport aux directions suivantes :

$$\overrightarrow{e'_1} = \frac{\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \overrightarrow{e'_2} = \frac{-\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \overrightarrow{e'_3} = \overrightarrow{e_3}$$

b) Retrouver ces résultats en calculant les contraintes principales et les directions principales des contraintes

Exercice 4

Etat de contraintes dans un cylindre



L'état de contraintes dans le cylindre ci-contre est de la forme:

$$\forall(M)\,\overline{\overline{\sigma(M)}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{(\vec{x_1},\vec{x_2},\vec{x_3})}$$

avec :

$$\sigma_{13}=-\frac{P}{a^2}\left(7x_1^2+x_2^2-k_1a^2\right)$$

$$\sigma_{23}=-\frac{6P}{a^2}x_1x_2$$

$$\sigma_{33}=-k_2\frac{P}{a^2}(h-x_3)x_1$$

Dans ces expressions. P représente une constante positive connue et k_1 et k_2 sont deux constantes à déterminer.

Le cylindre est en équilibre statique, sa surface latérale n'est soumise à aucune force extérieure et les forces de volume sont négligeables.

1- A partir des conditions aux limites et des équations d'équilibre, déterminer les valeurs de k_1 et k_2.

2- Donner l'expression du tenseur des contraintes dans la base principale pour $M_1(a,0,h)$ et $M_2(0,0,h)$. Déterminer les directions principales. Tracer le tricercle de Mohr en M_2.

3- En tout point $M(x_1,x_2,h)$, donner le vecteur contrainte dans la direction $\vec{x_3}\left(\overrightarrow{T(M,\vec{x_3})}\right)$. Déterminer les éléments de réduction en $G_h\equiv M_2$ du torseur équivalent à l'action des contraintes sur la face $x_3=h$.

3) calculer la force exercer sur la surface $x_3=h$

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2015/16
Filière: SMP6

TD 2 de MMC

Exercice 1 :

On considère le champ de déplacement défini dans le repère orthonormé direct (O; $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$) par : $u_1 = x_2x_3$, $u_2 = x_1x_3$, $u_3 = x_1x_2$

1. Déterminer le tenseur des déformations au point $M(x_1, x_2, x_3)$
2. On considère les points D_0 (1,-1,0) et C_0 (1, 1, 0), déterminer la dilatation en D_0 dans la direction définie par le vecteur $\overrightarrow{D_0C_0}$
3. Déterminer les déformations et les directions principales des déformations au point D_0
4. On suppose que le milieu est continu et élastique, déterminer dans le repère principale le tenseur des contraintes en D_0

Exercice 2 :

On considère en petites déformations le champ de déplacement suivant :

$U_1 = \alpha x_1$ $\quad U_2 = -\mu x_2$ $\quad U_3 = -\mu x_3$

a. Comment se déforme un cube de coté 1.
b. Déterminer le tenseur gradient de déplacement, le tenseur des déformations, le tenseur rotation et la variation relative du volume.
c. Donner l'expression de l'allongement unitaire dans la direction $\vec{n}$ ($\vec{n}$ est un vecteur unitaire faisant un angle θ avec l'axe ox).
d. Donner l'expression de la demi distorsion relativement aux vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{t}$ ($\vec{t}$ est un vecteur unitaire directement perpendiculaire à $\vec{n}$).
e. Déterminer la partie sphérique et déviatrice du tenseur des déformations.

Exercice 3 :

On considère une poutre droite d'axe $(O,\vec{e_1})$ de section rectangulaire (hauteur 2h, épais. 2b). Cette poutre est encastrée dans un massif à l'abscisse $x_1 = 0$. L'extrémité libre est la seule supportant un chargement. D'autre part on suppose que l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions de la poutre et qu'en conséquence, on peut faire l'hypothèse d'un état plan de contrainte

$$\sigma_{11} = \frac{P}{I}(l - x_1)x_2$$

$$\sigma_{22} = 0 \qquad \text{avec } I = \frac{4}{3}bh^3$$

$$\sigma_{12} = -\frac{P}{2I}(h^2 - x_2^{\,2})$$

1. Déterminer les forces de volume vérifiant l'équilibre de la poutre
2. Déterminer les forces sur les faces (x_2=h), (x_2=- h) et (x_1= l).
3. Représenter le chargement
4. Déterminer le tenseur des déformations
5. Calculer le champ des déplacements

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2015/16
Filière: SMP6

TD 3 de MMC

Exercice 1 :

Considérons une poutre (figure 2) sollicitée à ces extrémités par des moments constants égaux à M.

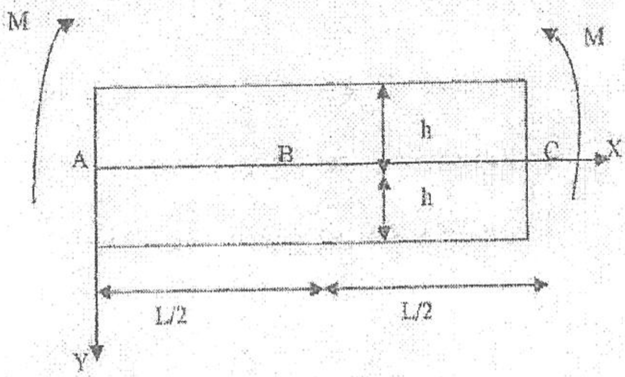


Figure 2

Le tenseur des déformations (petites perturbations) correspondant est donné par :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{M}{EI}y \qquad \varepsilon_{yy} = -\upsilon\frac{M}{EI}y \qquad et \qquad \varepsilon_{xy} = 0$$

E, I et υ sont des constantes positives.

1. Ce champ permet-il de calculer les déplacements ?.
2. Calculer le vecteur déplacement en considérant que la poutre est encastrée en A et simplement appuyée en C.
3. Déterminer l'équation de la flèche de la fibre neutre et les déplacements des points A, B, C.

Exercice 2

On considère une sphère pleine de rayon R constituée d'un matériau homogène de masse volumique ρ. Le comportement est élastique, linéaire et isotrope de modules de Lamé λ et μ. On suppose qu'elle est soumise à son champ de gravitation propre ce qui revient à admettre la présence de forces volumiques radiales qui, par unité de masse, s'expriment par :

$$\vec{F} = -\frac{g}{R}x_r\vec{e_r}$$

g représentant l'intensité du champ de pesanteur à la surface de la sphère

On admet qu'il n'y a aucun chargement sur la surface extérieure et que le déplacement du centre de la sphère est nul.
On se propose de calculer les déformations et les contraintes en partant d'un champ déplacement de la forme :

$$\overrightarrow{u(M)} = h(r)x_i\vec{e_i} \qquad h \text{ est une fonction de r}$$

1- Justifier la forme donnée au champ de déplacement.
2- Calculer le tenseur déformation ε
3- En utilisant les équations de Navier, déterminer l'équation différentielle permettant de calculer la fonction h. Montrer qu'une solution peut être de la forme :

$$h(r) = -\frac{\rho g}{10}\frac{1}{\lambda+2\mu}\left(B - \frac{r^2}{R}\right)$$

4- Calculer la constante B.
5- Expliciter le champ de déformation et le champ de contrainte. Analyser, en fonction de r, l'évolution de la contrainte radiale normale σ_{rr}. Donner la valeur de la trace du tenseur des contraintes lorsque $r = 0$.

Exercice 3

On considère un corps cylindrique de rayon R et de hauteur H. Ce corps repose sur un plan horizontal(O; $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}$) , On s'intéresse aux déformations élastiques de ce corps dues à son propre poids. Pour cela on fait l'hypothèse suivante sur le déplacement d'un point :

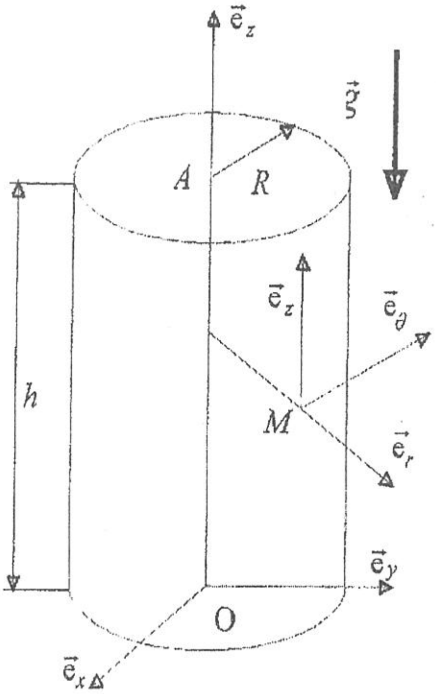
$$\overrightarrow{u(M)} = u_r\overrightarrow{e_r} + u_z\overrightarrow{e_z} \quad \text{avec} \begin{cases} u_r = u_r(r) \\ u_z = u_z(z) \end{cases}$$

1- Déterminer le tenseur déformation en fonction de u_r, u_z, r et z.
2- Déterminer le tenseur de contraintes en fonction des coefficients de Lamé et de u_r, u_z, r et z.
3- Ecrire les équations d'équilibre et les intégrer.

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2014/15
Filière: SMP6

Mécanique des Milieux Continus
Contrôle 2
(Durée 1H)



Un cylindre de révolution homogène a pour rayon R, pour hauteur h et $(O;\vec{e}_z)$ pour axe vertical ascendant. Il est placé dans le champ de pesanteur. La surface latérale du cylindre n'est pas chargée. Il en est de même pour la section droite inférieure ($z = 0$). Dans la section droite supérieure ($z = h$), le domaine est encastré au point A ($x = y = 0$). On utilise les coordonnées cylindriques.

Le champ de déplacement, en tout point du cylindre, est donné par :

$$\begin{cases} U_r = A\,z\,r \\ U_\theta = 0 \\ U_z = B\,z^2 + C\,r^2 + D \end{cases}$$

A, B, C et D sont des constantes physiques.

1- Déterminer, en coordonnées cylindriques, le tenseur des déformations et celui des contraintes.

2- Déterminer les constantes physiques A, B, C et D en fonction de la masse volumique du matériau ρ, des coefficients λ, μ, de l'accélération de la pesanteur g et de la hauteur h du cylindre.

3- Montrer que σ_{zz} s'exprime d'une manière simple.

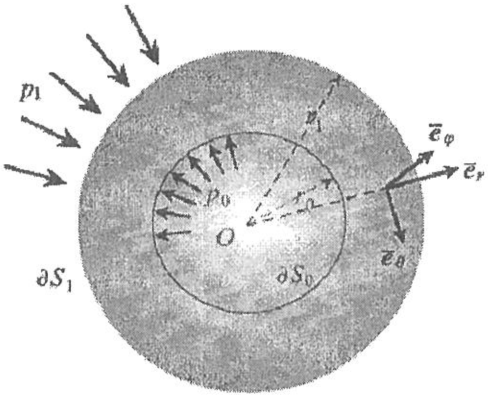
UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2015/2016
Filière SMP6

Mécanique des milieux continus
Contrôle (Durée 1h)

Équilibre élastique d'une sphère creuse sous pression

On considère une enveloppe sphérique de centre O et de rayons intérieur et extérieur r_0 et r_1. On se place dans un système de coordonnées sphériques ($Or\theta\varphi$). Les données sur les contours ne portent que sur les forces surfaciques (pas de forces de volume) :



Le but de l'étude est de calculer la solution du problème d'élasticité c'est-à-dire de déterminer les champs solutions $\vec{u}(M)$, $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ et $\bar{\bar{\sigma}}(M)$ en tout point M du solide. C'est la méthode du déplacement qui est choisie.

