Réduction pratique de matrices

Exercice 1 - Diagonalisation - 1 - *L1/L2/Math Spé* - $\star$

Procédons d'abord avec A. Son polynôme caractéristique vaut

$$P_A(X)=(X-1)(X-2)(X+4).$$

Il est scindé à racines simples, ce qui assure que A est diagonalisable. Il suffit de chercher pour chaque valeur propre un vecteur propre associé. D'abord pour 1, on résoud AX=X, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}-x+2y-z&=&0\\3x-3y&=&0\\-2x+2y&=&0\end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $x=y=z$ et un vecteur propre est donc donnée par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. On fait de même pour 2 et -4, et on trouve respectivement $\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$. La matrice A est donc semblable à $\mathrm{diag}(1,2,-4)$, la matrice de passage étant

$$P=\begin{pmatrix}1&4&2\\1&3&-3\\1&-2&2\end{pmatrix}.$$

Poursuivons avec B dont on calcule le polynôme caractéristique :

$$P_B(X)=X^3-5X^2+8X-4.$$

1 est racine évidente, on factorise par $X-1$ et finalement on trouve

$$P_B(X)=(X-1)(X-2)^2.$$

On cherche le sous-espace propre associé à 1 en résolvant $BX=X$, c'est-à-dire le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}-x+3y+2z&=&0\\-2x+4y+2z&=&0\\2x-3y-z&=&0\end{array}\right.$$

Ce système est équivalent à $x=y=-z$. Ainsi, le sous-espace propre associé à 1 est de dimension 1, engendré par le vecteur propre $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$. L'étude du sous-espace propre associé à 2 conduit au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl}-2x+3y+2z&=&0\\-2x+3y+2z&=&0\\2x-3y-2z&=&0\end{array}\right.$$

Ces trois équations se ramènent à $2x-3y-2z=0$, qui est l'équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$. Le sous-espace propre associé à 2 est donc de dimension 2, et une base est donnée par les vecteurs $\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. B est donc semblable à la matrice $\mathrm{diag}(1,2,2)$, la matrice de passage P étant donnée par

$$P=\begin{pmatrix}1&3&1\\1&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

Exercice 2 - Diagonalisation - 2 - *L2/Math Spé* - ⋆

La matrice A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont données par les éléments de la diagonale. La seule valeur propre de A est donc π. Si A était diagonalisable, alors il existerait une matrice $P\in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A=P(\pi I_3)P^{-1}.$$

Mais puisque I_3 commute avec toutes les matrices, on aurait

$$A=\pi I_3PP^{-1}=\pi I_3.$$

Ce n'est pas le cas : A n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 3 - Avec un paramètre - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. On calcule le polynôme caractéristique de A. On a

$$\begin{aligned}P_A(X) &= \begin{vmatrix}1-X&0&1\\-1&2-X&1\\2-m&m-2&m-X\end{vmatrix} =_{C_1+C_2\to C_2}\begin{vmatrix}1-X&0&1\\1-X&2-X&1\\0&m-2&m-X\end{vmatrix}\\ &=_{L_2-L_1\to L_2}\begin{vmatrix}1-X&0&1\\0&2-X&0\\0&m-2&m-X\end{vmatrix}=(1-X)\begin{vmatrix}2-X&0\\m-2&m-X\end{vmatrix}\\ &= (1-X)(2-X)(m-X).\end{aligned}$$

   Les valeurs propres de f sont donc 1,2 et m. En particulier, si $m=1$ ou 2, f n'admet que deux valeurs propres.

2. Si $m\neq 1$ et $m\neq 2$, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet trois valeurs propres distinctes : f est donc diagonalisable. Si $m=1$, le polynôme caractéristique de f est $(1-X)^2(2-X)$. f est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à 2. Cherchons ce sous-espace (rappelons qu'on a $m=1$). Pour $u=(x,y,z)$, on a

$$f(u)=u\iff\left\{\begin{array}{rcl}z&=&0\\-x+y+z&=&0\\x-y&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl}x&=&x\\y&=&x\\z&=&0\end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$. L'espace est de dimension $1\neq 2$: la matrice n'est pas diagonalisable.
Supposons maintenant $m=2$. On doit chercher cette fois la dimension de $\ker(f-2I)$. On a, pour $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=2u \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+z &=& 0\\ -x+z &=& 0\\ 0 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x\\ y &=& y\\ z &=& x\end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f-2I)$ est donnée par la famille des deux vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,0)$. En particulier, $\ker(f-2I)$ est de dimension 2 et f est diagonalisable.

3. On va commencer par diagonaliser f. On a déjà cherché une base du sous-espace propre correspondant à la valeur propre 2. Pour la valeur propre 1 (attention, on travaille cette fois avec $m=2$), on a, pour $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=u \iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& 0\\ -x+y+z &=& 0\\ z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x\\ y &=& x\\ z &=& 0\end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$. Notons $u=(1,1,0)$, $v=(0,1,0)$ et $w=(1,0,1)$. Alors (u,v,w) est une base de vecteurs propres de f et dans cette base, la matrice de f est

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base (u,v,w). La matrice P est donnée par

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

et on a $A=PDP^{-1}$. On doit calculer P^{-1}. On trouve

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

De $A=PDP^{-1}$, on déduit facilement par récurrence $A^k=PD^kP^{-1}$. Mais puisque D est diagonale, on a

$$D^k=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^k&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}.$$

