Autour du produit

Exercice 1 - Produits possibles - *L1/Math Sup* - $\star$

On peut effectuer les produits $AC, AE, BA, CB, CD, DB, DD, EC, EE$. Seules les matrices D et E sont carrées, et seule la matrice D est symétrique.

Exercice 2 - Des calculs de produits - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Puisque A et B sont deux matrices carrées de même ordre, les deux produits AB et BA sont possibles. On trouve :
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
En particulier, $AB = BA = 0$ alors que ni A ni B ne sont nuls.
2. Le produit AB n'est pas défini car A a trois colonnes et B deux lignes. Pour BA, on trouve
$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$
3. Le produit BA n'est pas défini. En revanche, on a
$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 - Commutant - *L1/Math Sup* - $\star$

Soit $B = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ une telle matrice. On a :
$$AB = \begin{pmatrix} ac+be & ad+bf \\ ae & af \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} ac & bc+da \\ ae & be+af \end{pmatrix}.$$
Puisque $AB = BA$, on obtient le système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} ac+be & = & ac \\ ad+bf & = & bc+da \\ af & = & be+af \end{array}\right.$$
On résoud ce système pour trouver que $e = 0$ et $c = f$. Toutes les matrices B qui conviennent sont celles de la forme :
$$\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 - Annulateur - *L1/Math Sup* - $\star$

On trouve :
$$AB = AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice A n'est pas inversible : si tel était le cas, on multiplierait à gauche par A^{-1} dans l'égalité $AB = AC$, et on trouverait $B = C$. Ce n'est pas le cas ! Pour la seconde partie, on considère F une matrice vérifiant les propriétés précitées :

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Le calcul de AF donne :

$$AF = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d+g & e+h & f+i \\ 3a+d+g & 3b+e+h & 3c+f+i \end{pmatrix}.$$

Puisque $AF = 0$, on a le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = b = c = 0 \\ d+g = e+h = f+i = 0 \\ 3a+d+g = 3b+e+h = 3c+f+i = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} a = b = c = 0 \\ d = -g \\ e = -h \\ f = -i \end{array} \right.$$

Les matrices F recherchées sont donc les matrices de la forme :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -d & -e & -f \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 - Produit non commutatif - *L1/Math Sup* - ⋆

Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

conviennent.

Exercice 6 - Puissance n-ième - avec la formule du binôme - *L1/Math Sup* - ⋆

On commence par calculer les premières valeurs de B^n. On a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors par récurrence que, pour tout $n \geq 3$, on a $B^n = 0$. En effet, c'est vrai pour $n = 3$. Si c'est vrai au rang $n \geq 3$, alors

$$B^{n+1} = B^n \times B = 0 \times B = 0.$$

Pour obtenir A, on écrit $A = I+B$ et on remarque que I et B commutent puisque $IB = BI = B$. On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton, ce qui est très facile ici puisque $B^n = 0$ dès que $n \geq 3$. On en déduit

$$A^n = I^{n-1} + \binom{n}{1} I^{n-1} B + \binom{n}{2} I^{n-2} B^2$$

ce qui se réécrit en

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2.$$

On a donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 - Puissance n-ième - avec un polynôme annulateur - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. On sait que
$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q_n(X) + a_nX + b_n,$$
où $a_nX + b_n$ est le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$. Pour trouver la valeur de a_n et b_n, on évalue l'égalité précédente en les racines de $X^2 - 3X + 2$, c'est-à-dire en 1 et 2. On trouve le système :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a_n + b_n & = & 1 \\ 2a_n + b_n & = & 2^n \end{array}\right.$$
dont l'unique solution est $a_n = 2^n - 1$ et $b_n = 2 - 2^n$.
2. Il suffit de remarquer que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$. Remplaçant dans l'expression de la division euclidienne, on trouve
$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_3.$$

Rang

Exercice 8 - Explicite... - *L1/Math Sup* - ⋆

On utilise la méthode du pivot de Gauss pour mettre la matrice sous forme échelonnée.