On prend un champ de déplacement de la forme : $\vec{u}(M) = u_r(r)\vec{e}_r$

1. En appliquant les équations de Navier, montrer que : $u_r(r) = ar + \frac{b}{r^2}$
2. Déterminer le tenseur des déformations $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$
3. Déterminer le tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}(M)$
4. Montrer que les composantes de $\bar{\bar{\sigma}}$(M) s'écrivent :
$$\sigma_{rr} = A - \frac{2B}{r^3}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\phi\phi} = A + \frac{B}{r^3}, \quad autres\ \sigma_{ij} = 0$$
5. Déterminer les constantes A et B

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r};\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta\right)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}\right) \quad \varepsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}u_\phi\right)$$

$$\varepsilon_{r\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r}\right)$$

$$div\ \vec{V} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\Phi}\frac{\partial(\sin\Phi\ V_\Phi)}{\partial \Phi} + \frac{1}{r\sin\Phi}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta}$$

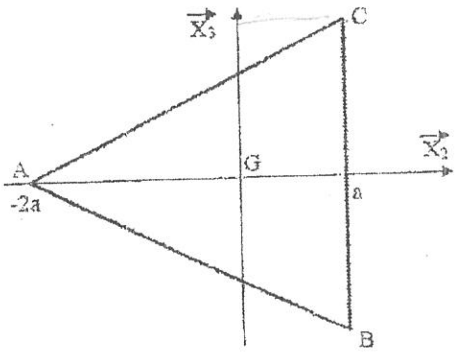
UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2014/15
Filière: SMP6, parcours : mécanique

TD5 d'Elasticité

Exercice 1

On étudie la torsion d'une poutre dont la section droite représentée ci-contre est un triangle équilatéral.



Suite à l'étude théorique de St Venant, on envisage comme solution éventuelle la fonction :

$$\varphi(x_2, x_3) = m(x_2 - a)(x_2^{\,2} - 3x_3^{\,2} + 4ax_2 + 4a^2)$$ fct d'Airy.

1- Montrer que la condition aux limites, $\varphi = 0$ est satisfaite sur le contour de la section.

2- Calculer les contraintes et vérifier les équations d'équilibre

Exercice 2

On étudie une poutre droite, de section rectangulaire étroite, en état plan de contraintes.

On note E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau (comportement

élastique linéaire

La poutre précédente, encastrée dans la section définie par x= - l/2 est sollicitée en cisaillement. L'état de contrainte en un point quelconque est alors de la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1- En l'absence de toute force volumique, quelle est la forme des fonctions d'Airy possible?

2- En prenant φ (x , y) = a x y , donner le champ de déplacement dans la poutre.

Exercice 3 : $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}^{\,0})$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \; ; \quad \sigma_{12} = \tau$$

a) σ_m, τ_m ?

* $\vec{e_1}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2}$

* $\vec{e_2}' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2}$

* $\vec{e_3}' = \vec{e_3}$

* $\vec{e_1}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2}$

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(M, \vec{e_1}') = \overline{\overline{\sigma}}(M)\,\vec{e_1}' = \begin{pmatrix} \tau\sqrt{2}/2 \\ \tau\sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_m = \vec{T}(M, \vec{e_1}')\,\vec{e_1}' = \left(\frac{\tau\sqrt{2}}{2}, \frac{\tau\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\sigma_m = \tau}$$

$$\tau_m = \sqrt{|\vec{T}(M, \vec{e_1}')|^2 - \sigma_m^2} = \sqrt{\tau^2 - \tau^2} = 0$$

$$\boxed{\tau_m = 0}$$

$$\begin{cases} \sigma_m = \tau \\ \tau_m = 0 \end{cases}$$

* $\vec{e_2}' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{e_2}$

$$\begin{cases} \sigma_m = -\tau \\ \tau_m = 0 \end{cases}$$

* $\vec{e'_3} = \vec{e_3}$

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e'_3} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{T}(M, \vec{e'_3}) = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} \sigma_M = 0 \\ \tau_M = 0 \end{cases}$$

b) Contraintes et directions principale.

$$\det(\bar{\bar{\sigma}}(M) - \sigma I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\sigma & \tau & 0 \\ \tau & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 = -\sigma(\sigma^2 - \tau^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \tau \\ \sigma_2 = -\tau \\ \sigma_3 = 0 \end{cases}$$

* $\sigma_1 = \tau \longrightarrow \vec{u_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

$$\bar{\bar{\sigma}}(M)\, \vec{u_1} = \sigma_1 \vec{u_1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \alpha_1 \\ \tau \beta_1 \\ \tau \gamma_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \tau \beta_1 = \tau \alpha_1 \\ \tau \alpha_1 = \beta_1 \tau \\ 0 \gamma_1 = \tau \gamma_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \gamma_1 = 0 \end{cases}$$

$\vec{u_1}\,(\alpha_1, \alpha_1, 0)$

$|\vec{u_1}|^2 = 1 \Rightarrow 2\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{u_1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \equiv \vec{e_1'}$

* $\sigma_2 = -\tau \longrightarrow \vec{u_2}\,(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

$$\begin{cases} \tau\beta_2 = -\tau\alpha_2 \\ \tau\alpha_2 = -\tau\beta_2 \\ 0 = -\tau\gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_2 = -\beta_2 \\ \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

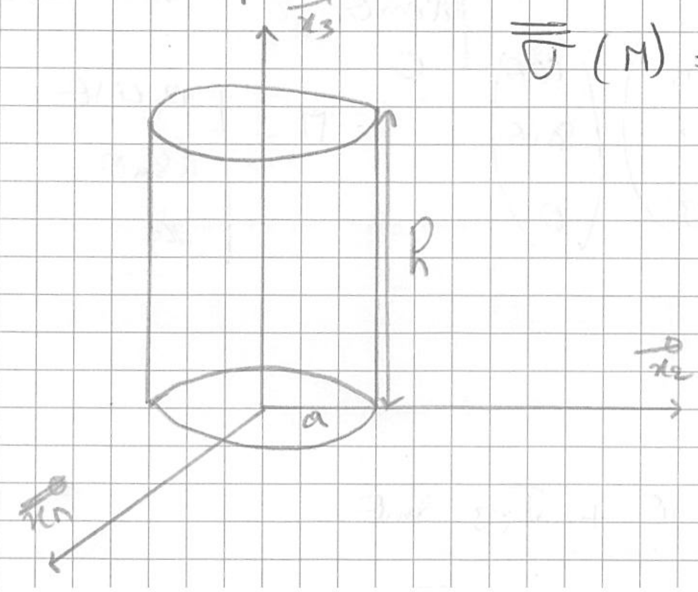
$\vec{u_2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \equiv \vec{e_2'}$

* $\sigma_3 = 0 \longrightarrow \vec{u_3}\,(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) \Rightarrow \begin{cases} \tau\beta_3 = 0 \\ \tau\alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 \text{ qq} \end{cases}$

$\vec{u_3}\,(0, 0, 1) \equiv \vec{e_3'}$

Rque: puisque les composantes d'un vecteur (normale $\neq$ de zéro et la composante tangentielle est nulle), Donc la direction de cette vecteur est principa

Exercice 4:



$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$\sigma_{13} = -\frac{p}{a^2}\left(7x_1^2 + x_2^2 - k_1 a^2\right)$

$\sigma_{23} = -\frac{6}{a^2}\, p\, x_1 x_2$

$\sigma_{33} = -k_2 \frac{p}{a^2}(h - x_3)\, x_1$

Equations d'équilibre

$$\sigma_{ij,j} + \underbrace{\rho f_i}_{=0} = 0 \Rightarrow \sigma_{ij,j} = 0$$

$$i=1 \quad \cancel{\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2}} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0$$

$$i=2 \quad \cancel{\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1}} + \cancel{\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$$

$$i=3 \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0$$

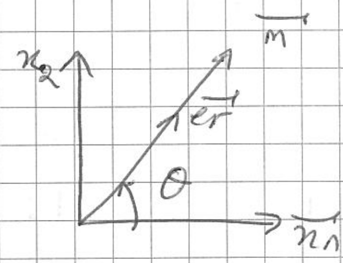
$$* \quad \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{14}{\cancel{a^2}}\cancel{P}\,\cancel{x_1} - \frac{6\cancel{P}}{\cancel{a^2}}\cancel{x_1} + \frac{k_2 \cancel{P}}{\cancel{a^2}}\cancel{x_1} = 0$$

$$\Rightarrow k_2 = 14 + 6 = 20. \qquad \boxed{k_2 = 20}$$

Conditions aux limites :

$$d\vec{f}^{\,0} = \vec{T}^0(M, \vec{m})\, dS$$



$$\vec{T}^0(M, \vec{m}) = \bar{\bar{\sigma}}(M)\, \vec{m} \qquad \vec{m} \begin{vmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{vmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ x_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{13}\cos\theta + \sigma_{23}\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$\vec{T}(M,\vec{m}) = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{13}\cos\theta + \sigma_{23}\sin\theta \end{vmatrix}$$

$$0 = -\frac{P}{a^2}\left(7a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - k_1 a^2\right)\cos\theta - \frac{6P}{a^2}a^2\cos\theta\sin^2\theta$$

$\forall \theta$

$\theta = 0 \Rightarrow \boxed{k_1 = 7}$

2°/ Contraintre et direction principales au pt M_2 (0,0,

$$\bar{\bar{\sigma}}(M_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 7P \\ 0 & 0 & 0 \\ 7P & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\left(\sigma(M_2) - \sigma I\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 7P \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 7P & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\sigma\left[\sigma^2\right] + 7P\left[7P\sigma\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\sigma\left(\sigma^2 - (7P)^2\right) = 0$$

$\sigma_1 = -7P \longrightarrow \vec{u}_1 \rightarrow \left(\sqrt{2}/2, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\sigma_2 = 0 \longrightarrow \vec{u}_2 = \vec{x}_2$: direction principal

$\sigma_2 = 0$

$\sigma_3 = 7P$

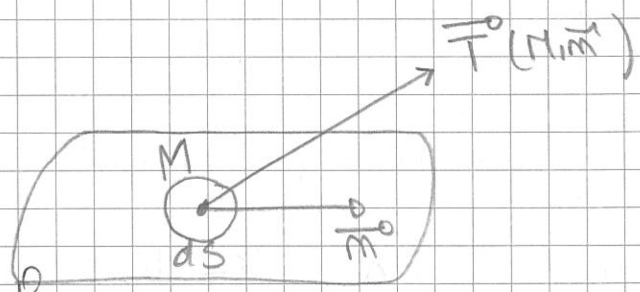
* $\sigma_1 = -7P \Rightarrow \vec{u}_1 \; (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 7P \\ 0 & 0 & 0 \\ 7P & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = -7P\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 7P\gamma_1 = -7P\alpha_1 \\ 0\beta_1 = -7P\beta_1 \\ 7P\alpha_1 = -7P\gamma_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\gamma_1 \\ \vec{u}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}, \quad \vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$$

$(M_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ $\quad \bar{\bar{\sigma}}(M_2) = \begin{pmatrix} -7P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7P \end{pmatrix}$

Exercice 1 :



Repere principale :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(M,\vec{m}) = \bar{\bar{\sigma}}(M)\,\vec{m}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \left| \begin{matrix} \sigma_1\,\alpha_1 \\ \sigma_2\,\alpha_2 \\ \sigma_3\,\alpha_3 \end{matrix} \right.$$

* Si $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$

$$\vec{T}(M,\vec{m}) = \alpha_3\,\sigma_3\,\vec{e_3} \Rightarrow \vec{T}(M,\vec{m}) \,/\!/\, \vec{e_3}$$

* Si $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$

$$\vec{T}(M,\vec{m}) = \alpha_2\,\sigma_2\,\vec{e_2} \Rightarrow \vec{T}(M,\vec{m}) \,/\!/\, \vec{e_2}$$

Exercice 2 :

On a : $\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ MPa $\quad (\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

1°/ σ_m et τ_m ?

