

Résumé du cours d'algèbre linéaire - 2

1 Déterminants

Définition 1.1 Soient $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On dit que le couple (i, j) **présente une inversion pour σ** (ou est une **inversion de σ**) si : $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $\ell(\sigma)$ le nombre d'inversions de σ .

Définition 1.2 On appelle **signature** de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, le nombre $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell(\sigma)}$.

Définition 1.3 Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} . On dit que l'application :

$$\begin{aligned} f & : E^p = E \times \dots \times E & \longrightarrow & F \\ & (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

est une **application multilinéaire** ou **p -linéaire** si pour tout i compris entre 1 et p et pour tous vecteurs $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_p$ fixés, l'application :

$$x \longmapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p)$$

est une application linéaire de E dans F . Si de plus $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une **forme p -linéaire**.

Autrement dit on a pour tous vecteurs x et y de E :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x + \mu y, x_{i+1}, \dots, x_p) &= \\ \lambda f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p) &+ \mu f(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p) \end{aligned}$$

alter

Définition 1.4 Soient E et F deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} et $v : E^p = E \times \dots \times E \longrightarrow F$ une application multilinéaire. On dit que v est **alternée** si pour tout couple $(i, j) \in F_p^2$ tel que $i \neq j$ et pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$:

$$x_i = x_j \text{ implique } v(x_1, \dots, x_p) = 0$$

formvol

Proposition 1.5 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{K} .

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour tous vecteurs x_1, \dots, x_n de E , on note $\begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_{1n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$ leurs coordonnées respectives dans la base \mathcal{B} . Définissons ω par :

$$\begin{aligned} \omega & : E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \omega(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i), i}. \end{aligned}$$

Alors ω est l'unique forme n -linéaire alternée $E^n \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$.

- $\forall v \in \Lambda^n(E, \mathbb{K})$ on a $v = v(e_1, \dots, e_n)\omega$.
- $\dim(\Lambda^n(E, \mathbb{K})) = 1$.

Notation 1.6 D'après la proposition précédente si E est un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, alors il existe une unique n -forme linéaire alternée ω telle que $\omega(e_1, \dots, e_n) = 1$. Notons $\det_{\mathcal{B}} = \omega$.

Définition 1.7 Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Alors pour toute famille de n vecteurs (u_1, \dots, u_n) le scalaire $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ s'appelle le **déterminant de la famille** (u_1, \dots, u_n) dans la base \mathcal{B} .

rem:det

Remarque 1.8 De la proposition [formvol 1.5](#) on déduit immédiatement que :

$$\forall v \in \Lambda^n(E, \mathbb{K}), \forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n, v(u_1, \dots, u_n) = v(e_1, \dots, e_n)\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Faire la preuve.

caracallee

Proposition 1.9 Soit $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$. Alors la famille (u_1, \dots, u_n) est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = 0$.

reldetfdetb

Définition 1.10 Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$\det(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$$

Ceci ne dépend pas de la base \mathcal{B} et définit donc le déterminant de f .

produit

Proposition 1.11 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur \mathbb{K} . Soient f et g deux endomorphismes de E . Alors :

$$\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$$

inverse

Proposition 1.12 Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

- Alors $\det(\text{Id}_E) = 1$.
- Un endomorphisme f de E est un automorphisme de E si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Si f est un automorphisme alors : $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

dfi:detA

Définition 1.13 On note $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ l'application linéaire définie par : $f_A(X) = AX$. Le déterminant de A est alors défini par la formule

$$\det(A) = \det(f_A). \tag{1}$$

equa:detA

Proposition 1.14 Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, alors

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

transpose-matrice

Définition 1.15 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. La transposée tA de A est la matrice dont les coefficients sont les $\tilde{a}_{i,j}$, avec $\tilde{a}_{ij} = a_{ji}$.

Proposition 1.16 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det({}^tA) = \det(A)$.

pro:det=0

Proposition 1.17 Si une colonne (ou une ligne) est combinaison linéaire d'autres colonnes (ou lignes) alors $\det(A) = 0$. En particulier, si deux colonnes (ou deux lignes) sont égales, alors $\det(A) = 0$.

collig

Proposition 1.18 (Opérations sur les colonnes)

1. Si à la colonne $C_j(A)$ (ou à la ligne $L_i(A)$) on ajoute une combinaison linéaire des autres colonnes $\sum_{k \neq j} \lambda_k C_k(A)$ (ou des autres lignes $\sum_{k \neq i} \lambda_k L_k(A)$), le déterminant reste inchangé.
2. Si on permute deux colonnes (ou deux lignes) de A , le déterminant change de signe.
3. Si on multiplie une colonne (ou une ligne) de A par μ , alors le déterminant de A est multiplié par μ .