1. On a
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(A) & = & \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \\ & = & \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \end{array}.$$
Le rang de la matrice est donc égal à 2.
2. On a
$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(B) & = & \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \\ & = & \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - 2L_2 \end{array} \end{array}.$$

Le rang de la matrice est donc égal à 3.

3. On a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(C) & = & \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1 \end{array} \\ & = & \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3-2L_2 \end{array}. \end{array}$$

Le rang de cette matrice est donc égal à 2.

4. On a

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(D) & = & \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2+2L_1 \\ L_3-4L_1 \\ L_4-L_1 \end{array} \\ & = & \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ L_3-L_2 \\ L_4+3L_2 \end{array}. \end{array}$$

Le rang de cette matrice est donc égal à 2.

Exercice 9 - Avec un paramètre - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On effectue les opérations suivantes :

$$L_2 - aL_1 \to L_2,\ L_3 - a^2L_1 \to L_3,\ L_4 - a^3L_1 \to L_4$$

et A a même rang que

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 \\ 0 & 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) \\ 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) & a^2(1-a^4) \end{pmatrix}.$$

On échange ensuite L_2 et L_4 et on trouve que A a même rang que

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) & a^2(1-a^4) \\ 0 & 0 & 1-a^4 & a(1-a^4) \\ 0 & 0 & 0 & 1-a^4 \end{pmatrix}.$$

On obtient une matrice triangulaire, dont les pivots sont non nuls si $1-a^4 \neq 0$, ie si $a \neq 1$ et $a \neq -1$. Dans ce cas, la matrice est de rang 4. Si $a = 1$ ou $a = -1$, la matrice A a même rang qu'une matrice dont une seule ligne est non-nulle. Elle a donc pour rang 1.

Exercice 10 - Décomposition de matrices de rang donné - *L1/Math Sup/L2/Math Spé/Oral Mines* - ⋆⋆

Le point de départ de l'exercice est le suivant. Si $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, alors XY^t est la matrice

$$XY^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 Y^t \\ \vdots \\ \lambda_n Y^t \end{pmatrix}.$$

1. Puisque le rang de M est égal à 1, alors une des lignes de M, disons L_p, est telle que $L_i = \lambda_i L_p$ pour tout i. Posons $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ et Y tel que $Y^t = L_p$. Alors on vérifie facilement que $M = XY^t$.
2. Puisque le rang de M est égal à 2, on peut sélectionner deux lignes L_p et L_q telles que, pour chaque i, on a $L_i = \lambda_i L_p + \mu_i L_q$, et les lignes L_p et L_q sont indépendantes. On pose alors $Y^t = L_p$, $T^t = L_q$ (le couple (Y, T) est bien constitué de deux vecteurs indépendants) et $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$. Les vecteurs X et Z sont aussi indépendants. En effet, on a $(\lambda_p, \mu_p) = (1, 0)$ et $(\lambda_q, \mu_q) = (0, 1)$. Si $aX + bZ = 0$, en étudiant la p-ième ligne, on trouve $a = 0$, et en étudiant la q-ième ligne, on trouve $b = 0$.
3. Clairement, la même méthode prouve que si le rang de M vaut k, il existe deux couples de k vecteurs indépendants $(X_1, \dots, X_k)$ et $(Y_1, \dots, Y_k)$ tels que
$$M = X_1 Y_1^t + \dots + X_p Y_p^t.$$

Inversion de matrices

Exercice 11 - Inverser une matrice sans calcul ! - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Le calcul ne pose pas de problèmes. Il mène à :
$$\frac{A^2 + A}{2} = I \implies A\frac{A+I}{2} = \frac{A+I}{2}A = I.$$
A est inversible, et son inverse est :
$$\frac{A+I}{2}.$$
2. Un calcul donne $A^3 - A = 4I$. Donc $A \times \frac{1}{4}(A^2 - I) = I$, ainsi A est inversible et
$$A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On vérifie facilement que $A^2-3A+2I_3=0$. On réécrit ceci en :
$$A(A-3I_3)=-2I_3 \iff A\left(\frac{-1}{2}(A-3I_3)\right)=I_3.$$
Ainsi, A est inversible et son inverse est $\frac{-1}{2}(A-3I_3)$.

