Applications linéaires sur $\mathbb{R}^n$

Exercice 1 - AL-0 - *L1* - $\star$

1. Soient $X = (x, y, z)$, $X' = (x, y, z)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a
$$\begin{array}{rcl} u(X+X') & = & u(x+x', y+y', z+z') \\ & = & (-x-x'+y+y', x+x'-y-y', -x-x'+z+z', -y-y'+z+z') \\ & = & ((-x+y)+(-x'+y'), (x-y)+(x'-y'), (-x+z)+(-x'+z'), \\ & & \quad (-y+z)+(-y'+z')) \\ & = & (-x+y, x-y, -x+z, -y+z)+(-x'+y', x'-y', -x'+z', -y'+z') \\ & = & u(X)+u(X'). \end{array}$$
De même, on a
$$\begin{array}{rcl} u(\lambda X) & = & u(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ & = & u(-\lambda x+\lambda y, \lambda x-\lambda y, -\lambda x+\lambda z, -\lambda y+\lambda z) \\ & = & \lambda(-x+y, x-y, -x+z, -y+z) \\ & = & u(X). \end{array}$$
Ainsi, u est linéaire. On aurait pu aussi utiliser la caractérisation des applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$: chaque coordonnée de $u(x, y, z)$ s'écrit comme combinaison linéaire de (x, y, z).
2. On a
$$\begin{array}{rcl} u(\mathcal{E}_1) & = & u(1,0,0) = (-1,1,-1,0) = -\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2-\mathcal{F}_3 \\ u(\mathcal{E}_2) & = & u(0,1,0) = (1,-1,0,-1) = \mathcal{F}_1-\mathcal{F}_2-\mathcal{F}_4 \\ u(\mathcal{E}_3) & = & u(0,0,1) = (0,0,1,1) = \mathcal{F}_3+\mathcal{F}_4. \end{array}$$
3. On applique la définition et on trouve
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Puisque $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4 et que la famille considérée a quatre éléments, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. C'est particulièrement facile ici, car la famille est *triangulaire* par rapport à la base canonique de $\mathbb{R}^4$. En effet, si on a $a\mathcal{F}_1+b\mathcal{F}_2+cu(\mathcal{E}_1)+du(\mathcal{E}_2) = 0$, ceci se traduit en
$$\left\{\begin{array}{rcl} a-c+d & = & 0 \\ b+c-d & = & 0 \\ -c & = & 0 \\ -d & = & 0 \end{array}\right. \iff a = b = c = d = 0.$$

5. Il s'agit d'exprimer chaque $u(\mathcal{E}_i)$ en fonction des vecteurs de la nouvelle base. Pour deux des vecteurs, c'est très facile, car $u(\mathcal{E}_1)=u(\mathcal{E}_1)$ et $u(\mathcal{E}_2)=u(\mathcal{E}_2)$! C'est plus difficile pour $u(\mathcal{E}_3)$, qu'il faut exprimer dans la nouvelle base. Autrement dit, il faut trouver a,b,c,d de sorte que
$$a\mathcal{F}_1+b\mathcal{F}_2+cu(\mathcal{E}_1)+du(\mathcal{E}_2)=(0,0,1,1).$$
Ceci revient à résoudre le système
$$\left\{\begin{array}{rcl}a-c+d&=&0\\ b+c-d&=&0\\ c&=&-1\\ d&=&-1\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}a&=&0\\ b&=&0\\ c&=&-1\\ d&=&-1\end{array}\right.$$
Ainsi, on $u(\mathcal{E}_3)=-u(\mathcal{E}_1)-u(\mathcal{E}_2)$ et la matrice de u dans les bases $\{\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2,\mathcal{E}_3\}$ et $\{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2,u(\mathcal{E}_1),u(\mathcal{E}_2)\}$ est donc
$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2 - AL-1 - *L1* - ⋆