Définitions 1.19 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— On appelle **cofacteur** de $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ d'indice (i, j) le coefficient

$$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A(i, j))$$

— La matrice $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle la **matrice des cofacteurs** ou **comatrice**.

develop

Théorème 1.20 Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$. Alors :

1. $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A(i, k)) = \sum_{i=1}^n a_{ik} \tilde{a}_{ik}$. On dit qu'on développe suivant la colonne k .
2. $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A(k, j)) = \sum_{j=1}^n a_{kj} \tilde{a}_{kj}$. On dit qu'on développe suivant la ligne k .

Proposition 1.21 (Règle de Sarrus) On a :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$

Définition 1.22 Une matrice $A = (a_{i,j})$ est dite triangulaire si elle est triangulaire inférieure (ie $i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$) ou triangulaire supérieure (ie $i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$).

dettriang

Proposition 1.23 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice triangulaire. Alors $\det(A) = a_{11} \cdots a_{nn}$.

Corollaire 1.24 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si A est inversible, $A^{-1} = \frac{{}^t \tilde{A}}{\det(A)}$.

theo:rang

Théorème 1.25 Soit $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors A est de rang r si et seulement si :

1. Il existe une matrice carrée A' extraite de A de format (r, r) telle que $\det(A') \neq 0$.
2. Pour tout $s > r$, toute matrice carrée A'' de format (s, s) extraite de A vérifie $\det(A'') = 0$.

2 Réduction des endomorphismes

Définition 2.1 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. S'il existe un vecteur **non nul** x de E tel que $u(x) = \lambda x$, alors on dit que :

1. λ est une **valeur propre** de u .
2. x est un **vecteur propre** de u associé à λ .

On appelle **spectre** de u et on note $\text{Sp}(u)$ l'ensemble des valeurs propres de u .

Définition 2.2 Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire :

$$\text{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Proposition 2.3 Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

polycarendo

Proposition et définition 2.4 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. La fonction

$$\begin{aligned} \chi_u : \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \det(u - x \text{Id}_E) \end{aligned}$$

est une fonction polynomiale de degré n . De plus :

$$\chi_u(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{tr}(u) X^{n-1} + \cdots + \det(u)$$

χ_u s'appelle le **polynôme caractéristique** de u .

Proposition 2.5 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\lambda \in \text{Sp}(u)$ si et seulement si λ est racine de χ_u .

Définition 2.6 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u . On dira que λ est une valeur propre d'ordre m si λ est une racine d'ordre m de χ_u . L'entier m s'appelle la **multiplicité** de λ et sera noté $m(\lambda)$.

Définition 2.7 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u . Le sous-espace vectoriel $E_\lambda(u) := \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ s'appelle le **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ .

te-esp-propre

Proposition 2.8 Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u . Alors :

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda)$$

sommedirecte

Théorème 2.9 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les sous-espaces propres de u sont en somme directe.

criterediag

Théorème 2.10 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale.
2. Il existe une base \mathcal{B} de E constituée de vecteurs propres de u .
3. E est la somme directe des sous-espaces propres de u .
4. χ_u est scindé sur \mathbb{K} (i.e. χ_u a toute ses racines dans \mathbb{K}) et pour toute valeur propre de u , $\dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda)$.

Définition 2.11 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** si l'une des 4 conditions équivalentes du théorème 2.10 est vérifiée.

Définition 2.12 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure.

go-pol-scinde

Théorème 2.13 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ (i.e. χ_u se décompose en un produit de polynômes du premier degré).

Corollaire 2.14 Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{C} de dimension finie. Alors tout endomorphisme de E est trigonalisable.

ayley-hamilton

Théorème 2.15 (Cayley-Hamilton) Soit u un endomorphisme de E , alors :

$$\chi_u(u) = 0$$

Proposition et définition 2.16 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{K}[X]$ suivant :

$$\mathcal{I}(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] ; P(u) = 0\}$$

Alors $\mathcal{I}(u)$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ appelé **idéal annulateur** de u .

Tout polynôme P de $\mathcal{I}(u)$ est appelé **polynôme annulateur** de u .

