Espaces Vectoriels de Dimensions Finies
Partie I
Application de la résolution
des systèmes linéaires

Cours et Exercices avec Solutions

M. Mouçouf

22 décembre 2013

Table des matières

Chapitre 1

Résolution des systèmes d'équations linéaires : méthode du pivot de Gauss

Chapitre 2

Espaces vectoriels de dimensions finies : Application de la résolution des systèmes linéaires

Dans tous ce chapitre, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Généralités

Définition 1. *On appelle espace vectoriel sur K (e.v sur K) ou K-espace vectoriel (K-e.v) un ensemble non vide E muni*

d'une loi interne $+ : E \times E \longrightarrow E$

$$(u,v) \longmapsto u+v$$

et d'une loi externe $\cdot : K \times E \longrightarrow E$

$$(\alpha,u) \longmapsto \alpha.u = \alpha u$$

telles que :

1) $(E,+)$ est un groupe commutatif :

(i) $\forall u,v,w \in E : u+(v+w) = (u+v)+w = u+v+w$ (sans parenthèses),

(ii) $\exists 0_E \in E, \forall u \in E : 0_E + u = u + 0_E = u,$
(iii) $\forall u \in E, \exists -u \in E :$
$u + (-u) = (-u) + u = 0_E,$
(iv) $\forall u, v \in E : u + v = v + u.$
2)$\forall (u,v) \in E^2, \forall (\alpha, \beta) \in K^2$ *:*
a) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v.$ *c)* $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u) = \alpha\beta u$ *(sans parenthèses).*
b) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u.$ *d)* $1u = u.$

Les éléments de K sont appelés des scalaires, ceux de E sont appelés des vecteurs et on les note parfois par $\overrightarrow{u}$ (une lettre surmentée d'une flèche).

Exemples 1.
1) $\mathbb{R}$ *est un* $\mathbb{R}$*-e.v.*
2) $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{C}$*-e.v et un* $\mathbb{R}$*-e.v.*
3) On muni K^n *des deux lois suivantes :*

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

et

$$\alpha(x_1, \ldots, x_n) = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$$

K^n *est alors un* K*-e.v.*
4) L'ensemble $K[X]$ *des polynômes à coefficients dans* K *est un* K*-e.v.*
5) Soit $\mathcal{A}$ *un ensemble et* E *un* K*-e.v. On désigne alors par* $\mathcal{F}(\mathcal{A}, E)$ *l'ensemble de toutes les applications de* $\mathcal{A}$ *dans* E*.*
$\mathcal{F}(\mathcal{A}, E)$ *peut être muni des lois + et . défini par :*

$$f + g : x \longmapsto f(x) + g(x)$$

$$\alpha f : x \longmapsto \alpha f(x)$$

On vérifie facilement que $\mathcal{F}(\mathcal{A}, E)$ est alors un K-e.v.
Cas particuliers :
a) $\mathcal{A} = \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{R}$: dans ce cas $\mathcal{F}(\mathcal{A}, E)$ est l'ensemble des suites réelles qui est donc un $\mathbb{R}$-e.v.
b) $\mathcal{A} = I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\mathcal{A}, E)$ est l'ensemble des fonctions numériques définies sur I qui est donc un $\mathbb{R}$-e.v.

Proposition 2. *Soient E un K-e.v et $u, v \in E$, $\alpha, \beta \in K$. Alors on a :*
1)$0_K u = 0_E$ *et* $\alpha 0_E = 0_E$.
2) $\alpha u = 0_E \Rightarrow \alpha = 0_K$ *ou* $u = 0_E$.
3) $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v$ *et* $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u$.
4) $\alpha(-u) = -\alpha u$ *et* $(-1)u = -u$.
On notra par la suite (s'il n'y a pas de confusion à craindre) 0 *les éléments* 0_K *et* 0_E.

2.2 Sous-espaces vectoriels

Définition 3. *Soient E un K-e.v et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E (F est un sev de E) si :*
1) $F \neq \varnothing$,
2) $\forall (u, v) \in F^2 :\ u + v \in F$ *(on dit que F est stable par la loi interne),*
3) $\forall \alpha \in K, \forall u \in F :\ \alpha u \in F$ *(on dit que F est stable par la loi externe).*

Proposition 4. *(Caractérisation)*
Soit F une partie d'un K-e.v E. Alors :

$$F \text{ est un sev de } E \Leftrightarrow \begin{cases} F \neq \varnothing \\ \forall (u, v) \in F^2, \forall \alpha \in K : \quad \alpha u + v \in F \end{cases}$$

Remarques 5.
1) Soientt E est un K-e.v et F une partie non vide de E. F est un sev de E veut dire que F est un K-e.v pour les lois induites par celles de E :

$$\begin{array}{llll} + : E \times E \longrightarrow E & \text{et} & . : K \times E \longrightarrow E \\ \quad (u, v) \longmapsto u + v & & \quad (\alpha, u) \longmapsto \alpha u. \end{array}$$

2) Un sous espace vectoriel contient toujours le vecteur nul. Donc pour montrer que F est une partie non vide de E, on se contente de vérifier que le vecteur nul 0 de E est dans F. En effet, si $0 \notin F$ alors F n'est pas un sev de E ; et si $0 \in F$ alors F est non vide.
3) Si F est un sev de E et si E est un sev de G alors F est un sev de G.

Exemples 2.

1) Si E est un K-e.v alors $\{0\}$ et E sont des sev de E.

2) Soit $K_n[X] = \{P \in K[X]/deg(P) \leqslant n\}$ (on convient que $-\infty < n$). Alors $K_n[X]$ est un sev de $K[X]$.

Si $n \leqslant m$ alors $K_n[X]$ est un sev de $K_m[X]$.

3) $E = \mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-e.v, $F_1 = \{0\} \times \mathbb{R}$ et $F_2 = \mathbb{R} \times \{0\}$ sont des sev de E.

4) soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions numériques définies et dérivables sur I est un sev de l'ensemble des fonctions numériques définies et continues sur I et ce dernier est un sev de l'ensemble des fonctions numériques définies sur I.

Proposition 6. *Soient E un K-e.v, $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sev de E, alors $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un sev de E.*

Remarque 7. *La réunion de deux sev de E n'est pas en générale un sev de E.*

Exemples 3.

1) On sait que $F = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ et $G = \mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}$ sont des sev de $\mathbb{R}^3$.

On a $u \in F \bigcap G \Longleftrightarrow \exists x, x', y, z \in \mathbb{R} : u = (x, y, 0) = (x', 0, z) \Longleftrightarrow x = x'$ et $y = z = 0$ donc $F \cap G = \{(x, 0, 0)/x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}$.

2) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/2x + y = 0\}$ sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. On a $(1, -1) \in F$ et $(1, -2) \in G$ mais $(1, -1) + (1, -2) = (2, -3) \notin F$ et $\notin G$, donc $(1, -1) + (1, -2) \notin F \cup G$, alors $F \cup G$ n'est pas un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2.3 Somme et somme directe

Proposition et Définition 8. *Soient F_1 et F_2 deux sev d'un K-e.v E. On note $F_1 + F_2$ l'ensemble $\{u_1 + u_2/u_1 \in F_1$ et $u_2 \in F_2\}$. $F_1 + F_2$ est appelé la somme de F_1 et F_2 et c'est un sev de E.*

Proposition 9. *Soient F_1, F_2 et F_3 des sev d'un K-e.v E. Alors :*

1) $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$.

2) $F_1 \subseteq F_1 + F_2$.

3) $F_1 \subseteq F_2 \Rightarrow F_1 + F_3 \subseteq F_2 + F_3$.

4) $(F_1 \subseteq F_3 \text{ et } F_2 \subseteq F_3) \Leftrightarrow F_1 + F_2 \subseteq F_3$.

5) $F_1 + F_1 = F_1$.

6) $F_1 + \{0\} = F_1$.

7) $F_1 + E = E$.

8) $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$ *(on peut donc ne pas utiliser les parenthèses).*

Remarque 10. *$F_1 + F_2$ est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant F_1 et F_2.*

Définition 11. *Deux sev F_1 et F_2 d'un K-e.v E sont dit* ***supplémentaires*** *dans E si et seulement si $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \bigcap F_2 = \{0\}$.*
On écrit alors $E = F_1 \oplus F_2$ et on dit que E est la ***somme directe*** *de F_1 et F_2. F_1 (resp.F_2) est dit un* ***supplémentaire*** *de F_2 (resp.F_2) dans E.*

Exemples 4.
1) On a $E = E \oplus \{0\}$.
2) Soient $K = \mathbb{R}, E = \mathbb{R}^2, F_1 = \mathbb{R} \times \{0\}, F_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$. On a $E = F_1 \oplus F_2$. En effet, $\forall (x,y) \in E$ on a $(x,y) = (x,0) + (0,y) \in F_1 + F_2$. Donc $E \subseteq F_1 + F_2$, et puisqu'on a déjà $F_1 + F_2 \subseteq E$, on conclut que $E = F_1 + F_2$. D'autre part, si $(x,y) \in F_1 \bigcap F_2$, alors $y = 0$ puisque $(x,y) \in F_1$ et $x = 0$ puisque $(x,y) \in F_2$. Donc $(x,y) = (0,0)$, d'où $F_1 \bigcap F_2 = \{(0,0)\}$. En conclusion, $E = F_1 \oplus F_2$.

