

## PETITS CALCULS

### Exercice 1 - - L1/Math Sup - ★

On ne change pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres. On ajoute donc à la troisième ligne 10 fois la seconde et 100 fois la première. On obtient :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 546 & 273 & 169 \end{vmatrix}.$$

Maintenant, tous les éléments de la dernière ligne sont divisibles par 13, et le déterminant vaut :

$$13 \times \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 42 & 21 & 13 \end{vmatrix}.$$

C'est bien un entier divisible par 13!

### Exercice 2 - - L1/Math Sup - ★

On somme tout sur la première ligne. On obtient une ligne composée de  $1 + a + b + c$  qu'on peut extraire du déterminant. On retire ensuite  $b$  fois la première ligne à la seconde, et  $c$  fois la première ligne à la troisième. Il reste une matrice triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale. Celle-ci est de déterminant 1.

### Exercice 3 - Sous forme factorisée - L1/Math Sup - ★

On commence par faire apparaître des 0 sur la première colonne, puis on transforme la troisième colonne en utilisant la formule

$$\cos 2b - \cos 2a = 2 \cos^2 b - 2 \cos^2 a.$$

On trouve successivement :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & \cos 2b - \cos 2a \\ 0 & \cos c - \cos a & \cos 2c - \cos 2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & 2 \cos^2 b - 2 \cos^2 a \\ 0 & \cos c - \cos a & 2 \cos^2 c - 2 \cos^2 a \end{vmatrix}.$$

On obtient alors, en utilisant que  $\cos b - \cos a$  (resp.  $\cos c - \cos a$ ) est un facteur commun de la deuxième (resp. troisième) ligne :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & \cos b - \cos a & 2(\cos b - \cos a)(\cos b + \cos a) \\ 0 & \cos c - \cos a & 2(\cos c - \cos a)(\cos c + \cos a) \end{vmatrix} \\ &= (\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a) \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & 1 & 2(\cos b + \cos a) \\ 0 & 1 & 2(\cos c + \cos a) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On fait apparaître un dernier zéro, puis on développe le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 0 & 1 & 2(\cos b + \cos a) \\ 0 & 0 & 2(\cos c - \cos b) \end{vmatrix} = 2(\cos b - \cos a)(\cos c - \cos a)(\cos c - \cos b).$$

## GRANDS CALCULS

### Exercice 4 - Déterminant de Vandermonde - L1/L2/Math Sup/Math Spé - ★★

Nous allons procéder par récurrence sur  $n$ . On commence par remarquer que, pour  $n = 2$ , on a  $V(\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$ . Nous allons donc prouver que :

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

Cette formule est vraie pour  $n = 2$ , et supposons là vraie au rang  $n - 1$ . Si deux des  $\alpha_i$  sont égaux, la formule est trivialement vraie, les deux termes étant égaux à 0. On suppose donc que les  $\alpha_i$  sont tous distincts, et on considère  $P(x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x)$ . Le développement de ce déterminant par rapport à la dernière colonne prouve que  $P$  est un polynôme de degré exactement  $n - 1$ , et de coefficient dominant  $V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ . Or, si  $x = \alpha_i$ , avec  $i \leq n - 1$ , le déterminant possède deux colonnes identiques et est donc nul. Ces valeurs sont donc les racines de  $P$  (il y en a exactement  $n - 1$ ), et  $P$  se factorise sous la forme :

$$P(x) = V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_{n-1}).$$

Il suffit de choisir  $x = \alpha_n$  pour obtenir le résultat.

### Exercice 5 - Fonction affine - L1/Math Sup - ★★

1. Retrançons la première colonne à toutes les autres colonnes. Alors le déterminant de  $A(x)$  est égal au déterminant d'une matrice dont la première colonne est constituée par des termes du type  $a_{i,1} + x$  et tous les autres coefficients sont des constantes (ne dépendent pas de  $x$ ). Si on développe ce déterminant par rapport à la première colonne, on trouve que

$$\det(A(x)) = \sum_{i=1}^n (-1)^i (a_{i,1} + x) \det(A_i)$$

où  $A_i$  est une matrice à coefficients réels. D'où le résultat.