- $dS \rightarrow \vec{m} = \vec{x}$
- $dS \rightarrow \vec{m} = (1,1,1)$

* $\vec{T}(M,\vec{x}) = \bar{\bar{\sigma}}(M)\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

• $\vec{T}(M,\vec{x}) = \vec{\sigma_x} + \vec{\tau_x}$

$$\begin{cases} \sigma_x = \vec{T}(M,\vec{x}) \cdot \vec{x} \\ \tau_x = \vec{T}(M,\vec{x}) \, \vec{t} \end{cases}$$

et on a : $|\vec{T}(M,\vec{x})|^2 = \sigma_x^2 + \tau_x^2$

• $\sigma_x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \text{ MPa}.$

• $\tau_x = \sqrt{|\vec{T}(M,\vec{x})|^2 - \sigma_m^2} = \sqrt{26-25} = 1 \text{ MPa}.$

* $\vec{m} = (1,1,1)$ n'est pas unitaire.

$\Rightarrow \vec{m}_{unitaire} = \dfrac{\vec{m}}{|\vec{m}|}$

$\Rightarrow \vec{m_u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\vec{T}(M,\vec{m_u}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/3 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ MPa}.$

* $\sigma_{mu} = \vec{T}(M,\vec{m_u}) \cdot \vec{m_u}$

$= \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}/3 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = 4 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{13}{3}$

$= 4{,}32 \text{ MPa}.$

• $\tau_{mu} = \sqrt{|\vec{T}(M,\vec{m_u})|^2 - \sigma_m^2}$

$= 2{,}16 \text{ MPa}.$

2) • Les contraintes principales :

$$\det \left| \overline{\overline{\sigma}}(M) - \sigma I \right| = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 5-\sigma & 0 & 1 \\ 0 & 1-\sigma & 0 \\ 1 & 0 & 5-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\sigma)\left[(5-\sigma)^2 - 1\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-\sigma = 0 \\ 5-\sigma = \mp 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 1 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = 4 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 6 \text{ MPa}. \end{cases}$$

* Directions principales:

$$\sigma_i \longrightarrow \vec{u_i} \qquad \overline{\overline{\sigma}}(M)\vec{u} = \sigma_i \vec{u}$$

* $\sigma_1 = 1 \text{ MPa} \longrightarrow \vec{u_1}(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \gamma_1 = 0 \\ \beta_1 \ \text{qlq}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\alpha_1 + \gamma_1 = \alpha_1 \\ \beta_1 = \beta_1 \\ \alpha_1 + 5\gamma_1 = \gamma_1 \end{cases}$$

$$\vec{u_1}\,(0, \beta_1, 0) \Rightarrow \|\vec{u_1}\| = 1 \Rightarrow \beta_1 = 1.$$

$$\vec{u_1} = (0, 1, 0).$$

* $\sigma_2 = 4 \text{ MPa} \Rightarrow \vec{u_2}(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.

$$\begin{cases} 5\alpha_2 + \gamma_2 = 4\alpha_2 \\ \beta_2 = 4\beta_2 \\ \alpha_2 + 5\gamma_2 = 4\gamma_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_2 = 0 \\ \gamma_2 = -\alpha_2 \end{cases}$$

$$\vec{u_2}\,(\alpha_2, 0, -\alpha_2) \longrightarrow |\vec{u_2}|^2 = 1 = 2\alpha_2^2$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{u_2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

* $\sigma_3 = 6\ \text{MPa} \Rightarrow \vec{u_3}\,(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$.

$$\begin{cases} 5\alpha_3 + \gamma_3 = 6\alpha_3 \\ \beta_3 = 6\beta_3 \\ 1\alpha_3 + 5\gamma_3 = 6\gamma_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_3 = 0 \\ \gamma_3 = \alpha_3 \end{cases}$$

$$\vec{u_3} = (\alpha_3, 0, \alpha_3) \Rightarrow \alpha_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

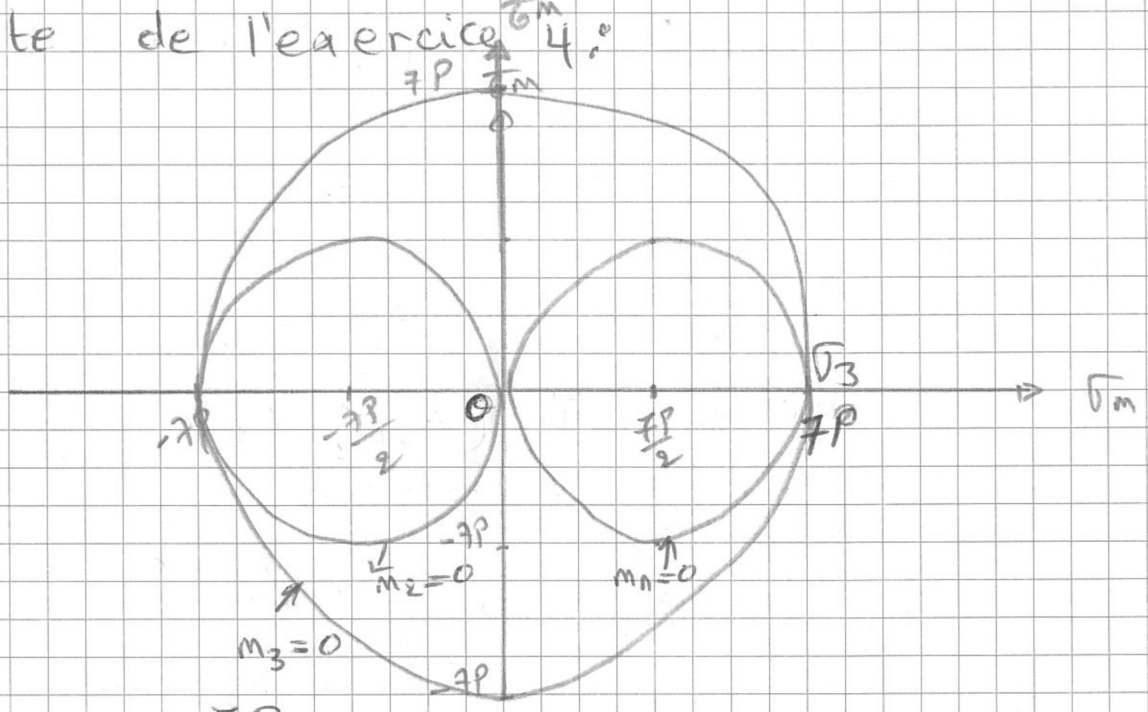
$$\vec{u_3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

* Autre méthode:

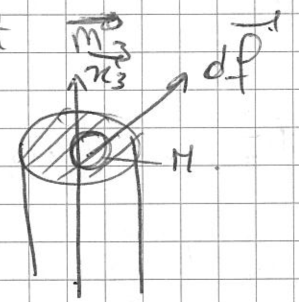
$$\vec{u_3} = \vec{u_1} \wedge \vec{u_2} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{vmatrix}$$

$$(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}) \longrightarrow \overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{MPa}.$$

Suite de l'exercice 4 :



$|\tau_m|_{max} = 7P \longrightarrow \theta = \mp \frac{\pi}{4}$ et



3°/ $M \in S\ (x = \ell)$

$M = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ell \end{vmatrix}$

$$\vec{F} = \int_S \vec{df} = \int_S \vec{T}(M, \vec{x_3})\, dS$$

$$\vec{T}(M, \vec{x_3}) = \bar{\bar{\sigma}}(M)\, \vec{x_3}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{T}(M, \vec{x_3}) = \sigma_{13}\, \vec{x_1} + \sigma_{23}\, \vec{x_2}$$

$$\vec{F} = F_1\, \vec{x_1} + F_2\, \vec{x_2}$$

avec $F_1 = \int_S \sigma_{13}\, dS$

$F_2 = \int_S \sigma_{23}\, dS$

$$F_2 = \int_S -\frac{6P}{a^2}\, x_1\, x_2 \, dS \qquad \begin{cases} x_1 = r\cos\theta \\ x_2 = r\sin\theta \end{cases}$$

$$F_2 = -\frac{6P}{a^2}\int_0^a \int_0^{2\pi} r^3 \sin\theta\cos\theta \, dr\, d\theta . \qquad dS = r\, dr\, d\theta .$$

$$= -\frac{6P}{a^2}\int_0^a r^3\, dr \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= -\frac{6P}{a^2}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a \times \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sin 2\theta \, d\theta}_{=0}$$

$$= -\frac{6\pi\, a^4}{4a^2} \times 0$$

$$F_2 = 0$$

$$F_1 = \int -\frac{P}{a^2}\left(7x_1^2 + x_2^2 - \cancel{7}\, a^2\right) dS .$$

$$= \int_0^a \int_0^{2\pi} -\frac{P}{a^2}\left(7r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2 - \cancel{7}\, a^2\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= -\frac{P}{a^2}\left[\iint 7r^2\cos^2\theta \, r\, dr\, d\theta + \iint r^3 \sin^2 dr\, d\theta - \cancel{7}a^2 \iint r\, dr\, d\theta\right]$$

$$* \quad \iint 7r^3\cos^2\theta \, dr\, d\theta = 7\int_0^a r^3\, dr \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta$$

$$= 7\,\frac{a^4}{4} \times (\pi)$$

$$= \frac{7\pi}{4} a^4$$

$$\iint r^3 \sin^2\theta \, dr \, d\theta = \frac{a^4 \pi}{4}$$

$$-7a^2 \iint r \, dr \, d\theta = -7a^4\pi$$

$$f_1 = \frac{7\pi a^4}{4} + \frac{a^4\pi}{4} - 7a^4\pi$$

$$= +5\pi a^4 . P/a^2$$

$$\vec{F} = +5\pi \frac{a^4}{a^2} P \vec{x_1}$$

$$\vec{F} = +5\pi a^2 P \vec{x_1}.$$

Série 2:

Ex 1:

$(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ $\quad u_1 = x_2 x_3 \;,\; u_2 = x_1 x_3 \;,\; u_3 = x_1 x_2$

1°/ $\overline{\overline{\varepsilon}}(M)$?