Remarque 12. *Un sev F de E peut avoir plusieurs supplémentaires dans E.*

Proposition 13. *Soient F_1 et F_2 deux sev d'un espace vectoriel E. Alors E est somme directe de F_1 et F_2 ssi tout éléments de E se décompose d'une façon unique en somme d'un éléments de F_1 et d'un élément de F_2. càd :*
$E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \forall u \in E$, il existe et unique $(u_1, u_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $u = u_1 + u_2$.

Exemple 1. *Soient $K = \mathbb{R}, E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-e.v des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $F_1 = \{f \in E / f \text{ paire }\}$ et $F_2 = \{f \in E / f \text{ impaire }\}$.*
On a F_1 et F_2 sont des sev de E. En effet, l'application nulle $0 : x \to 0$ est à la fois paire et impaire, donc $F_1 \neq \varnothing$ et $F_2 \neq \varnothing$. De plus, la somme de deux

applications paires (resp. impaires) est une application paire (resp. impaire), et si on multiplie une application paire (resp. impaire) par un réel quelconque on obtient une application paire (resp. impaire).
Soit $f \in F_1 \cap F_2$, *alors* $f(x) = f(-x) = -f(x)$, *donc* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *c'est-ç-dire,* $f = 0$. *Par suite* $F_1 \bigcap F_2 = \{0\}$.
D'autre part, Soit $f \in E$. *Il est facile de vérifier que l'application* $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ *est paire et que l'application* $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$ *est impaire. Comme* $f = g + h$, *alors* $E = F_1 + F_2$. *Ce qui fait que* $E = F_1 \oplus F_2$. *En conclusion, toute application de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *s'écrit de manière unique comme somme de deux applications l'une paire et l'autre impaire.*

Remarque 14. *On montre de la même façon que toute fonction définie sur un domaine (de définition) qui est symétrique par rapport à l'origine (c'est à dire,* $x \in D_f \Leftrightarrow -x \in D_f$*), s'écrit de manière unique comme somme de deux fonctions l'une paire et l'autre impaire.*

2.4 Familles génératrices.

Définition 15. *Soient* $u_1, \ldots, u_n$, n *vecteurs d'un* K*-e.v* E. *On appelle combinaison linéaire des vecteurs* $u_1, \ldots, u_n$ *tout vecteur*

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.

Exemples 5.
1) Tout polynôme $P \in K_n[X]$ *est une combinaison linéaire des vecteurs* $1, X, X^2, \ldots, X^n$.
2) Dans le $\mathbb{C}$*-e.v* $\mathbb{C}^2$, *tout vecteur* (z, z') *est une combinaison linéaire des vecteurs* $(1,0)$ *et* $(0,1)$ *:*

$$(z, z') = z(1,0) + z'(0,1).$$

3) Dans le $\mathbb{R}$*-e.v* $\mathbb{C}^2$, *tout vecteur* (z, z') *est une combinaison linéaire des vecteurs*

$(1,0),(0,1),(i,0)$ *et* $(0,i)$. *Si* $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$ *et* $z' = x'+iy'$, $x',y' \in \mathbb{R}$, *alors on a :*

$$(z,z') = x(1,0) + x'(0,1) + y(i,0) + y'(0,i).$$

Théorème 16. *Soit* E *un* K*-e.v et* $u_1,\ldots,u_n \in E$. *Alors :*
1) L'ensemble F *des combinaisons linéaires des vecteurs* $u_1,\ldots,u_n$ *est un sev de* E.
2) F *est le plus petit (au sens de l'inclusion) sev de* E *contenant* $u_1,\ldots,u_n$.

Définition 17. *Soient* E *un* K*-e.v et* $A = \{u_1,\ldots,u_n\}$ *une famille de vecteurs de* E. *on appelle sev engendré par* A *l'ensemble* $F = \{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n / \alpha_1,\ldots,\alpha_n \in K\}$ *des combinaisons linéaires des vecteurs* $u_1,\ldots,u_n$ *(c'est à dire des éléments de* A*). On dit aussi que* A *engendre* F *(ou une famille génératrice de* F*).*

Notation . *On note*

$$F = sev\langle u_1,\ldots,u_n\rangle = sev\langle A\rangle$$

ou

$$F = vect\langle u_1,\ldots,u_n\rangle = vect\langle A\rangle$$

Remarque 18. *Par convention on pose* $sev\langle\varnothing\rangle = \{0\}$.

Exemples 6.
1) $K^n = sev\langle(1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)\rangle$.
2) $K_n[X] = sev\langle 1,X,X^2,\ldots,X^n\rangle$.
3) Dans $\mathbb{R}^3$, *soient* $v_1 = (2,1,0), v_2 = (0,-1,0)$,
$v_3 = (2,-1,0)$ *et soit* $F = sev\langle v_1,v_2,v_3\rangle$. *On montre que* $F = sev\langle v_1,v_2\rangle = sev\langle v_1,v_3\rangle = sev\langle v_2,v_3\rangle$, *et donc un e.v peut avoir plusieurs familles génératrices. D'une façcon générale, le sev nul* $\{0\}$ *possède exactement deux familles génératrices* $\varnothing$ *et* $\{0\}$, *et n'importe quel autre sev possède une infinité de familles génératrices. Par exemple, considérons le* $\mathbb{R}$*-ev* $\mathbb{R}$ *(chaque réel est à la fois scalaire et vecteur). On a* $\alpha = \alpha.1$, *donc* $\mathbb{R} = sev\langle 1\rangle$. *En général, si* d *est un réel non nul, alors on a* $\alpha = \frac{\alpha}{d}.d$, *et donc* $\mathbb{R} = sev\langle d\rangle$.
4) Soit $u,v \in E$, *alors* $sev\langle u\rangle = \{\alpha u/\alpha \in K\} = Ku$ *et* $sev\langle u,v\rangle = \{\alpha u + \beta v/\alpha,\beta \in K\} = Ku + Kv$.

Proposition 19. *Soient E un K-e.v et A, B, F des parties de E, alors :*
1) $F = sev\langle F\rangle \Leftrightarrow F$ est un sev de E.
2) $A \subseteq B \Rightarrow sev\langle A\rangle \subseteq sev\langle B\rangle$.
3) Si F est un sev de E, alors : $A \subseteq F \Rightarrow sev\langle A\rangle \subseteq F$ (car F est stable par combinaison linéaire).
4) $sev\langle A \cup B\rangle = sev\langle A\rangle + sev\langle B\rangle$. Consequences :
a) $sev\langle u_1, \dots, u_m\rangle = sev\langle u_1\rangle + \cdots + sev\langle u_m\rangle = Ku_1 + \cdots + Ku_m$
b) Si A est une famille génératrice de F_1 et B est une famille génératrice de F_2, alors $A \bigcup B$ est une famille génératrice de $F_1 + F_2$.

Définition 20. *On dit qu'un K-e.v E est de dimension finie s'il admet au moins une famille génératrice finie.*
c'est à dire : $\exists (u_1, \dots, u_n) \in E^n$ tel que $E = sev\langle u_1, \dots, u_n\rangle$.

Exemples 7.
1) $\mathbb{R}^2 = sev\langle (1,0), (0,1)\rangle$ est de dimension finie.
2) $\{0\} = sev\langle \varnothing\rangle = sev\langle 0\rangle$ est de dimension finie.
3) $K_n[X] = sev\langle 1, X, \dots, X^n\rangle$ est de dimension finie.
4) $K[X]$ n'est pas de dimension finie.

2.5 Dépendance et indépendance linéaire.

2.5.1 Famille liées, famille libres.

Définition 21. *Soient E un K-e.v et $\{u_1, \dots, u_n\}$ une famille finie de vecteurs de E.*
1) On dit que $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille liée si :
il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, non tous nuls, tels que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$.
Les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont dits linéairement dépendants.
2) On dit que $\{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille libre si :

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont dits linéairement indépendants.

Remarques 22.

1) Une famille est libre ssi elle n'est pas liée. Par conséquent, une famille quelconque est ou bien libre ou bien liée.

2) $\{u\}$ *est liée ssi* $u = 0$.

3) Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

4) Toute famille contenant une famille liée est une famille liée. En particulier :

- Une famille qui contient un vecteur nul est une famille liée.

- Une famille qui contient deux vecteurs égaux est une famille liée.

5) La notion de "libre" ou "liée" ne dépends pas de l'ordre dont ses éléments sont disposés.

6) Une famille A *est liée ssi il existe* $u \in A$ *tel que* $u \in sev\langle A \backslash \{u\} \rangle$ *; c'est à dire,* u *est une combinaison linéaire des autres vecteurs de* A.

7) Une famille A *est libre ssi* $u \notin sev\langle A \backslash \{u\} \rangle$ *pour tout* $u \in A$ *; c'est à dire, aucun vecteur de* A *n'est combinaison linéaire des autres vecteurs de* A.

Exemples 8.

1) $E = \mathbb{R}^2$: $\{(1,0),(0,1)\}$ *et* $\{(1,-1),(1,1)\}$ *sont des familles libres.*

2) $E = \mathbb{R}^2$: $\{(1,-1),(1,1),(3,-1)\}$ *est une famille liée puisque* $(3,-1) = 2(1,-1) + (1,1)$.

3) $E = \mathbb{R}_2[X]$: $\{1, X, X^2\}$ *et* $\{2 + 3X, 3X + X^2, X^2\}$ *sont des familles libres.*

2.6 Bases.

Définition 23. *On dit qu'une famille* $B = (u_1, \ldots, u_n)$ *d'éléments d'un* K*-e.v* E *est une base de* E *si et seulement si* B *est une famille libre et génératrice de* E.

