Exercices - Applications linéaires : études théoriques : corrigé

Généralités sur les applications linéaires

Exercice 1 - Avez-vous compris ce qu'étaient le noyau et l'image ? - *L1/Math Sup* - ⋆

Supposons d'abord que $g\circ f=0$, et prenons $y\in\mathrm{Im}f$. Alors il existe $x\in E$ tel que $y=f(x)$. Mais alors, $g(y)=g\circ f(x)=0$, et donc $y\in\ker g$.
Reciproquement, supposons que $\mathrm{Im}f\subset\ker g$. Alors, pour tout $x\in E$, $f(x)\in\mathrm{Im}f\subset\ker g$, et donc $g(f(x))=0$, prouvant que $g\circ f=0$.

Exercice 2 - Isomorphisme - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On définit $g:G\to\mathrm{Im}(f)$ par $g(x)=f(x)$. Alors :
- g est linéaire : c'est une conséquence directe du fait que f est linéaire.
- g est injective : si $x\in\ker(g)$, alors $x\in G$ et $x\in\ker(f)$. Comme G et $\ker(f)$ sont supplémentaires, on a $x=0$.
- g est surjective : prenons $y\in\mathrm{Im}(f)$. Alors $y=f(x)$ avec $x\in E$. Décomposons x en $x=u+v$ avec $u\in G$ et $v\in\ker(f)$. Alors $y=f(x)=f(u)+f(v)=f(u)=g(u)$ avec $u\in G$, ce qui prouve bien que g est surjective.

Ainsi, g définit un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3 - Factorisation d'une application linéaire surjective - *L1/L2/Math Sup* - ⋆⋆

1. Soit y dans F. Alors, $y=f\circ g(y)=f(g(y))$, et donc f est surjective. Remarquons que ceci ne dépend pas du tout du fait que les applications f et g sont linéaires. D'ailleurs, il est facile de prouver qu'une application $f:E\to F$ est surjective si et seulement s'il existe $g:F\to E$ telle que $f\circ g=Id_F$. Ce qu'il s'agit de prouver maintenant, c'est que si f est linéaire, alors on peut choisir aussi g linéaire.
2. (a) On montre que $\hat f$ est injective et surjective.
   - $\hat f$ est injective : si $x\in G$ est tel que $\hat f(x)=0$, alors $f(x)=0$ et donc $x\in\ker(f)$. Comme $x\in G\cap\ker(f)=\{0\}$, on a $x=0$ et donc $\hat f$ est injective (il est clair que $\hat f$ est linéaire).
   - $\hat f$ est surjective : soit y élément de F. On sait qu'il existe x de E telle que $f(x)=y$. Décomposons x en $x=x_1+x_2$ avec $x_1\in\ker(f)$ et $x_2\in G$. Alors $f(x)=f(x_1)+f(x_2)=0+\hat f(x_2)$ et donc $\hat f(x_2)=f(x)=y$ ce qui prouve que $\hat f$ est surjective.

   (b) Soit y dans F, $y=f(x)$. Alors $f\circ g(y)=f\circ\hat f^{-1}(f(x))=f(x)=y$. Donc $f\circ g=Id_F$.
3. Si on admet (ou si on sait) que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire, alors on a prouvé que $f\in\mathcal{L}(E,F)$ est surjective si et seulement s'il existe $g\in\mathcal{L}(F,E)$ tel que $f\circ g=Id_F$.

Exercice 4 - Toujours liés - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

L'hypothèse nous dit, que pour tout x non-nul, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x)=\lambda_x x$. On doit prouver qu'il existe un scalaire λ tel que $\lambda_x=\lambda$ pour tout x de E, ou encore que $\lambda_x=\lambda_y$ quels que soient x et y non-nuls. Si la famille (x,y) est liée, c'est clair, car $y=\mu x$ et $\mu\lambda_y x=\lambda_y y=f(y)=\mu f(x)=\mu\lambda_x x$ et on peut simplifier par $\mu x\neq 0$. Si la famille $(x,f(x))$ est libre, calculons $f(x+y)$. D'une part,

$$f(x+y)=\lambda_{x+y}(x+y)=\lambda_{x+y}x+\lambda_{x+y}y,$$

d'autre part,

$$f(x+y)=f(x)+f(y)=\lambda_x x+\lambda_y y.$$

Puisque la famille (x,y) est libre, toute décomposition d'un vecteur à l'aide de combinaison linéaire de ces vecteurs est unique. On obtient donc $\lambda_x=\lambda_y=\lambda_{x+y}$, ce qui est le résultat voulu.