2. Soit  $D(x)$  le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant  $x$  à chacun des coefficients. D'après la question précédente, on sait que  $D(x) = ax + b$  pour des réels  $a$  et  $b$ . De plus,  $D(-a)$  est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont  $\alpha_i - a$ . D'où

$$D(-a) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i - a).$$

De même, on a

$$D(-b) = \prod_{i=1}^n (\alpha_i - b).$$

$a$  et  $c$  se déduisent alors facilement par la résolution d'un système  $2 \times 2$  :

$$\begin{cases} a &= \frac{D(-b) - D(-a)}{a - b} \\ b &= \frac{aD(-b) - bD(-a)}{a - b}. \end{cases}$$

## Exercices - Déterminants : corrigé

---

### Exercice 6 - Imbriqué... - L1/Math Sup - ★★

Notons  $D(s_1, \dots, s_n)$  ce déterminant. Prouvons par récurrence sur  $n$  que

$$D(s_1, \dots, s_n) = s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}).$$

On vérifie cette relation facilement pour les premières valeurs de  $n$ . Si la propriété est vraie au rang  $n - 1$ , prouvons la au rang  $n$  en retranchant la première colonne à toutes les autres. On trouve

$$D(s_1, \dots, s_n) = \begin{vmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 & s_2 - s_1 & \dots & s_2 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_1 & s_2 - s_1 & \dots & s_n - s_1 \end{vmatrix} = s_1 \begin{vmatrix} s_2 - s_1 & \dots & \dots & s_2 - s_1 \\ s_2 - s_1 & s_3 - s_1 & \dots & s_3 - s_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_2 - s_1 & s_3 - s_1 & \dots & s_n - s_1 \end{vmatrix}.$$

On en déduit que

$$D(s_1, \dots, s_n) = s_1 D(s_2 - s_1, s_3 - s_1, \dots, s_n - s_1).$$

Utilisant l'hypothèse de récurrence, on trouve

$$\begin{aligned} D(s_1, \dots, s_n) &= s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_1 - s_2 + s_1) \dots (s_n - s_1 - s_{n-1} + s_1) \\ &= s_1(s_2 - s_1)(s_3 - s_2) \dots (s_n - s_{n-1}). \end{aligned}$$

### Exercice 7 - Déterminant tridiagonal - L2/Math Spé/Oral Mines - ★★

On note  $\Delta_n(x)$  le déterminant recherché. On remarque, en écrivant la formule qui donne la définition du déterminant, que  $\Delta_n(x)$  est un polynôme de degré exactement égal à  $2n$ . De plus, le terme en  $x^{2n}$  ne peut s'obtenir qu'en faisant le produit des termes diagonaux. On en déduit que le coefficient devant  $x^{2n}$  est égal à 1. Calculons ensuite  $\Delta_n(x)$  en effectuant un développement suivant la première ligne. On trouve

$$\Delta_n(x) = (1 + x^2)\Delta_{n-1}(x) + x \begin{vmatrix} -x & -x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 + x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & -x & 1 + x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & \vdots & \ddots & -x & 1 + x^2 & -x \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x & 1 + x^2 \end{vmatrix}.$$

On continue en effectuant un développement suivant la deuxième colonne du déterminant restant. On trouve

$$\Delta_n(x) = (1 + x^2)\Delta_{n-1}(x) - x^2\Delta_{n-2}(x).$$

Pour trouver vraiment la valeur de  $\Delta_n(x)$ , on calcule les premières itérations. On a

$$\Delta_1(x) = 1 + x^2, \quad \Delta_2(x) = 1 + x^2 + x^4, \dots$$

On conjecture que  $\Delta_n(x) = 1 + x^2 + \dots + x^{2n}$ . Démontrons ceci par récurrence double. La propriété est vraie aux rangs  $n = 1$  et  $n = 2$ . Si elle est vraie simultanément aux rangs  $n - 2$  et  $n - 1$ , la formule de récurrence précédente montre qu'elle est aussi vraie au rang  $n$ . On obtient donc  $\Delta_n(x) = 1 + x^2 + \dots + x^{2n}$ .