Exercice 12 - Inverse avec calcul ! - *L1/Math Sup* - $\star$

On utilise la méthode du pivot de Gauss. Commençons par A.

$$\left(\begin{array}{ccc}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\end{array}\right)\quad\left|\quad\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\right.$$

$$\begin{array}{r}L_2-L_1\to L_2\\L_3-2L_1\to L_3\end{array}\quad\left(\begin{array}{ccc}1&1&2\\0&1&-1\\0&-1&-3\end{array}\right)\quad\left|\quad\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\-1&1&0\\-2&0&1\end{array}\right)\right.$$

$$L_3+L_2\to L_3\quad\left(\begin{array}{ccc}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&-4\end{array}\right)\quad\left|\quad\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\-1&1&0\\-3&1&1\end{array}\right)\right.$$

Après transformations élémentaires, la matrice qui apparait à gauche est triangulaire supérieure, et les coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. On en déduit que A est inversible. On trouve son inverse en poursuivant la méthode.

$$\frac{-1}{4}L_3\to L_3\quad\left(\begin{array}{ccc}1&1&2\\0&1&-1\\0&0&1\end{array}\right)\quad\left|\quad\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\-1&1&0\\3/4&-1/4&-1/4\end{array}\right)\right.$$

$$\begin{array}{r}L_1-2L_3\to L_1\\L_2+L_3\to L_2\end{array}\quad\left(\begin{array}{ccc}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\quad\left|\quad\left(\begin{array}{ccc}-1/2&1/2&1/2\\-1/4&3/4&-1/4\\3/4&-1/4&-1/4\end{array}\right)\right.$$

$$L_1-L_2\to L_1\quad\left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)\quad\left|\quad\left(\begin{array}{ccc}-1/4&-1/4&3/4\\-1/4&3/4&-1/4\\3/4&-1/4&-1/4\end{array}\right)\right.$$

La matrice inverse recherchée est donc :
$$\left(\begin{array}{ccc}-1/4&-1/4&3/4\\-1/4&3/4&-1/4\\3/4&-1/4&-1/4\end{array}\right).$$

On suit la même méthode pour B. On forme

$$
\begin{array}{c}
 \\ \\ \\
L_2 \to L_1 \\ L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3
\end{array}
\begin{array}{c|c}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Après transformations élémentaires, la matrice qui apparait à gauche est triangulaire supérieure, et les coefficients sur la diagonale sont tous non nuls. On en déduit que B est inversible. On trouve son inverse en poursuivant la méthode.

$$
\begin{array}{c}
L_1 + 2L_3 \to L_1 \\ L_2 + 2L_3 \to L_2 \\ -L_3 \to L_3 \\ \\
L_1 - L_2 \to L_1 \\ \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c|c}
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

La matrice inverse recherchée est donc :

$$
B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Passons à C :

$$
\begin{array}{c}
 \\ \\ \\
L_1 \\ L_2 - 2L_1 \to L_2 \\ L_3 - 32L_1 \to L_3 \\
L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 32L_2 \to L_3
\end{array}
\begin{array}{c|c}
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

La matrice C n'est donc pas inversible.

Étudions maintenant I :

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{r} L_3 \to L_1 \\ L_1 \to L_2 \\ L_2 \to L_3 \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{r} \\ L_2 + iL_1 \to L_2 \\ L_3 + 2L_1 \to L_3 \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3i \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right.$$

La matrice I est donc inversible. Pour calculer son inverse, on poursuit la méthode :

$$\begin{array}{r} \\ \\ L_3/4 \to L_3 \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & i \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{r} L_1 - L_3 \to L_1 \\ L_2 - 3iL_3 \to L_2 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 1/2 \\ 1 & -3i/4 & -i/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{array}{r} -L_1 \to L_1 \\ -L_2 \to L_2 \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ -1 & 3i/4 & i/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \right.$$