Remarque 24. *Soient* $(u_1, \ldots, u_n)$ *une base de* E *et* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *une famille de scalaires non nuls. Alors* $(\alpha_1 u_1, \ldots, \alpha_n u_n)$ *est une base de* E.

Exemples 9.

1) $E = K^n$*, soient* $e_1 = (1,0,\ldots,0), e_2 = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1)$. *Alors* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est une base du* K*-e.v* E*, appelée base canonique (ou standard) de* E.

2) $(1, X, \ldots, X^n)$ *est une base de* $K_n[X]$*, appelée base canonique de* $K_n[X]$.

3) $\{\varnothing\}$ *est une base de* $\{0\}$.

Proposition et Définition 25. *Soit $B = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille finie d'un K-e.v E. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) B est une base de E.
2) $\forall u \in E$, u s'écrit de manière unique sous la forme : $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.
Les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont appelés les coordonnées (ou les composantes) de u dans la base B. x_i s'appelle la $i^{\text{ème}}$ coordonnée (ou composante) de u dans la base B.

Notation . *On utilise les notations $u = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_B$ et $u_B = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour dire que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$.*

Proposition 26. *Soient E un K-e.v, F un sev de E et $B = (v_1, \ldots, v_m)$ une famille de vecteurs de E. Alors B est une base de F si et seulement si $F = sev\langle v_1 \rangle \oplus \cdots \oplus sev\langle v_m \rangle$*

Remarques 27.
1. Si $B = (u_1, \ldots, u_n)$ est une base de E, alors en changeant l'ordre des vecteurs u_i on aura une autre base de E. C'est pour cette raison qu'on note souvent les bases avec des parenthèses et non avec des accolades.
Par exemple : $B_1 = ((1,0),(0,1))$ et $B_2 = ((0,1),(1,0))$ sont deux bases du K-e.v K^2, et on a $(x,y) = (x,y)_{B_1} = (y,x)_{B_2}$.
2. Ce sont les coordonnées des vecteurs qui dépendent des bases et pas les vecteurs.

Théorème et Définition 28. *Soit E un K-e.v de dimension finie. Alors :*
1) E admet au moins une base .
2) Toutes les bases de E sont finies et ont le même cardinal (c'est à dire le même nombre d'éléments).
On appelle alors dimension de E, et on note $\dim_K(E)$ ou $\dim(E)$, le cardinal d'une base de E.

Exemples 10.
1) $\dim(\{0\}) = 0$ *($\varnothing$ est une base de $\{0\}$).*
2) $\dim(K) = 1$ *et* $\dim(K^n) = n$.

3) $\dim(K_n[X]) = n+1$ *(*$(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ *est une base de* $K_n[X]$*).*

4) $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$ *et* $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$ *(car* $(1, i)$ *est une base du* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathbb{C}$*).*

5) Les sous-espaces vectoriels de dimension 1 *sont appelés droites vectorielles et les sous-espaces vectoriels de dimension* 2 *sont appelés plans vectorielles.*

6) Les sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$ *d'un e.v de dimension* n *sont appelés hyperplans vectoriels. Lorsque* $n = 1$*, on parle plutôt des vecteurs. Lorsque* $n = 2$*, on parle de droites vectorielles. Enfin, si* $n = 3$*, les hyperplans sont exactement les plans vectoriels.*

Remarque 29. *le seul espace vectoriel qui a un nombre fini de bases (une seule) c'est l'espace nul.*

Théorème 30 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soient* E *un* K*-ev de dimension finie,* $B = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E *et* $L = (v_1, \ldots, v_r)$ *une famille libre de* E*. Alors on peut toujours compléter* L *par* $n-r$ *éléments de* B *pour obtenir une base de* E*.*

Remarque 31. *Soit* E *un* K*-e.v de dimension* n *et* $L = (v_1, \ldots, v_r)$*une famille libre de* E*. Alors on peut toujours compléter* L *par* $n-r$ *vecteurs de* E *pour obtenir une base de* E *; en effet, ce résultat se déduit du théorème précédent et de l'existence d'une base de* E*.*

Théorème 32 (Théorème de la base extraite)**.** *Soient* E *un* K*-e.v de dimension finie* n *et* A *une famille génératrice de* E*. Alors* A *contient une base de* E*.*

Remarque 33. *On déduit des théorèmes 30 et 32 que toute famille libre est contenue dans une base, et toute famille génératrice contient une base.*
On en déduit de plus que :
Si A *est une famille génératrice de* E*, alors on peut compléter toute famille libre de* E *par des éléments de* A *pour obtenir une base de* E*.*

Proposition 34. *Soient* E *un* K*-e.v de dimension finie* n *et* A *une partie de* E*. Alors :*

1) A *est une famille libre* $\Rightarrow card(A) \leqslant n$*.*

2) A *engendre* $E \Rightarrow card(A) \geqslant n$*.*

3) (A *est une famille libre et* $card(A) = n$*)* $\Leftrightarrow$ A *est une base de* E*.*

4) (A *engendre* E *et* $card(A) = n$*)* $\Leftrightarrow$ A *est une base de* E*.*

Remarques 35. *Les contraposées des implications et équivalences de la proposition précédente s'écrivent :*
1) Si A contient au moins $n+1$ éléments alors A est liée.
2) Si A contient au plus $n-1$ éléments alors A n'est pas une famille génératrice de E.
3) A n'est pas une base de $E \iff A$ n'est pas libre ou $card(A) \neq n$
$$\iff A \text{ n'engendre pas } E \text{ ou } card(A) \neq n.$$

Corollaire 36. *Soient E un K-e.v de dimension finie n et A une partie finie de E telle que $card(A) = n$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) A est une famille libre.
2) A est une famille génératrice de E.
3) A est une base de E.

Tableau récapitulatif. *Soit A une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E de dimension n. Alors on a le tableau suivant :*

A est	*libre*	*génératrice de E*	*base de E*
card(A)> n	*non*	*?*	*non*
card(A)< n	*?*	*non*	*non*
card(A)= n	*?*	*?*	*?*
A libre et card(A)= n	*oui*	*oui*	*oui*
A génératrice de E et card(A)= n	*oui*	*oui*	*oui*

Le point d'interrogation signifie qu'on ne peut pas trancher.

Proposition 37. *Soient E un K-e.v de dimension finie et F un est un sev de E. Alors*
1) F est de dimension finie et on'a $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2) $\dim(F) = \dim(E) \Leftrightarrow F = E$.

Remarque 38. *La proposition précédente n'est plus valable si l'on remplace E par un espace vectoriel dimension infinie.*

Théorème 39. *(Formule de Grassmann) Soient E un K-e.v et F, G deux sev de E de dimensions finies. Alors :*
$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

Notation . *Soient A et A' deux ensembles quelconques. On note par (A, A') l'ensemble obtenu en* ***adjoignant*** *à A les éléments de A'.*
Par exemple, $(\{u, v, w\}, \{x, u, z\}) = \{u, v, w, x, u, z\}$ et non pas $\{u, v, w, x, z\}$.
Il est clair que $A \bigcup A' \subseteq (A, A')$ et que, $(A, A') = A \bigcup A' \Leftrightarrow A \bigcap A' = \varnothing$.

Définition 40. *On dit que deux sev F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E sont en somme directe si $F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2$.*

Proposition 41. *Soient E un K-e.v et F_1, F_2 deux sev de E de bases B_1 et B_2. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) F_1 et F_2 sont en somme directe.
2) $F_1 \cap F_2 = 0$.
3) $\dim(F_1 \cap F_2) = 0$.
4) $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.
5) (B_1, B_2) est une famille libre.
6) (B_1, B_2) est une base de $F_1 + F_2$.

Comme conséquence de la proposition précédente et de la formule de Grassmann, on a le résultat suivant :

Corollaire 42. *Soient E un K-e.v de dimension finie et F_1, F_2 deux sev de E de bases B_1 et B_2. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) $E = F_1 \oplus F_2$.
2) $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) = \dim(F_1 + F_2)$.
3) $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$ et $F_1 \cap F_2 = 0$.
4) $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$ et $F_1 + F_2 = E$.
5) (B_1, B_2) est une base de E.

Corollaire 43. *Soient E un K-e.v de dimension finie n, F un sev de E et B_1 une base de F. Pour avoir un supplémentaire de F il suffit de compléter B_1 par une famille de vecteurs B_2 pour obtenir une base de E. Le sous-espace vectoriel $G = sev\langle B_2\rangle$ est un supplémentaire de F (B_2 est une base de G).*

2.7 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 44. *Soit A une partie d'un K-e.v E. On appelle rang de A, et on note $rg(A)$, l'entier naturel :* $rg(A) = \dim(sev\langle A\rangle)$.

Proposition 45. *Soient A et A' deux parties d'un K-e.v E. Alors :*
1) $rg(A) \leqslant card(A)$.
2) $A \subseteq A' \Rightarrow rg(A) \leqslant rg(A')$.
3) $\max(rg(A), rg(A')) \leqslant rg(A \cup A') = rg((A, A')) \leqslant rg(A) + rg(A')$.
4) $rg(A) = \max\{rg(A')/A' \subseteq A,\ A' \text{ libre}\}$.

Proposition 46. *Soit A une partie d'un K-e.v E de dimension finie. Alors :*
1) A est une famille génératrice de E $\Leftrightarrow rg(A) = \dim E$.
2) A est une famille libre de E $\Leftrightarrow rg(A) = card(A)$
3) A est une base de E $\Leftrightarrow rg(A) = card(A) = \dim E$.

