

Correction du rattrapage d'Algèbre 2
 durée : 1h30

Exercice 1 :

$$1) A \begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} L_3 \rightarrow L_3 + L_2 \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc : $rgA = 3$.

2) Puisque $e'_1 = (1, 2, -1)$, $e'_2 = (3, 1, 2)$ et $e'_3 = (1, 0, -1)$ sont les colonnes de A et puisque $rgA = 3$ alors B' est une base de \mathbb{R}^3 .

$$3) P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A.$$

4) La matrice de f par rapport à B' est : $P^{-1}AP = A^{-1}AP = P = A$.

Exercice 2 :

Soient S_m l'ensemble des solutions de (Σ_m) et $M_m = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & m-1 & 7 \\ 1 & 1 & m-1 & 3 \\ -1 & m-1 & 0 & -2 \end{array} \right).$

$$M_m L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 2 & 3 & m-1 & 7 \\ -1 & m-1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-m & 1 \\ 0 & m & m-1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_3 \rightarrow L_3 - mL_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-m & 1 \\ 0 & 0 & m^2-1 & 1-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-m & 1 \\ 0 & 0 & (m-1)(m+1) & 1-m \end{pmatrix}.$$

- **Si $m = -1$:**

$$M_{-1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow S_1 = \emptyset.$$

- **Si $m = 1$:**

$$M_1 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

$$\text{Donc : } (\Sigma_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ce qui montre que : $S_1 = \{(2, 1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

- **Si $m \neq 1$ et si $m \neq -1$:**

$$M_m \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-m & 1 \\ 0 & 0 & (m-1)(m+1) & 1-m \end{array} \right)$$

$$L_3 \rightarrow \frac{1}{(m-1)(m+1)} L_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m-1 & 3 \\ 0 & 1 & 1-m & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{m+1} \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + (1-m)L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + (m-1)L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{4m+2}{m+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{m+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{m+1} \end{array} \right) L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4m}{m+1} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{m+1} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{m+1} \end{array} \right).$$

Ce qui montre que : $S_m = \left\{ \left(\frac{4m}{m+1}, \frac{2}{m+1}, -\frac{1}{m+1} \right) \right\} = \left\{ \frac{1}{m+1} (4, 2, -1) \right\}$.

Exercice 3 :

$$1) \det A = \begin{vmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 8 & 9 \\ -6 & -7 \end{vmatrix} = 2(-56 + 54) = 2(-2) = -4.$$

Puisque $\det A \neq 0$ alors A est inversible. Donc f est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

$$2) P_A = \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 8-X & 9 & 6 \\ -6 & -7-X & -6 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} = (2-X) \begin{vmatrix} 8-X & 9 \\ -6 & -7-X \end{vmatrix}$$

$$= (2-X)[(8-X)(-7-X) + 9 \times 6] = (2-X)(-56 - X + X^2 + 54)$$

$$= (2-X)(X^2 - X - 2).$$

$\Delta = 1 + 8 = 9$. Donc les racines de $X^2 - X - 2$ sont :

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

$$\text{Donc : } X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1).$$

$$\text{Par suite : } P_A = (2-X)(X-2)(X+1) = (2-X)(2-X)(-1-X) = (2-X)^2(-1-X)$$

$$\text{ou } P_A = (2-X)(X-2)(X+1) = -(X-2)(X-2)(X+1) = -(X-2)^2(X+1).$$

3) Puisque -1 et 2 sont les racines de P_A alors -1 et 2 sont les valeurs propres de f .

4) 1^{ière} méthode :

• $\forall a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$

$$a \in E_{-1} \Leftrightarrow f(a) = -a \Leftrightarrow (8x + 9y + 6z, -6x - 7y - 6z, 2z) = -(x, y, z) = (-x, -y, -z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 9y + 6z = -x \\ -6x - 7y - 6z = -y \\ 2z = -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 9y + 6z = 0 \\ -6x - 6y - 6z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 9x + 9y = 0 \\ -6x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 9(x + y) = 0 \\ -6(x + y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

Donc : $E_{-1} = \{(x, -x, 0) \text{ tq } x \in \mathbb{R}\}$.