L'inverse de I est donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ -1 & 3i/4 & i/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13 - Matrice inverse et polynômes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. D'après la formule du binôme, pour tout $0 \leq j \leq n$, on a

$$(X+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i.$$

   A est donc la matrice des vecteurs $(X+1)^j$ dans la base $1, X, \dots, X^n$ de $\mathbb{R}_n[X]$. Autrement dit, c'est la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $f(P) = P(X+1)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Le fait que le coefficient qui apparaisse est $\binom{j-1}{i-1}$ et non $\binom{j}{i}$ est du au fait que l'on commence par $1 = X^0$. Ainsi, la j-ième colonne correspond à $(X+1)^{j-1}$.

2. f est inversible, d'inverse $g(P)=P(X-1)$. On en déduit que A est inversible, et que son inverse est la matrice notée B de g dans la base canonique. Développant $(X-1)^j$, on a $b_{i,j}=(-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}$ pour $i\leq j$, $b_{i,j}=0$ sinon.

Exercice 14 - Matrice à diagonale dominante - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

On va prouver que le noyau de A est réduit à $\{0\}$. Pour cela, supposons que ce ne soit pas le cas et choisissons $X\in\ker A$. Soit i tel que $|x_i|=\max(|x_j|,j=1,\dots,n)$. Alors la i-ème ligne de $AX=0$ se réécrit en

$$a_{i,i}x_i=\sum_{j\neq i}a_{i,j}x_j.$$

Mais,

$$\left|\sum_{j\neq i}a_{i,j}x_j\right|\leq\sum_{j\neq i}|a_{i,j}||x_j|\leq|x_i|\sum_{j\neq i}|a_{i,j}|<|a_{i,i}x_i|$$

ce qui est une contradiction. Donc A est inversible.

Etude d'ensembles de matrices

Exercice 15 - Centre - *L1/Math Sup* - $\star$

1. On effectue les produits comme d'habitude. Notant $A=(a_{k,l})$, toutes les colonnes de $AE_{i,j}$ sont nulles sauf la j-ième. Le terme à la l-ième ligne et à la j-ième colonne de $AE_{i,j}$ est égal à $a_{l,i}$. On a donc

$$AE_{i,j}=\begin{pmatrix}0&\dots&a_{1,i}&\dots&0\\ \vdots&&a_{2,i}&&\vdots\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\dots&a_{n,i}&\dots&0\end{pmatrix}.$$

De même, on obtient

$$E_{i,j}A=\begin{pmatrix}0&\dots&\dots&0\\ \vdots&&\vdots&\\ a_{j,1}&a_{j,2}&\dots&a_{j,n}\\ \vdots&&&\vdots\\ 0&\dots&\dots&0\end{pmatrix}$$

où la seule ligne non-nulle est la i-ième.

2. Remarquons d'abord que $A\in M_n(\mathbb{R})$ commute avec tous les éléments de $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $AE_{i,j}=E_{i,j}A$ pour tout i,j. L'implication directe est évidente. Réciproquement, si A commute avec tous les $E_{i,j}$, alors, comme $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$, toute matrice $M\in M_n(\mathbb{R})$ s'écrit (de façon unique)

$$M=\sum_{i,j=1}^n\alpha_{i,j}E_{i,j}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} AM &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{i,j} AE_{i,j} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \alpha_{i,j} E_{i,j} A \\ &= MA. \end{aligned}$$

Ceci prouve bien que A commute avec toute matrice M. Maintenant, soit A une matrice qui commute avec tous les $E_{i,j}$. Fixons i, j. On a $AE_{i,j} = E_{i,j}A$. De la forme de ces deux matrices calculée à la question précédente, on remarque qu'elles doivent avoir tous leurs coefficients nuls, sauf éventuellement celui situé à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne. Ainsi, on obtient

- $a_{j,k} = 0$ si $k \neq j$. Puisque ceci est valable pour j arbitraire, la matrice A est diagonale.
- $a_{i,i} = a_{j,j}$, en identifiant les coefficients situés à l'intersection de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de respectivement $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$. Puisque i et j sont quelconques, tous les coefficients diagonaux de A sont égaux.