La famille A est par définition une famille génératrice de l'espace vectoriel sev$\langle A\rangle$. Donc pour que A soit une base du sev$\langle A\rangle$ il faut et il suffit que A soit libre. On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 47. *Soit A une partie de rang fini d'un K-e.v E. Pour que A soit une base du $sev\langle A\rangle$, il faut et il suffit que $rg(A) = card(A)$.*

2.8 Système d'équations linéaires associé à une famille de vecteurs

Proposition 48. *Soient E un espace vectoriel de dimension p, B une base de E, $v = (b_1, \ldots, b_p)_B$ un vecteur quelconque de E et $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E. Considérons le système d'équations linéaires suivant*

$$(A|v) : x_1 u_{1B} + \cdots + x_n u_{nB} = v_B$$

(à p équations et n inconnues). Alors :
1) $u \in sev\langle A\rangle \Longleftrightarrow (A|u)$ *est un système compatible.*

2) A est une famille génératrice de $E \Longleftrightarrow (A|v)$ est un système compatible.

3) *A n'est pas une famille génératrice de $E \Longleftrightarrow$*

il existe un vecteur u de E tel que le système $(A|u)$ n'est pas compatible $\Longleftrightarrow$

si on échelonne $(A|v)$ on trouve au moins une condition de compatibilité.

4) A est une famille libre de $E \Longleftrightarrow (A|0)$ à une seule solution.

5) A est une famille liée de $E \Longleftrightarrow (A|0)$ à une infinité de solutions.

6) A est une base de $E \Longleftrightarrow (A|v)$ est un système compatible avec une seule solution.

Remarques 49.

1) La proposition pécédente n'est qu'une reformulation en termes de systèmes linéaires des définitions d'une famille génératrice, libre, liée et d'une base.

2) le système $(A|v)$, où $v = (b_1, \dots, b_p)_B$ est un vecteur quelconque, est un système avec des paramétres qui sont $b_1, \dots, b_p$.

3) La notation $(A|v)$ est introduite par l'auteur afin de faciliter l'écriture. Le tableau complet du système $(A|v)$ est constitué des coordonnées des vecteurs de A et de v dans la base B écrits en colonne, A donne le premier membre et v le second membre. Par exemple, posons $A = \{u_1, u_2\}$ où $u_1 = (1, -2)$ et $u_2 = (2, 3)$ et soit $v = (4, 5)$. On a $xu_1 + yu_2 = u \Leftrightarrow (A|v) \left\{ \begin{array}{rcrcl} x & + & 2y & = & 4 \\ -2x & + & 3y & = & 5 \end{array} \right.$

Le tableau complet de ce dernier système est $\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{array}$ les colonnes de ce tableau sont exactement les coordonnées des vecteurs u_1, u_2 et v rangées verticalement.

3) Le rang d'une famille de vecteurs A est égal au rang du système homgène $(A|v)$ où v est un vecteur quelconque de E (par exemple $v = 0$).

4) Si on ne mentionne pas la base de l'espace vecotriel $E = \mathbb{R}^n$, alors il s'agit de la base canonique.

5) Soit S et $S' = \{v_1, \dots, v_p\}$ deux familles de vecteurs de E. Alors on a :

$$\begin{array}{rcl} sev\langle S' \rangle \subseteq sev\langle S \rangle & \Leftrightarrow & S' \subseteq sev\langle S \rangle \\ & \Leftrightarrow & v_1 \in sev\langle S \rangle, \dots, v_p \in sev\langle S \rangle \\ & \Leftrightarrow & \text{les systèmes } (S|v_1), \dots, (S|v_p) \text{ sont compatibles.} \end{array}$$

Puisque ces systèmes ont le même premier membre, alors on peut les échelonnés on même temps. Ces systèmes seront notés $(S|v_1 \dots v_p)$ ou tout simplement $(S|S')$.

D'où

$$sev\langle S'\rangle \subseteq sev\langle S\rangle \Leftrightarrow \text{ les systèmes} (S|S') \text{ sont compatibles}.$$

2.8.1 Coordonnées d'un vecteur dans une base

Proposition 50. *Soit B une base d'un espace vectoriel E, F un sev de E qui a $B' = (u_1, \dots, u_n)$ comme base et Soit v un vecteur de F. Alors l'unique solution du système $(u_{1B} \dots u_{nB}|v_B)$ est exactement égale à $v_{B'}$.*

Corollaire 51. *(changement de base) Soient B et $B' = (u_1, \dots, u_n)$ deux bases de E et v un vecteur de E. Alors l'unique solution du système $(u_{1B} \dots u_{nB}|v_B)$ est exactement égale à $v_{B'}$.*

2.8.2 Complétion d'une famille libre

Proposition 52. *Soient $A = \{(v_1, \dots, v_p)\}$ une famille libre d'un K-e.v E de dimension finie, $B = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E et v un vecteur quelconque de E (on peut prendre $v = 0$) et $(v_{1B} \dots v_{pB}|v_B)$ le système associé à la famille A et le vecteur v. Pour compléter la famille A, par des vecteurs de B, en une base de E, on transforme le système $(v_{1B} \dots v_{pB}|v_B)$ en un système à **lignes échelonnées** puis on considère les lignes L_i qui sont nulles (c'est-à-dire, ne contenant pas de pivots). On cherche **la position** de l'origine de chacune de ces lignes dans la matrice initiale **et ceci on ne considérant que les permutations sur les lignes utilisées**. Alors les vecteurs u_i dont les indices i **correspondent** aux positions trouvées complétent A en une base de E.*

Remarques 53.
1. Si $E = \mathbb{R}^n$, on prend souvent B la la base canonique (la base le plus naturel de $\mathbb{R}^n$).
*2. On peut aussi chercher **la position** de l'origine de chaque ligne non nulle (c'est-à-dire, contenant un pivots) dans la matrice initiale **et ceci on ne considérant que les permutations sur les lignes utilisées**. Dans ce cas, les vecteurs u_i dont les indices i **ne correspondent pas** aux positions trouvées complétent A en*

une base de E.

3. Si on a pas utilisée de permutations sur les lignes, alors les vecteurs de B dont les indices i correspondent aux positions des lignes nulles, complétent A en une base de E. Par exemple, $E = \mathbb{R}^4$ et B est la base canonique.

$A \xrightarrow{\text{Sans permutations des lignes}} \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$. *On peut compléter A par les vecteurs e_3 et e_4.*

$A \xrightarrow{\text{Sans permutations des lignes}} \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$. *On peut compléter A par les vecteurs e_2 et e_4.*

$A \xrightarrow{\text{Sans permutations des lignes}} \begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}$. *On peut compléter A par les vecteurs e_2 et e_3.*

2.8.3 Détermination d'un supplémentaire

Proposition 54. *Soient E un K-e.v de dimension finie n, F un sev de E et B_1 une base de F. Soit B_2 une famille de vecteurs qui complète B_1 en une base de E. Alors Le sous-espace vectoriel $G = sev\langle B_2 \rangle$ est un supplémentaire de F (B_2 est une base de G).*

2.8.4 Base extraite d'une famille génératrice

Proposition 55. *Soient A une famille de vecteurs d'un K-e.v E de dimension finie, $(A|0)$ le système homogène associé à la famille A, r le rang de ce système et $F = sev\langle A \rangle$ le sous espace vectoriel engendré par A. Alors $\dim F = r$ et les vecteurs de A associés aux inconnues principales (c'est à dire, aux colonnes pivots) constituent une base de F extraite de A (les permutations des colonnes doivent être prises en compte).*

Remarque 56. *Une colonne pivot est une colonne qui contient un pivot.*

2.8.5 Représentation cartésienne d'un espace vectoriel

Équations cartésiennes d'un espace vectoriel

Définition 57. *Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$. Si F est défini par un système d'équations linéaires (S) (nécessairement homogène), On dit que (S) est une représentation cartésienne de F, et les équations de (S) sont dites des équations cartésiennes de F.*

Remarques 58.
1) Soit (S) un système d'équations linéaires homogène et F un sev de $E = \mathbb{R}^n$. Alors (S) est une représentation cartésienne de F si et seulement si F est égal à l'ensemble S des solutions de (S).
Généralement (c'est-à-dire, si $E \neq \mathbb{R}^n$), Si E est muni d'une base B, alors (S) est une représentation cartésienne de F si et seulement si l'ensemble constitué par les coordonnées des vecteurs de F dans la base B est égal à l'ensemble S des solutions de (S).
2) Deux systèmes homogènes équivalents définissent le même sev de E. Donc un même sev de E peut avoir plusièures (une infinité) représentations cartésiennes.

Exemples 11.
1) Dans $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $F = \{(x,y,z)/x - y + z = 2x + 3z = 0\}$ est le sev de $\mathbb{R}^3$ d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$
C'est-à-dire, F est l'ensemble des solutions de ce système.
2) Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni d'une base B, l'ensemble $F = \{(x,y,z)_B/x-y+z = 2x+3z = 0\}$ est le sev de $\mathbb{R}_2[X]$ d'équations cartésiennes $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$

On a $u = (x,y,z)_B \in F \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & & & + & 3z & = & 0 \end{array}\right.$

Proposition 59. *Soient E un espace vectoriel de dimension n, B une base de E, A une famille de vecteurs de E, $F = sev\langle A\rangle$ le sous espace vectoriel engendré par A*

et v le vecteur de E de coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans la base B. Alors les conditions de compatibilités du système $(A|v)$ fournissent une représentation cartésienne (des équations cartésiennes) de F.