1. (a) On a $w_1=\mathcal{E}_1-2\mathcal{E}_2$, $w_2=-\mathcal{E}_1+2\mathcal{E}_2$ et $w_3=2\mathcal{E}_3$. On en déduit que la matrice de u est
$$\begin{pmatrix}1&-1&0\\-2&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$
   (b) On a
$$u(W)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-2&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-y\\-2x+2y\\2z\end{pmatrix}.$$
2. (a) On a
$$W\in\ker(u)\iff\left\{\begin{array}{rcl}x-y&=&0\\-2x+2y&=&0\\z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&y\\y&=&y\\z&=&0\end{array}\right.$$
   On a donc $\ker(u)=\mathrm{vect}(-1,1,0)$. Le vecteur $(1,1,0)$ est une base de $\ker(u)$. Par le théorème du rang, la dimension de $\mathrm{Im}(u)$ vérifie
$$\dim(\mathbb{R}^3)=\dim(\mathrm{Im}(u))+\dim(\ker(u))$$
   ce qui donne $\dim(\mathrm{Im}(u))=2$. Une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$ est donnée par (w_1,w_2,w_3). Il suffit d'en extraire une famille libre à deux éléments. C'est par exemple le cas de (w_1,w_3). On en déduit que (w_1,w_3) est une base de $\mathrm{Im}(u)$.
   (b) Il suffit de démontrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, avec les calculs précédents, il suffit de prouver que la famille $((1,1,0),w_1,w_3)$ est libre. C'est facile et laissé au lecteur.

3. On calcule $u - Id$:
$$(u-Id)(x,y,z) = \begin{pmatrix} -y \\ -2x+y \\ z \end{pmatrix}.$$
On a donc
$$(u-Id)(x,y,z) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& 0 \\ -2x+y &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ y &=& 0 \\ z &=& 0 \end{array} \right.$$
On a donc $\ker(u-Id) = \{0\}$ et donc u est injective. Par le théorème du rang, on a $\dim(\mathrm{Im}(u-Id)) = 3$. Comme $\mathrm{Im}(u-Id)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, on a en fait $\mathrm{Im}(u-Id) = \mathbb{R}^3$. u est aussi surjective. C'est donc un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3 - AL-2 - *L1* - $\star$

1. On écrit en colonne $u(\mathcal{E}_i)$. On trouve
$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
2. On commence par calculer $u(x,y,z)$. On a
$$u(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x-4z \\ 3y \\ 2x+4z \end{pmatrix}.$$
On a donc
$$(x,y,z) \in \ker(u) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x-4z &=& 0 \\ 3y &=& 0 \\ 2x+4z &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -2z \\ y &=& 0 \\ z &=& z \end{array} \right.$$
On a donc $\ker(u) = \mathrm{vect}(-2,0,1)$ et le vecteur $(-2,0,1)$ est une base de $\ker(u)$. $\ker(u)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, et donc l'endomorphisme u n'est pas injectif. Comme u est un endomorphisme de l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^3$, il n'est pas non plus surjectif, car on a alors
$$u \text{ injectif} \iff u \text{ surjectif} \iff u \text{ bijectif}.$$
3. On sait, d'après le théorème du rang, que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension 2. On sait aussi que $\big(u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2), u(\mathcal{E}_3)\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}u$. Il suffit donc d'en extraire une famille libre à deux éléments. Mais on vérifie immédiatement que $\big(u(\mathcal{E}_1), u(\mathcal{E}_2)\big)$ est une telle famille. C'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$ qui est de rang 2.
4. Il suffit de montrer que la réunion d'une base de $\ker(u)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Autrement dit, avec les calculs réalisés précédemment, il suffit de voir que la famille $\big((-2,0,1),(-2,0,2),(0,3,0)\big)$ est une famille libre. C'est très facile et laissé au lecteur...

Exercice 4 - - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Utilisant la définition de f, on a :

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & (1,-1,0,1) \\ f(e_2) & = & (0,1,1,1) \\ f(e_3) & = & (1,0,1,2) \end{array}$$

   On sait que la famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. Or, $f(e_3) = f(e_1) + f(e_2)$ et donc $f(e_3)$ est combinaison linéaire de $(f(e_1), f(e_2))$. Ainsi, la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est déjà génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. De plus, elle est libre car les deux vecteurs sont non-nuls et ne sont pas proportionnels. On en déduit que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. On a :

$$(x,y,z) \in \ker(f) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ -x+y & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ x+y+2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -z \\ z & = & z \end{array} \right.$$

   On en déduit que le vecteur $(-1,-1,1)$ engendre $\ker(f)$. Comme il est non-nul, c'est une base de $\ker(f)$. En particulier, on trouve que $\ker(f)$ est de dimension 1, ce que l'on peut aussi obtenir en utilisant le théorème du rang.

3. f n'est pas injective, car son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. f n'est pas surjective, car son image n'est pas $\mathbb{R}^3$ tout entier. En effet, la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ est 2, et non 3.

