Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences Dhar El Mehraz
Département de Mathématiques

Année Univ.2013-14
SMP-SMC

Correction du contrôle d'Algèbre M2
durée: 1h30

Exercice 1 :

1) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ et $\forall b = (u,v,w) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} f(\alpha a + b) &= f(\alpha(x,y,z) + (u,v,w)) = f(\alpha x + u, \alpha y + v, \alpha z + w) \\ &= \left(\begin{array}{c} 2(\alpha x + u) + (\alpha y + v) - (\alpha z + w), 4(\alpha x + u) + 2(\alpha y + v) - 4(\alpha z + w), \\ 4(\alpha x + u) + (\alpha y + v) - 3(\alpha z + w) \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} 2\alpha x + 2u + \alpha y + v - \alpha z - w, 4\alpha x + 4u + 2\alpha y + 2v - 4\alpha z - 4w, \\ 4\alpha x + 4u + \alpha y + v - 3\alpha z - 3w \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} 2\alpha x + \alpha y - \alpha z + 2u + v - w, 4\alpha x + 2\alpha y - 4\alpha z + 4u + 2v - 4w, \\ 4\alpha x + \alpha y - 3\alpha z + 4u + v - 3w \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c} \alpha(2x + y - z) + 2u + v - w, \alpha(4x + 2y - 4z) + 4u + 2v - 4w, \\ \alpha(4x + y - 3z) + 4u + v - 3w \end{array} \right) \\ &= (\alpha(2x + y - z), \alpha(4x + 2y - 4z), \alpha(4x + y - 3z)) \\ &\quad + (2u + v - w, 4u + 2v - 4w, 4u + v - 3w) \\ &= \alpha(2x + y - z, 4x + 2y - 4z, 4x + y - 3z) + (2u + v - w, 4u + 2v - 4w, 4u + v - 3w) \\ &= \alpha f(x,y,z) + f(u,v,w) \\ &= \alpha f(a) + f(b) \end{aligned}$$

Donc : f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

3) $f(v_1) = f(1,1,1) = (2,2,2) = 2(1,1,1) = 2v_1$.
$f(v_2) = f(1,0,1) = (1,0,1) = v_2$.
$f(v_3) = f(0,1,1) = (0,-2,-2) = -2(0,1,1) = -2v_3$.

4) Puisque v_1 , v_2 et v_3 sont des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres 2 , 1 et -2 et puisque les valeurs propres 2 , 1 et -2 sont distinctes deux à deux alors : $S = (v_1, v_2, v_3)$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$.
Puisque $S = (v_1, v_2, v_3)$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$contenant 3 vecteurs et puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ alors : $S = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

6) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de B à S .

On a donc : $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

7) $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = D \Rightarrow A = PDP^{-1} \Rightarrow A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

8) - **<u>1^ière^ méthode</u>** :

$$(P|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \to -L_1 + L_2 \\ L_3 \to -L_1 + L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_2 \to -L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) L_2 \to L_2 + L_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$L_1 \to L_1 - L_2 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & -1 \\ I_3 & 0 & -1 & 1 \\ & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Donc : $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **<u>2^ième^ méthode</u>** :

$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$.

$\Delta_{1,1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta_{1,2} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$\Delta_{2,1} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta_{2,2} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_{2,3} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Delta_{3,1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $\Delta_{3,2} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $\Delta_{3,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

Donc : $P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t[com(P)] = \frac{1}{-1}\,{}^t\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9) a) $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}P^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $\forall a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

$$[f^{-1}(a)]_B = \mathcal{M}\left(f^{-1},B\right)[a]_B = A^{-1}[a]_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-y+z \\ 2x+y-2z \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

Donc : $f^{-1}(a) = \frac{1}{2}(x-y+z, 2x+y-2z, 2x-y)$

Exercice 2 :

1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 21 \\ 2 & 4 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 21 \\ 2 & 4 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 13 \\ 3 & 6 & 5 & 21 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $\big(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_3)\big) = ((3,2,1),(5,3,1))$ est une base de $\mathrm{Im} f$ et $rg(f) = 2$.

3) $4 = \dim \mathbb{R}^4 = rg(f) + \dim(\ker f) = 2 + \dim(\ker f) \Rightarrow \dim(\ker f) = 4 - 2 = 2$

4) - **1^ière méthode** :

$\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$:

$(x,y,z,t) \in \ker f \Leftrightarrow f(x,y,z,t) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow (3x+6y+5z+21t, 2x+4y+3z+13t, x+2y+z+5t) = (0,0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+6y+5z+21t = 0 \\ 2x+4y+3z+13t = 0 \\ x+2y+z+5t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z+5t = 0 \\ 2z+6t = 0 \\ z+3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3t \\ x+2y-3t+5t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = -3t \\ x+2y+2t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y-2t \\ z = -3t \end{cases}$$

Donc : $\ker f = \left\{(-2y-2t, y, -3t, t) \quad tq : y,t \in \mathbb{R}\right\}$.