### Exercice 8 - Tridiagonal - L1/Math Sup - ★★

## Exercices - Déterminants : corrigé

---

1. On développe le déterminant par rapport à la première colonne. On trouve :

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - c \begin{vmatrix} b & 0 & \dots \\ c & a & b & 0 & \dots \\ 0 & c & a & b & \ddots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \end{vmatrix}.$$

On développe encore le second déterminant par rapport à la première ligne, et on trouve le résultat demandé :

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n.$$

2. On va procéder par récurrence **double**. Précisément, on va prouver par récurrence sur  $n \geq 1$  l'hypothèse  $H_n$  suivante :

$$H_n : \Delta_n = \frac{(n+1)a^n}{2^n} \text{ et } \Delta_{n+1} = \frac{(n+2)a^{n+1}}{2^{n+1}}."$$

Puisque  $\Delta_1 = a$  et  $\Delta_2 = a^2 - bc = \frac{3a^2}{4}$ ,  $H_1$  est vraie. Supposons l'hypothèse vraie au rang  $n$  et prouvons-la au rang  $n + 1$ . On a directement  $\Delta_{n+1} = \frac{(n+2)a^{n+1}}{2^{n+1}}$ . De plus,

$$\Delta_{n+2} = a\Delta_{n+1} - bc\Delta_n = \frac{(n+2)a^{n+2}}{2^{n+1}} - \frac{a^2}{4} \times \frac{(n+1)a^n}{2^n} = \frac{(n+3)a^{n+2}}{2^{n+2}}.$$

Ceci prouve  $H_{n+2}$ .

### Exercice 9 - Déterminant circulant - L1/L2/Math Sup/Math Spé - ★★

Effectuons le calcul demandé. On obtient que la  $k$ -ième colonne de  $AM$  est égale à la  $k$ -ième colonne de  $M$  multipliée par  $a_1 + a_2\omega^{k-1} + \dots + a_n\omega^{(k-1)(n-1)}$ . En notant

$$P(x) = a_1 + a_2x + \dots + a_nx^{n-1},$$

on a donc d'une part

$$\det(AM) = P(1)P(\omega) \dots P(\omega^{n-1}) \det(M)$$

et d'autre part

$$\det(AM) = \det(A) \det(M).$$

Puisque le déterminant de  $M$  est non nul (c'est un déterminant de Van der Monde), on a :

$$\det(A) = P(1)P(\omega) \dots P(\omega^{n-1}).$$

### Exercice 10 - D'après CCP - L2/Math Spé - ★★

On va prouver par récurrence sur  $n$  que ce déterminant vaut  $1 + x_1y_1 + \dots + x_ny_n = \Delta_n$ . La formule est vraie au rang  $n$ , supposons-la vraie au rang  $n - 1$  et prouvons-la au rang  $n$ . Par multilinéarité du déterminant, on a :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & 0 \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}.$$

## Exercices - Déterminants : corrigé

---

En développant suivant la dernière colonne, on trouve que le deuxième déterminant vaut  $\Delta_{n-1}$ . Pour le second, on peut factoriser par  $x_n$  dans la dernière ligne et par  $y_n$  dans la dernière colonne. On trouve que :

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 \\ x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & \dots & x_2 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ y_1 & \dots & y_{n-1} & 1 \end{vmatrix}.$$

On effectue alors  $C_1 - y_1 C_n \rightarrow C_1$ ,  $C_2 - y_2 C_n \rightarrow C_2, \dots$ , et on trouve

$$\Delta_n = \Delta_{n-1} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} + x_n y_n.$$

Ceci achève la preuve de l'hypothèse de récurrence, et donc du résultat.