Le calcul précédent donne finalement

$$A^k=\begin{pmatrix}1&0&2^k-1\\1-2^k&2^k&2^k-1\\0&0&2^k\end{pmatrix}.$$

Exercice 4 - Trigonalisation - avec indication - *L2/Math Spé* - $\star$

1. On calcule le polynôme caractéristique de f. On trouve $P_f(X) = (1-X)^2(2-X)$. Puisqu'il a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$, l'endomorphisme f est trigonalisable.
2. Pour $u = (x, y, z)$, on a

$$f(u) = u \iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& 0 \\ -x+y+z &=& 0 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& x \\ z &=& 0 \end{array}\right.$$

   Une base de $\ker(f - I)$ est donc donnée par le vecteur $(1, 1, 0)$.
3. On a $f(v) = (1, 1, 1)$ d'où $f(v) - v = u$.
4. On cherche l'espace propre associé à la valeur propre 2. On a, pour $w = (x, y, z)$,

$$f(w) = 2w \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+z &=& 0 \\ -x+z &=& 0 \\ x-y-z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& 0 \\ z &=& x \end{array}\right.$$

   Le vecteur $w = (1, 0, 1)$ est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2. On vérifie facilement que la famille (u, v, w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, donc une base. La matrice de f dans cette base est donnée par

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. On montre par récurrence sur k que $f^k(v) = v + ku$. En effet, c'est vrai pour $k = 1$ et si c'est vrai au rang k, alors

$$f^{k+1}(v) = f(v + ku) = f(v) + kf(u) = v + u + ku = v + (k+1)u.$$

   Puisque $f^k(u) = u$ et $f^k(w) = 2^k w$, on en déduit

$$T^k = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

6. Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u, v, w). Q est do nnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   et on a la relation $A = QTQ^{-1}$. Par récurrence, on montre que $A^k = QT^kQ^{-1}$. Il reste à calculer Q^{-1} et à utiliser le résultat de la question précédente. On trouve

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^k - k & k+1-2^k & k \\ -k & k+1 & k \\ 2^k - 1 & 1 - 2^k & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 - Trigonalisation - sans indication - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On commence par calculer le polynôme caractéristique de A, on trouve $P_A(X) = (X-3)(X-2)^2$. On commence par chercher le sous-espace propre associé à la valeur propre 3, en résolvant $AX = 3X$. Un rapide calcul montre qu'il est engendré par le vecteur propre $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche ensuite le sous-espace propre associé à la valeur propre 2, en résolvant $AX = 2X$. On trouve cette fois qu'il est engendré par le vecteur propre $u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Pour trigonaliser la matrice, il suffit de compléter la base par un troisième vecteur indépendant des deux premiers, par exemple $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $Au_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -6u_1 + u_2 + 2u_3$. La matrice A est donc semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage étant

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a bien sûr pas unicité ni de la matrice triangulaire supérieure à laquelle A est semblable, ni de la matrice de passage.

Exercice 6 - Racine cubique - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On calcule le polynôme caractéristique de A et on trouve

$$P_A(X) = (X-1)(X+8).$$

Les racines du polynôme caractéristique de A sont toutes dans $\mathbb{R}$ et toutes distinctes. A est donc diagonalisable. Il existe donc une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$, avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}.$$

Pour prouver l'existence d'une matrice B telle que $B^3 = A$, l'idée est de d'abord faire la même chose avec D. Mais si

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

alors on a $M^3 = D$. Posons $B = PMP^{-1}$. Alors

$$B^3 = PM^3P^{-1} = PDP^{-1} = A.$$

Remarquons que l'énoncé de l'exercice ne demande pas de calculer B...

Exercice 7 - Application à des suites récurrentes - *L2/Math Spé* - ⋆

1. On calcule le polynôme caractéristique de A. On trouve

$$P_A(X) = (X+1)(X-2)(X-5).$$

$A \in M_3(\mathbb{R})$ a trois valeurs propres, $-1, 2, 5$: A est donc diagonalisable. On cherche les sous-espaces propres associés. Pour -1, on a, pour $X = (x, y, z)$,

$$AX = -X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -3x - 6y & = & 0 \\ 3x + 6y & = & 0 \\ 3x + 6y + 6z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -2y \\ y & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

Le vecteur $(2, -1, 0)$ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. On fait de même avec 2, et on trouve (par exemple) le vecteur propre $(1, -1, 1)$ et pour 5, et on trouve le vecteur propre $(0, 0, 1)$. Ainsi, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

on a $PDP^{-1} = A$. Le calcul de P^{-1} donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a $A = PDP^{-1}$, ce qui entraîne par récurrence $A = PD^nP^{-1}$. D^n se calcule facilement en mettant les coefficients de la diagonale à la puissance n. En effectuant les deux produits de matrice, on trouve finalement :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2.5^n & 5^n \end{pmatrix}.$$

3. On a $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence, on a $X_n = A^n X_0$. Grâce au calcul de A^n effectué à la question précédente, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_n & = & (2(-1)^n - 2^n)u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})v_0 \\ v_n & = & ((-1)^{n+1} + 2^n)u_0 + ((-1)^{n+1} + 2^{n+1})v_0 \\ w_n & = & (-2^n + 5^n)u_0 + (-2^{n+1} + 2.5^n)v_0 + 5^n w_0. \end{array} \right.$$