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(u_{1,2} + u_{2,1}\right)$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \qquad = \frac{1}{2}\left(x_3 + x_3\right) = x_3$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \qquad \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(u_{1,3} + u_{3,1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_2 + x_2\right) = x_2$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2}\left(u_{2,3} + u_{3,2}\right) = x_1$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

2°/ Dilatation (allongement relatif)

$$e(M, \vec{q}) = \vec{q}^{\,t}\, \bar{\bar{\varepsilon}}(M)\, \vec{q}$$

destirsion (variation d'angle)

$$g(M, \vec{q}, \vec{q}') = 2\, \vec{q}^{\,t}\, \bar{\bar{\varepsilon}}(M)\, \vec{q}'$$

$$\vec{q} = \frac{\overrightarrow{D_0C_0}}{|\overrightarrow{D_0C_0}|}$$

$D_0(1,-1,0)$
$C_0(1,1,0)$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{D_0C_0} = \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{q} = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = \vec{e_2}$

$$e(D_0, \vec{q}_{\overrightarrow{D_0C_0}}) = \vec{q}\; \bar{\bar{\varepsilon}}(M)\, \vec{q}$$

$$= (0,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= (0,1,0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cancel{+0} \end{pmatrix} = 0$$

$$g(D_0, \overrightarrow{D_0C_0}, \vec{e_1}) = 2\, {}^t\vec{q}\; \bar{\bar{\varepsilon}}(M)\, \vec{e_1}$$

$$= 2\, \vec{e_2}\; \bar{\bar{\varepsilon}}(M)\, \vec{e_1}$$

$$= 2(0,1,0) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \cancel{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 2(0\;1\;0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(D_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\overline{\overline{\varepsilon}}(D_0) - \varepsilon I\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\varepsilon & 0 & -1 \\ 0 & -\varepsilon & 1 \\ -1 & 1 & -\varepsilon \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\varepsilon(\varepsilon^2 - 1) - (-\varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow -\varepsilon(\varepsilon^2 - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_1 = -\sqrt{2} \\ \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_3 = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{u}_1 \longrightarrow \varepsilon_1 = -\sqrt{2} \qquad \varepsilon_2 = 0 \longrightarrow \vec{u}_2 \qquad \varepsilon_3 = \sqrt{2} \longleftarrow \vec{u}_3$$

$$\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \qquad \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

$$(D_0, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \Rightarrow \overline{\overline{\varepsilon}}(D_0) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4°/ $\sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{kk}\, \delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}$

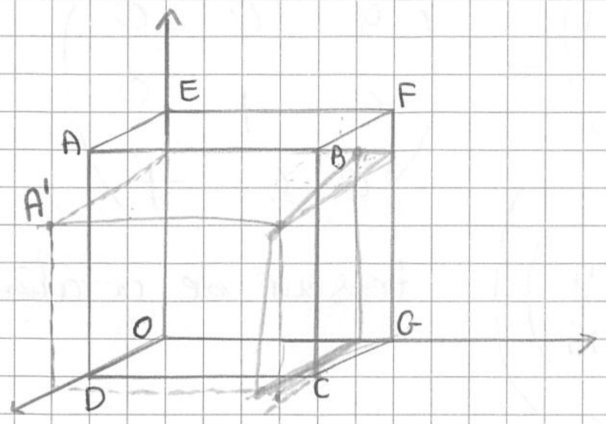
$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = 2\mu\, \varepsilon_{ij}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \sigma_1 &= 2\mu\, \varepsilon_1 = -2\sqrt{2}\,\mu \\ \sigma_2 &= 2\mu\, \varepsilon_2 = 0 \\ \sigma_3 &= 2\mu\, \varepsilon_3 = 2\sqrt{2}\,\mu \end{aligned}\right\} \Rightarrow \overline{\overline{\sigma}}(D_0) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2}\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +2\sqrt{2}\mu \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :

$u_1 = \alpha x_1 \quad , \quad u_2 = -\mu x_2 \quad , \quad u_3 = -\mu x_3$



$$m \left| \begin{array}{l} x_1 = X_1 + u_1 = X_1 + \alpha x_1 \\ x_2 = X_2 + u_2 = X_2 - \mu x_2 \\ x_3 = X_3 + u_3 = X_3 - \mu x_3 \end{array} \right.$$

$$m \left| \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{X_1}{1-\alpha} \\ x_2 = \dfrac{X_2}{1+\mu} \\ x_3 = \dfrac{X_3}{1+\mu} \end{array} \right.$$

$$A = \left| \begin{array}{l} X_{1A} = 1 \\ X_{2A} = 0 \\ X_{3A} = 1 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \quad A' \left| \begin{array}{l} x_{1A} = \dfrac{1}{1-\alpha} \\ x_{2A} = 0 \\ x_{3A} = \dfrac{1}{1+\mu} \end{array} \right.$$

$$B \left| \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right. \longrightarrow B' \left| \begin{array}{l} 1/_{1-\alpha} \\ \dfrac{1}{1+\mu} \\ \dfrac{1}{1+\mu} \end{array} \right.$$

il devient un paralellépide.

b/ $\overline{\text{grad}}\,\vec{u}$, $\bar{\bar{\varepsilon}}$, $\bar{\bar{\omega}}$, $\dfrac{\Delta V}{V}$

$$\overline{\text{grad}}\,\vec{u} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

gradiant de deplacement

$$= \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

tenseur de déformation

$$\bar{\bar{w}} = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\right)$$ tenseur de rotation

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ rotation nulle

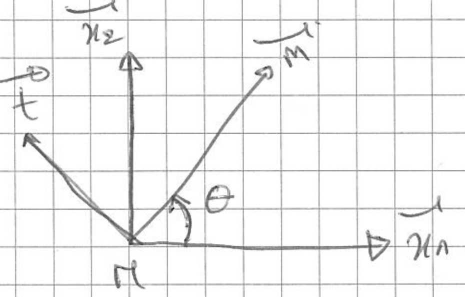
il y a que des déformation pure.

$$\overline{\overline{\text{grad}}}\,\vec{u} = \bar{\bar{\varepsilon}} + \bar{\bar{w}} = \bar{\bar{\varepsilon}}_{\text{déf pure}}$$

* $\theta = \frac{\Delta V}{V} = \text{trace}\ \bar{\bar{\varepsilon}} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$

variation de volume $= \alpha - 2\mu$

C/ $\vec{t}$



$\vec{m} \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad \vec{t} \begin{vmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$

$$e(M, \vec{m}) = \vec{m}^t\, \bar{\bar{\varepsilon}}(M)\, \vec{m} = (\cos\theta \ \ \sin\theta \ \ 0)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

allongement relative. $= \alpha \cos^2\theta - \mu \sin^2\theta$

$$\frac{1}{2} g(M, \vec{m}, \vec{t}) = \vec{m}^t\, \bar{\bar{\varepsilon}}(M)\, \vec{t}$$

demi distorsion

$$= (\cos\theta \ \ \sin\theta \ \ 0)\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} g(M, \vec{m}', \vec{t}) = -\alpha \cos\theta \sin\theta - \mu \sin\theta \cos\theta$$

$$= -(\alpha + \mu) \cos\theta \sin\theta$$

$$= -\frac{1}{2}(\alpha + \mu) \sin 2\theta$$

e/ $$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \qquad \overline{\overline{\varepsilon}}_{sp} = \frac{\text{trace}\,\varepsilon}{3} \overline{\overline{I}}$$

$$= \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} - \frac{\theta}{3} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \frac{\theta}{3} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \frac{\theta}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\theta}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\theta}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\theta}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}(M) = \overline{\overline{\varepsilon}}_d + \overline{\overline{\varepsilon}}_{sp}$$

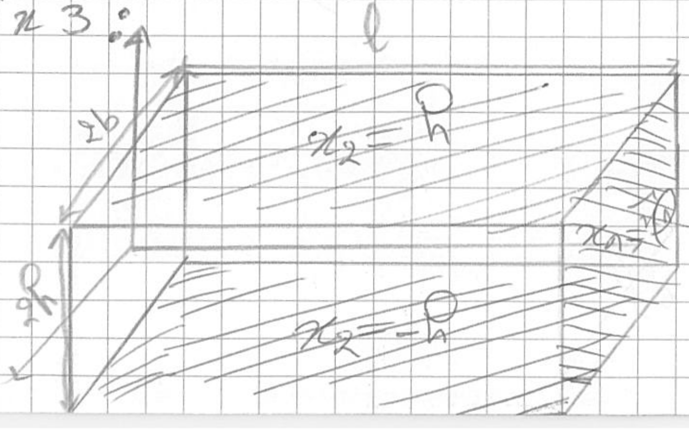
tenseur diviatrique sous vartions des ~~valeume~~ → variation de forme.

→ spherique variation de ~~valeume~~ sous variation de forme.

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_{sp}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha - 2\mu}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha - 2\mu}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha - 2\mu}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overline{\overline{\varepsilon}}_d(M) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(\alpha + \mu) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu - \alpha}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mu - \alpha}{3} \end{pmatrix}$$

Ex 3 :



$$\sigma_{11} = \frac{P}{I}(l - x_1) x_2$$

$$\sigma_{22} = 0$$

$$\sigma_{12} = \frac{-P}{2I}(h^2 - x_2^2)$$

avec $I = \frac{4}{3} b h^3$

1°/ $\vec{f}$?

Eq d'équilibre : $\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$

* $\dfrac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho f_1 = 0$ (1)

* $\dfrac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = -\rho f_2$ (2)

* $\dfrac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho f_3 = 0$ (3)

$\Rightarrow -\dfrac{P}{I} x_2 + \dfrac{P}{I} x_2 + \rho f_1 = 0 \Rightarrow f_1 = 0$ (1)

(2) $\Rightarrow f_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{f} = \vec{0}$

(3) $\longrightarrow f_3 = 0$

2°/ $S_h \longrightarrow \vec{n} = \vec{x_2}$.

$d\vec{f} = \vec{T}(M \in S_h)\, dS.$

$= \left(\overline{\overline{\sigma}}(M \in S_h)\, \vec{x_2}\right) dS$

$d\vec{f} = \left(\overline{\overline{\sigma}}(M)\, \vec{x_2}\right) dS$

$$\overline{\overline{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \frac{Ph}{I}(\ell - x_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$M \in S_h \left| \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 = h \\ x_3 \end{array} \right.$

$\vec{F} = \int_S d\vec{f}$

$$\begin{cases} S_1 \, (x_2 = h) \\ S_2 \, (x_2 = -h) \\ S_3 \, (x_1 = \ell) \end{cases}$$