### Exercice 11 - - L1/Math Sup - ★★

On met  $i$  en facteur dans chaque ligne de la matrice. On voit alors apparaître le déterminant de VanderMonde  $V(1, 2, \dots, n)$ . Le déterminant recherché vaut donc :

$$\begin{aligned} D &= n! \prod_{1 \leq i < j \leq n} (j - i) \\ &= n! \prod_{1 \leq j \leq n} \prod_{1 \leq i < j} (j - i) \\ &= n! \prod_{1 \leq j \leq n} (j - 1)! \\ &= 1! 2! \dots n! \end{aligned}$$

## CALCULS THÉORIQUES

### Exercice 12 - - L1/Math Sup/L2/Math Spé - ★

On a :

$$\text{rg}(AB) \leq \text{rg}(A)$$

(car l'image de  $AB$ , vue comme application linéaire, est contenue dans l'image de  $A$ ). Maintenant, le théorème du rang garantit que

$$\text{rg}(A) \leq p < n.$$

Puisque  $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a  $\det(AB) = 0$ .

### Exercice 13 - Déterminant de la transposition - L1/Math Sup/L2/Math Spé - ★★

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est la somme directe du sous-espace vectoriel des matrices symétriques et des matrices antisymétriques. Soit  $(A_1, \dots, A_p)$  et  $(B_1, \dots, B_q)$  une base respective de l'espace vectoriel

## Exercices - Déterminants : corrigé

---

des matrices symétriques et antisymétriques.  $(A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q)$  forme une base de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et il suffit de calculer le déterminant dans cette base. Mais  $\phi(A_i) = A_i$  tandis que  $\phi(B_j) = -B_j$ . On a donc  $\det(\phi) = (-1)^q$ . Il suffit ensuite de se souvenir que  $p = \frac{n(n+1)}{2}$ , ou  $q = \frac{n(n-1)}{2}$ .

### COMATRICE ET FORMULES DE CRAMER

#### Exercice 14 - - L1/Math Sup/L2/Math Spé - \*\*

Trouvons d'abord une condition nécessaire. Puisque  $M \in M_n(\mathbb{Z})$ ,  $\det(M) \in \mathbb{Z}$ . D'autre part, si  $M^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ , son déterminant est un entier et donc  $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det M} \in \mathbb{Z}$ . Ceci entraîne que  $\det(M) = \pm 1$ .

Réciproquement, si  $\det(M) = \pm 1$ , alors  $M$  est inversible. De plus, toutes les entrées de sa comatrice, qui sont obtenus comme déterminants de la matrice, sont des entiers. De la formule de Cramer, on déduit que  $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t\text{comat}(M)$  est une matrice à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

#### Exercice 15 - Rang de la comatrice - L2/Math Spé - \*\*\*

- a. – Si  $A$  est inversible, la formule de Cramer  ${}^t\text{comat}(A)A = \det(A)I_n$  prouve que  $\text{comat}(A)$  est inversible.
- Si le rang de  $A$  est inférieur ou égal à  $n-2$ , puisque la comatrice est fabriquée à partir de déterminants extraits d'ordre  $n-1$ , la comatrice est nulle.
  - Si le rang de  $A$  vaut  $n-1$ , notons  $u$  (resp.  $v$ ) l'endomorphisme associé à  $A$  (resp. à  ${}^t\text{comat}(A)$ ) dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Nécessairement, on a  $\text{Im}(u) \subset \ker(v)$ , et donc la dimension du noyau de  $v$  est au supérieur à  $n-1$ . Ce n'est pas  $n$ , puisque la comatrice n'est pas la matrice nulle (un des déterminants extraits d'ordre  $n-1$  de  $A$  est non nul). Le théorème du rang prouve alors que le rang de la comatrice est 1.
- b. – Le cas  $A = 0$  donne une solution.
- Dans le cas où le rang de  $A$  est compris entre 1 et  $n-2$ , l'étude précédente montre que l'équation est impossible (sinon  $A$  serait la matrice nulle).
  - Si le rang de  $A$  est  $n-1$ , le rang de la comatrice est  $1 < n-1$  : l'équation est toujours impossible.
  - Si  $A$  est inversible, les solutions sont toutes les matrices  $A$  telles que  ${}^tAA = (\det A)I_n$ . Mais on a alors  $\det({}^tAA) = (\det A)^2 = \det A$ , équation qui entraîne que  $\det A = 1$ . Les solutions sont alors les matrices  $A$  vérifiant  ${}^tAA = I_n$ , c'est-à-dire l'ensemble des matrices orthogonales.