Exercice 8 - Base de matrices diagonalisables... - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Contrairement à ce que la formulation de la question suggère, c'est effectivement possible. En effet, considérons, pour tout couple (i, j) avec $i \neq j$, la matrice

$$M_{i,j} = D + E_{i,j},$$

où D est la matrice diagonale ayant sur la diagonale les nombres $1,\dots,n$. Pour $i=j$, posons $M_{i,i}=E_{i,i}$. Alors chaque matrice $M_{i,j}$ est diagonalisable. C'est évident si $i=j$ (la matrice est déjà diagonale), et si $i\neq j$, alors $M_{i,j}$ est une matrice triangulaire dont tous les coefficients sur la diagonale sont différents. Ainsi, son polynôme caractéristique est scindé à racines simples et $M_{i,j}$ est diagonalisable. De plus, $M_{i,j}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que c'est une famille génératrice, puisqu'on a une famille de n^2 éléments dans un espace de dimension n^2. Prenons $A=(a_{i,j})$ une matrice. Alors, $B=A-\sum_{i\neq j}a_{i,j}M_{i,j}$ est une matrice diagonale (si vous n'êtes pas convaincu, faites un calcul explicite pour $n=2$). Mais il est clair que chaque matrice diagonale se décompose comme somme des $E_{i,i}$, ie $B=\sum_{i=1}^n \lambda_i M_{i,i}$. Ainsi, toute matrice A est bien combinaison linéaire des $M_{i,j}$.

Exercice 9 - Déduire du cas 2x2 - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. Le polynôme caractéristique de A est X^2-ab. Si $ab>0$, alors il se factorise en $(X-\sqrt{ab})(X+\sqrt{ab})$. Autrement dit, A admet deux valeurs propres distinctes, et donc A est diagonalisable. Si $ab=0$, alors si $a=b=0$, A est déjà diagonale. Si $a=0$ et $b\neq 0$ (ou symétriquement si $b=0$ et $a\neq 0$), la seule valeur propre de A est 0, et donc si A était diagonalisable, elle serait égale à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas diagonalisable. Enfin, si $ab<0$, A n'admet pas de valeurs propres, et donc A n'est pas diagonalisable. En résumé, on a prouvé que A est diagonalisable si et seulement si $a=b=0$ ou $ab>0$.
2. Soit $(e_1,\dots,e_{2p})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2p}$ et soit $E_i=\mathrm{vect}(e_i,e_{2p+1-i})$, pour $1\leq i\leq p$. On a $Ae_i=\alpha_{2p+1-i}e_{2p+1-i}$ et $Ae_{2p+1-i}=\alpha_i e_i$. Chaque sous-espace E_i est donc stable par A, et de plus $\mathbb{R}^{2p}=E_1\oplus E_2\oplus\cdots\oplus E_p$. A est donc diagonalisable si et seulement $A_{|E_i}$ est diagonalisable pour chaque i. Mais la matrice de la restriction de A à E_i est exactement une matrice 2×2 comme celle de la question précédente, avec $b=\alpha_{2p+1-i}$ et $a=\alpha_i$. On conclut finalement que :
$$A \text{ est diagonalisable } \iff \forall i\in\{1,\dots,p\},\ \alpha_i=\alpha_{2p+1-i}=0 \text{ ou } \alpha_i\alpha_{2p+1-i}>0.$$

Exercice 10 - Matrice d'ordre n - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. On calcule le polynôme caractéristique de M_n en retirant la première colonne à la dernière, puis en développant suivant la dernière colonne. On trouve :
$$\begin{aligned}
P_n(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & \dots & \dots & X\\ 1 & 2-X & 1 & \dots & 0\\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots\\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0\\ 1 & 1 & \dots & \dots & (n-1)-X \end{vmatrix}\\
&= (-1)^n X \begin{vmatrix} 1 & 2-X & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 3-X & \dots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 1 & n-2-X\\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} + ((n-1)-X)P_{n-1}(X).
\end{aligned}$$

Pour calculer l'avant-dernier déterminant qui apparait, on retranche l'avant-dernière ligne à la dernière, puis la ligne $n-2$ à la ligne $n-1$, etc. jusqu'à retirer la ligne 1 à la ligne 2. On trouve :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2-X & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-X & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n-2-X \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & X-1 & * & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & X-(n-1) \end{vmatrix}.$$

La matrice que l'on obtient est diagonale, son déterminant est le produit des termes diagonaux, et on obtient bien le résultat voulu.

2. On procède par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n=1$, puisque $P_1(X)=1-X$ et $P_n(0)>0$. Supposons la propriété vraie au rang n et démontrons-la au rang $n+1$. Alors, pour $k\leq n-1$, d'après la formule précédente, on a
$$(-1)^k P_{n+1}(k)=(-1)^k P_n(k)\times(n-k)+0>0.$$
Pour $k=n$, alors
$$(-1)^n P_{n+1}(n)=0+n!>0.$$
3. Pour $k\in\{0,\dots,n-2\}$, le résultat de la question précédente nous dit que $P_n(k)$ et $P_n(k+1)$ sont de signe contraire. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, P_n possède au moins une racine dans l'intervalle $]k,k+1[$, ce qui nous donne $n-1$ racines distinctes. De plus, la limite de P_n en $+\infty$ est $+\infty$ si n est pair, et $-\infty$ si n est impair. Comme $P_n(n-1)$ est positif si n est impair et $P_n(n-1)$ est négatif si n est pair, on trouve encore, par le même théorème, une racine dans l'intervalle $[n,+\infty[$. On a trouvé n racines distinctes pour le polynôme caractéristique de M_n, qui est une matrice d'ordre n. Ainsi, M_n est diagonalisable, et on a trouvé toutes les valeurs propres de M_n. Il y en a bien exactement une dans chaque intervalle proposé.