Exercice 5 - Factorisation et inclusion de noyaux - *L1/L2/Math Sup/Math Spé* - $\star\star\star$

Une inclusion est immédiate : si $v=f\circ u$, et $x\in\ker(u)$, avec $v(x)=f(u(x))=f(0)=0$ et donc $\ker(u)\subset\ker(v)$.
Réciproquement, supposons que $\ker(u)\subset\ker(v)$. Prenons $y\in\mathrm{Im(u)}$. Alors $y=u(x)$ pour un x dans E. Nécessairement, on a $v(x)=f(u(x))=f(y)$ et donc f doit être définie sur $\mathrm{Im}(u)$ par $f(y)=v(x)$ pour $y=u(x)$.
On considère donc un supplémentaire S de $\mathrm{Im}(u)$ dans F et on définit f sur la somme directe $\mathrm{Im}(u)\oplus S$ par

$$\left\{\begin{array}{rcll} f(y)&=&0&\textrm{si } y\in S\\ f(y)&=&v(x)&\textrm{si } y\in\mathrm{Im}(u)\textrm{ et } y=u(x).\end{array}\right.$$

Cette définition a bien un sens. En effet, si $y=u(x_1)=u(x_2)$, alors $x_1-x_2\in\ker(u)\subset\ker(v)$ et donc $v(x_1)=v(x_2)$. De plus, f ainsi défini est bien linéaire. Il suffit de verifier la linéarité sur $\mathrm{Im}(f)$. Mais prenons $y_1=u(x_1),\ y_2=u(x_2)\in\mathrm{Im}(f)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. Alors

$$y_1+\lambda y_2=u(x_1)+\lambda u(x_2)=u(x_1+\lambda x_2)$$

et donc

$$f(y_1+\lambda y_2)=v(x_1+\lambda x_2)=v(x_1)+\lambda v(x_2)=f(x_1)+\lambda f(x_2).$$

Ceci achève la preuve du résultat.

Exercice 6 - Factorisation et inclusion des images - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

- $(ii)\implies(i)$: c'est l'inclusion facile. En effet, si $x\in\mathrm{Im}(v)$, alors $x=v(y)=u(w(y))$ et donc $x\in\mathrm{Im}(u)$.
- $(i)\implies(ii)$: commençons par réfléchir à ce que l'on souhaite... Pour $x\in E$, on veut définir $w(x)\in F$ tel que $u(w(x))=v(x)$. Mais, puisque $\mathrm{Im}(v)\subset\mathrm{Im}(u)$, alors il existe $y\in E$ tel que $v(x)=u(y)$. On a envie de poser $w(x)=y$, ce qui donne la bonne factorisation. Le problème c'est que plusieurs y peuvent répondre à ce problème... On va se simplifier la tâche en considérant F_1 un supplémentaire de $\ker u$ dans F. Alors $u_{|F_1}$ est un isomorphisme de F_1 sur G. En particulier, on peut définir l'isomorphisme réciproque $f:G\to F_1$ vérifiant $u(f(x))=x$. On pose alors $w(x)=f(v(x))$. w est bien un élément de $\mathcal{L}(E,F)$, et
$$\forall x\in E, u(w(x))=u(f(v(x)))=v(x).$$

Symétrie et projections

Exercice 7 - Projections - *L1/L2/Math Sup/Math Spé* - $\star\star$

1. (a) Soit $y \in \mathrm{Im}(p)$. Alors $y = p(x)$. On en déduit $p(y) = p(p(x)) = p(x) = y$. Prouvons maintenant que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont en somme directe. Si $y \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, alors $y = p(y) = 0$. Pour prouver que les deux sous-espaces sont supplémentaires, il y a deux alternatives :
   - la première est d'utiliser le théorème du rang (le faire !). Cette méthode suppose néanmoins que E est de dimension finie, ce que l'on ne suppose pas à ce moment de l'exercice.
   - la seconde est de faire à la main ! Prenons donc $x \in E$, et posons $y = x - p(x)$. Il est clair que $x = p(x) + y$, et comme $p(y) = 0$, $y \in \ker(p)$.