Exercice 5 - - *L1/Math Sup* - ⋆

1. On a

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & (1,0,0,1) = e_1 + e_4 \\ f(e_2) & = & (-1,1,0,1) = -e_1 + e_2 + e_4 \\ f(e_3) & = & (1,1,0,3) = e_1 + e_2 + 3e_4 \\ f(e_4) & = & (0,1,0,2) = e_2 + 2e_4 \end{array}$$

2. Utilisant les résultats de la question précédente, on trouve que la matrice A est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. On remarque que $f(e_3) = 2f(e_1) + f(e_2)$ et que $f(e_4) = f(e_1) + f(e_2)$.
4. La famille $(f(e_1), f(e_2), f(e_3), f(e_4))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. De plus, $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaison linéaire de $f(e_1)$ et $f(e_2)$. On en déduit que la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est déjà une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$. De plus, cette famille est libre car $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont deux vecteurs non-nuls qui ne sont pas proportionnels. On en déduit que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, qui est de dimension 2.
5. D'après le théorème du rang, on a :
$$4 = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\ker(f)) + 2,$$
ce qui prouve que $\dim(\ker(f)) = 2$. De plus, les vecteurs u et v sont éléments de $\ker(f)$. En effet,
$$\begin{array}{rcl} f(u) & = & (-2+1+1, -1+1, 0, -2-1+3) = (0,0,0,0) \\ f(v) & = & (-1+1, -1+1, -1-1+2) = (0,0,0,0) \end{array}$$
La famille (u, v) est donc une famille de deux vecteurs de $\ker(f)$ qui est libre (car u et v sont non-nuls et non proportionnels). De plus, $\ker(f)$ est de dimension deux. On en déduit que (u, v) est une base de $\ker(f)$.

Exercice 6 - Définie par une base - *L1/Math Sup* - ⋆

1. (u, v) sont deux vecteurs non-nuls de $\mathbb{R}^2$, non colinéaires. Ils forment une famille libre de $\mathbb{R}^2$ de deux vecteurs. Or, $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2. (u, v) est donc une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Exprimons w dans la base (u, v). On a $w = 3u - v$. Pour que f soit linéaire, on doit avoir
$$f(w) = 3f(u) - f(v)$$
soit
$$(5, a) = 3(2, 1) - (1, -1) = (5, 4).$$
Pour que f soit linéaire, il est donc nécessaire que $a = 4$. Réciproquement, on définit ainsi bien une application linéaire, en définissant l'image d'une base.

Exercice 7 - A noyau fixé - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Première méthode : Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même est définie par
$$f(x, y, y) = (a_1x + b_1y + c_1z, a_2x + b_2y + c_2z, a_3x + b_3y + c_3z)$$
où les a_i, b_i, c_i sont des réels. On va déterminer quelle(s) valeur(s) leur donner pour que $f(u) = 0$ et $f(v) = 0$. On a
$$f(u) = 0 \iff (a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0) \text{ et } f(v) = 0 \iff (a_1+b_1+c_1, a_2+b_2+c_2, a_3+b_3+c_3) = (0, 0, 0).$$
On obtient $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et $b_1 = -c_1$, $b_2 = -c_2$, $b_3 = -c_3$. Ainsi, l'application f suivante convient
$$(x, y, z) \mapsto (y - z, y - z, y - z).$$
Puisque $u, v \in \ker(f)$, le sous-espace vectoriel E engendré par (u, v) est contenu dans $\ker(f)$. De plus, f n'étant pas identiquement nulle, son noyau est de dimension au plus 2. On en déduit

que $\ker(f)$ est de dimension exactement 2, et que $\ker(f) = E$.
Deuxième méthode : Une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même est complètement définie par l'image d'une base. Complétons d'abord (u, v) en une base (c'est possible, car c'est une famille libre). Posons $w = (0, 0, 1)$. Alors on vérifie facilement que la famille (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ à trois éléments, donc une base de $\mathbb{R}^3$. On définit f par

$$f(u) = (0, 0, 0),\ f(v) = (0, 0, 0),\ f(w) = (1, 0, 0).$$

Ceci définit parfaitement f et, comme dans la première méthode, on prouve que le noyau de f est exactement E.

Exercice 8 - Application linéaire à contraintes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Un endomorphisme est uniquement défini par l'image d'une base. Il suffit donc de calculer quelles doivent être les valeurs de $f(e_1)$, $f(e_2)$, $f(e_3)$, $f(e_4)$. On sait déjà que :

- $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$.
- $f(3e_4) = e_2 - 2f(e_1)$, soit $f(e_4) = \frac{1}{3}(-2e_1 + 3e_2 - 2e_3)$.