Exercice 11 - Un bloc - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit $X=\binom{x}{y}$, et soit $\lambda\in C$. Alors on a :

$$BX=\lambda X \iff \left\{\begin{array}{rcl} Ay &=& \lambda x \\ x &=& \lambda y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} Ay &=& \lambda^2 y \\ x &=& \lambda y \end{array}\right.$$

Ainsi, λ est valeur propre de $\mathbb{C}$ si et seulement si λ^2 est valeur propre de A. Pour $\mu\in\mathbb{C}$, notons $E_\mu=\ker(A-\mu I_n)$ et $F_\mu=\ker(B-\mu I_{2n})$. Soit $\mu=\lambda^2\in\mathbb{C}$. Alors on a aussi prouvé que l'application $E_\mu\to F_\lambda, y\mapsto(\lambda y,y)$ est une bijection, et donc $\dim(F_\lambda)=\dim(E_\mu)$.

Puisque A est diagonalisable, on sait que
$$\sum_{i=1}^p \dim(E_{\mu_i})=n,$$
où $\mu_1,\dots,\mu_p$ sont les valeurs propres de A. Si $\mu_i\neq 0$ pour tout i, chaque μ_i admet deux racines carrés complexes distinctes λ_i,λ_i', et on a
$$\sum_{i=1}^p \dim(F_{\lambda_i})+\sum_{i=1}^p \dim(F_{\lambda_i'})=2\sum_{i=1}^p \dim(E_{\mu_i})=2n,$$

et donc B est diagonalisable. Au contraire, si $\mu_1 = 0$, alors on obtient une seule carrée, qui vaut 0, et la somme des dimensions des sous-espaces propres de B vaut

$$\dim(E_1) + 2\sum_{i=2}^{p}\dim(E_{\mu_i}) = 2n - \dim(E_1) < 2n.$$

On en conclut que B est diagonalisable si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A.

Exercice 12 - Triangulaire supérieure par blocs - *L2/Math Spé/Oral Centrale* - ⋆⋆⋆

Supposons que B soit diagonalisable. Alors il existe un polynôme scindé à racines simples, noté P, tel que $P(B) = 0$. Calculons $P(B)$. On montre facilement par récurrence sur n que

$$B^n = \left(\begin{array}{c|c} A^n & nA^n \\ \hline 0 & A^n \end{array}\right).$$

Ainsi, par linéarité, on trouve que

$$P(B) = \left(\begin{array}{c|c} P(A) & AP'(A) \\ \hline 0 & P(A) \end{array}\right).$$

Puisque $P(B)$ est nul, on a aussi $P(A) = 0$ et $AP'(A) = 0$. Le point crucial est de remarquer que, puisque P est scindé à racines simples, on a $P \wedge P' = 1$. En effet, tout diviseur irréductible de P, qui est forcément de la forme $(X - a)$ (car P est scindé), ne peut pas aussi diviser P' (car les racines de P sont simples). Par le théorème de Bézout, on en déduit qu'il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$U(X)P(X) + V(X)P'(X) = 1$$

soit encore

$$XU(X)P(X) + V(X)XP'(X) = X.$$

On évalue cette égalité en A, et puisque $P(A) = 0$ et $AP'(A) = 0$, on trouve

$$0 + 0 = A$$

et donc A doit être la matrice nulle. Réciproquement, si A est la matrice nulle, B est clairement diagonalisable.

Réduction d'autres endomorphismes

Exercice 13 - Transposition - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq 0$ tel que $\phi(M) = \lambda M$. Les termes diagonaux donnent $m_{i,i} = \lambda m_{i,i}$ pour $1 \leq i \leq n$, les termes non-diagonaux donnent $m_{i,j} = \lambda m_{j,i}$, pour $1 \leq j < i \leq n$. On en déduit que $m_{i,j} = \lambda^2 m_{i,j}$ pour tous les couples (i,j). Ceci entraîne que $\lambda = \pm 1$. On distingue plusieurs cas.

- Si $\lambda = -1$, tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 0 et on a $m_{i,j} = -m_{j,i}$. On en déduit que -1 est une valeur propre de ϕ, les vecteurs propres appartenant à $\mathrm{vect}(f_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n)$ avec $f_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$. L'espace propre associé est donc de dimension $n(n-1)/2$.

– Si $\lambda = 1$, on n'a plus de contraintes sur les éléments diagonaux, et $m_{i,j} = m_{j,i}$ pour les éléménts non-diagonaux. On en déduit que 1 est valeur propre, les vecteurs propres étant éléments de $\mathrm{vect}(E_{i,i}, g_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n)$, avec $g_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$. L'espace propre associé est donc de dimension $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

Finalement, puisque $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$, ϕ est bien diagonalisable.

Exercice 14 - Endomorphisme de polynômes - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Commençons par rechercher quelles peuvent êtres les valeurs propres de P. Soit donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ tel que $L(P) = \lambda P$. Alors,

$$L(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k X^k.$$

On en déduit que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on a

$$a_k = \lambda a_{n-k} = \lambda \times (\lambda a_{n-(n-k)}) = \lambda^2 a_k.$$

Si P est un vecteur propre, un de ses coefficients a_k est non-nul, et donc $\lambda^2 = 1$. Les seules valeurs propres possibles pour L sont donc 1 et -1.

Cherchons maintenant les vecteurs propres associés. Le calcul précédent montre que, pour $\lambda = \pm 1$, le polynôme $X^k + \lambda X^{n-k}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ. On distingue alors deux cas :

– $n = 2p + 1$ est impair. Alors pour $k = 0, \dots, p$, on pose

$$P_k(X) = X^k + X^{n-k} \text{ et } Q_k(X) = X^k - X^{n-k}.$$

Alors les familles $(P_k)_{k=0,\dots,p}$ et $(Q_k)_{k=0,\dots,p}$ sont deux familles libres (car elles sont à degré étagé) constituées de vecteurs propres associés respectivement à 1 et -1. Les deux espaces propres associés étant en somme directe, la réunion des deux familles est encore une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$, constituée de $2(p+1) = n + 1$ vecteurs. C'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres pour L : L est bien diagonalisable.

