

Correction du contrôle d'Algèbre 2

Exercice 1 :

$$1) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) **1^{ière} méthode :**

$$\forall a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \in \ker f \Leftrightarrow f(a) = (3x - 2y - 2z, 5x - 3y - 4z, x - y) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 0 \\ 5x - 3y - 4z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x - 2z = 0 \\ 2x - 4z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = 2z$$

$$\text{Donc : } \ker f = \{(2z, 2z, z) \text{ tel que } z \in \mathbb{R}\}.$$

Puisque $\ker f = \{z(2, 2, 1) \text{ tel que } z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((2, 2, 1))$ alors $((2, 2, 1))$ est une base du $\ker f$.

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \text{rg} f + \dim \ker f = \text{rg} f + 1 \Rightarrow \text{rg} f = 3 - 1 = 2.$$

2^{ième} méthode :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \rightarrow L_2 - L_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \in \ker f \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \end{cases}.$$

$$\text{Donc : } \ker f = \{(2z, 2z, z) \text{ tel que } z \in \mathbb{R}\}.$$

Puisque $\ker f = \{z(2, 2, 1) \text{ tel que } z \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((2, 2, 1))$ alors $((2, 2, 1))$ est une base du $\ker f$.

$$3 = \dim \mathbb{R}^3 = \text{rg} f + \dim \ker f = \text{rg} f + 1 \Rightarrow \text{rg} f = 3 - 1 = 2.$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & -4 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \rightarrow L_2 - L_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $((3, 5, 1), (-2, -3, -1))$ est une base de $\text{Im}f$.

4) **1^{ière} méthode :**

$$(P|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) L_1 \leftrightarrow L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) L_3 \rightarrow L_3 - L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc} I_3 & -1 & 1 & 0 \\ & -1 & 2 & -2 \\ & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2^{ième} méthode :

$$\det P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0. \text{ Donc } P \text{ est inversible.}$$

$$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Delta_{1,2} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Delta_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$\Delta_{2,1} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad \Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \quad \Delta_{2,3} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_{3,2} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad \Delta_{3,3} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Donc P est inversible et on a :

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t \text{com}(P) = \frac{1}{-1} {}^t \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Puisque e'_1, e'_2, e'_3 sont les colonnes de P et puisque P est inversible alors $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

6) 1^{ère} méthode :

$$A' = P^{-1}AP = P^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2^{ème} méthode :

$$A' = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} P$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 5 & -2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -8 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 :

$$1) A_m = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & m+1 & 3m+1 \\ 1 & 2 & 2m \end{pmatrix}.$$

L'équation matricielle du système (Σ_m) est : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & m+1 & 3m+1 \\ 1 & 2 & 2m \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\text{ou } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & m+1 & 3m+1 \\ 1 & 2 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) Calculer $\det(A_m)$ en fonction de m .

$$\det(A_m) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 1 & m+1 & 3m+1 \\ 1 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 0 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & -m \end{vmatrix} = -m(m-1) = m(1-m).$$

3) (Σ_m) est un système de Cramer $\Leftrightarrow m(1-m) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$ et $m \neq 1$.

$$\begin{aligned} 4) \Delta_x &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 2 & m+1 & 3m+1 \\ 0 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3m \\ 0 & m-3 & 1-3m \\ 0 & 2 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-3 & 1-3m \\ 2 & 2m \end{vmatrix} \\ &= 2m(m-3) - 2(1-3m) = 2m^2 - 6m - 2 + 6m = 2m^2 - 2 = 2(m^2 - 1) \\ &= 2(m-1)(m+1). \end{aligned}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3m \\ 1 & 2 & 3m+1 \\ 1 & 0 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & m \\ 0 & 2 & m+1 \\ 1 & 0 & 2m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 2 & m+1 \end{vmatrix} = 1 - m.$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & m+1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - m.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\det(A_m)} = \frac{2(m-1)(m+1)}{m(1-m)} = -\frac{2(m+1)}{m}.$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\det(A_m)} = \frac{1-m}{m(1-m)} = \frac{1}{m}. \quad z = \frac{\Delta_z}{\det(A_m)} = \frac{1-m}{m(1-m)} = \frac{1}{m}.$$

Donc $\left(-\frac{2(m+1)}{m}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right)$ est la seule solution du système (Σ_m) .

Exercice 3 :

1) 1^{ière} méthode :

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} L_2 &\rightarrow L_2 + 8L_1 \\ L_3 &\rightarrow L_3 + 12L_1 \end{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & -12 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 5L_2 - 3L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12 & 10 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \rightarrow L_3 + 12L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Donc $\text{rg}A = 3$.

2^{ième} méthode :

$$\det A = \begin{vmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & -7 & 6 \\ -12 & -12 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 6 \\ -12 & 10 \end{vmatrix} \\ = -70 + 72 = 2 \neq 0.$$

Donc $\text{rg}A = 3$.

$$2) \text{ a) } P_A(X) = \begin{vmatrix} -7-X & 0 & 6 \\ -8 & 1-X & 6 \\ -12 & 0 & 10-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} -7-X & 6 \\ -12 & 10-X \end{vmatrix} \\ = (1-X)[(-7-X)(10-X) + 72] = (1-X)(-70 + 7X - 10X + X^2 + 72) \\ = (1-X)(2 - 3X + X^2).$$

$\Delta = 9 - 8 = 1$. Donc les racines du polynôme $2 - 3X + X^2$ sont :

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ce qui montre que $P_A(X) = (1-X)(1-X)(2-X) = (1-X)^2(2-X)$.

b) Les valeurs propres de f sont 1 et 2 (car 1 et 2 sont les racines du polynôme P_A).

3) **1^{ière} méthode :**

- **Pour déterminer E_1 :**

$$\forall a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$$

$$a \in E_1 \Leftrightarrow (A - I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 6 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -8x + 6z \\ -8x + 6z \\ -12x + 9z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -8x + 6z = 0 \\ -8x + 6z = 0 \\ -12x + 9z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{8x}{6} = \frac{4x}{3} \\ z = \frac{12x}{9} = \frac{4x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow a = \left(x, y, \frac{4x}{3}\right).$$

$$\text{Donc : } E_1 = \left\{ \left(x, y, \frac{4x}{3}\right) \quad tq : x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{ou} \quad E_1 = \left\{ (3x, y, 4x) \quad tq : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ou} \quad E_1 = \left\{ \left(\frac{3z}{4}, y, z\right) \quad tq : y, z \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{ou} \quad E_1 = \left\{ (3z, y, 4z) \quad tq : y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$E_1 = \left\{ \left(x, y, \frac{4x}{3}\right) \quad tq : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(x, 0, \frac{4x}{3}\right) + (0, y, 0) \quad tq : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \left(1, 0, \frac{4}{3}\right) + y(0, 1, 0) \quad tq : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect} \left(\left(1, 0, \frac{4}{3}\right), (0, 1, 0) \right).$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \left(1, 0, \frac{4}{3}\right) + \beta(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \left(\alpha, 0, \frac{4\alpha}{3}\right) + (0, \beta, 0) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha, \beta, \frac{4\alpha}{3}\right) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0.$$

Alors $\left(\left(1, 0, \frac{4}{3}\right), (0, 1, 0)\right)$ est un système libre de E_1 .

Donc $\left(\left(1, 0, \frac{4}{3}\right), (0, 1, 0)\right)$ est une base de E_1 . Ce qui montre que $\dim E_1 = 2$.

- Pour déterminer E_2 :

$$\forall a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$$

$$a \in E_2 \Leftrightarrow (A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9 & 0 & 6 \\ -8 & -1 & 6 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -9x + 6z \\ -8x - y + 6z \\ -12x + 8z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x + 6z = 0 \\ -8x - y + 6z = 0 \\ -12x + 8z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{9x}{6} = \frac{3x}{2} \\ -8x - y + 9x = 0 \\ z = \frac{12x}{8} = \frac{3x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ z = \frac{3x}{2} \end{cases}$$

Donc : $E_2 = \left\{ \left(x, x, \frac{3x}{2}\right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ ou $E_2 = \{(2x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Alors : $E_2 = \left\{ x \left(1, 1, \frac{3}{2}\right) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect}\left(\left(1, 1, \frac{3}{2}\right)\right)$

ou $E_2 = \{x(2, 2, 3) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((2, 2, 3))$

Ce qui montre que $\dim E_2 = 1$.

2^{ème} méthode :

- Pour déterminer E_1 :

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 6 \\ -8 & 0 & 6 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix} L_1 \rightarrow -\frac{1}{8}L_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ -8 & 0 & 6 \\ -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 + 8L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 12L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors : $\forall a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \in E_1 \Leftrightarrow x - \frac{3z}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3z}{4}$.