Remarque 60. *Si on échelonne le système $(A|v)$ et on ne trouve aucune condition de compatibilité, alors le système $(A|v)$ est compatible pour tout $v \in E$; c'est-à-dire la famille A engendre E. Ce qui fait que $F = E$. Dans ce cas, l'équation $0x_1 + \cdots + 0x_n = 0$ est une équation cartésienne de E.*

Corollaire 61. *Soit F une partie de E d'un K-espace vectoriel de dimension n et soit B une base de E. Alors F est un sev de E si et seulement si il existe un système homogène (S) tel que $F = \{(x_1, \dots, x_n)_B / (x_1, \dots, x_n) \in S\}$.*

Remarque 62. *Si (S) est un système d'équations linéaires homogène à coefficients dans K, alors S est un sev de K^n où n est le nombre des inconnues.*

Détermination d'une Base à partir des équations cartésiennes

Proposition 63. *Soient E un espace vectoriel de dimension n, F un sev de E qui est défini par un système d'équations linéaires homogène (S) de rang r. On sait que la solution générale de (S) peut s'écrire sous la forme $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-r} u_{n-r}$ où les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ sont les inconnues secondaires du système (S) et $u_1, \dots, u_{n-r}$ sont des vecteurs de E. Alors $(u_1, \dots, u_{n-r})$ est une base de F. En particulier, on a $\dim F = \dim(E) - rg((S))$ qui est égal au nombre d'inconnues secondaires.*

Remarques 64.
1) Si aucune inconnue n'est secondaire, alors $S = \{0\}$, et dans ce cas $\emptyset$ est une base de F.
2) Les solutions particulières de (S), obtenues en donnant à l'une des inconnues secondaires la valeur 1 et aux autres la valeur 0, constituent une base de F.

Proposition 65. *Soient E un espace vectoriel, F_1 et F_2 deux sev de E d'équations cartésiennes (S_1) et (S_2). Alors $F_1 \bigcap F_2$ est le sev de E d'équations cartésiennes (S), où ce dernier système est obtenu en adjoignant aux équations de (S_1) celles de (S_2).*

2.8.6 Relations de dépendance linénaire

Définition 66. *Soient $u_1, \dots, u_p$ p vecteurs d'un K-e.v E et soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des scalaires de K, non tous nuls. La relation $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_p u_p = 0$ est appelée une relation de dépendance linéaire ou relation de liaison entre les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ ou de la famille $\{u_1, \dots, u_p\}$.*

Remarques 67.
1) Il n'existe pas de relations de dépendance entre des vecteurs linéairement indépendants.
2) Si une famille de vecteurs est liée, alors on peut toujours exprimer un vecteur de cette famille comme combinaison linéaire des autres vecteurs, ce qui se déduit facilement d'une relation de dépendance dans cette famille.

Supposons qu'on a les relations de dépendance suivantes :
$R_1 : u_1 + 2u_2 - u_3 + u_4 = 0$, $R_2 : 2u_1 + u_2 - 3u_3 + u_4 = 0$, $R_3 : 4u_1 + 5u_2 - 5u_3 + 3u_4 = 0$. On montre facilement que $R_1 \neq \lambda R_2$ et $R_2 \neq \beta R_1$ pour tout $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, on dit que les relations de dépendance R_1 et R_2 sont indépendantes. En revanche, on a $R_3 = 2R_1 + R_2$, on dit que les relations R_1, R_2 et R_3 sont dépendantes (La relation R_3 est superflue).

Proposition 68. *Soient $u_1, \dots, u_q$ q vecteurs d'un K-e.v E et soient*

$$\begin{array}{ccccccccc} R_1 & : & \alpha_1 u_1 & + & \cdots & + & \alpha_q u_q & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ R_k & : & \beta_1 u_1 & + & \cdots & + & \beta_q u_q & = & 0 \end{array}$$

k relations de dépendance entre les vecteurs $u_1, \dots, u_q$. Alors, les relations $R_1, \dots, R_k$ sont des relations de dépendance indépendantes entre les vecteurs $u_1, \dots, u_q$ si et seulement si les vecteurs $(\alpha_1, \dots, \alpha_q), \dots, (\beta_1, \dots, \beta_q)$ sont linéairement indépendants.

Proposition 69. *Soient $A = \{u_1, \dots, u_q\}$ une famille de vecteurs d'un K-e.v E de dimension finie, $(A|0)$ le système homogène associé à la famille A, et r le rang de ce système. Soit $C = \{w_1, \dots, w_{q-r}\}$ une base quelconque de l'ensemble des* *solutions de* $(A|0)$. *Posons* $w_1 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q), \ldots, w_{q-r} = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$. *Alors on a les propriétés suivantes :*

1)

$$\begin{array}{lcccccccc} R_1 & : & \alpha_1 u_1 & + & \cdots & + & \alpha_q u_q & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ R_{q-r} & : & \beta_1 u_1 & + & \cdots & + & \beta_q u_q & = & 0 \end{array}$$

sont des relations de dépendance linéaire entre les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$, *et elles sont indépendantes.*

2) On ne peut pas avoir plus que $q-r$ *relations de dépendance indépendantes entre les vecteurs* $u_1, \ldots, u_q$.

Exemple 2. *Reprenons les exemples ci-dessus, on a les vecteurs* $(1, 2, -1, 1)$ *et* $(2, 1, -3, 1)$ *sont linéairement indépendants, et donc les relations* R_1 *et* R_2 *le sont aussi. En revanche, les vecteurs* $(1, 2, -1, 1)$, $(2, 1, -3, 1)$ *et* $(4, 5, -5, 3)$ *sont linéairement dépendants, et par suite les relations* R_1, R_2 *et* R_3 *le sont aussi.*

2.9 Exercices

Questions de cours

1. Un sev d'un espace vectoriel est-il toujours un espace vectoriel ?

2. Soit A une famille d'un espace vectoriel E. Dire pourquoi l'ensemble $\text{sev}\langle A\rangle$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sev de E contenant A.

3. Soient F et G deux sev d'un espace vectoriel E. Dire pourquoi l'ensemble $F+G$ est le plus petit sev de E contenant F et G.

4. Montrer que toute famille de vecteurs contenant une famille liée est aussi une famille liée.

5. Montrer que toute famille de vecteurs contenue dans une famille libre est aussi une famille libre.

6. Le sev engendré par un système de vecteurs de rang r est-il de dimension r ?

7. Quel est l'interêt principal de trouver une base d'un espace vectoriel ?

8. Un sev de dimension n d'un espace vectoriel E de même dimension est-t-il égal à E ?

10. Soit E un espace vectoriel et $B = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de E. Déterminer les coordonnées des vecteurs u_i dans la base B.

11. Soient u, v et w trois vecteurs deux à deux non colinéaires, c'est-à-dire, les trois familles $\{u, v\}$, $\{u, w\}$ et $\{v, w\}$ sont libres. Est-ce-que $\{u, v, w\}$ est aussi libre ?

12. Soient A une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E, v et v' deux vecteurs distincts de E. Notons par r et r' les rangs des systèmes $(A|v)$ et $(A|v')$. Que peut-on dire de r et r' ?

13. Soit A une famille d'un espace vectoriel E.
(i) Montrer que $\text{rg}(A) \leq \text{Card}(A)$ et $\text{rg}(A) \leq \dim(E)$.
(ii) Que peut-on dire de $\text{Card}(A)$ et $\dim(E)$?

14. Montrer que l'intersection de deux sev de E est un sev de E.

15. La réunion d'une base de F et d'une base de G est-elle une base de $F+G$?

16. Montrer que : une famille A est liée si et seulement si il existe $u \in A$ tel que $u \in \text{sev}\langle A\backslash\{u\}\rangle$.

17. Soient E espace vectoriel de dimension n et A une famille de vecteurs de E de cardinal n. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) A est une famille libre.

(b) A est une famille génératrice de E.

(c) A est une base de E.

18. Montrer que A est libre de E ssi $\text{rg}(A) = card(A)$.

19. Montrer que A est une famille génératrice de E si et seulement si $\text{rg}(A) = \dim(E)$.

20. Montrer que A est une base de E si et seulement si $\text{rg}(A) = card(A) = \dim(E)$.

21. Un supplimentaire d'un sev F est-il unique ?

22. Les supplimentaires d'un sev F ont-ils la même dimension ?

23. Soient A et B deux familles de vecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$\text{rg}(A \cap B) \leq \text{rg}(A \cup B) = \text{rg}((A, B)) \leq \text{rg}(A) + \text{rg}(B).$$

24. Soient A une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E et v un vecteur quelconque de E. Montrer que

$$v \in \text{sev}\langle A \rangle \Leftrightarrow \text{rg}(A \cup \{v\}) = \text{rg}(A).$$

25. Soient A une famille libre de vecteurs de E.

(i) Montrer que

$$A \cup \{v\} \text{ est une famille liée} \Rightarrow v \in \text{sev}\langle A \rangle.$$

(ii) L'implication dans la question (i) reste-elle vraie si on ne suppose pas que la famille A est libre.

Exercice 1. *Soient F est G deux sev d'un espace vectoriel E.*
(i) Montrer que $F \cup G$ est un sous-ensemble non vide de E stable par la loi externe.
(ii) Montrer que $F \cup G$ est un sev de E si et selement si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$, c'est-à-dire, $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$.

Exercice 2. *Soient B une base d'un espace vectoriel E et L une famille libre de E. Montrer qu'on peut compléter L par des vecteurs de B pour obtenir une base de E.*

Exercice 3. *Montrer que toute famille génératrice A d'un espace vectoriel E contient une base de E.*

Exercice 4. *Soit E un espace vectoriel et soit $B = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E. Montrer que*
(i) Toute partie $A = \{v_1, \dots, v_p\}$ de E ayant plus de n éléments est liée.
(ii) Toute partie $A = \{v_1, \dots, v_p\}$ de E ayant moins de n éléments n'engendre pas E.
(iii) En déduire que deux bases d'un espace vectoriel de dimension finie E ont le même cardinal.