- **2^ièrme méthode** :

$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 21 \\ 2 & 4 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d'après la question 2))

$$L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc : $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$:

$$(x,y,z,t) \in \ker f \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2y+2t \\ z+3t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+2t = 0 \\ z+3t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y-2t \\ z = -3t \end{cases}$$

Donc : $\ker f = \left\{(-2y-2t, y, -3t, t) \quad tq : y,t \in \mathbb{R}\right\}$.

5) - $\forall a \in vect(\varepsilon_1, \varepsilon_3) \cap \ker f$: $a \in vect(\varepsilon_1,\varepsilon_3)$ et $a \in \ker f$

$a \in vect(\varepsilon_1,\varepsilon_3) \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad tq : a = \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_3 = \alpha(1,0,0,0) + \beta(0,0,1,0)$
$= (\alpha, 0, \beta, 0)$

$a \in \ker f \Rightarrow \exists y,t \in \mathbb{R} \quad tq : a = (-2y-2t, y, -3t, t)$

Donc : $(\alpha,0,\beta,0) = (-2y-2t,y,-3t,t) \Rightarrow y = t = 0$

Par suite on a : $a = (0,0,0,0)$

Donc : $vect(\varepsilon_1,\varepsilon_3) \cap \ker f = \{(0,0,0,0)\}$.

Ce qui montre que la somme de $vect(\varepsilon_1,\varepsilon_3)$ et $\ker f$ est directe .

- $\dim[vect(\varepsilon_1,\varepsilon_3) \oplus \ker f] = \dim vect(\varepsilon_1,\varepsilon_3) + \dim \ker f = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$.

Donc : $vect(\varepsilon_1,\varepsilon_3) \oplus \ker f = \mathbb{R}^4$.

6) Soit (u,v) une base quelconque de $\ker f$.

Montrer que $S' = (\varepsilon_1,\varepsilon_3,u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

- $\forall \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R} \quad tq : \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_3 + \gamma u + \delta v = (0,0,0,0)$

$\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_3 + \gamma u + \delta v = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon = -\gamma u - \delta v$

$\Rightarrow \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_3 = -\gamma u - \delta v \in vect(\varepsilon_1,\varepsilon_3) \cap \ker f = \{(0,0,0,0)\}$

$\Rightarrow \alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_3 = -\gamma u - \delta v = (0,0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ (car $(\varepsilon_1,\varepsilon_3)$ et (u,v) sont des systèmes libres de $\mathbb{R}^4$) .

Donc : $S' = (\varepsilon_1,\varepsilon_3,u,v)$ est un système libre de $\mathbb{R}^4$.

- Puisque $S' = (\varepsilon_1,\varepsilon_3,u,v)$ est un système libre de $\mathbb{R}^4$ contenant 4 vecteurs et puisque $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ alors : $S' = (\varepsilon_1,\varepsilon_3,u,v)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

7) - $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \quad tq : \alpha f(\varepsilon_1) + \beta f(\varepsilon_3) + \gamma w = (0,0,0)$

$\alpha f(\varepsilon_1) + \beta f(\varepsilon_3) + \gamma w = (0,0,0) \Leftrightarrow f(\alpha\varepsilon_1) + f(\beta\varepsilon_3) + \gamma w = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow f(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_3) + \gamma w = (0,0,0) \Rightarrow \gamma w = -f(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_3) = f(-(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_3)) \in \mathrm{Im} f$.

Supposons $\gamma \neq 0$ alors : $w = \frac{1}{\gamma} f(-(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_3)) = f\left(-\frac{1}{\gamma}(\alpha\varepsilon_1 + \beta\varepsilon_3)\right) \in \mathrm{Im} f$.

Ce qui est absurde . Donc : $\gamma = 0$.

On a alors : $\alpha f(\varepsilon_1) + \beta f(\varepsilon_3) = (0,0,0)$.

Donc : $\alpha = \beta = 0$ (car $\left(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_3)\right)$ est une base de $\mathrm{Im} f$) .

Par suite on a : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Donc : $B' = \left(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_3), w\right)$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$.

- Puisque $B' = \left(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_3), w\right)$ est un système libre de $\mathbb{R}^3$ contenant 3 vecteurs et puisque $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ alors : $B' = \left(f(\varepsilon_1), f(\varepsilon_3), w\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

8) $f(\varepsilon_1) = 1f(\varepsilon_1) + 0f(\varepsilon_3) + 0w$

$f(\varepsilon_3) = 0f(\varepsilon_1) + 1f(\varepsilon_3) + 0w$

$f(u) = f(v) = (0,0,0) = 0f(\varepsilon_1) + 0f(\varepsilon_3) + 0w$ (car $u, v \in \ker f$) .

On a donc : $[f(\varepsilon_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[f(\varepsilon_3)]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $[f(u)]_{B'} = [f(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ce qui montre que : $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.