Reste à définir $f(e_2)$ et $f(e_3)$. Pour cela, on va chercher une base de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + 2y + z = 0 \text{ et } x + 3y - t = 0\}$. On a aisément :

$$(x, y, z, t) \in F \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& y \\ z &=& -x - 2y \\ t &=& x + 3y \end{array}\right.$$

On en déduit que $\{(1, 0, -1, 1), (0, 1, -2, 3)\}$ est une base de F. Puisqu'on veut que $F = \ker(f)$, on doit donc avoir

$$f(e_1) - f(e_3) + f(e_4) = 0 \implies f(e_3) = \frac{1}{3}e_1 + \frac{1}{3}e_3$$

et

$$f(e_2 - 2e_3 + 3e_4) = 0 \implies f(e_2) = 2f(e_1) - f(e_4).$$

Donc l'endomorphisme f, s'il existe, est unique. Réciproquement, soit f l'endomorphisme défini par les formules précédentes. Alors le premier point est vérifié, et puisque l'image d'une base de F est envoyée par f sur 0, on sait que $F \subset \ker(f)$. Pour démontrer l'égalité, il suffit, puisque $\dim(F) = 2$, de prouver que $\dim(\ker(f)) \leq 2$. Par le théorème du rang, il suffit de prouver que $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 2$. Mais $f(e_1)$ et $f(e_4)$ sont deux vecteurs indépendants de $\mathrm{Im}(f)$. Et donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) \geq 2$, ce qui prouve le résultat.

Applications linéaires et leurs matrices

Exercice 9 - Donnée par une matrice - *L1/Math Sup* - ⋆

Le noyau de f est l'ensemble des triplets (x, y, z) tels que

$$f(x, y, z) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x + y + z &=& 0 \\ -x + 2y - 2z &=& 0 \\ 3y - z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -4y \\ y &=& y \\ z &=& 3y \end{array}\right.$$

Le noyau de f est donc la droite vectorielle de vecteur directeur $(-4,1,3)$. Par le théorème du rang, $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension 2. De plus, $f(e_1)=(1,-1,0)$ et $f(e_2)=(1,2,3)$ sont clairement indépendants. Donc $(f(e_1),f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 10 - Réduction - *L1/Math Sup* - ⋆

On a

$$f(x,y,z)=0 \iff x+y-z=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} x&=&x\\ y&=&y\\ z&=&x+y\end{array}\right. .$$

$\ker(f)$ est donc un plan vectoriel, de base (u,v) avec $u=(1,0,1)$ et $v=(0,1,1)$. D'après le théorème du rang, on sait que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension 1. Il est engendré par exemple par le vecteur non nul $w=f(e_1)=(1,-3,-2)$.
On remarque que $w=u-3v$ est élément de $\ker(f)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)\subset\ker(f)$ et donc $f^2=0$. Par suite, $f^n=0$ pour tout $n\geq 2$ et la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est elle aussi nulle. Donc $M^n=0$ pour tout $n\geq 2$.

Exercice 11 - Changement de base - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Puisqu'on a des familles de trois (respectivement deux) vecteurs dans un espace de dimension trois (resp. deux), il suffit de prouver que l'on a des familles libres. Pour (f_1',f_2') c'est clair puisque les vecteurs ne sont pas colinéaires. Pour (e_1',e_2',e_3'), si on a une égalité du type $ae_1'+be_2'+ce_3'=0$, alors on obtient

$$(b+c)e_1+(a+c)e_2+(a+b)e_3=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} b+c&=&0\\ a+c&=&0\\ a+b&=&0\end{array}\right. \iff a=b=c=0.$$

   La famille (e_1',e_2',e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Notons P la matrice de passage de (e_1,e_2,e_3) à (e_1',e_2',e_3') et Q la matrice de passage de (f_1,f_2) à (f_1',f_2'). Alors on a :

$$P=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix} \text{ et } Q=\frac12\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}.$$

   Si B est la matrice de u dans les nouvelles bases, alors la formule du changement de base nous dit que $B=Q^{-1}AP$. Or,

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

   de sorte que

$$B=\begin{pmatrix}-1&3&6\\1&3&-4\end{pmatrix}.$$

Exercice 12 - Changement de base... - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Remarquons d'abord que u et v sont clairement linéaires. Notons A (resp. B) les matrices de u (resp. v) dans leur base canonique. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$u \circ v$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Sa matrice est donnée par le produit matriciel AB. $v \circ u$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Sa matrice est donnée par le produit matriciel BA. On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 8 & -1 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$u \circ v(x) = (5x - 5z, -5y + 5z, 8x - y - 7z) \text{ et } v \circ u(x, y) = (-x + 7y, -2x - 6y).$$