Exercice 5. *Soient E un espace vectoriel de dimension n et F un sev de E défini par un système homogènes (S) (dans une base B de E). On sait que la solution générale de (S) peut s'écrire sous la forme $s = \alpha_1 u_{1B} + \dots + \alpha_{n-r} u_{n-rB}$ où les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-r}$ sont les inconnues secondaires du système (S) et $u_1, \dots, u_{n-r}$ sont des vecteurs de E.*
(i) Montrer alors $(u_1, \dots, u_{n-r})$ est une base de F.
(ii) En déduire que la dimension de F est égale au nombre d'inconnues secondaires du système (S).

Exercice 6. *Soit F un sev de dimension p de $\mathbb{R}^n$ où $p < n$.*
(i) Quel est le nombre minimal d'équations cartésiennes de F.
(ii) Application : F est une droite de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) un plan de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7. *Soient F le sev de $\mathbb{R}^3$ d'équations cartésiennes*
$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 0 \\ \qquad\; y - 3z = 0 \end{cases}$$
et G le sev de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x - y - 4z = 0$. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 8. *Soit F le sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par la famille de vecteurs $A = \{u_1 = (1,1,2,0), u_2 = (2,2,4,0), u_3 = (1,1,0,1), u_4 = (4,4,6,1)\}$.*
1. Déterminer la ou (les) équations cartésiennes de F.
2. Parmi les vecteurs $v_1 = (2,2,2,1)$ et $v_2 = (1,1,1,1)$, déterminer ceux qui appartiennent à F ?

3. La famille A est-elle libre ?
4. Déterminer la dimension de F.
5. Déterminer une base de F extraite de A.
6. Compléter la base de F trouver dans la question 2. en une base B' de $\mathbb{R}^4$.
7. Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.
8. Déterminer un nombre maximal de relations de dépendance linéaire indépendantes des vecteurs de F.
9. Quelles sont les coordonées du vecteur $v = (a, b, c, d)$ (les coordonnées sont données dans la base canonique) dans la nouvelle base B' de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 9. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :*

$$u = (\alpha, 1 - \alpha, \alpha - 1, \alpha - 7),\ v = (-1, 0, 1, 2)\ w = (0, 1, -3, 1).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que $u \in sev\langle v, w\rangle$.

Exercice 10. *Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $u = (1, -1, 1)$, $v = (0, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $sev\langle u, v\rangle = sev\langle u, w\rangle$.*

Exercice 11. *Dans $\mathbb{R}^5$ on considère le sev F engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 3, 0, 2, 1)$, $v_2 = (3, 2, 1, 0, 4)$, $v_3 = (1, 0, 2, 3, 1)$, et $u_4 = (6, 3, -1, -8, 9)$.*
1.Déterminer les équations cartésiennes de F.
2. Trouver la dimension et une base de F qui est extraite de cette famille.
3. Trouver les coordonnées de tous ces vecteurs dans cette base.
4. Compléter la base obtenue pour avoir une base de R^5.

Exercice 12. *Montrer que les sev de $\mathbb{R}^4$ suivants sont égaux :*
$F = \{(z - 2y, y, z, y + z)/y, z \in \mathbb{R}\}$ *et* $G = \{(x, y, x + 2y, x + 3y)/x, y \in \mathbb{R}\}$.

2.10 Solutions

Questions de cours

1. Oui évidemment, parce qu'il vérifie tous les axiomes d'un espace vectoriel.

2. Si F est un sev de E contenant A, alors il contient toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de A, et ceci est dû au fait qu'un sev est stable par combinaison linéaire. Par suite, F contient l'ensemble $\text{sev}\langle A\rangle$.

3. Si H est un sev contenant F et G, il contient aussi $F+G$ puisqu'il est stable par la loi interne.

4. Soit A une famille de vecteurs qui contient une famille liée $L=\{v_1,\dots,v_m\}$. On sait qu'il existe des scalaires non tous nuls $\alpha_1,\dots,\alpha_m$ tels que $\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_mv_m=0$. Si on écrit le vecetur nul sous la forme $\sum_{u\in A\setminus L}0u=0$, on obtient $(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_mv_m)+(\sum_{u\in A\setminus L}0u)=0$. Cette dernière égalité montre bien que A est une famille liée.

5. Soit $L=\{v_1,\dots,v_m\}$ une famille de vecteurs qui est contenue dans une famille libre A. Si $\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_mv_m=0$, alors $(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_mv_m)+(\sum_{u\in A\setminus L}0u)=0$. Cette dernière égalité est une combinaison linéaire nulle des vecteurs de A. Comme A est libre, alors $\alpha_1=\cdots=\alpha_m=0$. Ceci montre que L est bien une famille libre.

6. Oui évidemment, puisque $\dim(\text{sev}\langle A\rangle)=\text{rg}(A)$.

7. L'intérêt principal de trouver une base d'un espace vectoriel est que l'on peut décrire tout élément de cet espace vectoriel avec le minimum de paramètres (les coordonnées) grâce à la base.

8. La réponse est oui. En effet, soit F un sev de E tel que $\dim(F)=n$. soit B' une base de F. Alors B' est famille libre de E. Donc il existe une base B de E qui la contient. On a $B'\subseteq B$ et $\text{card}(B')=\text{card}(B)$, alors $B=B'$ et donc B' est une base de E. Ce qui fait que $F=E$.

9. Non évidemment, car il suffit de considérer les deux droites vectoriels de $\mathbb{R}^2$, $D=\text{sev}\langle(1,0)\rangle$ (l'axe des x) et $D'=\text{sev}\langle(0,1)\rangle$ (l'axe des y).

10. On a $u_i=0u_1+\cdots+0u_{i-1}+u_i+0u_{i+1}+\cdots+0u_n$. Donc $u_{iB}=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$.

11. La réponse est non. En effet, considérons par exemple les vecteurs $e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0)$ et $e_1+e_2=(1,1,0)$. Les trois vecteurs sont deux à deux non colinéaires, mais la famille $\{e_1,e_2,e_1+e_2\}$ est évidemment liée.

12. On a $\text{rg}(A)=r=r'$, car le rang d'un système dépend du premier membre et

non pas du second membre.

13. (i) Considérons le sev $F = \text{sev}\langle A\rangle$. La famille A est par définition une famille génératrice de F. Donc $\dim(F) \le \text{Card}(A)$, c'est-à-dire, $\text{rg}(A) \le \text{Card}(A)$. l'autre inégalité se déduit directement du fait que $\dim(F) \le \dim(E)$.

(ii) On ne peut rien conclure.

14. Soient F et G deux sev de E. On a $0 \in F \cap G$, donc $F \cap G \neq \varnothing$. Considérons $\alpha \in K$ et $u, v \in F \cap G$. On a $u, v \in F$, donc $\alpha u + v \in F$. Pour la même raison on $\alpha u + v \in G$. Donc $\alpha u + v \in F \cap G$. En conclusion, $F \cap G$ est un sev de E.

15. La réponse est non. en effet $\{1\}$ et $\{2\}$ dont deux bases de $\mathbb{R}$ sans que $\{1, 2\}$ le soit.

16. Soit $u \in A$ tel que $u \in \text{sev}\langle A\backslash\{u\}\rangle$. alors u est une combinaison linéaire des autres vecteurs de A, c'est-à-dire, il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ et des vecteurs $u_1, \ldots, u_m$ de A distincts de u tels que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$. Par suite, $u - \alpha_1 u_1 - \cdots - \alpha_m u_m = 0$. Ceci montre que A est bien une famille liée.

Réciproquement, supposons que $A = \{v_1, \ldots, v_p\}$ est une famille liée. Alors il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ non tous nuls tels que $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$. Supposons par exemple que $\alpha_i \neq 0$. alors $v_i = -\frac{1}{\alpha_i}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \cdots + \alpha_p v_p) \in \text{sev}\langle A\backslash\{v_i\}\rangle$.

17. Il suffit d'utiliser le fait que toute famille libre est contenue dans une base et que toute famille génératrice de E contient une base de E.

18. On a A est, par définition, une famille génératrice du sev $F = \text{sev}\langle A\rangle$. Donc

$$\begin{aligned} A \text{ est une famille libre} &\Leftrightarrow A \text{ est une base de } F \\ &\Leftrightarrow \dim(F) = card(A) \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(A) = card(A) \end{aligned}$$

19. On a

$$\begin{aligned} A \text{ est une famille génératrice de } E &\Leftrightarrow \text{sev}\langle A\rangle = E \\ &\Leftrightarrow \dim(\text{sev}\langle A\rangle) = \dim(E) \\ &\Leftrightarrow \text{rg}(A) = \dim(E) \end{aligned}$$

20. Se déduit immédiatement du deux questions précédentes.

21. Non évidemment. En effet, on a par exemple $\text{sev}\langle(1,0)\rangle \oplus \text{sev}\langle(0,1)\rangle = \mathbb{R}^2$ et $\text{sev}\langle(1,0)\rangle \oplus \text{sev}\langle(1,1)\rangle = \mathbb{R}^2$.