Proposition et définition 2.17 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $\mathcal{I}(u) \neq \{0\}$ et il existe un unique polynôme unitaire μ_u de $\mathcal{I}(u)$ de degré minimal qui engendre $\mathcal{I}(u)$.

Autrement dit μ_u est l'unique polynôme annulateur de u , unitaire de degré minimal qui divise tous les autres polynômes annulateurs de u .

μ_u s'appelle le **polynôme minimal** de u .

cdiagpolymini

Théorème 2.18 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé et si toutes ses racines sont simples.

Proposition et définition 2.19 Soient F_1, \dots, F_k des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$. Alors pour tout $x \in E$, il existe un unique k -uplet $(p_1(x), \dots, p_k(x)) \in F_1 \times \dots \times F_k$

tel que $x = \sum_{i=1}^k p_i(x)$.

Les applications p_i sont des endomorphismes et $(p_i)_{1 \leq i \leq k}$ s'appelle **famille de projecteurs** de E associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^k F_i$.

Définition 2.20 Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **indice** de u le plus petit entier i_0 tel que $\text{Ker}(u^{i_0}) = \text{Ker}(u^{i_0+1})$.

Définition 2.21 Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$. Le sous-espace vectoriel $C_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)^{m(\lambda)}$ s'appelle le **sous-espace caractéristique** associé à la valeur propre λ .

caractéristique

Proposition 2.22 Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$ on a :

$$\dim(C_{\lambda_i}(u)) = m(\lambda_i)$$

Dunford

Théorème 2.23 (Décomposition de Dunford-Jordan) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que χ_u soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe un unique couple (d, ν) d'endomorphismes de E tel que :

1. $u = d + \nu$.
2. $d \circ \nu = \nu \circ d$.
3. d est diagonalisable et ν est nilpotent.

De plus si $\mu_u(X) = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\beta_i}$, alors $d = \sum_{i=1}^r \lambda_i p_i$ où $(p_i)_{1 \leq i \leq r}$ est la famille de projecteurs

associés à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^r C_{\lambda_i}(u)$, et l'indice de ν est $N = \max_{1 \leq i \leq r} (\beta_i)$.

3 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

Définition 3.1 Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On appelle **norme** sur E toute application $N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

1. $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$; $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
3. $\forall (x, y) \in E \times E$; $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé **espace vectoriel normé**.

Définition 3.2 On dit qu'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E tend vers $x \in E$ si $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Définition 3.3 Deux normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sont **équivalentes** s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tels que pour tout $x \in E$:

$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \|x\|_1$$

Les suites convergentes pour $\| \cdot \|_1$ ou $\| \cdot \|_2$ sont alors les mêmes et ont la même limite.

Théorème 3.4 Si E est de **dimension finie** alors toutes les normes sont équivalentes.

Définition 3.5 Soit $\sum_{k \geq 0} u_k$ une série de E . On dit $\sum_{k \geq 0} u_k$ **converge absolument** si la série

$$\sum_{k \geq 0} \|u_k\| \text{ converge.}$$

Proposition 3.6 Soit $\sum_{k \geq 0} u_k$ une série de E qui converge absolument. Alors $\sum_{k \geq 0} u_k$ est convergente.

normalg

Proposition 3.7 Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$ définissons :

$$\| \|u\| \| := \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|u(x)\|$$

Alors $\| \| \|$ est une norme sur E qui satisfait :

1. $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq \| \|u\| \| \|x\|$.
2. $\forall (u, v) \in (\mathcal{L}(E))^2$, $\| \|u \circ v\| \| \leq \| \|u\| \| \| \|v\| \|$.

$\| \| \|$ s'appelle **norme d'algèbre**.

Proposition 3.8 Soient :

$$\begin{array}{l} A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad B : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t \longmapsto A(t) \quad , \quad t \longmapsto B(t) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{l} X : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \longmapsto X(t) \end{array}$$

trois fonctions dérivables sur I . Alors les fonctions :

$$\begin{array}{l} AB : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AX : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ t \longmapsto A(t)B(t) \quad , \quad t \longmapsto A(t)X(t) \end{array}$$

sont dérivables et :

$$(AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t) \quad \text{et} \quad (AX)'(t) = A'(t)X(t) + A(t)X'(t)$$

Proposition et définition 3.9 Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} A^k$ est convergente. Sa somme notée e^A ou $\exp(A)$ s'appelle l'**exponentielle** de A . De plus :

$$\| \|e^A\| \| \leq e^{\| \|A\| \|}$$

Proposition 3.10 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$. Alors :

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP$$

2. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si $AB = BA$ alors :

$$e^A e^B = e^{A+B} = e^B e^A$$

et

$$Be^A = e^A B$$

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors e^A est toujours inversible et :

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

deriv

Proposition 3.11 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors l'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $t \longmapsto e^{tA}$ est de classe C^∞ et $(e^{tA})' = Ae^{tA}$.