– $n = 2p$ est pair. Le raisonnement est similaire. Simplement, cette fois, on ne peut plus considérer le polynôme Q_p qui est nul. Mais les familles $(P_k)_{k=0,\dots,p}$ et $(Q_k)_{k=0,\dots,p-1}$ sont encore des familles libres de vecteurs propres dont la réunion est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (il y a cette fois $p + 1 + p = 2p + 1 = n + 1$ vecteurs). Dans ce cas aussi, l'endomorphisme L est diagonalisable.

Exercice 15 - Matrice nilpotente - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

1. On va procéder par récurrence sur k. La propriété est vraie si $k = 0$ ou si $k = 1$. Soit un entier $k \geq 1$ tel que la propriété est vraie. Multiplions alors cette égalité à gauche par A. On trouve

$$A^{k+1}B - ABA^k = kA^{k+1}.$$

De même, multiplions à droite par A^k l'égalité $AB - BA = A$. Il vient :

$$ABA^k - BA^{k+1} = A^{k+1}.$$

Si on somme les deux inégalités obtenues, on obtient immédiatement que la propriété est aussi vraie au rang $k + 1$.

2. La vérification est immédiate et laissée au lecteur.
3. Il suffit de remarquer que le résultat de la question 1. entraîne que A^k est un vecteur propre de ϕ_B associé à la valeur propre k.
4. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie n^2, ϕ_B admet au plus un nombre fini de valeurs propres distinctes. Or, si $A^k \neq 0$, k est une valeur propre de ϕ_B. Il existe donc un nombre fini d'entiers k tels que $A^k \neq 0$. En particulier, il existe au moins un entier k avec $A^k = 0$.

Réduction des endomorphismes : théorie

Exercice 16 - $f \circ g$ et $g \circ f$ diagonalisables ? - *L1/Math Sup* - $\star$

1. (a) On écrit d'une part que
$$BAB - \lambda B = B(AB - \lambda I)$$
et donc
$$\det(BAB - \lambda I) = \det(B)P_{AB}(\lambda).$$
En écrivant d'autre part que
$$BAB - \lambda I = (BA - \lambda I)B,$$
on obtient cette fois que
$$\det(BAB - \lambda I) = P_{BA}(\lambda)\det(B).$$
On peut simplifier par $\det(B)$ qui est non-nul et on trouve que $P_{AB} = P_{BA}$. AB et BA ont le même polynôme caractéristique.

   (b) Soit $x \in E_\lambda$, c'est-à-dire que $f \circ g(x) = \lambda x$. On a
$$g \circ f(g(x)) = g(f \circ g(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x).$$
Ceci prouve que $g(x) \in F_\lambda$, et donc que $g(E_\lambda) \subset F_\lambda$. Par symétrie des rôles joués par f et g, on a aussi $f(F_\lambda) \subset E_\lambda$.

   (c) f et g étant des isomorphismes, ils conservent la dimension, et on a donc :
$$\dim(g(E_\lambda)) = \dim(E_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) = \dim(F_\lambda).$$
D'autre part, les inclusions démontrées à la question précédente prouvent que
$$\dim(g(E_\lambda)) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(f(F_\lambda)) \leq \dim(E_\lambda).$$
Si on met tout ensemble, on en déduit que
$$\dim(E_\lambda) \leq \dim(F_\lambda) \text{ et } \dim(F_\lambda) \leq \dim(E_\lambda).$$
Ainsi, les espaces propres E_λ et F_λ ont même dimension.

(d) Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ les valeurs propres de $f\circ g$. Alors, puisque $f\circ g$ est diagonalisable, on a
$$\dim(E_{\lambda_1})+\dots+\dim(E_{\lambda_p})=n.$$
D'après le résultat de la question précédente, on a aussi
$$\dim(F_{\lambda_1})+\dots+\dim(F_{\lambda_p})=n.$$
Ainsi, la somme des dimensions des sous-espaces propres de $g\circ f$ est (au moins) égale à n. C'est bien que $g\circ f$ est diagonalisable.

2. (a) Si 0 est valeur propre de $f\circ g$, alors $\det(AB)=0$. Mais $\det(AB)=\det(BA)=0$, et donc 0 est valeur propre de $g\circ f$.

(b) On utilise la relation suivante :
$$(AB-\alpha I)C=I\implies ABC=I+\alpha C.$$
Développant, on trouve :
$$\begin{aligned}(BA-\alpha I)(BCA-I)&=B(ABC)A-BA-\alpha BCA+\alpha I\\&=BA+\alpha BCA-BA-\alpha BCA+\alpha I\\&=\alpha I.\end{aligned}$$
On en déduit que $\det(BA-\alpha I)$ est non-nul, puisque
$$\det(BA-\alpha I)\times\det(BCA-I)=\alpha^n\neq 0,$$
et donc que $BA-\alpha I$ est inversible.

(c) On raisonne par contraposée. Si α n'est pas une valeur propre de $f\circ g$, alors $AB-\alpha I$ est inversible, et par la question précédente, $BA-\alpha I$ est inversible, c'est-à-dire que α n'est pas une valeur propre de $g\circ f$. Par contraposée, toute valeur propre de $g\circ f$ est une valeur propre de $f\circ g$. Par symétrie du rôle joué par f et g, $f\circ g$ et $g\circ f$ ont les mêmes valeurs propres.