* pour $S_1 \, (x_2 = h) \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{11} = \dfrac{Ph}{I} (\ell - x_1) \\ \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{12} = 0 \end{cases}$

$$\vec{T}(M, \vec{m}) = \bar{\bar{\sigma}}(M) \, \vec{m}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

donc $\vec{F} = \vec{0}$

de m̂ pour $S_2 \, (x_2 = -h)$ on a : $\vec{F} = \vec{0}$

* pour $S_3 \, (x_1 = +\ell)$

$$M \in S_3 \, (x_1 = \ell) \Rightarrow M \left| \begin{array}{l} x_1 = \ell \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 0 \\ \sigma_{22} = 0 \\ \sigma_{12} = \dfrac{-P}{2I} (h^2 - x_2^2) \end{cases} \qquad \vec{m} = \vec{x_1}$$

$$\vec{T}(M, \vec{m}) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{12} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}(M, \vec{m}) = \frac{-P}{2I} (h^2 - x_2^2) \, \vec{e_2}$$

$$\vec{F} = \left[\int_{S_3} -\frac{P}{2I} (h^2 - x_2^2) \, dS \right] \vec{e_2}$$

$$dS = dx_2\, dx_3 = 2b\, dx_2$$

$$\vec{F} = \frac{-2bP}{2I} \int_{-h}^{h} \left(h^2 - x_2^2\right) dx_2\, \vec{e_2}$$

$$= -\frac{bP}{I} \left[h^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3} \right]_{-h}^{h} \vec{e_2}$$

$$= -\frac{bP}{I} \left[h^3 - \frac{h^3}{3} + h^3 - \frac{h^3}{3} \right] \vec{e_2}$$

$$= -\frac{bP}{I} \left[2h^3 - \frac{2h^3}{3} \right] \vec{e_2}$$

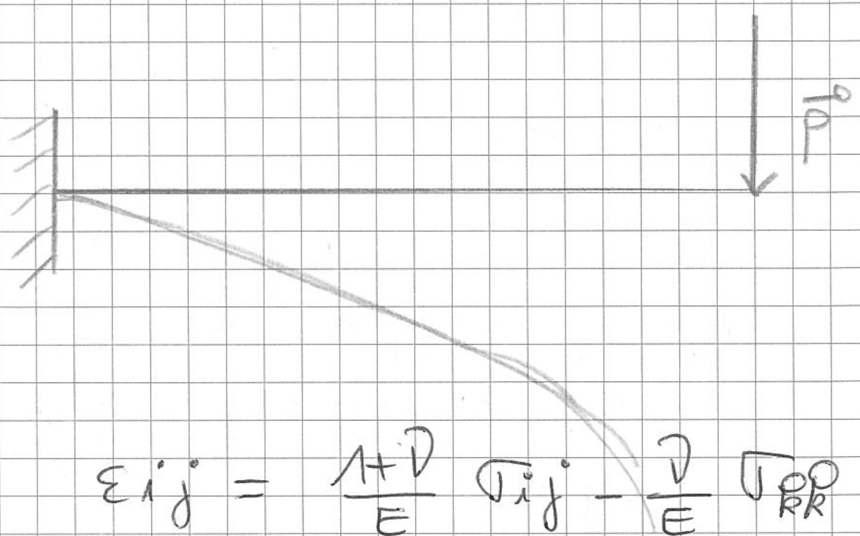
$$= -\frac{2bP}{I} \left[\frac{3h^3 - h^3}{3} \right] \vec{e_2}$$

$$\vec{F} = -\frac{4bP}{I} \frac{h^3}{3} \vec{e_2} \qquad \text{avec } I = \frac{4}{3} b h^3$$

$$= -\frac{\cancel{4}\cancel{b}P\cancel{h^3} \times \cancel{3}}{\cancel{4} \times \cancel{3}\, \cancel{b}\, \cancel{h^3}} \vec{e_2}$$

donc : $\boxed{\vec{F} = -P\, \vec{e_2}}$

3°/



4°/ $$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

$$* \quad \varepsilon_{11} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{11} - \frac{\nu}{E}\sigma_{11}$$

$$= \frac{\sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{P}{IE}(l - x_1)x_2 .$$

$$* \quad \varepsilon_{22} = -\frac{\nu}{EI} P (l - x_1) x_2 .$$

$$* \quad \varepsilon_{33} = -\frac{\nu P}{EI}(l - x_1)x_2 .$$

$$* \quad \varepsilon_{12} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{12} = -\frac{(1+\nu)}{2IE} P (h^2 - x_2^2)$$

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_{13} = 0 .$$

5°/ $$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11} = u_{1,1} = \frac{P}{EI}(l - x_1)x_2 \quad (1)$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} = -\frac{\nu P}{IE}(l - x_1)x_2 . \quad (2)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{(1+\nu)}{2IE} P (h^2 - x_2^2) \quad (3)$$

$$(1) \Rightarrow \quad u_1(x_1, x_2) = \int \varepsilon_{11}\, dx_1$$

$$= \int \frac{P}{IE}(l - x_1)x_2\, dx_1$$

$$= \frac{P x_2}{EI}\int (l - x_1)\, dx_1$$

$$u_1(x_1, x_2) = \frac{P x_2}{IE}\left[l x_1 - \frac{x_1^2}{2}\right] + f(x_2)$$

② $\Rightarrow \quad u_2(x_1,x_2) = \int \varepsilon_{22}\, dx_2$

$$= -\frac{\nu P}{IE}(l-x_1)\int x_2\, dx_2$$

$$u_2(x_1,x_2) = -\frac{\nu P}{2IE}(l-x_1)x_2^2 + g(x_1)$$

③ $\Rightarrow$

$$u_{1,2} + u_{2,1} = -\frac{(1+\nu)}{IE}P\left(h^2 - x_2^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{IE}\left(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}\right) + \frac{df}{dx_2} + \frac{\nu P}{2IE}x_2^2 + \frac{dg}{dx_1} = -\frac{(1+\nu)}{IE}P\left(h^2 - x_2^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{P}{IE}\left(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}\right) + \frac{dg}{dx_1} = -\frac{(1+\nu)}{IE}P\left(h^2 - x_2^2\right) - \frac{\nu P}{2IE}x_2^2 - \frac{df}{dx_2}$$

$$= K \quad (\text{vraie constante})$$

$$\begin{cases} \dfrac{P}{IE}\left(lx_1 - \dfrac{x_1^2}{2}\right) + \dfrac{dg}{dx_1} = K \\[2ex] -\dfrac{(1+\nu)}{IE}P\left(h^2 - x_2^2\right) - \dfrac{\nu P}{2IE}x_2^2 - \dfrac{df}{dx_2} = K \end{cases}$$

* $\frac{P}{IE}\left(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}\right) + \frac{dg}{dx_1} = K$

$$\Rightarrow \frac{dg}{dx_1} = K - \frac{P}{IE}\left(lx_1 - \frac{x_1^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow g(x_1) = Kx_1 - \frac{P}{IE}\left(l\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_1^3}{2\times 3}\right) + K_1$$

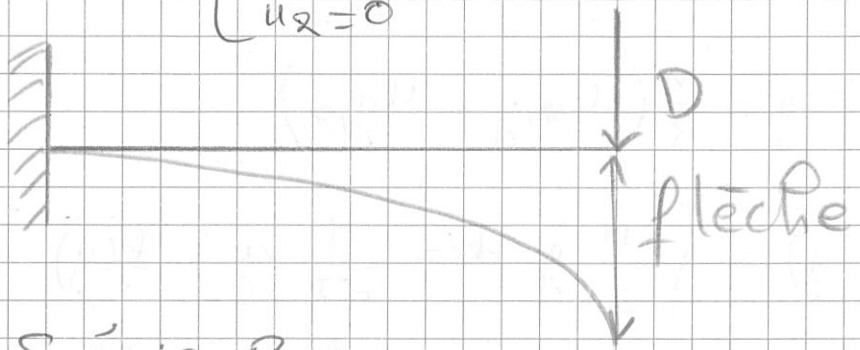
* $\frac{df}{dx_2} = -\frac{(1+\nu)}{IE}P\left(h^2 - x_2^2\right) - \frac{\nu P}{2IE}x_2^2 - K$

$$f(x_2) = -\frac{(1+\nu)}{IE}P\left(h^2 x_2 - \frac{x_2^3}{3}\right) - \frac{\nu P}{6IE}x_2^3 - Kx_2 + K_2$$

on remplace f et g dans u_1 et u_2

$* \ M(0,0) \longrightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \Rightarrow K_2 = 0 \\ u_2 = 0 \Rightarrow K_1 = 0 \end{cases}$ (pour déterminer K_1 et K_2 condition limite)

$* \ M(0,h) \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \end{cases}$



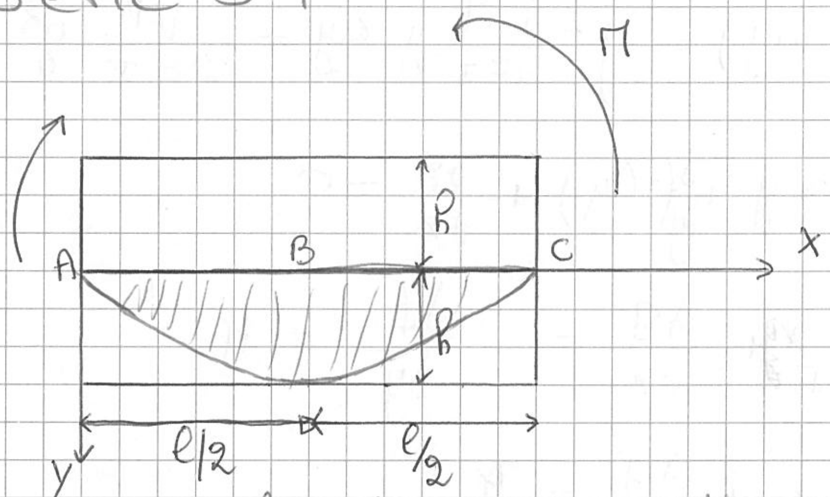
Série 3 :

Exercice 1:

$\varepsilon_{xx} = \frac{M}{EI} y, M$

$\varepsilon_{yy} = -\nu \frac{M}{EI} y$

$\varepsilon_{xy} = 0$



1°/ Il faut que le tenseur des déformation vérifie les equation de compatibilités.

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0$$

$$\left.\begin{matrix} i = j = x \\ k = l = y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \varepsilon_{xy,xy} - \varepsilon_{xy,xy} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = 2 \frac{\varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}$$

éq de compatibilité sont satisfaites.

2°/ déplacement $\vec{u}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Rightarrow \quad u_x(x,y) = \int \varepsilon_{xx}\, dx$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \Rightarrow \quad u_y(x,y) = \int \varepsilon_{yy}\, dy.$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(u_{x,y} + u_{y,x} \right)$$

① $$u_x(x,y) = \int \frac{M}{EI} y \, dx = \frac{M}{EI} xy + f(y)$$

② $$u_y(x,y) = \int -\frac{\nu M}{EI} y \, dy = -\frac{\nu M}{2EI} y^2 + g(x)$$

$$\frac{M}{EI} xy + \frac{\partial f}{\partial y}(y) + \frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{M}{EI} xy + \frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} = K$$

* $$\frac{M}{EI} x + \frac{\partial g}{\partial x} = K$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = K - \frac{M}{EI} x$$

$$g(x) = Kx - \frac{M}{2EI} x^2 + K_1$$

* $$\frac{\partial f}{\partial y} = -K \Rightarrow \quad f(y) = -Ky + K_2.$$

$$\begin{cases} u_x(x,y) = \dfrac{M}{EI} xy + f(y) \\ \qquad\qquad = \dfrac{M}{EI} xy - Ky + K_2 \\ u_y(x,y) = -\dfrac{\nu M}{2EI} y^2 - \dfrac{M}{2IE} x^2 + Kx + K_1 \end{cases}$$

en A : $\begin{cases} u_x = 0 \\ u_y = 0 \end{cases}$ en C $u_y = 0$ $(x = l,\ y = 0)$

Conditions aux limites:

en castrement en A $\rightarrow u_x = 0$, $\rightarrow u_y = 0$

appuyee simple en C $\longrightarrow u_y = 0$

$A(0,0)$ $\quad u_x(0,0) = K_2 = 0$

$u_y(0,0) = K_1 = 0$

$C(l,0)$ $\quad u_y(l,0) = -\frac{M}{2IE} l^2 + Kl = 0$

$$\boxed{K = \frac{Ml}{2IE}}$$

$$u_x(x,y) = \frac{M}{EI}\left(xy - \frac{l}{2}y\right)$$

$$u_y(x,y) = \frac{M}{2EI}\left(-\nu y^2 - x^2 + xl\right)$$

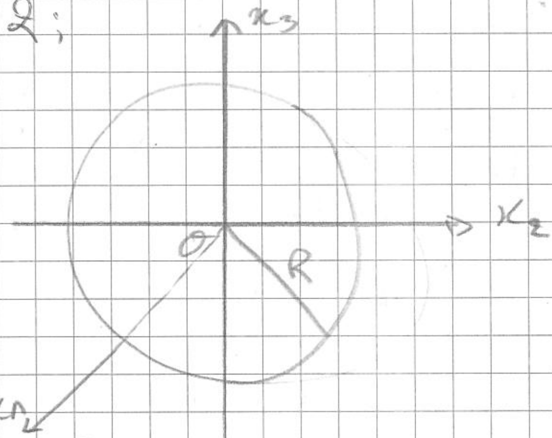
fleche: deplacement suivant y de la fibre neutre.

$$u_y(x, y=0) = \frac{M}{2EI}\left(xl - x^2\right)$$

A $\quad u_y = 0$, C $\longrightarrow u_y = 0$

$B\left(\frac{l}{2}, 0\right)$ $\quad u_y(B) = \frac{Ml^2}{8IE}$

Exercice 2 :



$$\vec{f} = -\frac{g}{R} x_i \vec{e_i} \qquad \vec{u}(M) = h(r)\, x_i \vec{e_i}$$

$$= -\frac{g}{R} r \vec{e_r}$$

$$\vec{OM} = x_i \vec{e_i} = r\vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \vec{u}(M) = h(r)\, r\vec{e_r}$$

1°/ f radiale + symétrie sphérique.