2. Il suffit de vérifier que les deux familles sont libres, puisqu'elles comptent le même nombre de vecteurs que la dimension de l'espace. Pour $\mathcal{B}_2'$, c'est clair puisque les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Pour $\mathcal{B}_3'$, on traduit une égalité du type $a\mathcal{F}_1' + b\mathcal{F}_2' + c\mathcal{F}_3' = 0$ en

$$(a + b + c)\mathcal{F}_1 + (b + c)\mathcal{F}_2 + c\mathcal{F}_3 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a + b + c & = & 0 \\ b + c & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right. \iff a = b = c = 0.$$

3. La matrice de passage est la matrice des coordonnées des nouveaux vecteurs exprimés en fonction des anciens vecteurs. On a donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Notons C la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_2'$ et $\mathcal{B}_3$. Comme on ne change la base que au départ, la formule de changement de base nous donne

$$C = AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons D la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}_2'$ et $\mathcal{B}_3'$. Cette fois, on change de base à la fois au départ et à l'arrivée. La formule de changement de base nous donne $D = Q^{-1}AP$. Après calculs, on trouve

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notons enfin E la matrice de v dans les nouvelles bases. La formule de changement de base nous donne $E = P^{-1}BQ$ (attention à la place de P et Q ! ! !). On obtient après calculs :

$$P^{-1} = P \text{ et } E = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 - Surjective ? - *L1/Math Sup* - $\star$

Il suffit de chercher les valeurs de α et β pour lesquelles le rang de cette matrice est 3. On calcule le rang par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(M_{\alpha,\beta}) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 0 & -7 & 2-2\alpha & 1-2\beta \\ 0 & 4 & 2+\alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 + L_1 \end{matrix} \\ &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta \\ 0 & -7 & 2-2\alpha & 1-2\beta \\ 0 & 0 & 18-\alpha & 4-\beta \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 7L_3 + 4L_2 \end{matrix}. \end{aligned}$$

La matrice est donc de rang 3, sauf si $\alpha = 18$ *et* $\beta = 4$.

Autres applications linéaires

Exercice 14 - Application linéaire définie sur les matrices - *L1/Math Sup* - $\star\star$

La preuve de la linéarité de f est laissée au lecteur. Rappelons que la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ avec

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit de calculer l'image par f de ces matrices, et de les exprimer dans la base canonique. Mais on a

$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1E_{1,1} + 0E_{1,2} + 1E_{2,1} + 0E_{2,2},$$

$$f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0E_{1,1} - 1E_{1,2} + 0E_{2,1} + 1E_{2,2},$$

$$f(E_{2,1}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} + 0E_{2,2},$$

$$f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0E_{1,1} + 0E_{1,2} + 2E_{2,1} + 0E_{2,2}.$$

La matrice de f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est donc

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15 - Avec des polynômes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soient $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda P+Q) & = & (\lambda P+Q)-X(\lambda P+Q)' \\ & = & \lambda P+Q-X(\lambda P'+Q') \\ & = & \lambda(P-XP')+Q-XQ'=f(P)+\lambda f(Q). \end{array}$$

Ainsi, f est bien une application linéaire. De plus P est dans $\ker(f)$ si et seulement si $P-XP'=0$. Ecrivons $P(X)=\sum_{k=0}^n a_kX^k$. Alors on a :

$$P-XP'=\sum_{k=1}^n (a_k-ka_k)X^k+a_0.$$

On en déduit que la suite (a_k) vérifie $a_0=0$ and $a_k(1-k)=0$ pour k allant de 1 à n. Ainsi, $a_k=0$ pour $k\neq 1$, la valeur de a_1 étant quelconque. On en déduit que $\ker(f)=\mathrm{vect}(X)$. D'autre part, soit $Q\in\mathbb{R}[X]$. Si $Q=\sum_{k=0}^m b_kX^k$ est élément de $\mathrm{Im}(f)$, il existe $P=\sum_{k=0}^n a_kX^k$ tel que $Q=P'-XP$ soit, d'après le calcul précédent,

$$b_k=a_k(1-k).$$

On en déduit $b_1=0$ et donc $Q\in F=\mathrm{vect}(X^k;\ k\neq 0)$. Réciproquement, soit $Q=\sum_{k=0}^m b_kX^k$ un élément de F, c'est-à-dire un polynôme sans terme en X. Alors, si on pose $a_k=(1-k)^{-1}b_k$, $k\neq 0$, et $a_1=0$, le calcul précédent montre que $P'-XP=Q$ et donc $Q\in\mathrm{Im}(f)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f)=F$.