(d) On va travailler en dimension 2, avec des matrices non-inversibles. Prenons
$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\text{ et }B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},$$
de sorte que
$$AB=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\text{ et }BA=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$
BA est diagonalisable, tandis que AB ne l'est pas.

Exercice 17 - Endomorphisme sur un espace vectoriel réel - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On note P_f le polynôme caractéristique de f, que l'on factorise en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$:
$$P_f(X)=\prod_{i=1}^{l}(X-\alpha_i)^{n_i}\prod_{j=1}^{m}(X^2+a_jX+b_j)^{q_j}.$$

Si cette factorisation possède un facteur de degré 1, l'endomorphisme possède un vecteur propre u, et la droite vectorielle $\mathrm{vect}(u)$ convient. Sinon, d'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$(f^2 + a_1 f + b_1 Id)^{q_1} \circ \cdots \circ (f^2 + a_m f + b_m Id)^{q_m} = 0.$$

La composée d'applications bijectives étant bijective, une des applications que l'on compose au moins n'est pas bijective. On en déduit par exemple que $f^2 + a_1 f + b_1 Id$ n'est pas une bijection. Soit u dans le noyau de cette application. Alors $\mathrm{vect}(u, f(u))$ est un plan stable, car $f^2(u) = -a_1 f(u) - b_1 u$. Remarquons qu'un endomorphisme sur un $\mathbb{R}-$espace vectoriel n'admet pas forcément une valeur propre, comme le prouve l'endomorphisme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 18 - ** - *Oral Mines-Ponts* - ⋆⋆

On note P le polynôme minimal de g. Puisque g est diagonalisable, P est scindé à racines simples, ce que nous écrirons :

$$P(X) = (X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_p).$$

Aucun des α_i n'est nul. Puisque $f^k = g$, on sait aussi que Q est polynôme annulateur de f, où

$$Q(X) = (X^k - \alpha_1) \dots (X^k - \alpha_p).$$

Ce polynôme est lui-même scindé à racines simples (tout nombre complexe non nul admet exactement k racines $k-$ièmes). Donc f est diagonalisable.

Exercice 19 - Diagonalisation simultanée - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On procède par récurrence sur m. Précisément, on prouve pour $m \geq 1$ la propriété suivante :

> $\mathcal{P}_m$: Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, pour toute famille de m endomorphismes de E, $u_1, \dots, u_m$, diagonalisables et commutant deux à deux, il existe une base diagonalisant tous les u_i.

La propriété est vraie pour $m = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour $m-1$, et prouvons-la au rang m. Soit λ une valeur propre de u_1, et E_λ le sous-espace propre associé. Alors $E_\lambda = \ker(u - \lambda I_E)$ est stable par chaque u_i, pour $i \geq 2$, puisque u_i commute avec u_1. Notons $v_{i,\lambda}$ la restriction de u_i à E_λ. Alors on a une famille de $m-1$ endomorphismes de E_λ, $v_{2,\lambda}, \dots, v_{m,\lambda}$ qui commutent, et qui sont diagonalisables (rappelons que la restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable reste diagonalisable). Par l'hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de E_λ qui diagonalise chaque $v_{i,\lambda}$, pour $i \geq 2$. Elle diagonalise aussi $v_{1,\lambda}$ puisque $v_{1,\lambda} = \lambda I_{E_\lambda}$. Il suffit alors de réunir les bases $\mathcal{B}_\lambda$, pour λ décrivant l'ensemble des valeurs propres de u_1, pour obtenir une base de E qui diagonalise tous les u_i.

Exercice 20 - Diagonalisation et sous-espaces stables - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

Commençons par prouver le sens direct. Soit $n = \dim E$ et soit $\mathcal{B}$ une base de E constituée de vecteurs propres pour u. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p < n$ et soit $(u_1, \dots, u_p)$ une base de F. Alors, par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ de $\mathcal{B}$ tels que $(u_1, \dots, u_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E. Soit $G = \mathrm{vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$. Alors G est stable par u et c'est un supplémentaire de F.

Réciproquement, on construit par récurrence sur $p \leq n$ une famille libre $(e_1, \dots, e_p)$ de vecteurs propres de u. Le cas $p = n$ donnera la base voulue. Construisons d'abord e_1. Soit H n'importe quel hyperplan de E. Il possède un supplémentaire stable, autrement dit il existe $e_1 \in E$ tel que $\mathrm{vect}(e_1)$ est stable par u. Ainsi, e_1 est un vecteur propre de u. Supposons $(e_1, \dots, e_p)$ construits, avec $p < n$, et construisons e_{p+1}. Soit H un hyperplan de E contenant $(e_1, \dots, e_p)$. Il possède un supplémentaire stable par u. Autrement dit, il existe $e_{p+1} \notin H$ qui est un vecteur propre de u. La famille $(e_1, \dots, e_p)$ étant libre par hypothèse de récurrence, et le vecteur e_{p+1} n'étant pas dans H, la famille $(e_1, \dots, e_{p+1})$ est bien une famille libre de vecteurs propres de u.

