Exercices - Applications linéaires : études pratiques : énoncé

Applications linéaires sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 - AL-0 - *L1* - $\star$

Soit u l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$u(x,y,z)=(-x+y,x-y,-x+z,-y+z).$$

1. Montrer que u est linéaire
2. Soient $\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,\mathcal{F}_3,\mathcal{F}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Calculer $u(\mathcal{E}_1)$, $u(\mathcal{E}_2)$ et $u(\mathcal{E}_3)$ en fonction de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ et $\mathcal{F}_4$.
3. Écrire la matrice de u dans les bases canoniques.
4. Montrer que $\{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,u(\mathcal{E}_1),u(\mathcal{E}_2)\}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
5. Écrire la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,u(\mathcal{E}_1),u(\mathcal{E}_2)\}$.

Exercice 2 - AL-1 - *L1* - $\star$

Soient $\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $w_1=(1,-2,0)$, $w_2=(-1,2,0)$, $w_3=(0,0,2)$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathcal{E}_1)=w_1\ ,u(\mathcal{E}_2)=w_2\ ,u(\mathcal{E}_3)=w_3.$$

1. (a) Exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$. En déduire la matrice de u dans la base canonique.
   (b) Soit $W=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Calculer $u(W)$.
2. (a) Trouver une base de $\ker(u)$ et une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   (b) Montrer que $\mathbb{R}^3=\ker(u)\oplus\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer $\ker(u-Id)$ et $\mathrm{Im}(u-Id)$ où Id désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $u-Id$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 - AL-2 - *L1* - $\star$

Soit $E=\mathbb{R}^3$. On note $\mathcal{B}=\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3\}$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(\mathcal{E}_1)=-2\mathcal{E}_1+2\mathcal{E}_3\ ,u(\mathcal{E}_2)=3\mathcal{E}_2\ ,u(\mathcal{E}_3)=-4\mathcal{E}_1+4\mathcal{E}_3.$$

1. Écrire la matrice de u dans la base canonique.
2. Déterminer une base de $\ker\ u$. u est-il injectif ? peut-il être surjectif ? Pourquoi ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\ u$. Quel est le rang de u ?
4. Montrer que $E=\ker\ u\bigoplus\mathrm{Im}\ u$.

Exercice 4 - - *L1/Math Sup* - $\star$

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x,y,z)=(x+z,y-x,z+y,x+y+2z).$$

1. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\mathbb{R}^3$. En déduire une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Déterminer une base de $\ker(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 5 - - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par $f(x,y,z,t) = (x-y+z, y+z+t, 0, x+y+3z+2t)$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension du noyau de f ? Montrer que la famille de vecteurs (u,v) avec $u=(-2,-1,1,0)$ et $v=(-1,-1,0,1)$ forme une base de $\ker(f)$.

Exercice 6 - **Définie par une base** - *L1/Math Sup* - ⋆

On considère dans $\mathbb{R}^2$ les trois vecteurs $u=(1,1)$, $v=(2,-1)$ et $w=(1,4)$.

1. Démontrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que $f(u)=(2,1)$, $f(v)=(1,-1)$ et $f(w)=(5,a)$?

Exercice 7 - **A noyau fixé** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $u=(1,0,0)$ et $v=(1,1,1)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont le noyau est E.

Exercice 8 - **Application linéaire à contraintes** - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que, si (e_1,e_2,e_3,e_4) désigne la base canonique, alors on a

1. $f(e_1)=e_1-e_2+e_3$ et $f(2e_1+3e_4)=e_2$.
2. $\ker(f)=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+2y+z=0 \text{ et } x+3y-t=0\}$.

Applications linéaires et leurs matrices

Exercice 9 - **Donnée par une matrice** - *L1/Math Sup* - ⋆

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 10 - **Réduction** - *L1/Math Sup* - ⋆

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 11 - Changement de base - *L1/Math Sup* - $\star$

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3,\ e'_2 = e_3 + e_1,\ e'_3 = e_1 + e_2 \text{ et } f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ puis que (f'_1, f'_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Qelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Exercice 12 - Changement de base... - *L1/Math Sup* - $\star$

Soient $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définies par $u(x, y) = (x + 2y, 2x - y, 2x + 3y)$ et $v(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x + y - 3z)$.

