Généralités sur les applications linéaires

Exercice 1 - Avez-vous compris ce qu'étaient le noyau et l'image ? - *L1/Math Sup* - $\star$

Soient E,F,G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$. Démontrer que
$$g\circ f=0\iff \mathrm{Im}f\subset\ker g.$$

Exercice 2 - Isomorphisme - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soient E,F deux espaces vectoriels et $f\in\mathcal{L}(E,F)$. Soit G un supplémentaire de $\ker(f)$ dans E. Montrer que G et $\mathrm{Im}(f)$ sont isomorphes.

Exercice 3 - Factorisation d'une application linéaire surjective - *L1/L2/Math Sup* - $\star\star$

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et f appartient à $\mathcal{L}(E,F)$.

1. On suppose qu'il existe g appartenant à $\mathcal{L}(F,E)$ telle que $f\circ g=Id_F$. Montrer que f est surjective.
2. On suppose que f est surjective. On admet l'existence d'un sous-espace vectoriel G de E tel que $G\oplus\ker(f)=E$.
   (a) Soit $\hat f:G\to F$, $x\mapsto f(x)$. Montrer que $\hat f$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
   (b) Soit $g:F\to E$, $y\mapsto \hat f^{-1}(y)$. Calculer $f\circ g$.
3. Conclure.

Exercice 4 - Toujours liés - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

Soit E un espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x\in E$, la famille $(x,f(x))$ est liée. Montrer que f est une homothétie.

Exercice 5 - Factorisation et inclusion de noyaux - *L1/L2/Math Sup/Math Spé* - $\star\star\star$

Dans cet exercice, on admet que dans tout espace vectoriel, un sous-espace admet un supplémentaire.
Soient E,F deux espaces vectoriels et $u,v\in\mathcal{L}(E,F)$. Montrer que
$$\ker(u)\subset\ker(v)\iff \exists f\in\mathcal{L}(F)\text{ tel que } v=f\circ u.$$

Exercice 6 - Factorisation et inclusion des images - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

Dans cet exercice, on suppose connue la propriété suivante : si E_1 est un espace vectoriel et F_1 est un sous-espace vectoriel de E_1, alors il possède un supplémentaire. Soient alors E,F,G trois espaces vectoriels, $u\in\mathcal{L}(F,G)$ et $v\in\mathcal{L}(E,G)$. Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathrm{Im}(v)\subset\mathrm{Im}(u)$;
(ii) Il existe $w\in\mathcal{L}(E,F)$ tel que $v=u\circ w$.

Symétrie et projections

Exercice 7 - Projections - *L1/L2/Math Sup/Math Spé* - ⋆⋆

Soit E un $K-$ev, et $p\in\mathcal{L}(E)$. On dit que p est un *projecteur* si $p\circ p=p$.

1. Etude individuelle
   (a) Montrer que pour tout $y\in\textrm{Im}(p)$, alors $p(y)=y$. En déduire que $E=\ker(p)\oplus\textrm{Im}(p)$. On dit que p est le projecteur sur $\textrm{Im}(p)$ parallèlement à $\ker(p)$.
   (b) On suppose désormais que E est de dimension finie. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle p a pour matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ & & \ddots & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix}.$$
   En déduire que la trace d'un projecteur est égal à son rang.
2. Etude collective. Soient $E_1,\dots,E_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $E_1\oplus\dots\oplus E_p=E$. On note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\oplus_{j\neq i}E_j$. Montrer que $p_i\circ p_j=0$ si $i\neq j$ et $p_1+\dots+p_n=Id_E$.

Exercice 8 - Matrice d'une projection - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soient, dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $z=x-y$ et D la droite d'équation $x=-y=z$. Trouver la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.

Exercice 9 - Famille de deux projecteurs - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit E un espace vectoriel et p,q deux projecteurs de E tels que $p\neq 0$, $q\neq 0$ et $p\neq q$. Démontrer que (p,q) est une famille libre de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice 10 - Somme de deux projecteurs - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=q\circ p=0$.
2. Montrer que, dans ce cas, on a $\textrm{Im}(p+q)=\textrm{Im}(p)\oplus\textrm{Im}(q)$ et $\ker(p+q)=\ker p\cap\ker q$.

Exercice 11 - Sous-espace stable et projecteur - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $u\in\mathcal{L}(E)$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est stable par u si $u(x)\in F$ pour tout $x\in F$. Soit p un projecteur de E. Démontrer que u commute avec p si et seulement si $\textrm{Im}(p)$ et $\ker(p)$ sont stables par u.

Exercice 12 - Endomorphismes annulant un polynôme de degré 2 - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ et soient α,β deux réels distincts.

1. Démontrer que $E=\textrm{Im}(f-\alpha Id_E)+\textrm{Im}(f-\beta Id_E)$.

On suppose de plus que
$$(f-\alpha Id_E)\circ(f-\beta Id_E)=0.$$

2. Démontrer que f est inversible, et calculer f^{-1}.
3. Démontrer que $E=\ker(f-\alpha Id_E)\oplus\ker(f-\beta Id_E)$.

4. Exprimer en fonction de f le projecteur p sur $\ker(f-\alpha Id_E)$ parallèlement à $\ker(f-\beta Id_E)$.

Exercice 13 - Base de projecteurs - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension n. On souhaite démontrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs. On fixe une base $\mathcal{B}$ de E. On note $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. À quelle condition une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est-elle la matrice dans la base $\mathcal{B}$ d'un projecteur de E.
2. En déduire que pour tout $i,j \in \{1,\dots n\}$ avec $i \neq j$, les matrices $E_{i,i}$ et $E_{i,i}+E_{i,j}$ sont des matrices de projecteurs.
3. Démontrer la propriété annoncée.