Exercice 21 - Avec une puissance - *L2/Math Spé/Oral Mines* - ⋆⋆⋆

Supposons d'abord M diagonalisable. Alors, M s'écrit PDP^{-1} où D est diagonale. Il est clair que M^p s'écrit PD^pP^{-1}, où D^p est elle aussi diagonale. Donc M^p est diagonalisable. De plus, puisque P est inversible, on a $\ker(M) = P\ker(D)$ et $\ker(M^p) = P\ker(D^p)$. Puisque $\ker(D)$ et $\ker(D^p)$ sont égaux, on a bien $\ker(M) = \ker(M^p)$.
Réciproquement, on suppose que M^p est diagonalisable et que $\ker(M^p) = \ker(M)$. Alors, M^p annule un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples. Quitte à multiplier ce polynôme par X, il existe donc des complexes $\lambda_1, \dots, \lambda_s$, tous distincts et différents de 0, tels que

$$M^p(M^p - \lambda_1 I)\dots(M^p - \lambda_s I) = 0.$$

Soient $\mu_{1,i}, \dots, \mu_{p,i}$ les racines p-ièmes de λ_i. Elles sont toutes distinctes entre elles, et distinctes des $\mu_{k,j}$ pour $k \neq j$. Factorisant

$$X^p - \lambda_i = \prod_{k=1}^{p}(X - \mu_{k,i}),$$

on obtient

$$M^p \prod_{\substack{k=1,\dots,p\\ i=1,\dots,s}} (M - \mu_{k,i} I) = 0.$$

D'après le théorème de décomposition des noyaux, on a

$$\ker(M^p) \bigoplus \oplus_{\substack{k=1,\dots,p\\ i=1,\dots,s}} \ker(M - \mu_{k,i} I) = \mathbb{C}^n.$$

De la deuxième partie de l'hypothèse, on tire

$$\ker(M) \bigoplus \oplus_{\substack{k=1,\dots,p\\ i=1,\dots,s}} \ker(M - \mu_{k,i} I) = \mathbb{C}^n.$$

Autrement dit, $\mathbb{C}^n$ est somme des espaces propres de M (certains espaces de la décomposition précédente peuvent être réduits à $\{0\}$). Autrement dit, M est diagonalisable.

Exercice 22 - Réduction des endomorphismes anti-involutifs - *Math Spé* - ⋆⋆⋆

1. Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Un simple calcul matriciel montre que $f^2 = -I$.

2. Si λ est une valeur propre associée au vecteur propre x, la condition $f^2(x) = -x$ entraîne que $\lambda^2 = -1$: il n'existe pas de valeurs propres réelles. Si l'espace était de dimension impaire, le polynome caractéristique serait de degré impair, et aurait une racine réelle, ce qui donnerait une valeur propre réelle : impossible !
3. Soit $y \in \mathrm{vect}(x, f(x))$, $y = ax + bf(x)$. On a :
$$f(y) = af(x) - bx \in \mathrm{vect}(x, f(x)).$$
4. Procédons de proche en proche. Soit e_1 un vecteur non-nul de E. $f(e_1)$ n'est pas lié à e_1, puisque f est sans valeur propre. On choisit ensuite $e_2 \notin \mathrm{vect}(e_1, f(e_1))$. Il faut prouver que $f(e_2) \notin \mathrm{vect}(e_1, f(e_1), e_2)$. Mais si tel était le cas, on aurait
$$f(e_2) = ae_1 + bf(e_1) + ce_2 \implies -e_2 = af(e_1) - be_1 + cf(e_2),$$
et en remplaçant $f(e_2)$ par $ae_1 + bf(e_1) + ce_2$, on trouverait que la famille $(e_1, f(e_1), e_2)$ est liée. On continue ainsi pour construire e_3, etc... La matrice résultante est diagonale par blocs, les n blocs sont ceux apparus à la question 1.

Exercice 23 - Spectre et racine n-ième - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On écrit $X^p - 1 = X^p - (\omega^{-1})^p$ et on factorise ce polynôme comme
$$X^p - 1 = (X^p - \omega^{-1})(X^{p-1} + \omega^{-1}X^{p-2} + \cdots + \omega^{-(p-1)}.$$
De $A^p = I_n$, on en déduit que
$$(A - \omega^{-1}I) \times \sum_{k=0}^{p-1} A^k (\omega^{-1})^{p-1-k} = 0.$$
Puisque ω^{-1} n'est pas une valeur propre de A, $(A - \omega^{-1}I)$ est inversible. Donc on trouve
$$\sum_{k=0}^{p-1} A^k \omega^{-p+1+k} = 0.$$
Il suffit de multiplier par ω^{p-1} pour en déduire le résultat.

Polynômes d'endomorphismes

Exercice 24 - Quel est le polynôme minimal ? - *L2/Math Spé* - ⋆

On commence par calculer le polynôme caractéristique de A. Après calculs, on trouve qu'il est égal à
$$C_A(X) = (-1)^3 (X-1)(X+1)^2.$$
A admet donc deux valeurs propres, 1 et -1. On recherche les espaces propres associés. Pour la valeur propre 1, on trouve que $E_1 = \mathbb{R}f_1$ avec $f_1 = (1,1,1)$. Pour la valeur propre -1, on trouve que $E_{-1} = \mathbb{R}f_2 \oplus \mathbb{R}f_3$ avec $f_2 = (-1,1,0)$ et $f_3 = (1,0,1)$. La matrice A est donc diagonalisable, de spectre 1 et -1. Son polynôme minimal est donc $(X-1)(X+1)$.
Pour B, le polynôme caractéristique de B est
$$C_B(X) = (-1)^3 (X+1)^3.$$

La seule valeur propre de B est donc -1. Comme B n'est pas égale à $-I_3$, B n'est pas diagonalisable et son polynôme minimal ne peut être que $(X+1)^3$ ou $(X+1)^2$. Un calcul rapide montre que $(B+I_3)^2=0$, et donc le polynôme minimal de B est $(X+1)^2$.