Ainsi, on vient de prouver que $A = \lambda I_n$ pour un certain réel λ. Réciproquement, toute matrice de cette forme commute avec les éléments de $M_n(\mathbb{R})$.
Si on interprète ce calcul dans le langage des applications linéaires, on a prouvé que les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie qui commutent avec tous les autres endomorphismes de cet espace sont les homothéties.

Exercice 16 - Un sous-espace vectoriel de matrices - *L1/Math Sup* - $\star$

Considérons A, B et C les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors une matrice M est élément de E si et seulement si il existe trois réels a, b, c tels que $M = aA + bB + cC$. Autrement dit, $E = \mathrm{vect}(A, B, C)$ est l'espace vectoriel de A, B, C. E est donc bien un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$. De plus, (A, B, C) est une base de E. En effet, par définition, c'est une famille génératrice de E. De plus, (A, B, C) est une famille libre. En effet, s'il existe trois scalaires a, b, c tels que $aA + bB + cC = 0$, alors on obtient $M(a, b, c) = 0$ ce qui donne $a = b = c = 0$. Ainsi, $\dim(E) = 3$. Reste à voir que E est stable par multiplication de matrices. Mais, pour tous a, b, c, a', b', c' réels, on a :

$$M(a,b,c) \times M(a',b',c') = \begin{pmatrix} aa' + cc' & 0 & ac' + a'c \\ 0 & bb' & 0 \\ ac' + a'c & 0 & aa' + cc' \end{pmatrix} = M(aa' + cc', bb', ac' + a'c) \in E.$$

E est donc bien stable par multiplication.

Exercice 17 - Matrices symétriques et anti-symétriques - *Math. Sup* - $\star\star$

Il est d'abord clair que ces deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice à la fois symétrique et antisymétrique. Ses coefficients diagonaux sont nuls, et si $i \neq j$, on a à la fois $a_{i,j} = a_{j,i}$ et $a_{i,j} = -a_{j,i}$, ce qui donne $a_{i,j} = -a_{i,j}$ ce qui n'est possible

que si $a_{i,j} = 0$. La matrice A est donc la matrice nulle, et les espaces vectoriels sont en somme directe.
D'autre part, si A est une matrice quelconque, on pose : $C = \frac{A+{}^tA}{2}$ et $D = \frac{A-{}^tA}{2}$. Il est facile de vérifier que C est symétrique, que D est anti-symétrique, et que $A = C + D$. Les deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 18 - Matrices magiques - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

1. La condition signifie que les sommes des coefficients de toutes les lignes, de toutes les colonnes, et des deux diagonales de la matrice sont égales.
2. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $MG(n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. L'application ϕ est clairement linéaire. Pour prouver que c'est un isomorphisme d'espace vectoriel, on va prouver directement qu'il est bijectif (on ne connait pas les dimensions des espaces vectoriels mis en jeu, impossible de se contenter de l'injectivité de ϕ). Soit donc $(A, a_1, \dots, a_{n-2}) \in \mathcal{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n-2}$ et on cherche une matrice M de $MG(n)$ vérifiant $\phi(M) = (A, a_1, \dots, a_{n-2})$. On sait déjà ce que vaut $m_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq n-2$ et $1 \leq j \leq n-1$. On sait aussi ce que doit valoir $m_{1,n}$ ainsi que $m_{n-1,1}, m_{n-1,3}, m_{n-1,4}, \dots, m_{n-1,n-2}$. Cherchons les autres coefficients, et notons $S = \sum_{i=1}^n m_{1,i}$ (valeur déjà déterminée). Puisqu'on connait tous les coefficients de la j-ième ligne, avec $j \leq n-2$, sauf $m_{j,n}$, et que la somme des coefficients de la ligne doit valoir S, on détermine uniquement $m_{j,n}$ (qui vaut $S - \sum_{i<n} m_{j,i}$). On connait aussi tous les coefficients de la première colonne, sauf $m_{n,1}$, et on sait que la somme fait S : ceci détermine uniquement $m_{n,1}$. On connait ensuite tous les coefficient de la diagonale en bas à gauche vers en haut à droite sauf $m_{n-1,2}$. Ceci détermine uniquement ce coefficient (puisque la somme doit valoir S). On peut alors répéter le processus pour toutes les colonnes de la 2-ème à la $n-2$ème : ceci détermine uniquement $m_{n,i}$ pour $i \leq n-2$. Reste à déterminer les quatre derniers coefficients, $m_{n-1,n-1}$, $m_{n-1,n}$, $m_{n,n-1}$ et $m_{n,n}$. Notons S_1 et S_2 la somme des coefficients déjà connus sur la colonne $n-1$ et sur la colonne n, S_3 et S_4 les sommes des coefficients déjà connus sur les lignes $n-1$ et n et S_5 la somme des coefficients déjà connus sur la diagonale principale. Une matrice magique solution doit vérifier le système d'équation :