Exercice 16 - Applications linéaires dans un espace de polynômes - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Remarquons d'abord que si $P\in E$, $u(P)$ est bien un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, et donc u envoie bien E dans E. Pour montrer qu'il s'agit d'un endomorphisme, on doit prouver que u est linéaire. Mais, si $P,Q\in E$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} u(P+\lambda Q) & = & (P+\lambda Q)+(1-X)(P+\lambda Q)' \\ & = & P+\lambda Q+(1-X)(P'+\lambda Q') \\ & = & P+(1-X)P'+\lambda(Q+(1-X)Q') \\ & = & u(P)+\lambda u(Q). \end{array}$$

   u est donc bien linéaire.
2. Puisque $(1,X,X^2,X^3)$ est une base de E, on sait que $u(1),u(X),u(X^2),u(X^3)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. On va pouvoir en extraire une base. On a :

$$u(1)=1,\ u(X)=1,\ u(X^2)=-X^2+2X,\ u(X^3)=-2X^3+3X^2.$$

   On en déduit que $(u(1),u(X^2),u(X^3))$ est une famille libre (ce sont des polynômes de degrés différents) et que $u(X)$ s'écrit comme combinaison linéaire de ceux-ci (on a même $u(X)=u(1)$). Ainsi, ceci prouve que $(u(1),u(X^2),u(X^3))$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$.

3. Ecrivons $P(X)=aX^3+bX^2+cX+d$, et calculons $u(P)$:
$$u(P)=-2aX^3+(3a-2b)X^2+2bX+c+d.$$
Ainsi, on obtient
$$u(P)=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2a&=&0\\ 3a-2b&=&0\\ 2b&=&0\\ c+d&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a&=&0\\ b&=&0\\ c&=&c\\ d&=&-c\end{array}\right.$$
Ainsi, $P\in\ker(u) \iff \exists c\in\mathbb{R},\ P=c(X-1)$. Une base de $\ker(u)$ est donné par le polynôme $X-1$.
4. La réunion des bases de $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ trouvées précédemment est $(1,-X^2+2X,-2X^3+3X^2,X-1)$. Ces polynômes sont tous de degrés différents. Ils forment une base de E. Ceci prouve que $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont supplémentaires.

Exercice 17 - Variante polynômiale - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Il est facile de vérifier que f est linéaire. Pour savoir si elle est injective, on calcule son noyau. Soit $P=\sum_{i=0}^n a_iX^i$ un polynôme. Alors
$$f(P)=\sum_{i=0}^n a_iX^i-p\sum_{i=0}^n a_iX^{i+1}+\sum_{i=1}^n ia_iX^{i+1}$$
soit, après un changement d'indice
$$f(P)=a_0+\sum_{i=1}^n(a_i-(p+1-i)a_{i-1})X^i+(n-p)a_nX^{n+1}.$$
Si $f(P)=0$, on obtient donc $a_0=0$ et $a_i=(p+1-i)a_{i-1}$ pour $1\leq i\leq n$ ce qui entraine $a_i=0$ pour tout $i=0,\dots,n$. Ainsi, $P=0$, le noyau de f est réduit à $\{0\}$ et f est injective.
D'autre part, si P est un polynôme de degré n, alors le calcul précédent montre que

- pour $n=p$, le degré de $f(P)$ est inférieur ou égal à n, et donc différent de $p+1$;
- pour $n\neq p$, alors $f(P)$ est de degré $n+1\neq p+1$.

Ainsi, $\mathrm{Im}(f)$ ne contient pas de polynômes de degré $p+1$. Donc f n'est pas surjective.

Exercice 18 - Encore des polynômes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. f est clairement une application linéaire. Puisque $\deg(P(X+1)+P(X-1)-2P(X))\leq \deg(P(X))$, elle est bien à image dans E.
2. On a
$$f(X^p)=\sum_{k=0}^p\binom{p}{k}(1+(-1)^k)X^{p-k}-2X^p.$$
Le coefficient devant X^p est nul (il vaut 1+1-2), celui devant X^{p-1} aussi, et celui devant X^{p-2} vaut $p(p-1)$. Ainsi, si $p\geq 2$, le degré de $f(X^p)$ est $p-2$. Sinon, $f(X^p)$ est le polynôme nul. On en déduit, par linéarité, que $f(P)$ est de degré $\deg(P)-2$ si $\deg(P)\geq 2$, et est le polynôme nul sinon. Ainsi, $\ker(f)=\mathbb{R}_1[X]$. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f))=p+1-2=p-1$. De plus, on a vu que $\mathbb{R}_{p-1}[X]\subset\mathrm{Im}(f)$. C'est donc que $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}_{p-1}[X]$.