Exercice 25 - Déterminant et polynôme annulateur - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Une simple étude de $P(X)=X^3-3X-4$ montre que $P(X)=(X-\alpha)(X-\omega)(X-\bar{\omega})$, où $\alpha>0$ et $\omega\in\mathbb{C}$. Ainsi, A annule un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$. Donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et ses valeurs propres sont dans $\{\alpha,\omega,\bar{\omega}\}$. Ainsi, le polynôme caractéristique de A est de la forme

$$C_A(X)=(X-\alpha)^r(X-\omega)^s(X-\bar{\omega})^t.$$

C_A étant réel, on a $s=t$. Puisque $\det(A)=(-1)^nC_A(0)=\alpha^r|\omega|^{2s}>0$.

Exercice 26 - Polynômes annulateurs de *A* et propriétés de *A* - *L2/Math Spé/Oral Centrale* - ⋆⋆

1. Les racines du polynôme $X^2+X+1=0$ sont $\lambda_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Ainsi, les valeurs propres de A sur $\mathbb{C}$, qui sont parmi les racines de tout polynôme annulateur, sont parmi λ_1 et λ_2. Soit $\chi_A(X)$ le polynôme caractéristique de A. Alors

$$\chi_A(X)=(X-\lambda_1)^p(X-\lambda_2)^q$$

   où p et q sont deux entiers. Maintenant, pour que χ_A soit à coefficients réels, il est nécessaire que $p=q$ (regarder par exemple le coefficient devant X^{p+q-1}). Ainsi, $n=p+q$ est pair.
2. Considérons f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est A. On a $f^3+f^2+f=0$. $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f, on peut considérer g la restriction de f à $\mathrm{Im}(f)$ qui est un endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$. Alors, pour tout $y\in\mathrm{Im}(f)$, on a $y=f(x)$, d'où

$$g^2(y)+g(y)+y=f^3(x)+f^2(x)+f(x)=0.$$

   Ainsi, $g^2+g+Id=0$. La première question nous dit que $\mathrm{Im}(f)$, l'espace sur lequel g agit, est de dimension paire.

Exercice 27 - Polynôme annulateur - *L2/Math Spé/Oral Mines* - ⋆⋆

Soit $P(X)=a_nX^n+\dots+a_1X+a_0$ ce polynôme. Puisque $P(0)=0$, on a $a_0=0$. Puisque $P'(0)\neq 0$, on a $a_1\neq 0$. Prenons maintenant $y\in\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)$. On peut donc écrire $y=f(x)$ et on sait que $f(y)=0$, ce qui entraîne $f^p(x)=0$ pour tout $p\geq 2$. On applique alors la relation $P(f)=0$ à y :

$$0=P(f)(x)=a_nf^n(x)+\dots+a_1f(x)=a_1f(x)=a_1y$$

ce qui entraîne $y=0$. $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont donc en somme directe. De plus, par le théorème du rang, on sait que

$$\dim(\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f))=\dim(E).$$

D'où l'égalité demandée.

Exercice 28 - Polynôme annulateur - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

On sait qu'on a un polynôme annulateur non-nul lorsque E est de dimension finie. Si E est de dimension infinie, ce n'est plus nécessairement le cas. Considérons par exemple $E=\mathbb{R}[X]$, et u l'endomorphisme défini par $u(A)=XA$. Alors u n'admet pas de polynôme annulateur. En effet, soit $P(X)=a_kX^k+\dots+a_0$ un polynôme, alors

$$P(u)(1)=a_ku^k(1)+\dots+a_1u(1)+a_0Id(1)=a_kX^k+\dots+a_1X+a_0,$$

qui est non-nul si $P\neq 0$. D'où $P(u)\neq 0$ si $P\neq 0$.

Exercice 29 - - *Math Spé* - ⋆⋆⋆

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme caractéristique est annulateur, et donc $M_f|C_f$. Ecrivons :

$$M_f(X)=\prod_i P_i^{\alpha_i}(X),$$

$$C_f(X)=\prod_i P_i^{\beta_i}(X)Q(X),$$

où $\beta_i\geq\alpha_i$, et où Q est premier avec chaque P_i. Le théorème de décomposition des noyaux, appliqué dans chacun des cas, donne :

$$K^n=\oplus_i\ker(P_i^{\alpha_i}(f));$$

$$K^n=\oplus_i\ker(P_i^{\beta_i}(f))\oplus\ker Q(f).$$

Par des considérations de dimension, et remarquant que $\ker P_i^{\alpha_i}\subset\ker P_i^{\beta_i}$, on obtient que $\ker Q(f)=\{0\}$. Autrement dit, $Q(f)$ est injectif.
Supposons maintenant que $K=\mathbb{C}$, et que Q n'est pas un polynôme constant. Soit λ une racine de Q. Il s'agit d'une valeur propre de f associée à un vecteur propre non nul $x\in\mathbb{C}^n$. On a donc :

$$(f-\lambda Id)(x)=0\implies Q(f)(x)=0.$$

Ceci contredit que $Q(f)$ est injectif, et on a donc Q qui est un polynôme constant.
Maintenant, si $K=\mathbb{R}$, f définit aussi naturellement un endomorphisme sur $\mathbb{C}^n$ (on garde la même image pour les vecteurs d'une base, mais on impose maintenant la $\mathbb{C}-$linéarité). En outre, cette endomorphisme $\tilde{f}$ a la même matrice que f dans la base canonique, et a donc même polynôme caractéristique, et même polynôme minimal. Le résultat précédent s'applique.