$$\left\{\begin{array}{rcl} m_{n-1,n-1} + m_{n-1,n} & = & S - S_1 \\ m_{n,n-1} + m_{n,n} & = & S - S_2 \\ m_{n-1,n-1} + m_{n,n-1} & = & S - S_3 \\ m_{n-1,n} + m_{n,n} & = & S - S_4 \\ m_{n-1,n-1} + m_{n,n} & = & S - S_5. \end{array}\right.$$

Cela nous fait cinq équations pour quatre inconnues...mais une équation est en trop. En effet, si on fait $L1 + L2 - L3$, on trouve à gauche $m_{n-1,n} + m_{n,n}$, comme dans le membre de gauche de $L4$. Pour la partie droite, on trouve :

$$\begin{aligned}
S-S_1-S_2+S_3 &= S-\sum_{i=1}^{n-2}(m_{n-1,i}+m_{n,i})+S_3\\
&= S-\sum_{i=1}^{n-2}(S-\sum_{j=1}^{n-2}m_{j,i})+S_3\\
&= S-((n-2)S-\sum_{j=1}^{n-2}\sum_{i=1}^{n-2}m_{j,i}-\sum_{j=1}^{n-2}m_{j,n-1})\\
&= S-\sum_{j=1}^{n-2}(S-\sum_{i=1}^{n-1}m_{j,i})\\
&= S-\sum_{j=1}^{n-2}m_{j,n}=S_4.
\end{aligned}$$

L'équation $L4$ est donc redondante puisqu'égale à $L1+L2-L3$. On peut donc l'éliminer du système d'équations, et on prouve facilement que ce système de quatre équations à quatre inconnues à une unique solution. Ceci conclut quant à la bijectivité de ϕ.

4. Puisque ϕ est un isomorphisme d'espace vectoriel, on a

$$\dim(MG(n))=\dim\left(\mathcal{M}_{n-2,n-1}(\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{n-2}\right)=n(n-2).$$

Applications des matrices

Exercice 19 - Matrices et suites - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. On pose

$$A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&3&1\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

Il est clair que $X_{n+1}=AX_n$, et par récurrence on en déduit que $X_n=A^nX_0$.

2. On a :

$$N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ N^3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Pour $p\geq 3$, on a alors $N^p=N^3.N^{p-3}=0$.

3. Ecrivons que $A=3I+N$, et remarquons que les matrices $3I$ et A commutent. Il est possible d'appliquer la formule du binôme, qui est très simple puisque $N^p=0$ dès que $p\geq 3$. On obtient exactement le résultat demandé (il était également possible de procéder par récurrence).