$\vec{u}(r)$ est suivant $\vec{e_r}$

2°/ tenseur de déformation $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$ $\left(\vec{u} = u_r\vec{e_r} + u_\theta\vec{e_\theta} + u_\varphi\vec{e_\varphi}\right)$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r \sin\theta + u_\theta \cos\theta\right)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}\right)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right)$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2r\sin\theta}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta}\sin\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - u_\varphi \cos\theta\right)$$

- $$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\, h(r)\right) = h(r) + r\, h'(r)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} = h(r)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u_r}{r} = h(r)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\theta\varphi} = 0$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} h(r) + r\,h'(r) & 0 & 0 \\ 0 & h(r) & 0 \\ 0 & 0 & h(r) \end{pmatrix}$$

3°/ Eq de Navier :

$$(\lambda + 2\mu)\,\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{u} - \mu\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} + \rho\vec{f} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{u} = 0$$

$$\text{div}\,\vec{u} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 u_r\right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\,\vec{u} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r)\right)\vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r)\right)\right] - \rho\frac{g}{R}r = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r)\right) = \frac{\rho g \quad r}{R\;(\lambda+2\mu)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\underbrace{r^2 u_r}_{= r^3 h(r)}) = \frac{\rho g}{R(\lambda+2\mu)}\frac{r^2}{2} + \alpha$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^3 h(r)\right) = \frac{\rho g}{R(\lambda+2\mu)}\frac{r^4}{2} + \alpha r^2$$

$$r^3 h(r) = \frac{\rho g}{10R(\lambda+2\mu)} r^5 + \alpha\frac{r^3}{3} + \beta$$

$$h(r) = \frac{\rho g}{10R(\lambda+2\mu)} r^2 + \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{r^3}$$

deplacement au centre est nul :

$$u_r(r=0) = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$h(r) = \frac{\rho g}{10(\lambda+2\mu)R} r^2 + C$$

$$h(r) = \frac{-\rho g}{10(\lambda+2\mu)}\left(B - \frac{r^2}{R}\right)$$

tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}(M)$

$$\sigma_{ij} = \lambda\, \varepsilon_{kk}\,\delta_{ij} + 2\mu\, \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$$

$$= r h' + 3h$$

$$\sigma_{rr} = \lambda\,(r h' + 3h) + 2\mu\,(r h' + h)$$

$$= (3\lambda + 2\mu)\,h + (\lambda + 2\mu)\,r h'$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = \lambda\,(3h + r h') + 2\mu\, h$$

$$= (3\lambda + 2\mu)\,h + \lambda\, r h'$$

* sur la surface on a aucune charge:

$$d\vec{f} = \vec{T}\, dS = 0 \Rightarrow \vec{T} = \vec{0}$$

$$\vec{T}(r, \vec{e_r}) = \bar{\bar{\sigma}}(R=r)\, \vec{e_r}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}_{r=R} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sigma_{rr}\, \vec{e_r} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{rr}(r=R) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\,(R h' + 3h) + 2\mu\,(R h' + h) = 0$$

4/ $$\sigma_{rr} = (3\lambda + 2\mu)\left[\frac{-\rho g}{10(\lambda+2\mu)}\left(B - \frac{r^2}{R}\right)\right] + r(\lambda+2\mu)\left[\frac{-\rho g}{5(\lambda+2\mu)}\,\frac{r}{R}\right]$$

$$\sigma_{rr} = \frac{-\rho g}{10(\lambda+2\mu)}\left[(3\lambda+2\mu)\left(B - \frac{r^2}{R}\right) - \frac{2r^2}{R}(\lambda+2\mu)\right]$$

$$\Rightarrow (3\lambda+2\mu)\left(B - \frac{r^2}{R}\right) - \frac{2r^2}{R}(\lambda+2\mu) = 0 \quad (r=R)$$

$$\Rightarrow (3\lambda+2\mu)(B - R) - 2R(\lambda+2\mu) = 0$$

$$(3\lambda+2\mu)B - R\left[3\lambda+2\mu+2\lambda+4\mu\right] = 0$$

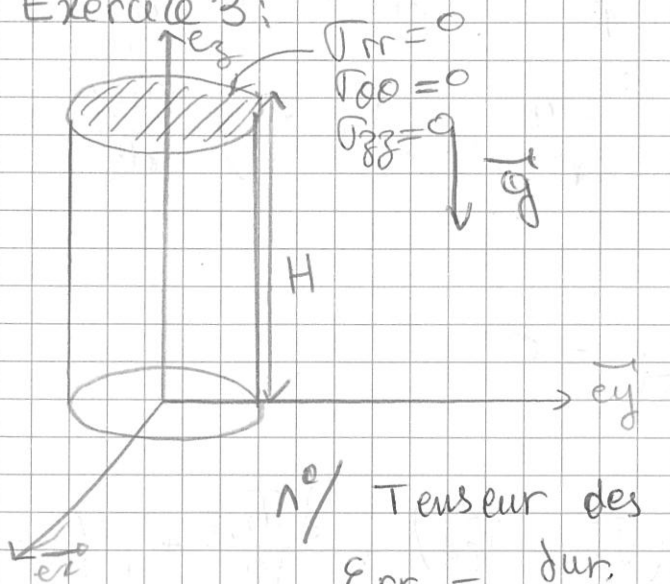
$$B = \frac{5\lambda+6\mu}{3\lambda+2\mu}R$$

$$\sigma_{rr} = A_1 r^2 - A_2$$

* $r=0 \rightarrow \sigma_{rr} = -A_2$

* $r=R \rightarrow \sigma_{rr} = 0$

Exercice 3:



$$\vec{u}(M) = u_r\vec{e_r} + u_z\vec{e_z}$$

$$u_r = u_r(r)$$

$$u_z = u_z(z)$$

*

1/ Tenseur des deformations : $\bar{\bar{\varepsilon}}(M)$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr} \qquad \varepsilon_{rz} = 0$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} \qquad \varepsilon_{r\theta} = 0$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz} \qquad \varepsilon_{\theta z} = 0$$

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d u_z}{dz} \end{pmatrix}$$

2°/ Tenseur des contraintes $\bar{\bar{\sigma}}(M)$.

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

$$\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}.$$

$$= \frac{d u_r}{dr} + \frac{u_r}{r} + \frac{d u_z}{dz}$$

* $$\sigma_{rr} = \lambda \frac{du_r}{dr} + \lambda \frac{u_r}{r} + \lambda \frac{du_z}{dz} + 2\mu \frac{du_r}{dr}$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{du_r}{dr} + \frac{\lambda u_r}{r} + \lambda \frac{du_z}{dz}$$

* $$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{du_r}{dr} + \frac{\lambda u_r}{r} + \lambda \frac{du_z}{dz} + 2\mu \frac{u_r}{r}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \frac{du_r}{dr} + (\lambda + 2\mu) \frac{u_r}{r} + \frac{\lambda du_z}{dz}$$

* $$\sigma_{zz} = \lambda \frac{du_r}{dr} + \frac{\lambda u_r}{r} + \frac{\lambda u_z}{dz} + 2\mu \frac{du_z}{dz}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda \frac{du_r}{dr} + \frac{\lambda u_r}{r} + (\lambda + 2\mu) \frac{du_z}{dz}$$

3°/ Equation d'equilibre.

$$\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$$

coord cylindrique :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho f_r = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2 \sigma_{r\theta}}{r} + \rho f_\theta = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{r} + \rho f_z = 0 \end{cases}$$

$$\vec{P} = dm\,\vec{g}$$

$$f_r = 0$$

$$f_\theta = 0$$

$$f_z = -g$$

$$* \quad (\lambda + 2\mu)\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{\lambda}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{\lambda}{r^2}u_r + \frac{1}{r}2\mu\left(\frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r}\right) = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\left[\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2}u_r\right] = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2}u_r = 0 \quad ①$$

$$* \quad (\lambda + 2\mu)\frac{d^2 u_z}{dz^2} - \rho g = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u_z}{dz^2} = \frac{\rho g}{(\lambda + 2\mu)} \quad ②$$

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rg)\right) = \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg}{dr} - \frac{1}{r^2}g$$

$$① \quad \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ru_r)}{dr}\right] = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d(ru_r)}{dr} = A'$$

$$\frac{d(ru_r)}{dr} = rA' \Rightarrow r\,u_r = A'\frac{r^2}{2} + B$$

$$u_r(r) = Ar + \frac{B}{r} \qquad A = \frac{A'}{2}$$

$$u_z(z) = \frac{\rho g}{2(\lambda + 2\mu)}z^2 + Cz + D$$

condition limite :

* $z = 0 \Rightarrow u_z = 0 \Rightarrow D = 0$

* $z = H \quad (\sigma_{rr} = 0, \ \sigma_{\theta\theta} = 0, \ \sigma_{zz} = 0)$

① $\sigma_{rr} = -2\mu \dfrac{B}{r^2} + \lambda \rho g H + 2(\lambda+\mu)A + \lambda C = 0$

② $\sigma_{\theta\theta} = 2\mu \dfrac{B}{r^2} + \lambda \rho g H + 2(\lambda+\mu)A + \lambda C = 0$

③ $\sigma_{zz} = (\lambda+2\mu)\rho g H + 2\lambda A + (\lambda+2\mu) C = 0$

② − ① $\Rightarrow \quad 4\mu \dfrac{B}{r^2} = 0 \Rightarrow B = 0$

$B = 0 \Rightarrow A = 0$

$C = -\rho g H$

$\Rightarrow \sigma_{rr} = \lambda \rho g (z - H) \rightarrow u_r = 0$

$\sigma_{\theta\theta} = \lambda \rho g (z - H) \rightarrow u_\theta = 0$

$\sigma_{zz} = (\lambda+2\mu)\rho g (z - H) \rightarrow u_z = \frac{1}{2}\rho g z^2 - \rho g H z.$

UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2011/12
Filière: SMP6, parcours : mécanique

TD3 d'Elasticité

On considère une poutre droite d'axe (O; e_1), de section rectangulaire (hauteur $2h$, épaisseur $2b$). Cette poutre est encastrée dans un massif à l'abscisse $x_1=0$. L'extrémité libre est la seule supportant un chargement. D'autre part on suppose que les forces de volume sont nulles. On suppose que l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions de la poutre et qu'en conséquence, on peut faire l'hypothèse d'un état plan de contrainte.

