Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Département de Mathématiques

Année Univ.2014-15
SMP-SMC

Contrôle d'Algèbre 2
durée : 1h30

Tous les résultats doivent être justifiés .

Exercice 1 : (6 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :
$\forall(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (3x-2y-2z, 5x-3y-4z, x-y)$.

1) Donner la matrice A de f par rapport à la base canonique $B = (e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer $\ker f$, une base de $\ker f$ et la dimension de $\ker f$. En déduire le rang de f.
3) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$.
4) Soient $e'_1 = (0,1,1)$, $e'_2 = (1,1,0)$, $e'_3 = (2,2,1)$.et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de colonnes e'_1, e'_2, e'_3. Montrer que P est inversible et calculer l'inverse P^{-1}.
5) En déduire que $B' = (e'_1,e'_2,e'_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6) En remarquant que P est la matrice de passage de la base canonique B à la base B', déterminer la matrice A' de f par rapport à la base B'.

Exercice 2 : (4 points)

Soit (Σ_m) le système d'équations linéaire suivant :

$$(\Sigma_m)\begin{cases} x + 2y + 3mz = 1 \\ x + (m+1)y + (3m+1)z = 2 \\ x + 2y + 2mz = 0 \end{cases}$$

1) Donner la matrice A_m du système (Σ_m) et écrire (Σ_m) sous sa forme matricielle $A_mX = B$ (où $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qu'il faut déterminer et $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'inconnue).
2) Montrer que $\det(A_m) = m(1-m)$.
3) Quand est ce que (Σ_m) est un système de Cramer?.
4) Résoudre le système (Σ_m) pour $m \neq 0$ et $m \neq 1$.

Exercice 3 : (10 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $B = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A par rapport à B.

1) Déterminer le rang de A.
2) a) Déterminer le polynôme caractéristique de f
   b) En déduire que 1 et 2 sont les valeurs propres de f.

3) Déterminer les sous espaces propres de f et leur dimension. En déduire que f est digonalisable.

4) Soit P la matrice de colonnes $u = (3,2,4)$, $v = (0,1,0)$ et $w = (-2,-2,-3)$.
   a) Calculer P^2. En en déduire que P est inversible et donner P^{-1} (sans calcul).
   b) En déduire que $S = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5) Montrer que S est formée de vecteurs propres de f et donner la matrice D de f par rapport à la base S.

6) Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Bon courage