   (b) Considérons une base de E formée par la réunion d'une base de $\mathrm{Im}(p)$ et d'une base de $\ker(p)$ (on obtient bien une base de E car les sous-espaces sont supplémentaires). Alors la matrice de p dans cette base a exactement la forme voulue. La trace de p (ie la trace de cette matrice) vaut donc le nombre de vecteurs dans une base de $\mathrm{Im}(p)$, donc la dimension de $\mathrm{Im}(p)$, c'est-à-dire encore le rang de p.
2. Il est clair que $\mathrm{Im}(p_j) = E_j \subset \ker(p_i)$ ce qui prouve que $p_i \circ p_j = 0$. D'autre part, si $x \in E_i$, on a
$$p_1(x) + \cdots + p_i(x) + \cdots + p_n(x) = 0 + \cdots + x + \cdots + 0 = x.$$
On a $p_1 + \cdots + p_n = Id_E$ sur chaque E_i, donc sur tout l'espace par "recollement". En outre, le calcul de la trace du projecteur à l'aide de la trace de sa matrice dans cette base montre que cette trace vaut exactement le nombre de vecteurs d'une base de $Im(p)$, c-est-à-dire exactement le rang de p.

Exercice 8 - Matrice d'une projection - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On commence par chercher une base de P et une base de D. On a
$$(x,y,z) \in P \iff \left\{\begin{array}{rcll} x &=& x & \\ y &=& & y \\ z &=& x & -y \end{array}\right.$$
Autrement dit, si on pose $u = (1,0,1)$ et $v = (0,1,-1)$, alors (u,v) est une base de P. On cherche ensuite une base (ici, un vecteur directeur) de D. Clairement, $(1,-1,1)$ convient. On vérifie ensuite que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$. La matrice de la projection dans cette base est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Si P est la matrice de passage de la base canonique à la base (u,v,w), alors la matrice recherchée est PAP^{-1}. Or, on peut écrire P directement,
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$
et, après calculs, on obtient
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, PAP^{-1} = P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9 - Famille de deux projecteurs - *L1/Math Sup* - ⋆

Si (p, q) n'est pas libre, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $q = \lambda p$. Alors

$$\lambda p = q = q^2 = \lambda^2 p^2 = \lambda^2 p.$$

On a donc $\lambda^2 = \lambda$, c'est-à-dire $\lambda = 1$ ce qui contredit $p \neq q$.

Exercice 10 - Somme de deux projecteurs - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. La condition est suffisante. En effet, si $p \circ q = q \circ p = 0$, alors

   $$(p + q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p + q$$

   et donc $p + q$ est un projecteur.
   Réciproquement, si $p + q$ est un projecteur, alors le calcul précédent donne

   $$p \circ q + q \circ p = 0.$$

   On a alors :

   $$p \circ q = p^2 \circ q = p \circ (p \circ q) = -p \circ (q \circ p) = -(p \circ q) \circ p = (q \circ p) \circ p = q \circ p.$$

   On obtient donc $2p \circ q = 0$, ce qui entraîne $p \circ q = 0$ et par suite $q \circ p = 0$.
2. Prouvons d'abord que $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont en somme directe. En effet, si $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$, alors $x = p(x)$ et $x = q(x)$ d'où $x = p(x) = p(q(x)) = 0$.
   D'autre part, il est clair que $\mathrm{Im}(p + q) \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Réciproquement, soit $z = p(x) + q(y) \in \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Im}(q)$. Alors

   $$p(z) = p^2(x) + p \circ q(y) = p(x) \text{ et } q(z) = q \circ p(x) + q^2(y) = q(y).$$

   Ainsi, $z = (p + q)(z) \in \mathrm{Im}(p + q)$.
   Enfin, on a toujours $\ker(p) \cap \ker(q) \subset \ker(p + q)$. Réciproquement, si $p(x) + q(x) = 0$, alors puisque $\mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Im}(q)$ sont en somme directe, on a $p(x) = 0$ et $q(x) = 0$, d'où $x \in \ker(p) \cap \ker(q)$.