Nous adoptons la fonction d'Airy suivante :

$$\varphi = \frac{P}{I}\left(\frac{h^2}{2}x_1 x_2 + \frac{l}{6}x_2^{\,3} - \frac{x_1 x_2^{\,3}}{6}\right) \qquad I = \frac{(2b)(2h)^3}{12} = \frac{4}{3}bh^3$$

1. Montrer que la fonction ainsi définie est biharmonique.
2. Déterminer l'état de contrainte obtenu
3. Vérifier cet état de contrainte est parfaitement compatible avec la condition de non chargement des faces supérieure $x_2=h$ et inférieure $x_2=-h$ de la poutre.

On peut donc considérer que la poutre est sollicitée en flexion simple. Il est a noter que l'état de contrainte ainsi obtenu est parfaitement en accord avec la théorie élémentaire des poutres.
Il reste à vérifier les conditions aux limites sur les déplacements et en particulier la condition d'encastrement de la section $x_1=0$.

4. Déterminer le tenseur déformation
5. Calculer le champ des déplacements
6. En déduire la déformée de la ligne moyenne $x_2=x_3=0$ et la flèche à l'étremite libre

u_2 $\quad x_1 = l \quad x_2 = 0$

$x_1 =$

$u_1 \longrightarrow f(x_2)$

$u_2 \longrightarrow g(x_1)$

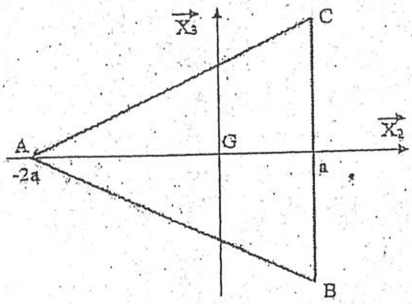
UNIVERSITE CHOUAIB DOUKKALI
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2011/12
Filière: SMP6, parcours : mécanique

TD4 d'Elasticité

Exercice 1

On étudie la torsion d'une poutre dont la section droite représentée ci-contre est un triangle équilatéral.



Suite à l'étude théorique de St Venant, on envisage comme solution éventuelle la fonction :

$$\varphi(x_2, x_3) = m(x_2 - a)(x_2^2 - 3x_3^2 + 4ax_2 + 4a^2)$$

1- Montrer que la condition aux limites, $\varphi = 0$ est satisfaite sur le contour de la section.

2- Calculer les contraintes σ_{12} et σ_{13} et vérifier l'équation de compatibilité.

Exercice 2

On étudie une poutre droite, de section rectangulaire étroite, en état plan de contraintes.

On note E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson du matériau (comportement élastique linéaire

La poutre précédente, encastrée dans la section définie par x= - l/2 est sollicitée en cisaillement. L'état de contrainte en un point quelconque est alors de la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1- En l'absence de toute force volumique, quelle est la forme des fonctions d'Airy possible?

2- En prenant $\varphi(x, y) = a\,x\,y$, donner le champ de déplacement dans la poutre.

Elasticité linéaire en coordonnées cylindriques

Relations Déplacement-Déformation

$$\begin{cases} \varepsilon_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} \\ \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{\theta z} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z}\right] \\ \varepsilon_{rz} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial u_r}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right] \\ \varepsilon_{r\theta} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right] \end{cases}$$

Equations d'équilibre

$(r\theta)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \rho(f_r - \gamma_r) = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + 2\dfrac{\sigma_{r\theta}}{r} + \rho(f_\theta - \gamma_\theta) = 0 \\ \dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_{rz}}{r} + \rho(f_z - \gamma_z) = 0 \end{cases}$$

Equations de Beltrami

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial r} + \dfrac{\nu}{1+\nu} div\left[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})\right] + \Delta\sigma_{rr} - \dfrac{2}{r^2}\left(2\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2 I_1}{\partial r^2} = 0 \\ \dfrac{2}{r}\left(\dfrac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial \theta} + \rho(f_r - \gamma_r)\right) + \dfrac{\nu}{1+\nu} div\left[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})\right] + \Delta\sigma_{\theta\theta} + \dfrac{2}{r^2}\left(2\dfrac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial I_1}{\partial r}\right) = 0 \\ 2\dfrac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial z} + \dfrac{\nu}{1+\nu} div\left[\rho(\vec{f} - \vec{\gamma})\right] + \Delta\sigma_{zz} + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2 I_1}{\partial z^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial \theta} - \rho(f_\theta - \gamma_\theta)\right) + \Delta\sigma_{r\theta} + \dfrac{2}{r^2}\left(\dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} - \dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} - 2\sigma_{r\theta\theta}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial I_1}{\partial \theta}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial r} + \dfrac{\partial \rho(f_r - \gamma_r)}{\partial z} + \Delta\sigma_{rz} - \dfrac{1}{r^2}\left(2\dfrac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \sigma_{rz}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{\partial^2 I_1}{\partial r\,\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho(f_\theta - \gamma_\theta)}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \rho(f_z - \gamma_z)}{\partial \theta} + \Delta\sigma_{\theta z} + \dfrac{1}{r^2}\left(2\dfrac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta z}\right) + \dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 I_1}{\partial \theta\,\partial z} = 0 \end{cases}$$

avec :

$$div\,\vec{f} = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + f_r\right) + \frac{\partial f_z}{\partial z} \qquad \Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$$

$$I_1 = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}$$

$$si\ g = g(r) \quad \boxed{\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d g}{dr} - \frac{1}{r^2} g = \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rg)\right]}$$

Ex 2

Equation de NAVIER:

$$(\lambda + \mu)\, \overrightarrow{grad}\,(div\,\vec{u}) + \mu\, \Delta\vec{u} + \rho . \vec{f} = 0$$

$\Rightarrow$ en coordonne sphérique:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_r\right)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + U_r \sin\theta + U_\theta \cos\theta\right)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \theta} - \frac{U_\theta}{r}\right]$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2r\sin\theta}\left(\frac{\partial U_\varphi}{\partial \theta}\sin\theta + \frac{\partial U_\theta}{\partial \varphi} - U_\varphi \cos\theta\right)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_r}{\partial \theta} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r}\right)$$

coordonnée polaire: (les contrainte plane).

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta^2}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2}$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \chi}{\partial \theta}\right)$$

$$\vec{f} = -\overrightarrow{grad}\,(V)$$

$$\sigma_{xx} + V = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}$$

$$\sigma_{yy} + V = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{-\partial^2 \chi}{}$$

$$\frac{\partial^2 U_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial r} - \frac{U_r}{r^2} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \rho g = 0$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} - \rho g = 0 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} - \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} = 0$$

$z = 0$, $U_z = 0$, Les contraintes à l'extrémité est nul.

$$(1) \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\, rU_r}{dr}\right) = 0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d\, rU_r}{dr} = C_1 \Rightarrow \frac{d\, rU_r}{dr} = C_1 r$$

$$rU_r = C_1\frac{r^2}{2} + C_2$$

$$U_r = C_1\frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$$

$$\boxed{U_r = Ar + \frac{B}{r}}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} = \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U_z}{\partial z} = \frac{\rho g}{\quad} z + C_1$$

$$U_z = \frac{1}{2} \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} z^2 + C_1 z + C_2$$

$$U_z = \frac{\rho g}{2(\lambda + 2\mu)} z^2 + C z + D.$$

$z = 0 \;,\; U_z = 0 \Rightarrow D = 0.$

$r = 0 \quad U_r \Rightarrow \text{fini} \Rightarrow B = 0.$

$\overline{\overline{\sigma}}$

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_r}{\partial r} + \lambda \left(\frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{U_r}{r} \right)$$

$$= (\lambda + 2\mu) A + \lambda \left(\frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} z + C \right)$$

$$\sigma_\theta = (\lambda + 2\mu) \frac{U_r}{r} + \lambda \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right)$$

$$= (\lambda + 2\mu) A + \lambda \left(A + \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} + C \right)$$

$$\sigma_z = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial U_z}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} \right)$$

$\vec{n} = \vec{e}_z$

$$\vec{T} = \sigma . \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_r & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$T(z = H) = (\lambda + 2\mu) \frac{\rho g}{(\lambda + 2\mu)} H + C + 2\lambda A = 0$$

$\sigma_z = 0 \; (z = H)$

$$C = -\frac{\rho g H}{\lambda + 2\mu}$$

$$A = -\frac{1}{2\lambda}(\rho g H - \rho g H) \Rightarrow A = 0$$

donc

$$\begin{cases} U_r = 0 \\ U_\theta = 0 \\ U_z = \dfrac{\rho g z^2}{2(\lambda + 2\mu)} - \dfrac{\rho g H}{\lambda + 2\mu} \end{cases}$$

$$= \frac{\rho g}{\lambda + 2\mu} z \left(\frac{z}{2} - H\right)$$

TD : Elasticité 3 :

$$\Delta^2 \psi = \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}$$

on a : $\varphi = \frac{P}{I}\left(\frac{h^2}{2} x_1 x_2 + \frac{l}{6} x_2^3 - \frac{x_1 x_2^3}{6}\right)$

$$\Delta^4 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\ldots} + \frac{\partial^4 \varphi}{\ldots} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\ldots}$$

$\Rightarrow \Delta^2 \varphi = 0$

$\Rightarrow \varphi$ est biharmonique.

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \quad , \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} \quad , \quad \sigma_{12} = \frac{-\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$/x_1$ et $/x_2$ au m̂ tps

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{P}{I}\left(\frac{h^2 x_1}{2} + \frac{\ell}{2} x_2^2 - \frac{x_1}{2} x_2^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \frac{P}{I}\left(\ell x_2 - x_1 x_2\right) \Rightarrow$$

$$\sigma_{11} = \frac{P}{I}\left(\ell - x_1\right) x_2$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0 \Rightarrow \sigma_{22} = 0$$

$$\sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{P}{I}\left(\frac{h^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}\right)$$

$$\sigma_{12} = -\frac{P}{2I}\left(h^2 - x_2^2\right)$$

3°/ $\vec{T} = \sigma . \vec{n} = \sigma \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_2 = h \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{22} = 0$

4% $\bar{\bar{\varepsilon}}$?

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$= \frac{P}{EI}(l - x_1)x_2$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33})$$

$$= \frac{-\nu}{IE} P(l - x_1)x_2$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{(1+\nu)}{E}\frac{P}{2I}(h^2 - x_2^2)$$

5% champ de deplacement.

