Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Département de Mathématiques

Année Univ.2013-14
SMP-SMC

Contrôle d'Algèbre M2
durée: 1h30

Tous les résultats doivent être justifiés .

Exercice 1 : (10 points)

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par :
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) = (2x+y-z, 4x+2y-4z, 4x+y-3z)$.

1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ (c'est à dire f est une aplication linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$) .
2) Donner la matrice $A = \mathcal{M}(f,B)$ de f par rapport à la base canonique $B = (e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3) Soient $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$ et $v_3 = (0,1,1)$.
   Calculer : $f(v_1)$, $f(v_2)$ et $f(v_3)$ en fonction de v_1 , v_2 et v_3 .
4) En déduire que $S = (v_1,v_2,v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5) Donner la matrice $D = \mathcal{M}(f,S)$ de f par rapport à la base $S = (v_1,v_2,v_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
6) Déterminer une matrice carrée inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ d'ordre 3 telle que :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} .$$

7) Calculer l'inverse A^{-1} de A en fonction de P et D .
8) Calculer l'inverse P^{-1} de P .
9) En déduire :
   a) l'inverse A^{-1} de A .
   b) la réciproque f^{-1} de f .

Exercice 2 : (10 points)

Soient $B = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $S = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$
On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^4$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3$:
$f(x,y,z,t) = (3x+6y+5z+21t, 2x+4y+3z+13t, x+2y+z+5t)$.

1) Donner la matrice A de f par rapport à B et S .
2) Trouver une base de $\mathrm{Im} f$ et le rang de f .
3) En déduire $\dim(\ker f)$.
4) Trouver $\ker f$.
5) Montrer que : $vect(\varepsilon_1,\varepsilon_3) \oplus \ker f = \mathbb{R}^4$.
6) Soit (u,v) une base quelconque de $\ker f$.
   Montrer que $S' = (\varepsilon_1,\varepsilon_3,u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
7) Soit $w \in \mathbb{R}^3$ tel que $w \notin \mathrm{Im} f$.
   Montrer que $B' = \left(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_3), w\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
8) Déterminer la matrice A' de f par rapport à B' et S' .

Bon courage