4. On a donc :
$$A^n=\begin{pmatrix}3^n & 3^{n-1}n & 3^{n-2}\times\frac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 3^n & 3^{n-1}n\\ 0 & 0 & 3^n\end{pmatrix}.$$
On obtient alors :
$$\begin{cases}a_n &=& 3^n+2\times 3^{n-1}n+7\times 3^{n-2}\times\frac{n(n-1)}{2}\\ b_n &=& 2\times 3^n+7\times 3^{n-1}n\\ c_n &=& 7\times 3^n.\end{cases}$$

Exercice 20 - Matrice et systèmes linéaires - *Ecrit du Capes* - ⋆⋆⋆

Soit M la matrice :
$$M=\begin{pmatrix}\theta_1(x_1) & \theta_2(x_1) & \theta_3(x_1)\\ \theta_1(x_2) & \theta_2(x_2) & \theta_3(x_2)\\ \theta_1(x_3) & \theta_2(x_3) & \theta_3(x_3)\end{pmatrix}.$$
Par hypothèse, les colonnes de cette matrice sont liées. Les lignes le sont donc aussi, et il existe des réels $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ non tous nuls tels que $\lambda_1L_1+\lambda_2L_2+\lambda_3L_3=0$. Ceci donne le résultat. La difficulté de cet exercice repose donc sur sa formulation un peu alambiquée, et aussi de sa position dans le problème (d'analyse) dont il est extrait.

Matrices - un peu de théorie

Exercice 21 - Matrices de rang r - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit A une telle matrice. Alors A s'écrit
$$A=PJ_rQ,$$
où $P\in GL_n(\mathbb{K})$, $Q\in GL_p(\mathbb{K})$ et J_r est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ avec r fois le chiffre 1 sur la diagonale principale et des 0 partout ailleurs. Alors,
$$J_r=\sum_{i=1}^r E_{i,i}$$
et donc $A=\sum_{i=1}^r A_i$ avec $A_i=PE_{i,i}Q$. Chaque A_i est de rang 1 (la multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang). D'où le résultat.

Exercice 22 - Matrice équivalente - *L2/Math Spé/Oral Centrale* - ⋆⋆

Notons M une telle matrice. On désignera aussi par M l'endomorphisme associé sur $\mathbb{R}^n$. $\ker(M)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, puisque M est injective. Soit S un supplémentaire de $\ker(M)$. Alors M induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$. Autrement dit, soit $\mathcal{B}_2=(e_1,\dots,e_p)$ une base de S. Alors $\mathcal{C}_1=(f(e_1),\dots,f(e_p))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. Soit de plus $\mathcal{B}_1$ une base de $\ker(M)$ et posons $\mathcal{B}=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$. Soit $\mathcal{C}$ une base obtenue à partir de $\mathcal{C}_1$ en appliquant le théorème de la base incomplète. Alors la matrice de M dans la base $\mathcal{B}$ au départ et $\mathcal{C}$ à l'arrivée à la forme suivante :
$$\begin{pmatrix}0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots\\ \vdots & \dots & \vdots & 0 & 1 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots\\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \end{pmatrix}.$$

Elle est donc nilpotente. Autrement dit, M est équivalente à une matrice nilpotente.