Donc : $E_1 = \left\{ \left(\frac{3z}{4}, y, z \right) \quad tq : y, z \in \mathbb{R} \right\}$ ou $E_1 = \left\{ (3z, y, 4z) \quad tq : y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

ou $E_1 = \left\{ \left(x, y, \frac{4x}{3} \right) \quad tq : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ ou $E_1 = \left\{ (3x, y, 4x) \quad tq : x, y \in \mathbb{R} \right\}$

$E_1 = \left\{ \left(\frac{3z}{4}, y, z \right) \quad tq : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\frac{3z}{4}, 0, z \right) + (0, y, 0) \quad tq : y, z \in \mathbb{R} \right\}$

$= \left\{ z \left(\frac{3}{4}, 0, 1 \right) + y(0, 1, 0) \quad tq : y, z \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect} \left(\left(\frac{3}{4}, 0, 1 \right), (0, 1, 0) \right)$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha \left(\frac{3}{4}, 0, 1 \right) + \beta(0, 1, 0) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \left(\frac{3\alpha}{4}, 0, \alpha \right) + (0, \beta, 0) = (0, 0, 0)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{3\alpha}{4}, 0, \alpha \right) = (0, 0, 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$.

Alors $\left(\left(\frac{3}{4}, 0, 1 \right), (0, 1, 0) \right)$ est un système libre de E_1 .

Donc $\left(\left(\frac{3}{4}, 0, 1 \right), (0, 1, 0) \right)$ est une base de E_1 . Ce qui montre que $\dim E_1 = 2$.

- Pour déterminer E_2 :

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & -1 & 6 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix} L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -8 & -1 & 6 \\ -12 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 + 8L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 12L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -9 & 6 \\ 0 & -12 & 8 \end{pmatrix} L_2 \rightarrow -\frac{1}{9}L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -12 & 8 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \rightarrow L_3 + 12L_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors : $\forall a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \in E_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{2z}{3} = 0 \\ y - \frac{2z}{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{2z}{3}$

Donc : $E_2 = \left\{ \left(x, x, \frac{3x}{2} \right) \quad tq : x \in \mathbb{R} \right\}$ ou $E_2 = \left\{ (2x, 2x, 3x) \quad tq : x \in \mathbb{R} \right\}$.

Alors : $E_2 = \left\{ x \left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \quad tq : x \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect} \left(\left(1, 1, \frac{3}{2} \right) \right)$

ou $E_2 = \left\{ x(2, 2, 3) \quad tq : x \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect}((2, 2, 3))$

Ce qui montre que $\dim E_2 = 1$.

Puisque $\dim E_1 + \dim E_2 = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ alors f est diagonalisable.

$$4) a) P^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

$$\text{Donc } P \text{ est inversible et } P^{-1} = P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Puisque la matrice P de colonnes u, v et w est inversible alors $S = (u, v, w)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

5) **1^{ière} méthode :**

Puisque $u, v \in E_1 - \{(0,0,0)\}$ alors u et v sont des vecteurs propres de f associées à 1.

Puisque $w = (-2, -2, -3) \in E_2 - \{(0,0,0)\}$ alors w est un vecteur propre de f associée à 2.

Ce qui montre que S est formée de vecteurs propres de f .

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2^{ième} méthode :

$$[f(u)]_B = A[u]_B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = [u]_B \Rightarrow f(u) = u$$

Donc u est un vecteur propre de f associé à 1.

$$[f(v)]_B = A[v]_B = \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [v]_B \Rightarrow f(v) = v$$

Donc v est un vecteur propre de f associé à 1.

$$\begin{aligned} [f(w)]_B = A[w]_B &= \begin{pmatrix} -7 & 0 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ -12 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &= 2[w]_B = [2w]_B \Rightarrow f(w) = 2w \end{aligned}$$

Alors $f(w) = 2w$. Donc w est un vecteur propre de f associé à 2.

Ce qui montre que S est formée de vecteurs propres de f et on a :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$6) D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A^n = PD^nP^{-1} = PD^nP.$$

1^{ière} méthode :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2^{n+1} \\ 2 & 1 & -2^{n+1} \\ 4 & 0 & -3 \times 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 - 2^{n+3} & 0 & 6(2^n - 1) \\ 8 - 2^{n+3} & 1 & 6(2^n - 1) \\ 12(1 - 2^n) & 0 & 9 \times 2^n - 8 \end{pmatrix}.$$

2^{ème} méthode :

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2^{n+2} & 0 & -3 \times 2^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 - 2^{n+3} & 0 & 6(2^n - 1) \\ 8 - 2^{n+3} & 1 & 6(2^n - 1) \\ 12(1 - 2^n) & 0 & 9 \times 2^n - 8 \end{pmatrix}.$$