22. La réponse est oui. En effet, soient F_1 et F_2 deux supplémentaires d'un sev

F de E. on a $F_1 \oplus F = E$ et $F_2 \oplus F = E$, donc $\dim(F_1) + \dim(F) = \dim(E)$ et $\dim(F_2) + \dim(F) = \dim(E)$. Par suite, $\dim(F_1) = \dim(F_2) = \dim(E) - \dim(F)$.
23. Se déduit facilement du fait que $\mathrm{sev}\langle A \cap B\rangle \subseteq \mathrm{sev}\langle A \cup B\rangle = \mathrm{sev}\langle (A, B)\rangle \subseteq \mathrm{sev}\langle A\rangle + \mathrm{sev}\langle B\rangle$.
24. On a $\mathrm{sev}\langle A\rangle \subseteq \mathrm{sev}\langle A \cup \{v\}\rangle$. Donc $\mathrm{rg}(A \cup \{v\}) = \mathrm{rg}(A)$ si et seulement si $\mathrm{sev}\langle A\rangle = \mathrm{sev}\langle A \cup \{v\}\rangle$, et ceci est équivalent à $v \in \mathrm{sev}\langle A\rangle$.
25. On a $\mathrm{rg}(A) \le \mathrm{rg}(A \cup \{v\})$ et comme $A \cup \{v\}$ est une famille liée, alors $\mathrm{rg}(A \cup \{v\}) \ne \mathrm{card}(A) + 1$. Donc $\mathrm{rg}(A \cup \{v\}) \le \mathrm{card}(A) = \mathrm{rg}(A)$. Par suite, $\mathrm{rg}(A \cup \{v\}) = \mathrm{rg}(A)$, et donc $v \in \mathrm{sev}\langle A\rangle$.
2ème méthode : Posons $A = \{u_1, \dots, u_m\}$. Alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$ des scalaires non tous nuls tels que $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m + \alpha_{m+1} v = 0$. Si $\alpha_{m+1} = 0$, alors on obtient $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = 0$ et puisque A est une famille libre, alors $\alpha_1 = \ldots = \alpha_m = 0$. Ceci contredit le fait que les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_{m+1}$ non sont pas tous nuls. Par suite $\alpha_{m+1} \ne 0$, et donc $v = -\frac{1}{\alpha_{m+1}}(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m) \in \mathrm{sev}\langle A\rangle$.
(ii) Non évidemment. Il suffit de prendre une famille $\{0\}$ et v un vecteur non nul. On a $\{0, v\}$ est une famille liée sans que $v \in \mathrm{sev}\langle A\rangle = \{0\}$.

Exercice 1.

(i) On a $0 \in F \cup G$, donc $F \cup G \ne \varnothing$. Considérons $\alpha \in K$ et $u \in F \cup G$. On a $u \in F$ et $u \in G$, donc $\alpha u \in F \cup G$, c'est-à-dire, $F \cup G$ est stable par la loi externe.
(ii) Si $F \subseteq G$ ou $G \subseteq F$, alors $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$, et donc $F \cup G$ est un sev de E.
Réciproquement, Soient F et G deux sev de E tels que $F \cup G$ est un sev de E et supposons par l'absurde que $F \notin G$ et $G \notin F$. Il existe alors un vecteur u de F qui n'appartient pas à G et un vecteur v de G qui n'appartient pas à F. Le vecteur $u+v$ appartient certainement à $F \cup G$. Donc $u + v \in F$ ou $u + v \in G$, alors $u + v = w \in F$ ou $u + v = e \in G$, et par suite $v = w - u \in F$ ou $u = e - v \in G$ d'où une contradiction.

Exercice 2.

Parmi les parties L' de B telles que $L \cup L'$ est libre, Considérons une qui a un nombre maximal d'éléments. Notons cette famille par C. Alors $L \cup C$ est une base de E. En effet, la famille $L \cup C$ est, par hypothèse, une famille libre. De plus, soit v un vecteur quelconque de B. Si $v \in L \cup C$ alors $v \in sev\langle L \cup C\rangle$, et si $v \notin L \cup C$, *alors la famille* $L \cup C \cup \{v\}$*, qui a plus d'éléments que la famille* $L \cup C$*, est liée. Alors* $v \in sev\langle L \cup C\rangle$ *puisque* $L \cup C$ *est une famille libre. On a donc montrer que* $B \subseteq sev\langle L \cup C\rangle$*. Par suite* $E \subseteq sev\langle L \cup C\rangle$*. Ce qui fait que* $E = sev\langle L \cup C\rangle$*, c'est-à-dire, la famille* $L \cup C$ *est une famille génératrice de* E*. En conclusion,* $L \cup C$ *est une base de* E*. Ce qui achève la démonstration.*

Exercice 3.

Parmi les partie L' *de* A *telles que* L' *est une famille libre, considérons une qui a un nombre maximal d'éléments. Notons cette famille par* B*. Alors on a* $A \subseteq sev\langle B,$ *car sinon, il existe* $v \in A$ *tel que* $v \notin B$*. Comme* B *est libre, alors* $B \cup \{v\}$ *est une famille libre, ce qui contredit la maximalité de* B*. Par suite,* $A \subseteq sev\langle B$ *et donc* $E =\subseteq sev\langle B\rangle \subseteq sev\langle B\rangle$*, c'est-à-dire,* B *est une famille à la fois génératrice et libre de* E*. En conclusion,* B *est une base de* E *contenue dans* A*.*

Exercice 4.

(i) Supposons que $p > n$ *et considérons le système homogène* $(A|0)$*. Le nombre d'équations de ce système est* n *et le nombre d'inconnues est* p*. Donc* $(A|0)$ *est un système homogène qui a plus d'inconnues que d'équations, donc il admet au moins une solution non nulle disons* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ *(Voir questions de cours du Chapitre 1). L'égualité* $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$ *montre bien que* A *est une famille liée de* E*.*

(ii) Supposons que $p < n$ *et considérons système* $(A|v)$ *où* $v = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$ *un vecteur quelconque de* E*. Le nombre d'équations du système* $(A|v)$ *est* n *et le nombre d'inconnues est* p*. Par suite les lignes du premier membre,* n *lignes, du système* $(A|v)$ *sont des vecteurs à* p *coordonnées, et comme* $p < n$ *ces lignes constituent, d'après la question (i), une famille liée de l'espace* K^p*. Donc l'une des lignes est combinaison linéaire des autres lignes. Supposons par exemple que* $L_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j L_j$ *et considérons le système* $(A|u_i)$*. Si on utilise l'opération* $L_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j L_j \to L_i$ *on obtient la condition de compatibilité* $0 = 1$ *qui n'est pas varifié, c'est-à-dire le vecteur* u_i *n'est pas une combinaison linéaire des vecteurs de* A*. En conclusion, la famille* A *n'engendre pas* E*.*

(iii) Soit B *une base de* E *et soit* B' *une autre bese de* E*. Puisque* B' *est une famille libre et génératrice de* E*, on a, d'après les question (i) et (ii),* $card(B) \leq$

$card(B') \leq card(B)$. D'où $card(B') = card(B)$.

Exercice 5.

(i) Il est clair que si l'on donne à l'une des inconnues secondaires une valeur non nulle, on n'obient que des solutions non nulles de (S) (Voir la réponse à la question 5 du Chapitre 1 "la deuxième version").
Il est clair aussi que les éléments u_{iB} sont des solutions de de (S) (il suffit de donner la valeur 1 à l'inconnue α_i et la valeur 0 aux autres inconnues secondaires). Par suite $u_{iB} \in F$ puisque $F = S$. Considérons maintenant un vecteur $s \in F$. Alors s est une solution du système (S). Donc $s = \alpha_1 u_{1B} + \cdots + \alpha_{n-r} u_{n-rB}$ où les scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r}$ sont les inconnues secondaires du système (S). Ceci montre que la famille $\{u_1, \ldots, u_{n-r}\}$ est bien une famille génératrice de F. Montrons maintenant que la famille $\{u_1, \ldots, u_{n-r}\}$ est libre. Soit $\beta_1, \ldots, \beta_{n-r}$ des scalaires tels que $\beta_1 u_{1B} + \cdots + \beta_{n-r} u_{n-rB} = 0$. Alors la solution s de (S) obtenue en donnant aux inconnues secondaires les valeurs $\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_{n-r} = \beta_{n-r}$, est nulle. Mais ceci n'est possible que si $\beta_1 = \ldots = \beta_{n-r} = 0$. Ainsi nous concluons que la famille $(u_1, \ldots, u_{n-r})$ est libre et donc c'est une base de F.
(ii) Se déduit immédiatement de la question (i).

Exercice 6.

(i) Soit B une base de F, $v = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur quelconque de E. Il est clair que $v \in F$ si et seulement si le système $(B|v)$ est compatible, c'est-à-dire, les conditions de compatibilités du système $(B|v)$ sont toutes vérifiées. Par suite, ces équations fournissent une représentation cartésienne de F. D'autre part, le nombre des équations du système $(B|v)$ est n et le rang est $\dim(F) = p$. Donc si on échelonne ce système, on obtient $n - p$ conditions de compatibilités. Ce qui fait que F peut être représenté par $n - p$ équations.
Réciproquement, Supposons que (S) est un système homogème qui définit F (nécessairement à n inconnues) et qui a l équations. Alors la dimension de F est égale aux nombres d'inconnues secondaires de (S). Donc $n - p$ est le nombre des inconnues principales de (S) qui est certainement inférieur ou égal à l. CQFD.
(ii) Une droite vectoriel de $\mathbb{R}^2$ est caractériseée par au moins une équation (excatement une car $2 - 1 = 1$) et une droite vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est caractérisée par au moins

deux équations (excatement deux car $3-1=2$). Un plan vectoriel est de dimension 2, et donc il est caractérisé par au moins une équation $3-2=1$

Exercice 7. *$F \cap G$ est le sev d'équations cartésiennes*

$$\begin{cases} 2x & + & y & + & 4z & = & 0 \\ & & y & - & 3z & = & 0 \\ 2x & - & y & - & 4z & = & 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce dernier système est $\{(0,0,0)\}$. Ce qui fait que $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

Une deuxième méthode consiste à résoudre séparément les équations de F et de G. La résolution de ces deux systèmes donnent $F = \{(-\frac{7}{2}z, 3z, z)/z \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(\frac{1}{2}(y+4z), y, z)/y, z \in \mathbb{R}\}$. On a donc $u \in F \cap G$ si et seulement si $u = (-\frac{7}{2}z, 3z, z) = (\frac{1}{2}(y'+4z'), y', z')$. On trouve alors que $z = z' = 0$ et donc $u = (0,0,0)$. Par suite $F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

Exercice 8.

1. $$\left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & x \\ 1 & 2 & 1 & 4 & y \\ 2 & 4 & 0 & 6 & z \\ 0 & 0 & 1 & 1 & t \end{array}\right. \xrightarrow{Gauss} \left.\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 & x \\ 0 & 0 & -2 & -2 & z-2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2t+z-2x \end{array}\right. .$$

Donc $\begin{cases} x-y & = & 0 \\ -2x+z+2t & = & 0 \end{cases}$ *sont des équations cartésiennes de F.*

2. Les coordonnées de v_1 vérifient les équations de F, alors que les coordonées de v_2 ne les vérifient pas. Donc v_1 est un vecteur de F et v_2 ne l'ai pas.

3. La famille A est liée car $rg(A) = 2 \neq card(A)$. L'existence des conditions de compatibilités montre aussi que A est liée.

4. On a $F = sev\langle A \rangle$, donc $\dim(F) = rg(A) = 2$.

5. Les colonnes pivots sont celles d'indices 1 et 3, et comme on n'a pas fait de permutations sur les colonnes, alors la famille (u_1, u_3) est une base de F extraite de A.

6. Les lignes nulles sont L_3 et L_4, et on a utilisé une seule permutation c'est $L_2 \leftrightarrow L_3$. Donc l'origine de L_3 est L_2 et celle de L_4 c'est L_4. Par suite on peut compléter la famille (u_1, u_3) par les vecteurs $e_2 = (0,1,0,0)$ et $e_4 = (0,0,0,1)$ en *une base de* $\mathbb{R}^4$*, c'est-à-dire* $B' = (u_1, u_3, e_2, e_4)$ *est une base de* $\mathbb{R}^4$*.*

7. D'après la question précédente, on a le sev $sev\langle e_2, e_4\rangle$ *de* $\mathbb{R}^4$ *est un supplémentaire de* F *dans* $\mathbb{R}^4$*.*

8. On doit chercher une base de l'ensemble des solutions du système $(A|0)$*. Pour cela il suffit de remplacer* x, y, z *et* t *par* 0*. On trouve alors que* $(A|0)$ *a pour ensemble de solutions* $\{(-2x_2 - 3x_4, x_2, -x_4, x_4)/x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$*. Il est clair qu'une base de ce dernier sev est* $((-2, 1, 0, 0), (-3, 0, -1, 1))$*. Par suite, les relations* $-2u_1 + u_2 = 0$ *et* $-3u_1 - u_3 + u_4 = 0$ *répondent à la question.*

9. On doit résoudre le système $(B'|v)$*.*

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 & b \\ 2 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \end{array}$$

Si on déplace la troisième ligne pour qu'elle devient la première, on obtient le tableau échelonné équivalent suivant

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & c \\ 1 & 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 & 1 & d \end{array}$$

On trouve alors une seule solution, $S = \{(\frac{c}{2}, a - \frac{c}{2}, b - a, d - a + \frac{c}{2})\}$*. Par suite,* $v_{B'} = (\frac{c}{2}, a - \frac{c}{2}, b - a, d - a + \frac{c}{2})$*.*

Exercice 9. *IL suffit de chercher des équations cartésiennes du* $sev\langle v, w\rangle$ *et injecter les coordonnées du vecteur* u *dans ces équations. On considère donc le système* $(v, w|h)$*,* $h = (x, y, z, t)$*, et on détermine ses conditions de compatibilités. On*

$$\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & -3 & z \\ 2 & 1 & t \end{array} \xrightarrow[L_3 + L_1 + 3L_2 \to L_3]{L_4 + 2L_1 - L_2 \to L_4} \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z + x + 3y \\ 0 & 0 & t + 2x - y \end{array}$$

Donc $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 2x - y + t = 0 \end{cases}$

sont des équations cartésiennes de $sev\langle v, w\rangle$*. Par suite,* $u \in sev\langle v, w\rangle$ *si et seulement si* $\alpha = 2$*.*

Exercice 10. *on a* $rg\{u,v\} = 2$ *et so on échelonne* $\{u,w\}$ *on trouve aussi* $rg\{u,w\} = 2$. *Donc* $\dim(sev\langle u,v\rangle) = \dim(sev\langle u,w\rangle)$. *Donc* $sev\langle u,v\rangle = sev\langle u,w\rangle$ *si et seulement si* $v \in sev\langle u,w\rangle$ *car on déjà* $u \in sev\langle u,w\rangle$.
Un calcul simple montre que $3x+y-2z = 0$ *est une équation cartésienne de* $sev\langle u,w\rangle$.
Par suite $sev\langle u,v\rangle = sev\langle u,w\rangle$ *si et seulement si* $a = \frac{1}{2}$.

Exercice 11. *On considère le système suivant et on applique la méthode de Gauss*

1.
$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 & x \\ 3 & 2 & 0 & 3 & y \\ 0 & 1 & 2 & -1 & z \\ 2 & 0 & 3 & -8 & t \\ 1 & 4 & 1 & 9 & e \end{array} \xrightarrow[L_5-L_1\to L_5]{\substack{L_2-3L_1\to L_2\\ L_4-2L_1\to L_4}} \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 & x \\ 0 & -7 & -3 & -15 & y-3x \\ 0 & 1 & 2 & -1 & z \\ 0 & -6 & 1 & -20 & t-2x \\ 0 & 1 & 0 & 3 & e-x \end{array} \xrightarrow{L_5\to L_2\to L_3\to L_5} \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 & x \\ 0 & 1 & 0 & 3 & e-x \\ 0 & -7 & -3 & -15 & y-3x \\ 0 & -6 & 1 & -20 & t-2x \\ 0 & 1 & 2 & -1 & z \end{array}$$

$$\xrightarrow[L_5-L_1\to L_5]{\substack{L_3+7L_2\to L_3\\ L_4+6L_2\to L_4}} \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 & x \\ 0 & 1 & 0 & 3 & e-x \\ 0 & 0 & -3 & 6 & y-10x+7e \\ 0 & 0 & 1 & -2 & t-8x+6e \\ 0 & 0 & 2 & -4 & z-e+x \end{array} \xrightarrow[3L_5+2L_3\to L_5]{3L_4+L_3\to L_4} \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 & x \\ 0 & 1 & 0 & 3 & e-x \\ 0 & 0 & -3 & 6 & y-10x+7e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3t-34x+y+25e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z+17x-2t-13e \end{array}.$$

Donc $-34x+y+3t+25e = 0$ *et* $17x+z-2t-13e = 0$ *sont des équations cartésiennes de* F.
2. On a le rang du système ci-dessus est 3. *Donc* $\dim(F) = 3$. *De plus les colonnes pivots sont les colonnes* 1, 2 *et* 3, *donc* $B = (u_1,u_2,u_3)$ *est une base de* F *(car on a pas utilisé de permutations sur les colonnes).*
3. On a $u_{1B} = (1,0,0), u_{2B} = (0,1,0), u_{3B} = (0,0,1)$. *Pour trouver les coordonnées de* u_4, *on peut utiliser les relations de dépendances entre les cinques vecteurs.*
On remplace x,y,z,t,e *par* 0 *dans le système échelonnée obtennue, on trouve comme ensemble de solutions* $\{(-x_4,-3x_4,2x_4,x_4)/x_4 \in \mathbb{R}\}$. *Donc* $-u_1-3u_2+2u_3+u_4 = 0$. *D'où* $u_4 = u_1+3u_2-2u_3$ *et par suite* $u_{4B} = (1,3,-2)$.
3. Les lignes nulles sont L_4 *et* L_5. *On n'a pas changé la position de la ligne* L_4, *mais on l'a fait pour la ligne* L_5. *Dans la permutation cerculaire* $L_5 \to L_2 \to L_3 \to L_5$ *on voit clairement que l'origine de la ligne* L_5 *est la ligne* L_3. *On peut donc compléter par les vecteurs de la base canoniques* $e_3 = (0,0,1,0,0)$ *et* $e_4 = (0,0,0,1,0)$ *pour avoir une base de* $\mathbb{R}^5$.

Exercice 12. *faisons le changement de variable* $z-2y = x'$. *il est clair que* x' *prend toutes les valeurs de* $\mathbb{R}$, *puisque* z *et* y *le sont. Donc* $F = \{(x', y, x'+2y, y+3z')/y, z \in \mathbb{R}\}$. *Le changement de variable* $x' = x$, *Montre bien que* $F = G$.

Remarque. *On peut parfois utiliser une méthode analogue à celle faite dans l'exercice prédédent, pour montrer que deux sev sont égaux à partir de leurs équations cartésiennes.*