#### Exercice 16 - Polynôme caractéristique de la comatrice - L2/Math Spé - \*\*\*\*

On note  $B$  la transposée de la comatrice de  $A$ , il suffit de calculer le polynôme caractéristique de  $B$ . On suppose d'abord que  $A$  est inversible. La formule de Cramer s'écrit encore :

$$B = \det(A)A^{-1},$$

ce qui donne :

$$B - XI_n = \det(A) \left( A^{-1} - \frac{X}{\det A} I_n \right).$$

On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  dans  $\mathbb{C}$ , répétées autant de fois que leur multiplicité

## Exercices - Déterminants : corrigé

---

pour en avoir exactement  $n$ . On rappelle que le déterminant de  $A$  vaut :

$$\det(A) = \prod_{j=1}^n \lambda_j.$$

Par ailleurs, les valeurs propres de  $A^{-1}$  sont les  $\frac{1}{\lambda_j}$ , et le polynôme caractéristique de  $A^{-1}$  vaut donc :

$$P_{A^{-1}}(X) = (-1)^n \prod_{j=1}^n \left( X - \frac{1}{\lambda_j} \right).$$

On obtient finalement que :

$$\begin{aligned} P_B(X) &= (-1)^n \prod_{j=1}^n \lambda_j^n \prod_{j=1}^n \left( \frac{X}{\lambda_1 \dots \lambda_n} - \frac{1}{\lambda_j} \right) \\ &= (-1)^n \prod_{i=1}^n \left( X - \prod_{m \neq i} \lambda_m \right). \end{aligned}$$

Dans le cas où  $A$  n'est pas inversible, il est bien connu que pour  $r > 0$  assez petit,  $A_r = A + rI_n$  est inversible, et si  $r$  tend vers 0, la suite  $A_r$  tend vers  $A$ . En outre, les valeurs propres de  $A_r$  tendent vers les valeurs propres de  $A$ . Il suffit donc d'appliquer le résultat précédent à  $A_r$ , puis de faire tendre  $r$  vers 0 pour vérifier que le résultat est encore valable.

### APPLICATIONS

#### Exercice 17 - Inversibilité - L1/Math Sup - ★

L'application linéaire associée à  $M_\alpha$  est bijective si et seulement si la matrice  $M_\alpha$  est inversible, si et seulement si le déterminant de  $M_\alpha$  est non-nul. On calcule donc ce déterminant. En ajoutant  $L_3$  à  $L_1$  et  $2L_3$  à  $L_2$ , on trouve :

$$\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 0 & 4 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 4 & \alpha \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha - 4.$$

L'application linéaire associée à  $M_\alpha$  est donc bijective si et seulement si  $\alpha \neq 4$ .

#### Exercice 18 - Inversibilité d'une matrice à paramètres - L1/Math Sup - ★

Il suffit de calculer le déterminant. Il faut le calculer de façon suffisamment intelligente pour qu'il apparaisse immédiatement sous forme factorisée. Pour la première matrice, commencer

## Exercices - Déterminants : corrigé

---

par tout ajouter sur la première colonne.

$$\begin{aligned}\det(A) &= \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a-2 & -1 & 0 & -1 \\ a-2 & a & -1 & 0 \\ a-2 & -1 & a & -1 \\ a-2 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\ &= (a-2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & 0 & -1 & a \end{vmatrix} \\ &= (a-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} \\ &= (a-2) \begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & -1 & a+1 \end{vmatrix} \\ &= (a-2)a \begin{vmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} \\ &= a(a-2)((a+1)^2 - 1) = a^2(a-2)(a+2).\end{aligned}$$

La matrice  $A$  est donc inversible si et seulement si  $a \neq 0, 2, -2$ .

