Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Département de Mathématiques

Année Univ.2015-16
SMP-SMC

Rattrapage d'Algèbre 2
durée : 1h30

Tous les résultats doivent être justifiés.

Exercice 1 : (10 points)

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer le rang de f et $\dim(\ker f)$.
2) Trouver $\ker f$.
3) Soient $u = (1,1,0)$ et $v = (0,1,-1)$.
   i) Calculer $f(u)$ et $f(v)$.
   ii) En déduire que $u, v \in \operatorname{Im} f$.
   iii) Montrer que (u,v) est une base de $\operatorname{Im} f$.
4) Soit $w = (2,2,1)$.
   i) Montrer que $S = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   ii) Déterminer la matrice D de f par rapport à S (sans utiliser la matrice de passage).

Exercice 2 : (10 points)

Soient $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y - z = 0\}$, $w = (1,2,-1)$ et $F = vect(w)$.

1) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la dimension de E.
2) Soient $u = (1,1,1)$ et $v = (2,1,3)$.
   i) vérifier que $u, v \in E$.
   ii) Montrer que (u,v) est une base de E.
3) Montrer que $S = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4) E et F sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$? Justifier.
5) Donner la matrice de passage P de la base canonique B de $\mathbb{R}^3$ à la base S de $\mathbb{R}^3$.
6) Calculer P^{-1}.
7) Soit $a = (x,y,z)$ un vecteur quelconque fixé de $\mathbb{R}^3$
   i) Déterminer les compsantes du vecteur a dans la base S (en utilisant la matrice de passage).
   ii) En utilisant la question i), trouver le vecteur $b \in E$ et le vecteur $c \in F$ tels que $a = b + c$.
   iii) Déterminer les deux vecteurs b et c pour $a = (3,5,8)$.

Bon courage