Définition 3.12 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, soit $b_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ soit $a_{ij} \in \mathbb{K}$.

1. Le système :

$$(S\mathcal{L}) \quad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n + b_1 \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n + b_n \end{cases}$$

s'appelle **système différentiel linéaire d'ordre 1 à coefficients constants**.

2. Le système :

$$(S\mathcal{H}) \quad \begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

s'appelle **système différentiel linéaire homogène associé à (S\mathcal{L})**.

Théorème 3.13 L'ensemble $S_{\mathcal{H}}$ des solutions sur \mathbb{R} de $\mathcal{H} : Y' = AY$ est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$ de dimension n formé de fonctions de classe C^∞ .

Plus précisément :

$$S_{\mathcal{H}} := \{t \longmapsto e^{tA}C \text{ où } C \in \mathbb{K}^n\}$$

De plus pour tout $(t_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{K}^n$ il existe une unique solution Y de \mathcal{H} telle que $Y(t_0) = Y_0$.

CalculSol

Théorème 3.14 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que χ_A est scindé. Notons μ_1, \dots, μ_n les valeurs propres de A comptées avec multiplicité et soit (U_1, \dots, U_n) une base de \mathbb{K}^n constituée de vecteurs appartenant aux sous-espaces caractéristiques. Plus précisément on suppose que :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, U_i \in C_{\mu_i}(A)$$

Alors :

$$S_{\mathcal{H}} = \left\{ t \mapsto \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu_i t} \left(\sum_{k=0}^{\beta_i-1} \frac{t^k}{k!} (A - \mu_i I_n)^k U_i \right) \text{ où } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

où β_i est la multiplicité de μ_i dans μ_A .

En particulier si A est diagonalisable alors :

$$S_{\mathcal{H}} = \left\{ t \mapsto \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu_i t} U_i \text{ où } \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Et dans ce cas (U_1, \dots, U_n) est une base de \mathbb{K}^n constituée de vecteurs propres de A .

Théorème 3.15 On suppose que l'ensemble $S_{\mathcal{L}}$ des solutions de $\mathcal{L} : Y' = AY + B$ est non vide. Soit $\varphi_0 \in S_{\mathcal{L}}$. Alors :

$$S_{\mathcal{L}} := \{ I \rightarrow \mathbb{K}^n, t \mapsto e^{tA} C + \varphi_0(t) \text{ où } C \in \mathbb{K}^n \}$$

Théorème 3.16 (Méthode de la variation de la constante) L'ensemble $S_{\mathcal{L}}$ est non vide. Plus précisément pour tout $t_0 \in I$:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &: I \rightarrow \mathbb{K}^n \\ t &\mapsto \varphi_0(t) := \int_{t_0}^t e^{(t-x)A} B(x) dx \end{aligned}$$

est une solution de \mathcal{L} .

Définition 3.17 Soient $n \geq 1$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue.

1. L'équation :

$$(\mathcal{L}) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = b$$

s'appelle **équation différentielle linéaire à coefficients constants**.

2. L'équation :

$$(\mathcal{H}) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

s'appelle **équation différentielle linéaire homogène associée à \mathcal{L}** .

Définition 3.18 Soient $n \geq 1$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ et $b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue. On appelle **équation caractéristique** de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{L}) \quad x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = b$$

l'équation :

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

Théorème 3.19 On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient $n \geq 1$, $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Considérons l'équation homogène :

$$(\mathcal{H}) \quad y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

Supposons que les racines de l'équation caractéristique soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de multiplicité respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_r$. Alors l'ensemble des solutions $S_{\mathcal{H}}$ définies sur \mathbb{R} de (\mathcal{H}) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Plus précisément :

$$S_{\mathcal{H}} := \{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ ; \ \exists(P_1, \dots, P_r) \in \mathbb{C}_{\alpha_1-1}[X] \times \dots \times \mathbb{C}_{\alpha_r-1}[X] \ ; \ y(t) = \sum_{i=1}^r e^{\lambda_i t} P_i(t)\}$$