Exercice 23 - Matrices de trace nulle - *Math Spé/L2* - $\star\star\star$

1. Si f est une homothétie, alors $(x,f(x))$ est bien toujours liée. Réciproquement, l'hypothèse nous dit, que pour tout x non-nul, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x)=\lambda_x x$. On doit prouver qu'il existe un scalaire λ tel que $\lambda_x=\lambda$ pour tout x de E, ou encore que $\lambda_x=\lambda_y$ quels que soient x et y non-nuls. Si la famille (x,y) est liée, c'est clair, car $y=\mu x$ et $\mu\lambda_y x=\lambda_y y=f(y)=\mu f(x)=\mu\lambda_x x$ et on peut simplifier par $\mu x\neq 0$. Si la famille $(x,f(x))$ est libre, calculons $f(x+y)$. D'une part,
$$f(x+y)=\lambda_{x+y}(x+y)=\lambda_{x+y}x+\lambda_{x+y}y,$$
d'autre part,
$$f(x+y)=f(x)+f(y)=\lambda_x x+\lambda_y y.$$
Puisque la famille (x,y) est libre, toute décomposition d'un vecteur à l'aide de combinaison linéaire de ces vecteurs est unique. On obtient donc $\lambda_x=\lambda_y=\lambda_{x+y}$, ce qui est le résultat voulu.
2. On va raisonner par récurrence sur n, le résultat étant vrai si $n=1$. Soit f l'application linéaire associée à A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Si f est une homothétie, alors A est diagonale et comme sa trace est nulle, c'est la matrice nulle. Sinon, soit $x\in\mathbb{K}^n$ tel que $(x,f(x))$ est libre. Alors on peut compléter cette famille en une base $(x,f(x),e_3,\dots,e_n)$. Dans cette base, la matrice de f est semblable à
$$N=\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \dots & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & N' & \\ \vdots & & & \end{array}\right).$$
Autrement dit, M est semblable à N. Puisque N est de trace nulle, N' est de trace nulle. On peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $Q\in GL_{n-1}(\mathbb{K})$ tel que $Q^{-1}N'Q$ soit une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale. Posons alors
$$P=\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \dots & * \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & Q & \\ \vdots & & & \end{array}\right).$$
Alors, P est inversible, et on vérifie aisément que $P^{-1}NP$ est une matrice n'ayant que des zéros sur la diagonale. Ainsi, N, donc M, est semblable à une telle matrice.

Exercice 24 - Matrices nilpotentes - *Math Spé/L2* - $\star\star$

1. On note P le polynôme minimal de A. Par hypothèse, X^k est un polynôme annulateur de A. Donc $P|X^k$, et $P=X^m$. Maintenant, on sait que le polynôme annulateur est de degré inférieur ou égal à n (par exemple, parce qu'il divise le polynôme caractéristique). On en déduit que $m\leq n$ et $A^m=0$.

2. On suppose qu'il existe une telle matrice A. Remarquons que $B^3 = 0$, et donc $A^6 = 0$. D'après le résultat de la première question, on a $A^3 = 0$. Notons
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$
On a :
$$A^3 = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \end{pmatrix} = 0.$$
Les deux premières lignes de A sont nulles. Mais alors, quand on calcule A^2, les deux premières lignes restent nulles, ce qui n'est pas le cas de B. Il n'existe donc pas de matrices A pour laquelle $A^2 = B$.

Exercice 25 - Morphismes de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ - *Math. Spé* - ⋆⋆⋆⋆

$GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvection $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$ et les matrices de dilation $D_i(\lambda)$ (matrice avec des 1 sur la diagonale, sauf en $i-$ème position où il y un λ). On a :
$$\phi(T_{i,j}(\lambda)) = a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_m\lambda^m = P(\lambda).$$
Maintenant, il est facile de vérifier que $T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\lambda) = T_{i,j}(2\lambda)$, ce qui entraîne que pour tout λ de $\mathbb{K}$, on a $P(2\lambda) = [P(\lambda)]^2$. Le corps $\mathbb{K}$ étant infini, cette égalité prouve que $P(2X) = P(X^2)$, et par considération de degré, $P \equiv a_0$, avec $a_0^2 = a_0$ et $a_0 \neq 0$ (puisqu'on arrive dans $\mathbb{K}^*$). On a donc :
$$\phi(T_{i,j}(\lambda)) = 1.$$
Si $Q(\lambda) = \phi(D_1(\lambda)) = b_0 + \cdots + b_m\lambda^m$, $b_m \neq 0$, on a :
$$Q(\lambda)Q(1/\lambda) = \phi(I_n) = 1.$$
On a donc :
$$\lambda^m = (b_0 + \cdots + b_m\lambda^m)(b_0\lambda^m + \cdots + b_m).$$
On en déduit, puisque K est infini et que b_m est supposé non nul, que $b_0 = \cdots = b_{m-1} = 0$ et que $b_m^2 = 1$. Puisque $Q(1) = 1$, on a forcément $b_m = 1$. Maintenant, si $M \in GL_n(\mathbb{K})$, M se décompose en
$$M = D_1(\det M)U,$$
où U est le produit de matrices de transvection. Ceci prouve que :
$$\phi(M) = (\det M)^m.$$