1. Montrer que u et v sont linéaires et donner les matrices de $u, v, u \circ v$ et $v \circ u$ dans les bases canoniques de leurs espaces de définition respectifs. En déduire les expressions de $u \circ v(x, y, z)$ et $v \circ u(x, y)$.
2. Soit $\mathcal{B}_2 = \{\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\}$ et $\mathcal{B}_3 = \{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3\}$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathcal{B}'_2 := \{\mathcal{E}'_1, \mathcal{E}'_2\}$ et $\mathcal{B}'_3 := \{\mathcal{F}'_1, \mathcal{F}'_2, \mathcal{F}'_3\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ resp., où $\mathcal{E}'_1 := \mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}'_2 := \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}'_1 := \mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}'_2 := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ et $\mathcal{F}'_3 := \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3$.
3. Donner la matrice P de passage de la base $\mathcal{B}_2$ à la base $\mathcal{B}'_2$ puis la matrice Q de passage de la base $\mathcal{B}_3$ à la base $\mathcal{B}'_3$.
4. Écrire la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}_3$ puis dans les bases $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}'_3$ et enfin celle de v dans les bases $\mathcal{B}'_3$ et $\mathcal{B}'_2$.

Exercice 13 - Surjective ? - *L1/Math Sup* - $\star$

Soient α, β deux réels et

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α et β pour lesquelles l'application linéaire associée à $M_{\alpha,\beta}$ est surjective.

Autres applications linéaires

Exercice 14 - Application linéaire définie sur les matrices - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans $M_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 15 - Avec des polynômes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Montrer que $f:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X],\ P\mapsto P-XP'$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image

Exercice 16 - Applications linéaires dans un espace de polynômes - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E dans lui-même par

$$u(P)=P+(1-X)P'.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Déterminer une base de $\ker(u)$.
4. Montrer que $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 17 - Variante polynômiale - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit $E=\mathbb{C}[X]$, p un entiel naturel et f l'application de E dans E définie par $f(P)=(1-pX)P+X^2P'$. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 18 - Encore des polynômes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$ et soit f l'application définie sur E par $f(P)=P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$.

1. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
2. Quel est le degré de $f(X^p)$? En déduire $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
3. Soit Q un polynôme de $\mathrm{Im} f$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P tel que $f(P)=Q$ et $P(0)=P'(0)=0$.

Exercice 19 - Sur un espace de fonctions sinus/cosinus - *L1/Math Sup* - ⋆

On note E l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui s'écrivent sous la forme $\lambda\cos+\mu\sin$ avec λ et μ réels.

1. Montrer que E est un espace vectoriel. En donner une base et calculer sa dimension.
2. Montrer que la dérivation des fonctions de la variable réelle définit une application de E dans E. On note D cette application.
3. Rappeler les résultats vus au lycée permettant d'affirmer que D est un endomorphisme.
4. Donner la matrice de D dans la base trouvée en 1.
5. Montrer que D est un isomorphisme, c'est-à-dire que pour tout vecteur v de E, il existe un unique vecteur u de E tel que $Du=v$.
6. Montrer qu'on peut alors construire un isomorphisme D^{-1} de E tel que, pour tout vecteur u de E on a $D\left(D^{-1}(u)\right)=u$ et $D^{-1}\left(D(u)\right)=u$.
7. Donner la matrice de D^{-1} dans la base trouvée en 1.

Exercice 20 - Application aux polynômes - *2ème année* - ⋆⋆⋆

Le but de cet exercice est l'étude de l'application Δ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $(\Delta P)(X)=P(X+1)-P(X)$.

1. Question préliminaire : Soit (P_n) une famille de $\mathbb{R}[X]$ telle que pour chaque n, $\deg(P_n)=n$. Prouver que (P_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que Δ est une application linéaire. Calculer son noyau et son image.
3. Montrer qu'il existe une unique famille $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que $H_0=1$, $\Delta(H_n)=H_{n-1}$, et $H_n(0)=0$. Montrer que (H_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$.
4. Soit $P\in\mathbb{R}_p[X]$. Montrer que P peut s'écrire
$$P=\sum_{n=0}^{p}(\Delta^n P)(0)H_n.$$
5. Montrer que l'on a $(\Delta^n P)(0)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k P(k)$.
6. Montrer que pour tout n, $H_n=\frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.
7. En déduire que, pour tout polynôme P de degré p, les assertions suivantes sont équivalentes :
   i. P prend des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$.
   ii. P prend des valeurs entières sur $\{0,\dots,p\}$.
   iii. Les coordonnées de P dans la base (H_n) sont des entiers.
   iv. P prend des valeurs entières sur $p+1$ entiers consécutifs.