Exercice 11 - Sous-espace stable et projecteur - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Supposons d'abord que $u \circ p = p \circ u$, et prouvons que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u. En effet, si $p(x) = 0$, alors $p \circ u(x) = u \circ p(x) = 0$ et donc $u(x) \in \ker p$. De plus, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, alors $x = p(y)$ et $u(x) = u \circ p(y) = p(u(y)) \in \mathrm{Im}(p)$. Remarquons que cette implication n'utilise pas du tout le fait que p est un projecteur.
Réciproquement, supposons que $\ker p$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u, et prouvons que u et p commutent. Prenons $x \in E$. Il se décompose de manière unique en $x = y + z$, avec $y \in \ker(p)$ et $z \in \mathrm{Im}(p)$. En particulier, $p(y) = 0$ et $p(z) = z$. Mais alors, on a d'une part

$$u(p(x)) = u(z)$$

et d'autre part, puisque $u(y) \in \ker(p)$ et $u(z) \in \mathrm{Im}(p)$ par hypothèse :

$$p(u(x)) = p(u(y)) + p(u(z)) = u(z).$$

Ainsi, $u(p(x)) = p(u(x))$ et les deux endomorphismes p et u commutent.

Exercice 12 - Endomorphismes annulant un polynôme de degré 2 - *L1/Math Sup* - $\star$

1. On remarque que
$$(\beta - \alpha)Id_E = (f - \alpha Id_E) - (f - \beta Id_E).$$
Autrement dit, si $x \in E$, on a $x = y + z$ avec
$$y = (f - \alpha Id_E)(y_1) \text{ et } y_1 = \frac{1}{\beta - \alpha}x$$
et
$$z = (f - \beta Id_E)(z_1) \text{ et } z_1 = \frac{1}{\alpha - \beta}x.$$
2. La relation s'écrit encore
$$f^2 - (\alpha + \beta)f + \alpha\beta Id_E = 0$$
soit
$$f \circ \frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta)Id_E) = Id_E$$
et
$$\frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta)Id_E)circf = Id_E$$
ce qui prouve que f est inversible, d'inverse $\frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta)Id_E)$.
3. On commence par prouver que les espaces vectoriels sont en somme directe. En effet, si $x \in \ker(f - \alpha Id_E) \cap \ker(f - \beta Id_E)$, alors
$$f(x) = \alpha x \text{ et } f(x) = \beta x$$
ce qui prouve que $(\beta - \alpha)x = 0 \implies x = 0$. D'autre part, la relation implique que $\mathrm{Im}(f - \beta Id_E) \subset \ker(f - \alpha Id_E)$. Mais dans cette relation, tout commute et on a aussi
$$(f - \beta Id_E) \circ (f - \alpha Id_E) = 0$$
et donc $\mathrm{Im}(f - \alpha Id_E) \subset \ker(f - \beta Id_E)$. Il suffit maintenant d'appliquer le résultat de la première question pour conclure. En effet, si $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{Im}(f - \alpha Id_E)$ et $z \in \mathrm{Im}(f - \beta Id_E)$, alors $x = y + z$ avec $y \in \ker(f - \beta Id_E)$ et $z \in \mathrm{Im}(f - \alpha Id_E)$.
4. On utilise à nouveau le résultat de la question 1. En effet, avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $p(x) = z$ et donc
$$p(x) = (f - \beta Id_E)\left(\frac{1}{\alpha - \beta}x\right).$$

Exercice 13 - Base de projecteurs - *L2/Math Spé* - $\star\star$

1. On sait que $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$. M est donc la matrice d'un projecteur si et seulement $M^2 = M$.

2. Il suffit de prendre le carré de ces matrices. Il est clair que $E_{i,i}^2 = 1$. De plus,

$$(E_{i,i} + E_{i,j})^2 = E_{i,i}^2 + E_{i,i}E_{i,j} + E_{i,j}E_{i,i} + E_{i,j}^2 = E_{i,i} + E_{i,j} + 0 + 0.$$

   Ceci prouve que $E_{i,i} + E_{i,j}$ est la matrice d'un projecteur.

3. Considérons la famille constituée par les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$, pour $1 \leq i, j \leq n$ et $j \neq i$. Il suffit de démontrer que cette famille est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Elle est constituée de $n + n(n-1) = n^2$ éléments. Il suffit donc de prouver qu'il s'agit d'une famille génératrice. Mais la famille des $(E_{i,j})$ est génératrice et chaque $E_{i,j}$ s'écrit en fonction des éléments précédents : c'est clair pour $E_{i,i}$, et pour $i \neq j$, on a

$$E_{i,j} = (E_{i,i} + E_{i,j}) - E_{i,i}.$$