

Rattrapage d'Algèbre 2  
durée : 1h30

Tous les résultats doivent être justifiés .

**Exercice 1 : ( 4 points )**

Soient  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$  par rapport à la base

canonique  $B = (e_1, e_2, e_3)$ ,  $e'_1 = (1, 2, -1)$ ,  $e'_2 = (3, 1, 2)$ ,  $e'_3 = (1, 0, -1)$  et  $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ .

- 1) Déterminer le rang de  $A$ .
- 2) En déduire que  $B'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  (sans calcul).
- 3) Donner la matrice de passage  $P$  de  $B$  à  $B'$ .
- 4) En déduire que la matrice de  $f$  par rapport à  $B'$  est égale à  $A$  (sans calcul).

**Exercice 2 : ( 7 points )**

Résoudre suivant le paramètre réel  $m$ , le système d'équations linéaire suivant :

$$(\Sigma_m) \begin{cases} 2x + 3y + (m-1)z = 7 \\ x + y + (m-1)z = 3 \\ -x + (m-1)y = -2 \end{cases}$$

**Exercice 3 : ( 9 points )**

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  de matrice  $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  par rapport à la base

canonique  $B = (e_1, e_2, e_3)$ .

- 1) Calculer le déterminant de  $A$ . En déduire que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .
- 2) Calculer le polynôme caractéristique  $P_A$  de  $A$ .
- 3) En déduire que  $-1$  et  $2$  sont les valeurs propres de  $f$ .
- 4) Déterminer les sous espaces propres  $E_{-1}$  et  $E_2$ .
- 5) Soient  $u = (1, -1, 0)$ ,  $v = (1, 0, -1)$ ,  $w = (0, 2, -3)$  et  $S = (u, v, w)$ .
  - a) Montrer que  $S$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
  - b) En utilisant  $u \in E_{-1}$  et  $v, w \in E_2$  (sans démonstration), montrer que  $f$  est diagonalisable

et

- 6) donner la matrice  $D$  de  $f$  par rapport à la base  $S$  (sans utiliser les matrices de passage).
- 6) Vérifier que  $D^2 - D = 2I_3$  et en déduire  $D^{-1}$  en fonction de  $D$ .
- 7) En utilisant la matrice de passage  $P$  de  $B$  à  $S$ , calculer  $A^{-1}$  (sans calculer  $P$  et  $P^{-1}$ ).