3. Soit $G = \{P \in \mathbb{R}_p[X];\ P(0) = P'(0) = 0\}$. Alors G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_p[X]$. On vérifie facilement que, pour $P(X) = a_pX^p + \cdots + a_0$, $P \in G \iff a_0 = a_1 = 0$, et donc une base de G est $(X^2, X^3, \dots, X^p)$. Ainsi, G est de dimension $p-1$. Notons $g : G \to \mathrm{Im}(f),\ P \mapsto f(P)$. g est injective, car $G \cap \ker(f) = \{0\}$. De plus, $\dim(G) = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Ainsi, g est une bijection de G sur $\mathrm{Im}(f)$. Ceci prouve le résultat.

Exercice 19 - Sur un espace de fonctions sinus/cosinus - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Il suffit de remarquer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. C'est très facile :
   – la fonction nulle est élément de E : $0 = 0\cos + 0\sin$;
   – si $f = \lambda\cos + \mu\sin$ et $g = \lambda'\cos + \mu'\sin$ et $a \in \mathbb{R}$, alors
   $$af + g = (a\lambda + \lambda')f + (a\mu + \mu')g$$
   est élément de E.
   On peut aussi tout simplement remarquer que $E = \mathrm{vect}(\cos, \sin)$.
   La famille $(\cos, \sin)$ est, par définition de E, une famille génératrice de E. De plus, cette famille est libre. En effet, si $\lambda\cos + \mu\sin = 0$, ceci signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lambda\cos(x) + \mu\sin(x) = 0$. Si on choisit $x = 0$, on trouve $\lambda = 0$, et si on choisit $x = \pi/2$, on trouve $\mu = 0$. La famille $(\cos, \sin)$ est donc une base de E qui est un espace vectoriel de dimension 2.
2. Soit $f = \lambda\cos + \mu\sin$ un élément de E. Utilisant les formules bien connues concernant la dérivation du sinus et du cosinus, on a
   $$Df = f' = \mu\cos - \lambda\sin \in E$$
   et donc $Df \in E$.
3. On sait que, pour toutes fonction dérivables f, g et tout réel c, $(f+g)' = f' + g'$ et $(cf)' = cf'$, ce qui se réécrit, pour les fonctions de E, en
   $$D(f+g) = Df + Dg \text{ et } D(cf) = CD(f).$$
   Autrement dit, D est un endomorphisme de E.
4. Puisque $D(\cos) = -\sin$ et $D(\sin) = \cos$, la matrice de D dans la base $(\cos, \sin)$ est donnée par
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
5. Puisque D est un endomorphisme de E qui est de dimension finie égale à deux, il suffit de prouver que D est injectif. Mais, si $f = \lambda\cos + \mu\sin$ et $Df = 0$, alors
   $$-\lambda\sin + \mu\cos = 0 \implies \lambda = \mu = 0$$
   puisque la famille $(\cos, \sin)$ est libre. On en déduit que D est injective, donc bijective.

6. Le contraire de dériver, c'est intégrer. On pose H l'endomorphisme de E défini par l'image de la base :
$$H(\cos) = \sin \text{ et } H(\sin) = -\cos.$$
Alors
$$D \circ H(\cos) = D(\sin) = \cos \text{ et } D \circ H(\sin) = D(-\cos) = \sin.$$
Par linéarité, on obtient que $D \circ H = Id_E$. De même, on a $H \circ D = Id_E$. Ainsi, $H = D^{-1}$ est l'isomorphisme réciproque de D.
7. On trouve, par le même raisonnement
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20 - Application aux polynômes - *2ème année* - ⋆⋆⋆