Pour la matrice  $B$ , on procède de la même façon, en commençant par mettre  $m^2 - m = m(m-1)$



en facteur sur la dernière colonne.

$$\begin{aligned}
 \det(B) &= m(m-1) \begin{vmatrix} 0 & m & m & 1 \\ 1 & m-1 & 2m-1 & 1 \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{vmatrix} \\
 &= m(m-1) \begin{vmatrix} 0 & m & m & 1 \\ 1 & m-1 & 2m-1 & 1 \\ 0 & m & m & 0 \\ 0 & 1 & m & -1 \end{vmatrix} \quad (L4 - L2 \rightarrow L4) \\
 &= -m(m-1) \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ m & m & 0 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -m^2(m-1) \begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -m^2(m-1) \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} \quad (C2 - C1 \rightarrow C1) \\
 &= m^2(m-1) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ m-1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= -m^2(m-1)^2
 \end{aligned}$$

La matrice est inversible si et seulement si  $m \neq 0, 1$ .

### Exercice 19 - Famille libre - L1/Math Sup - ★

Puisqu'on est en dimension 3, la famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est une famille libre si et seulement si c'est une base. Soit  $M$  la matrice de ses trois vecteurs, ie

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La famille  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si la matrice  $M$  est inversible, c'est-à-dire si et seulement si  $\det(M) \neq 0$ . Mais on a

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} t+2 & 1 & t \\ t+2 & t & 1 \\ t+2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (t+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (t+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & t-1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1-t \end{vmatrix} \\
 &= -(t+2)(t-1)^2.
 \end{aligned}$$

## Exercices - Déterminants : corrigé

---

La famille est donc une base si et seulement si  $t \neq -2$  et  $t \neq 1$ .

### Exercice 20 - A quelle condition la famille est-elle libre ? - L2/Math Spé - ★★★

Soit  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de scalaires telle qu'on ait la relation  $\sum_{j=1}^n \lambda_j (u_j + s) = 0$ . Développant, on trouve que cette relation est équivalente à  $\sum_{j=1}^n (\lambda_j + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \alpha_j) u_j = 0$ . La famille  $(u_1, \dots, u_n)$  est libre, ceci est équivalent à

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}, \lambda_j + (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) \alpha_j = 0.$$

On reformule ces conditions en tant que système d'inconnues  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

$$\begin{pmatrix} (1 + \alpha_1) & \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \dots & \dots & \alpha_n & 1 + \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La famille  $(u_i + s)_{1 \leq i \leq n}$  est libre si et seulement si ce système admet pour seule solution la solution identiquement nulle,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Autrement dit, si et seulement si la matrice

$$A = \begin{pmatrix} (1 + \alpha_1) & \alpha_1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 + \alpha_2 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n & \dots & \dots & \alpha_n & 1 + \alpha_n \end{pmatrix}$$

est inversible. Pour déterminer si  $A$  est inversible, on calcule son déterminant, en commençant par retirer la dernière colonne à toutes les précédentes :

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & 1 + \alpha_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \end{vmatrix} \\ &= 1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \end{aligned}$$

En résumé, on a prouvé que  $(u_i + s)_{1 \leq i \leq n}$  est une famille libre si et seulement si  $1 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n \neq 0$ .

### Exercice 21 - Polynômes - L1/Math Sup - ★★

Calculons le déterminant de cette famille (de  $(n + 1)$  vecteurs dans un espace de dimension  $n + 1$ ) par rapport à la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$ . On a

$$(X - z_i)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (-1)^{n-j} z_i^{n-j} X^j.$$

Le déterminant recherché est donc

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} \binom{n}{0}(-z_0)^n & \binom{n}{0}(-z_1)^n & \dots & \binom{n}{0}(-z_n)^n \\ \binom{n}{1}(-z_0)^{n-1} & \binom{n}{1}(-z_1)^{n-1} & \dots & \binom{n}{1}(-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \binom{n}{n} & \dots & \binom{n}{n} \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \begin{vmatrix} (-z_0)^n & (-z_1)^n & \dots & (-z_n)^n \\ (-z_0)^{n-1} & (-z_1)^{n-1} & \dots & (-z_n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

On reconnaît un déterminant de Vandermonde, qui est non-nul puisque les  $z_i$  sont supposés tous distincts. La famille considérée est effectivement une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ .

**Exercice 22 - Similarité - L1/Math Sup/Oral Mines - ★★**

Ecrivons  $A = PBP^{-1}$  sous la forme  $AP = PB$ . Soit  $P_1$  la partie réelle de  $P$ , et  $P_2$  sa partie imaginaire. Alors, prenant la partie réelle puis la partie imaginaire de l'équation précédente, et puisque  $A$  et  $B$  sont à coefficients réels, on obtient  $AP_1 = P_1B$  et  $AP_2 = BP_2$ . Ainsi, pour tout réel  $x$ , on a  $A(P_1 + xP_2) = (P_1 + xP_2)B$ . Il suffit donc de prouver qu'il existe un réel  $x$  tel que  $P_1 + xP_2$  est inversible. Posons  $Q(X) = \det(P_1 + XP_2)$ .  $Q$  est un polynôme qui n'est pas identiquement nul puisque  $Q(i) = \det(P) \neq 0$ . Ainsi, il existe un réel  $x$  tel que  $Q(x) \neq 0$ . Pour ce réel, la matrice  $M = (P_1 + xP_2) \in GL_n(\mathbb{R})$ , et  $A = MBM^{-1}$ .

**Exercice 23 - Densité des matrices inversibles - L1/Math Sup - ★★**

Soit la fonction  $P(x) = \det(A + xI)$ .  $P$  est un polynôme, il ne possède donc qu'un nombre fini de racines. En particulier, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $P$  ne s'annule pas en  $x$ , pour  $|x| < \alpha$ ,  $x \neq 0$ . La caractérisation de l'inversibilité des matrices en fonction de la non-nullité des déterminants donne le résultat.

**Exercice 24 - Enigme du berger - L1/Math Sup - ★★★**

**1.a** Si la matrice est de taille 1, le résultat est évident. On suppose le résultat vrai pour toute matrice carrée de taille  $n - 1$  vérifiant les conditions de l'énoncé, et on le prouve pour toute matrice carrée de taille  $n$ . Soit  $A = (a_{i,j})$  une telle matrice carrée. On calcule son déterminant en développant par rapport à la première colonne, et on note  $\Delta_i$  le déterminant obtenu en barrant la  $i$ -ème ligne et la première colonne. On a donc :

$$\det(A) = a_{1,1}\Delta_1 + \sum_{i=2}^n a_{i,1}(-1)^{i+1}\Delta_i.$$

Chaque  $\Delta_i$  est un nombre entier d'après la formule qui permet de calculer le déterminant, donc, pour  $i \geq 2$ , par hypothèse,  $a_{i,1}(-1)^i\Delta_i$  est un nombre pair. La somme de nombres pairs reste un nombre pair, on a donc  $\sum_{i=2}^n a_{i,1}(-1)^{i+1}\Delta_i$  qui est un nombre pair. De plus,  $a_{1,1}$  est impair, et par hypothèse de récurrence  $\Delta_1$  aussi. En réunissant tout, on obtient bien que  $\det(A)$  est impair.

**1.b.** Un entier impair est non nul, c'est donc que le déterminant de la matrice est différent de zéro et que la matrice est inversible.

**2.a.** Un tel calcul donne une matrice colonne dont chaque ligne porte la somme des nombres de la ligne correspondante de  $B$ . Comme il y a toujours autant de moutons dans chaque troupeau, la somme vaut en regroupant les termes  $50 \times 0 + 50 \times 2 + 1 = 101$ . Le résultat est donc la matrice à 101 lignes

$$\begin{pmatrix} 101 \\ 101 \\ \vdots \\ 101 \end{pmatrix}.$$

**2.b** On s'intéresse à la valeur portée par la  $i$ -ème ligne, et on note  $A$  et  $B$  les troupeaux choisis pour séparer les moutons à cette  $i$ -ème étape. Cette valeur vaut :

$$\text{poids mouton } i + 2 \times \sum_{\text{mouton dans } B} \text{poids mouton},$$

ce qui fait encore :

$$\text{poids mouton } i + 2 \times \text{poids des moutons dans } B.$$

Maintenant, le poids total du troupeau de mouton vaut :

$$\text{poids mouton } i + \text{poids des moutons dans } A + \text{poids des moutons dans } B.$$

Mais par hypothèse,

$$\text{poids des moutons dans } A = \text{poids des moutons dans } B.$$

La matrice recherchée est donc :

$$\begin{pmatrix} \text{poids troupeau} \\ \text{poids troupeau} \\ \vdots \\ \text{poids troupeau} \end{pmatrix}.$$

**2.c** C'est une application directe de la question 1.

**2.d** D'après les questions a. et b., on a :

$$BX = \lambda B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

où  $\lambda = \frac{\text{poids troupeau}}{101}$ . Puisque  $B$  est inversible, on obtient en multipliant par  $B^{-1}$  à gauche :

$$X = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

C'est bien que tous les moutons ont le même poids !

