Matrices

Notations du chapitre — *Dans tout ce chapitre, n et p sont deux entiers naturels non nuls. $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou l'ensemble $\mathbb{C}$.*

I — Ensemble des matrices

Définition 1.1 — Matrice à n lignes et p colonnes
*On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ la donnée de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$ disposés dans un tableau sous la forme*

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{np} \end{pmatrix}$$

On note aussi $M = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$. Dans la notation des coefficients m_{ij} de la matrice, l'indice i représente la ligne de la matrice et l'indice j la colonne de la matrice.

Vocabulaire

- Une **matrice colonne** est une matrice qui n'a qu'une colonne.
- Une **matrice ligne** est une matrice qui n'a qu'une ligne.
- Une **matrice carrée** est une matrice qui a autant de ligne que de colonne. Ce nombre s'appelle **l'ordre** de la matrice. L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Dans le cas des matrices carrées, les coefficients $(m_{ii})_{1\leqslant i\leqslant n}$ forment la **diagonale** de la matrice.
- Une matrice **triangulaire supérieure** est une matrice carrée dont les coefficients sous la diagonale sont tous nuls ($m_{ij} = 0$ si $i > j$). L'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n est noté $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & m_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

- Une matrice **triangulaire inférieure** est une matrice carrée dont les coefficients au dessus de la diagonale sont tous nuls (($m_{ij} = 0$ si $i < j$). L'ensemble des matrices triangulaires inférieures d'ordre n est noté $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

- Les matrices dont les coefficients au-dessus et en dessous de la diagonale sont nuls sont les **matrices diagonales** ($m_{ij} = 0$ si $i \neq j$). L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est noté $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

– Enfin on appellera **matrice identité** la matrice

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

II — Opérations sur les matrices

Définition 2.1 — Transposée d'une matrice
*Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$. On appelle **tranposée** de M et on note ${}^tM$ la matrice de $\mathscr{M}_{pn}(\mathbb{K})$ égale à $(m_{ji})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$*

Définition 2.2 — Matrice symétrique, antisymétrique
Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que
- *M est **symétrique** si et seulement si ${}^tM = M$. L'ensemble des matrices symétriques est noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.*
- *M est **antisymétrique** si et seulement si ${}^tM = -M$. L'ensemble des matrices symétriques est noté $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.*

Définition 2.3 — Addition et produit par un scalaire
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
- *On appelle **produit** de A par λ et on note $\lambda\,.\,A$ la matrice $C = (c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ définie par*
$$\forall i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!],\quad \forall j \in [\![\,1\,;\,p\,]\!],\qquad c_{ij} = \lambda a_{ij}$$
- *On appelle **somme** de A et de B et on note $A+B$ la matrice $D = (d_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ définie par*
$$\forall i \in [\![\,1\,;\,n\,]\!],\quad \forall j \in [\![\,1\,;\,p\,]\!],\qquad d_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Propriété 2.4 — *L'addition de matrice est associative, commutative et possède un élément neutre (la matrice nulle $O_{np} = (0)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$).*

Propriété 2.5 — *Soit A et B deux matrices et λ et μ deux scalaires*
- $\lambda\,.\,(\mu\,.\,A) = (\lambda\times\mu)\,.\,A = \mu\,.\,(\lambda\,.\,A)$
- $\lambda\,.\,(A+B) = \lambda\,.\,A + \lambda\,.\,B$
- $(\lambda+\mu)\,.\,A = \lambda\,.\,A + \mu\,.\,A$

Propriété 2.6 — *Soit A et B deux matrices et λ un scalaire :*
- ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
- ${}^t(\lambda A) = \lambda\,{}^tA$

Définition 2.7 — Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne
Soit $L \in \mathscr{M}_{1,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{q,1}(K)$. Par définition, le produit $L \times C$ est la matrice de $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ définie par
$$LC = \left(l_{11}c_{11} + l_{12}c_{21} + \cdots + l_{1q}c_{q1}\right)$$

Définition 2.8 — Produit de deux matrices
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{q,p}(K)$. Par définition, le produit $A \times B$ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient à la i–ième ligne et à la j–ième colonne est le produit de la i–ième ligne de A par la j–ième colonne de B.

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj} \right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Propriété 2.9 — *Le produit matriciel est associatif : $(AB)C = A(BC)$.*

Propriété 2.10 —

1) $\forall A \in \mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K}), \forall (B, C) \in (\mathscr{M}_{qp}(\mathbb{K}))^2, \quad A(B+C) = AB + AC$
2) $\forall (A, B) \in (\mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K}))^2, \forall C \in \mathscr{M}_{qp}(\mathbb{K}), \quad (A+B)C = AC + BC$
3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (A, B) \in (\mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K}))^2, \quad \lambda(AB) = A(\lambda B)$
4) $\forall A \in \mathscr{M}_{nq}(\mathbb{K}), \forall B \in \mathscr{M}_{qp}(\mathbb{K}), \quad {}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$

III — Cas des matrices carrées

Propriété 3.1 — *La multiplication de matrice est une opération interne de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, associative et admettant un élément neutre (I_n).*

Propriété 3.2 — *Soit T et U deux matrices triangulaires supérieures. Alors TU est une matrice triangulaire supérieures.*

Propriété 3.3 — *Soit D et Δ deux matrices diagonales. On a*

$$D\Delta = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} d_1\delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2\delta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n\delta_n \end{pmatrix} \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$$

Définition 3.4 — Puissances de matrices
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $k \in \mathbb{N}$. Par définition

$$A^k = I_n \times \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$$

Propriété 3.5 — *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(i, j) \in \mathbb{N}^2$*

$$A^i A^j = A^{i+j} = A^{i+j} = A^i A^j$$

Propriété 3.6 — *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $k \in \mathbb{N}^2$,* $\quad {}^t\left(A^k\right) = ({}^tA^k)$.

Propriété 3.7 — *Soit $k \in \mathbb{N}$ et D une matrice diagonale. On a*

$$D^k = \begin{pmatrix} d_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Théorème 3.8 — Binôme de Newton pour les matrices
Soit A et B deux matrices telles que $AB = BA$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

IV — Matrices inversibles

Définition 4.1 — Matrice inversible
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est ***inversible*** *si et seulement si il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$.*
Dans ce cas, B est unique : on l'appelle ***l'inverse*** *de A et on la note $B = A^{-1}$.*
On note l'ensemble des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{K})$.

Propriété 4.2 — Cas des matrices diagonales
Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls. On a alors

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{pmatrix}$$

Propriété 4.3 — Critère de non–inversibilité
Soit M une matrice carrée. S'il existe une matrice non nulle N telle que $MN = O$ ou $NM = O$ alors M n'est pas inversible.

Propriété 4.4 — Produit de deux matrices inversibles
Soit A et B deux matrices inversibles d'ordre n.
Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Propriété 4.5 — Transposée d'une matrice inversible
Soit A une matrice inversible d'ordre n. Alors ${}^tA$ est inversible et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Théorème 4.6 — *La matrice carrée A est inversible si et seulement si pour toute matrice B, le système $AX = B$ est un système de Cramer.*

Corollaire 4.7 — Cas des matrices triangulaires
Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls.