Autour du produit

Exercice 1 - Produits possibles - *L1/Math Sup* - $\star$

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Quels sont les produits matriciels possibles ? Quelles sont les matrices carrées et les matrices symétriques ?

Exercice 2 - Des calculs de produits - *L1/Math Sup* - $\star$

Calculer lorsqu'ils sont définis les produits AB et BA dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3 - Commutant - *L1/Math Sup* - $\star$

Soient a et b des réels non nuls, et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$. Trouver toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A, c'est-à-dire telles que $AB = BA$.

Exercice 4 - Annulateur - *L1/Math Sup* - $\star$

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer AB, AC. Que constate-t-on ? La matrice A peut-elle être inversible ? Trouver toutes les matrices $F \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AF = 0$ (où 0 désigne la matrice nulle)

Exercice 5 - Produit non commutatif - *L1/Math Sup* - $\star$

Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice 6 - Puissance n-ième - avec la formule du binôme - *L1/Math Sup* - $\star$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 7 - Puissance n-ième - avec un polynôme annulateur - *L1/Math Sup* - $\star\star$

1. Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Déduire de la question précédente la valeur de A^n, pour $n \geq 2$.

RANG

Exercice 8 - Explicite... - *L1/Math Sup* - $\star$

Calculer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ **2**. $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$

3. $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ **4**. $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 9 - Avec un paramètre - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Déterminer, suivant la valeur du réel a, le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ a & a^2 & a^3 & 1 \\ a^2 & a^3 & 1 & a \\ a^3 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10 - Décomposition de matrices de rang donné - *L1/Math Sup/L2/Math Spé/Oral Mines* - $\star\star$

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $\mathrm{rg}(M) = 1$, il existe deux vecteurs X et Y tels que $M = XY^t$.
2. Montrer que si $\mathrm{rg}(M) = 2$, il existe deux couples de vecteurs indépendants (X, Z) et (Y, T) tels que $M = XY^t + ZT^t$.
3. Généraliser aux matrices de rang k.

INVERSION DE MATRICES

Exercice 11 - Inverser une matrice sans calcul ! - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

2. Soit $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\1&-2&0\end{pmatrix}$. Calculer A^3-A. En déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.
3. Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$. Calculer $A^2-3A+2I_3$. En déduire que A est inversible, et calculer A^{-1}.

Exercice 12 - Inverse avec calcul ! - *L1/Math Sup* - ⋆

Dire si les matrices suivantes sont inversibles et, le cas échéant, calculer leur inverse :

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&2\\0&2&3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}i&-1&2i\\2&0&2\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 13 - Matrice inverse et polynômes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ définie par $a_{i,j}=\binom{j-1}{i-1}$ si $i\leq j$, $a_{i,j}=0$ sinon.

1. Interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer son inverse.

Exercice 14 - Matrice à diagonale dominante - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

Soit $A\in M_n(\mathbb{C})$ une matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire que pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, on a $|a_{i,i}|>\sum_{j\neq i}a_{i,j}$. Montrer que la matrice A est inversible.

Etude d'ensembles de matrices

Exercice 15 - Centre - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit $n\geq 1$. Pour $(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient situé à la i-ième ligne et à la j-ième colonne qui vaut 1.

1. Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$.
2. En déduire quelles sont les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 16 - Un sous-espace vectoriel de matrices - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit E le sous ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ défini par

$$E=\left\{M(a,b,c)=\begin{pmatrix}a&0&c\\0&b&0\\c&0&a\end{pmatrix}\ :\ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}.$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ stable pour la multiplication des matrices. Calculer $\dim(E)$.

Exercice 17 - Matrices symétriques et anti-symétriques - *Math. Sup* - ⋆⋆

Montrer que l'ensemble des matrices symétriques ($A={}^tA$) et l'ensemble des matrices anti-symétriques ($A=-{}^tA$) sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18 - Matrices magiques - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

Soit $n \geq 3$. On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *magique* si, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} m_{j,i} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,n+1-i}.$$

On note $MG(n)$ l'ensemble des matrices magiques d'ordre n.

1. Que signifie être une matrice magique ?
2. Montrer que $MG(n)$ est un espace vectoriel.
3. Montrer que l'application $\phi : MG(n) \to \mathcal{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-2}$, qui envoie la matrice M qui s'écrit
$$M = \begin{pmatrix} & & & & m_{1,n} \\ & M_1 & & & \vdots \\ & & & & m_{n-2,n} \\ m_{n-1,1} & \dots & \dots & m_{n-1,n-1} & m_{n-1,n} \\ m_{n,1} & \dots & \dots & m_{n,n-1} & m_{n,n} \end{pmatrix}$$
sur $(M_1, m_{1,n}, m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, m_{n-1,4}, \dots, m_{n-1,n-2})$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.
4. En déduire la dimension de $MG(n)$.

Applications des matrices

Exercice 19 - Matrices et suites - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soient (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites réelles telles que $a_0 = 1$, $b_0 = 2$, $c_0 = 7$, et vérifiant les relations de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & 3a_n + b_n \\ b_{n+1} & = & 3b_n + c_n \\ c_{n+1} & = & 3c_n \end{array} \right.$$

On souhaite exprimer a_n, b_n, et c_n uniquement en fonction de n.

1. On considère le vecteur colonne $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire que $X_n = A^n X_0$.
2. Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer N^2, N^3, puis N^p pour $p \geq 3$.
3. Montrer que :
$$A^n = 3^n I + 3^{n-1} n N + 3^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} N^2.$$
4. En déduire a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 20 - Matrice et systèmes linéaires - *Ecrit du Capes* - ⋆⋆⋆

Soit $I = [a, b]$ un intervalle, $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ trois fonctions continues sur I, à valeurs réelles, et pour lesquelles on peut trouver des coefficients réels $a_1,\ a_2,\ a_3$ non tous nuls tels que la fonction

$$\theta = a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3$$

admette au moins trois racines distinctes $x_1,\ x_2,\ x_3$. Prouver qu'il existe des réels $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_1\theta_k(x_1) + \lambda_2\theta_k(x_2) + \lambda_3\theta_k(x_3) = 0,$$

pour $k = 1, 2$ ou 3.

MATRICES - UN PEU DE THÉORIE

Exercice 21 - Matrices de rang r - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Prouver qu'une matrice A de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r s'écrit comme somme de r matrices de rang 1.

Exercice 22 - Matrice équivalente - *L2/Math Spé/Oral Centrale* - ⋆⋆

Montrer qu'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui n'est pas inversible est équivalente à une matrice nilpotente.

Exercice 23 - Matrices de trace nulle - *Math Spé/L2* - ⋆⋆⋆

1. Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est une homothétie si et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale.

Exercice 24 - Matrices nilpotentes - *Math Spé/L2* - ⋆⋆

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle que $A^k = 0$ pour un entier k. Montrer qu'il existe en fait $m \leq n$ avec $A^m = 0$.
2. Existe-t-il une matrice complexe A dont le carré soit égal à la matrice suivante ?

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25 - Morphismes de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ - *Math. Spé* - ⋆⋆⋆⋆

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini, $\phi : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ un morphisme de groupes, $\phi(M)$ s'exprimant comme un polynôme des coefficients de M. Montrer que ϕ est une puissance du déterminant.