1. Pour montrer que la famille est libre, il suffit de prouver que toute sous-famille finie est libre ou encore que, pour tout p, la famille $(P_0, \dots, P_p)$ est libre. Imaginons que l'on ait une relation de liaison $\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_p P_p = 0$, où l'un au moins des α_i est non nul. Soit q le plus grand des i pour lequel $\alpha_i \neq 0$. Alors, le polynôme $\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_q P_q$ est de degré q, et en même temps il est nul : c'est bien sûr une contradiction. La famille (P_n) est donc libre. D'autre part, fixons un $p \geq 0$ et Q un polynôme de degré p. Puisque $(P_0, \dots, P_p)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_p[X]$ qui est de dimension $p+1$, il en est une base. Ainsi, Q peut s'écrire $\alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_p P_p$, ce qui prouve que la famille (P_n) est génératrice : c'est donc une base de $\mathbb{R}[X]$.
2. La linéarité ne pose pas de problèmes. D'autre part, si le terme dominant de P est $\alpha_n X^n$, le terme dominant de $\Delta(P)$ est $\alpha_n \times nX^{n-1}$. Ainsi, $\Delta P = 0$ si et seulement $P \in \mathbb{R}_0[X]$ (ie si P est un polynôme constant). D'autre part, posons pour $n \geq 0$ $P_n = \Delta(X^{n+1})$. La famille (P_n) est une famille de polynômes à degrés étagés. En outre, cette famille est contenue dans $\mathrm{Im}(\Delta)$. On a donc, d'après le résultat de la question préliminaire, $\mathbb{R}[X] = \mathrm{vect}(P_n;\ n \geq 0) \subset \mathrm{Im}(\Delta)$. Ceci prouve que Δ est surjective.
3. On note $E = \{P \in \mathbb{R}[X];\ P(0) = 0\}$. E est un supplémentaire de $\mathbb{R}_0[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, Δ induit un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$. On montre alors l'existence et l'unicité de H_n par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant donné par l'énoncé. Supposons $(H_0, \dots, H_{n-1})$ uniquement construits. Alors, la remarque précédente fait qu'il existe un unique H_n de E tel que $\Delta(H_n) = H_{n-1}$. On montre alors facilement par récurrence que pour chaque n, $\deg(H_n) = n$ (cela vient du fait que $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ si P n'est pas un polynôme constant. D'après le résultat de la question préliminaire, (H_n) forme une base de $\mathbb{R}[X]$.
4. Puisque (H_n) est une base de $\mathbb{R}[X]$, et puisqu'en outre la famille (H_n) est à degrés étagés, il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ tels que $P = \alpha_0 H_0 + \dots + \alpha_p H_p$. Calculons $\Delta^n(P)$, sachant que $\Delta^n(H_k) = H_{k-n}$ si $n \leq k$, $\Delta^n(H_k) = 0$ sinon. On obtient donc :
$$\Delta^n P = \alpha_n H_0 + \dots + \alpha_p H_{p-n}.$$
On évalue ensuite ce polynôme en 0, en utilisant le fait que $H_k(0) = 0$ si $k \neq 0$, mais vaut 1 si $k = 0$. On obtient donc :
$$\Delta^n P(0) = \alpha_n.$$

5. On va montrer que
$$(\Delta^n P)(X)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k P(X+k),$$
l'évaluation en 0 faisant le reste. Notons $T(P)(X)=P(X+1)$; clairement, $T^k(P)(X)=P(X+k)$. Remarquons que $\Delta=T-I$. Puisque T et I commutent, il est légitime d'appliquer la formule du binôme, et on a :
$$\Delta^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k T^k.$$
Il suffit d'évaluer ceci en P pour obtenir le résultat annoncé.
6. Posons $Q_n=\frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$. Il est clair que $Q_0=1$, $Q_n(0)=0$, et un calcul quasi-immédiat montre que $\Delta Q_n=Q_{n-1}$. Ainsi, la famille (Q_n) satisfait les conditions uniques qui définissent la famille (H_n). C'est donc que $Q_n=H_n$ pour tout n.
7. Il est d'abord clair que *i.* $\implies$ *ii.*. Que *ii.* entraîne *iii.* résulte du calcul de $\Delta^n P(0)$ et de la décomposition de P dans la base H_n. Remarquons d'autre part que si a est dans $\{0,\dots,n-1\}$, $H_n(a)=0$, et si $a\geq n$, $H_n(a)=C_a^n\in\mathbb{Z}$. Si $a<0$, a s'écrit $-b$ avec $b>0$, et on a $H_n(a)=(-1)^k C_{b+k-1}^k$. La décomposition de P dans la base H_n fait alors que $P(a)\in\mathbb{Z}$ pour tout $a\in\mathbb{Z}$, et on a prouvé l'équivalence des 3 premiers points. Enfin, il est clair que *i.* $\implies$ *iv*. Si P prend des valeurs entières sur $\{a,\dots,a+p\}$, alors $Q(X)=P(X+a)$ prend des valeurs entières sur $\{0,\dots,p\}$, et par l'équivalence des 3 premiers points, Q prend des valeurs entières sur $\mathbb{Z}$ tout entier. Il en est de même pour P.