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \frac{P}{EI}(l - x_1)x_2 = \varepsilon_{11} \quad (1)$$

$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = -\frac{\nu P}{EI}(l - x_1)x_2 = \varepsilon_{22} \quad (2)$$

$\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$

$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)$ (3)

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right] = \varepsilon_{12} = -\frac{(1+\nu)}{2EI}P(h^2 - x_2^2)$$

$$\Rightarrow U_1 = \frac{P}{EI}x_2\left(l x_1 - \frac{x_1^2}{2}\right) + f_1(x_2)$$

$$U_2 = -\frac{\nu P}{EI}(l - x_1)\frac{x_2^2}{2} + g(x_1)$$

$f(x_2) = a x_2^3 + b x_2^2 + c x_2 + d$

$g(x_1) = a' x_1^3 + b' x_1^2 + c' x_1 + d'$

$$\frac{-(1+\nu)}{2EI}\, p\left(h^2 - x_2^2\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{EI}\left(\ell x_1 - \frac{x_1^2}{2}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\nu p}{EI}\,\frac{x_2^2}{2} + \frac{\partial g}{\partial x_1}\right]$$

$$\frac{-(1+\nu)}{2EI}\, p\left(h^2 - x_2^2\right) = \frac{p}{2EI}\left(\ell x_1 - \frac{x_1^2}{2}\right) + \frac{\nu p}{4EI}x_2^2 + \frac{3}{2}a x_2^2 + \frac{2}{2} b x_2 + \frac{c}{2} + \frac{3}{2}a' x_1^2 + \frac{2}{2} b' x_1 + \frac{c'}{2}$$

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{c}{2} + \dfrac{c'}{2} = -\dfrac{(1+\nu)}{2EI}\, p h^2} \\ +\dfrac{(1+\nu)}{2EI}\, p = \dfrac{\nu p}{4EI} + \dfrac{3}{2} a \\ 0 = b \\ 0 = -\dfrac{p}{4EI} + \dfrac{3}{2} a' \\ 0 = \dfrac{p\ell}{2EI} + b' \end{cases}$$

on ~~note~~ c'

on

$$\begin{cases} a = \dfrac{1+\nu}{3EI}\, p - \dfrac{\nu p}{6EI} = \dfrac{(2+\nu)p}{6EI} \\ b = 0 \\ a' = \dfrac{p}{6EI} \\ b' = -\dfrac{p\ell}{2EI} \end{cases}$$

donc

$$f(x_2) = \frac{2+\nu}{6EI}\, p\, x_2^3 + c\, x_2 + d$$

$$g(x_1) = \frac{p}{6EI} x_1^3 - \frac{pl}{2EI} x_1^2 + c' x_1 + d'$$

Encastrement $x_1 = 0$

$$U_1(0,0) = U_2(0,0) = 0$$

$$U_1(0,0) = f(0) = 0 = d \Rightarrow d = 0$$

$$U_2(0,0) = g(0) = 0 = d' \Rightarrow d' = 0$$

$$U_1(0,h) = 0 = f(h) = \frac{(2+\nu)}{6EI} p\, h^3 + c\, h = 0$$

$x_2 = h$

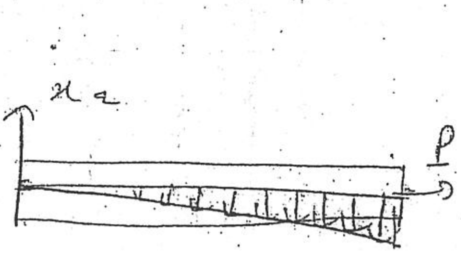
$$c = -\frac{(2+\nu)\,p}{6EI} h^2$$ on calcule c

on tire c'

$$c' = -\frac{(1+\nu)}{EI} p h^2 + c$$

$$= -\frac{(1+\nu)}{EI} p h^2 + \frac{(2+\nu)}{6EI} p h^2$$

$$c' = -\frac{(4+5\nu)}{6EI} p h^2$$



$6°/\ x_2 = x_3 = 0$

$$U_2 = \frac{p}{6EI} x_1^3 - \frac{pl}{2EI} x_1^2 - \frac{4+5\nu}{6EI} p h^2 x_1$$

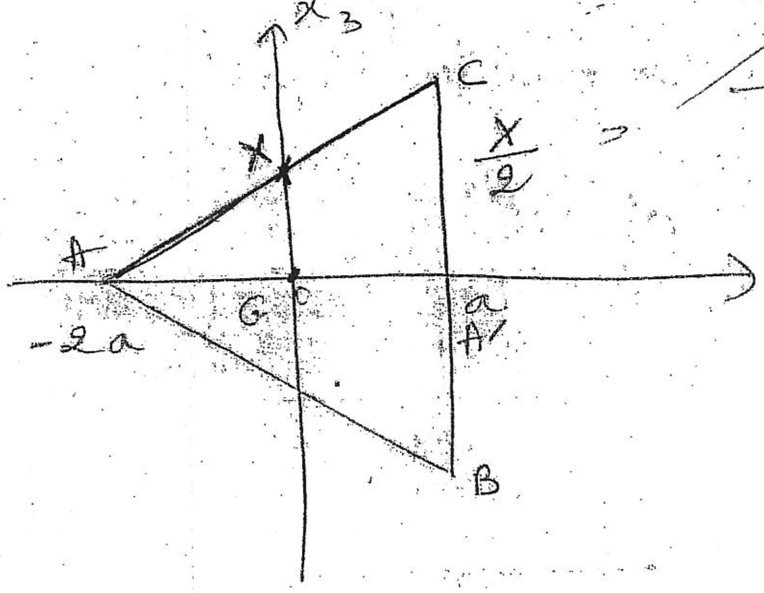
u_2 déplach R_1

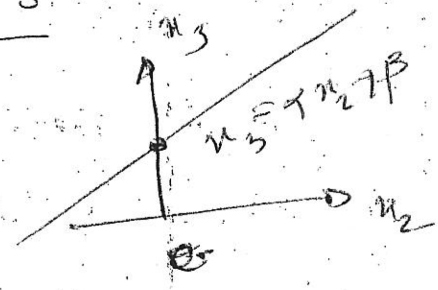
f lèche $x_1 = l$

$$f = U_2(\ell, 0) = \frac{P}{2IE}\ell^2 - \frac{P\ell^2}{2EI} - \frac{4+5\nu}{6EI}\, P h^2 \ell$$

$$f = -\frac{P\ell^3}{3EI} - \frac{4+5\nu}{6EI}\, P h^2 \ell$$

Série N° 4 :





$$\varphi(x_2, x_3) = m\,(x_2 - a)\,(x_2^2 - 9x_3^2 + 4ax_2 + 4a^2)$$

1°/ Mq : la cd aux limites $\varphi = 0$ est satisfaite sur le contour de la section.

2°/ Calculer la contrainte est vérifier l'éq. de la compatibilité.

1°/ $\varphi = 0$, sur le contour

sur BC : $x_2 = a \Rightarrow \varphi = 0$

$$AC^2 = (A'C)^2 + (AA')^2$$

$$X^2 = \frac{X^2}{4} + 9a^2$$

$$\frac{4X^2 - X^2}{4} = 9a^2 \Rightarrow X^2 = 12a^2 \Rightarrow \boxed{X = 2\sqrt{3}\,a}$$

donc $X_3 = \alpha X_2 + \beta$, $\alpha = \frac{\sqrt{3}\,a}{a+2a} = \frac{\sqrt{3}\,a}{3a}$

pour $x_2 = -2a \Rightarrow x_3 = 0$ (pour β)

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times (-2a) + \beta = 0 \Rightarrow \beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,a$$

donc $X_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} X_2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\,a$

$$X_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3} X_2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\,a$$

$$X_3 = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} (X_2 + 2a)$$

$$X_3^2 = \frac{1}{3} (X_2 + 2a)^2$$

$$3X_3^2 = (X_2 + 2a)^2$$

$$\varphi = m(x_2 - a)\left((x_1 + 2a)^2 - 3x_3^2\right)$$

2°/

$$\sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = m(x_2 - a)(-6x_3)$$

$$= -6m x_3 (x_2 - a)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -6m(x_2 - a) \Rightarrow \boxed{\sigma_{22} = -6m(x_2 - a)}$$

$$\sigma_{33} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = m\left(x_2^2 - 3x_3^2 + 4ax_2 + 4a^2\right) + m\left(x_2 - a\right)\left(2x_2 + 4a\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = m\left(2x_2 + 4a\right) + m\left(2x_2 + 4a\right) + 2m\left(x_2 - a\right)$$

$$= 6mx_2 + 6ma$$

$$\boxed{\sigma_{33} = 6m\left(x_2 + a\right)}$$

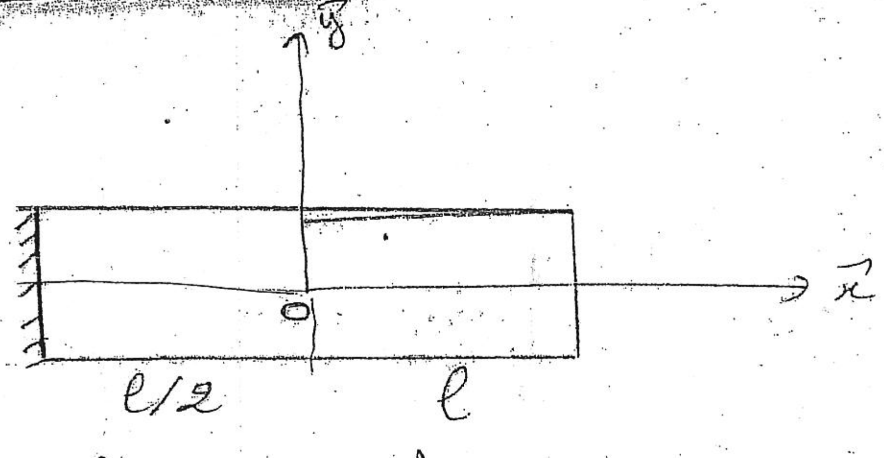
$$\sigma_{23} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3} = +6mx_3$$

Equation d'équilibre :

$$\sigma_{22,2} + \sigma_{23,3} = -6m + 6m = 0$$

$$\sigma_{23,2} + \sigma_{33,3} = 0 + 0 = 0$$

Exercice N° 2 :



$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1°/ La forme de la fct d'Airy possible:

$$\sigma_{xx} = 0 = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \Rightarrow \chi = f(1^{ere}\ d^{\circ})$$

$$\sigma_{yy} = 0 = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \chi = f(1^{ere}\ d^{\circ})$$

$$\sigma_{xy} = a = -\frac{\partial \chi}{\partial x \partial y}$$

donc $\chi(x,y) = \alpha x + by + cxy + d$.

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} = \alpha + cy \Rightarrow \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} = c \Rightarrow c = -a.$$

2°/ on prend $\chi(x,y) = -axy$

on a : $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$

$$\sigma_{xy} \Rightarrow \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{xy} = \frac{1+\nu}{E}a$$

$$\varepsilon_{xx} = U_{x,x} \quad , \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon_{x,y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x}\right)$$

donc
$$\begin{cases} U_x = f(y) = \alpha y^2 + \beta y + \gamma \\ U_y = g(x) = \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma' \end{cases}$$

$$\frac{1+\nu}{E}a = \frac{1}{2}\left(2\alpha y + \beta + 2\alpha' x + \beta'\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 0 \\ 2\alpha' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha' = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1+\nu}{E}\, a = \frac{\beta + \beta'}{2}$$

(le d° de deplacement est n + 1 si le contrainte est de d° n)

donc $\begin{cases} U_x = \beta y + \gamma \\ U_y = \beta' x + \gamma' \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} x = -\frac{l}{2} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow U_x = U_y = 0$

$\begin{cases} U_x = \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ U_y = -\beta' \frac{l}{2} + \gamma' = 0 \Rightarrow \gamma' = \beta' \frac{l}{2} \end{cases}$

$x = -\frac{l}{2}$

$y = \frac{h}{2}$

$U_x = \beta \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \gamma = \beta = 0$

donc

$\forall$ point $U_x = 0$

$$\boxed{U_y = \frac{2(1+\nu)}{E}\, a x + \frac{1+\nu}{E}\, a l}$$