**Exercice 25 - Résultant - L2/Math Spé - ★★★**

a. Supposons que  $P$  et  $Q$  ont un facteur commun  $D$ . On factorise  $P = DB$  et  $Q = DA$ ,  $A$  et  $B$  vérifient les conditions voulues. Réciproquement, si  $P \wedge Q = 1$  et  $AP = BQ$ , alors  $P|BQ$  et par le théorème de Gauss  $P|B$ . Ceci contredit les contraintes imposées à  $B$ .

b. On note  $n = \deg(P)$ ,  $m = \deg(Q)$ . On a :

$$\begin{aligned} P \wedge Q = 1 &\iff \exists(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2, A \neq 0, B \neq 0, AP = BQ, \deg(A) < m, \deg(B) < n \\ &\iff \text{la famille } (P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q) \text{ est liée} \\ &\iff \det(P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q) = 0. \end{aligned}$$

Si  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  et  $Q = b_0 + \dots + b_mX^m$ , ce déterminant s'écrit :

$$R(P, Q) = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & \dots & b_0 & 0 & \dots \\ a_1 & a_0 & \dots & 0 & b_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ a_n & \vdots & & b_m & & \\ 0 & a_n & & & & \\ \vdots & \vdots & a_n & \dots & \dots & b_m \end{vmatrix}.$$

C'est le *résultant* de  $P$  et  $Q$ .

**DIVERS**

**Exercice 26 - Morphismes de groupes de  $GL_n(\mathbb{K})$  dans  $\mathbb{K}^*$  - L2/Math. Spé - ★★★**

$GL_n(\mathbb{K})$  est engendré par les matrices de transvection  $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j}$  et les matrices de dilation  $D_i(\lambda)$  (matrice avec des 1 sur la diagonale, sauf en  $i$ -ème position où il y un  $\lambda$ ). On a :

$$\phi(T_{i,j}(\lambda)) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_m\lambda^m = P(\lambda).$$

Maintenant, il est facile de vérifier que  $T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\lambda) = T_{i,j}(2\lambda)$ , ce qui entraîne que pour tout  $\lambda$  de  $\mathbb{K}$ , on a  $P(2\lambda) = [P(\lambda)]^2$ . Le corps  $\mathbb{K}$  étant infini, cette égalité prouve que  $P(2X) = P(X^2)$ , et par considération de degré,  $P \equiv a_0$ , avec  $a_0^2 = a_0$  et  $a_0 \neq 0$  (puisque'on arrive dans  $\mathbb{K}^*$ ). On a donc :

$$\phi(T_{i,j}(\lambda)) = 1.$$

Si  $Q(\lambda) = \phi(D_1(\lambda)) = b_0 + \dots + b_m\lambda^m$ ,  $b_m \neq 0$ , on a :

$$Q(\lambda)Q(1/\lambda) = \phi(I_n) = 1.$$

On a donc :

$$\lambda^m = (b_0 + \dots + b_m\lambda^m)(b_0\lambda^m + \dots + b_m).$$

On en déduit, puisque  $\mathbb{K}$  est infini et que  $b_m$  est supposé non nul, que  $b_0 = \dots = b_{m-1} = 0$  et que  $b_m^2 = 1$ . Puisque  $Q(1) = 1$ , on a forcément  $b_m = 1$ . Maintenant, si  $M \in GL_n(\mathbb{K})$ ,  $M$  se décompose en

$$M = D_1(\det M)U,$$

où  $U$  est le produit de matrices de transvection. Ceci prouve que :

$$\phi(M) = (\det M)^m.$$