• $\forall a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :$

$$a \in E_2 \Leftrightarrow f(a) = 2a \Leftrightarrow (8x + 9y + 6z, -6x - 7y - 6z, 2z) = 2(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x + 9y + 6z = 2x \\ -6x - 7y - 6z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y + 6z = 0 \\ -6x - 9y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 6x + 9y + 6z = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y + 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{3y + 2z}{2} \quad \text{ou} \quad y = -\frac{2(x + z)}{3} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{3x + 2y}{2}.$$

Donc : $E_2 = \left\{ \left(-\frac{3y + 2z}{2}, y, z \right) \text{ tq } y, z \in \mathbb{R} \right\}$

ou $E_2 = \{(-3\alpha - 2\beta, 2\alpha, 2\beta) \text{ tq } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

ou $E_2 = \left\{ \left(x, -\frac{2(x + z)}{3}, z \right) \text{ tq } x, z \in \mathbb{R} \right\}$

ou $E_2 = \{(3\alpha, -2(\alpha + \beta), 3\beta) \text{ tq } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

ou $E_2 = \left\{ \left(x, y, -\frac{3x + 2y}{2} \right) \text{ tq } x, y \in \mathbb{R} \right\}$

ou $E_2 = \{(2\alpha, 2\beta, -3\alpha - 2\beta) \text{ tq } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

2^{ième} méthode :

$$\bullet A + I_3 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 \\ -6 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \rightarrow -\frac{1}{6}L_2 \begin{pmatrix} 9 & 9 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_2 \rightarrow L_2 - 9L_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \rightarrow -\frac{1}{3}L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Donc : } E_{-1} = \{(x, -x, 0) \text{ tq } x \in \mathbb{R}\}.$$

$$\bullet A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ -6 & -9 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \begin{pmatrix} 6 & 9 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \rightarrow -\frac{1}{2}L_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\forall a = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \in E_2 \Leftrightarrow 2x + 3y + 2z = 0 \\ \Leftrightarrow x = -\frac{3y + 2z}{2} \quad \text{ou} \quad y = -\frac{2(x + z)}{3} \quad \text{ou} \quad z = -\frac{3x + 2y}{2}.$$

$$\text{Donc : } E_2 = \left\{ \left(-\frac{3y + 2z}{2}, y, z \right) \text{ tq } y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ou } E_2 = \{(-3\alpha - 2\beta, 2\alpha, 2\beta) \text{ tq } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{ou } E_2 = \left\{ \left(x, -\frac{2(x + z)}{3}, z \right) \text{ tq } x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ou } E_2 = \{(3\alpha, -2(\alpha + \beta), 3\beta) \text{ tq } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{ou } E_2 = \left\{ \left(x, y, -\frac{3x + 2y}{2} \right) \text{ tq } x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\text{ou } E_2 = \{(2\alpha, 2\beta, -3\alpha - 2\beta) \text{ tq } \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

5) a) **1^{ière} méthode :**

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} :$$

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \alpha(1, -1, 0) + \beta(1, 0, -1) + \gamma(0, 2, -3) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta, -\alpha + 2\gamma, -\beta - 3\gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha + 2\gamma = 0 \\ -\beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = -3\gamma \\ 2\gamma - 3\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 2\gamma \\ \beta = -3\gamma \\ -\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma.$$

Alors S est un système libre de \mathbb{R}^3 . Donc S est une base de \mathbb{R}^3 .

2^{ème} méthode :

$$\text{Soit } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a : } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0.$$

Ce qui montre que S est une base de \mathbb{R}^3 .

3^{ème} méthode :

$$\text{Soit } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a : } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ce qui montre que S est une base de \mathbb{R}^3 .

b) Puisque S est une base de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de f alors f est diagonalisable.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) Vérifier que $D^2 - D = 2I_3$ et en déduire D^{-1} en fonction de D .

$$\begin{aligned} D^2 - D &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3. \end{aligned}$$

$$D^2 - D = 2I_3 \Rightarrow D^2 - I_3 D = 2I_3 \Rightarrow (D - I_3)D = 2I_3 \Rightarrow \frac{1}{2}(D - I_3)D = I_3.$$

$$\text{Donc : } D^{-1} = \frac{1}{2}(D - I_3).$$

7) Puisque $D = P^{-1}AP$ alors $A = PDP^{-1}$. Par suite on a :

$$\begin{aligned}A^{-1} &= (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = P\left[\frac{1}{2}(D - I_3)\right]P^{-1} = \frac{1}{2}P[(D - I_3)]P^{-1} \\&= \frac{1}{2}(PDP^{-1} - PI_3P^{-1}) = \frac{1}{2}(PDP^{-1} - PP^{-1}) = \frac{1}{2}(A - I_3) \\&= \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 \\ -6 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & 9 & 6 \\ -6 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$