Réduction pratique de matrices

Exercice 1 - Diagonalisation - 1 - *L1/L2/Math Spé* - ⋆

Diagonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

On donnera aussi la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres.

Exercice 2 - Diagonalisation - 2 - *L2/Math Spé* - ⋆

Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 - Avec un paramètre - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 - Trigonalisation - avec indication - *L2/Math Spé* - ⋆

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur non-nul de cet espace propre.
3. Montrer que $v = (0, 0, 1)$ est tel que $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.
4. Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de f dans la base (u, v, w).
5. Calculer $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k.
6. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 - Trigonalisation - sans indication - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Trigonaliser la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1&4&-2\\0&6&-3\\-1&4&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 6 - Racine cubique - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Soit $A=\begin{pmatrix}-5&3\\6&-2\end{pmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable et calculer ses valeurs propres. En déduire qu'il existe une matrice B telle que $B^3=A$.

Exercice 7 - Application à des suites récurrentes - *L2/Math Spé* - $\star$

Soit A la matrice $\begin{pmatrix}-4&-6&0\\3&5&0\\3&6&5\end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Calculer A^n en fonction de n.
3. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :
$$\left\{\begin{array}{rcl}u_{n+1}&=&-4u_n-6v_n\\v_{n+1}&=&3u_n+5v_n\\w_{n+1}&=&3u_n+6v_n+5w_n\end{array}\right.$$
pour $n\geq 0$. On pose $X_n=\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 8 - Base de matrices diagonalisables... - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

Exercice 9 - Déduire du cas 2x2 - *L2/Math Spé* - $\star\star$

1. Soit $A=\begin{pmatrix}0&a\\b&0\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. Soient $p\geq 1$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_{2p}$ des réels. Soit $A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ tel que $a_{i,2p+1-i}=\alpha_i$ si $1\leq i\leq 2p$ et $a_{i,j}=0$ sinon. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 10 - Matrice d'ordre n - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, la matrice M_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $1,2,\dots,n$ et les autres coefficients sont tous égaux à 1. Soit P_n le polynôme caractéristique de M_n.

1. Démontrer que $P_{n+1}(X)=(n-X)P_n(X)+(-1)^nX(X-1)\dots(X-(n-1))$.

2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $(-1)^k P_n(k) > 0$.
3. En déduire que M_n est diagonalisable et que chaque intervalle $]0,1[,]1,2[, \dots,]n-1,+\infty[$ contient exactement une valeur propre de M_n.

Exercice 11 - Un bloc - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonalisable et $B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A \\ \hline I_n & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Donner les valeurs propres de B et la dimension des sous-espaces propres correspondants. À quelle condition B est-elle diagonalisable ?

Exercice 12 - Triangulaire supérieure par blocs - *L2/Math Spé/Oral Centrale* - ⋆⋆⋆

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que la matrice $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ soit diagonalisable.

Réduction d'autres endomorphismes

Exercice 13 - Transposition - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^tM$. Déterminer les valeurs propres de ϕ. ϕ est-elle diagonalisable ?

Exercice 14 - Endomorphisme de polynômes - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit L l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $L(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Démontrer que L est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 15 - Matrice nilpotente - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. On considère
$$\begin{array}{rcl} \phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MB - BM. \end{array}$$
Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B.
4. En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

Réduction des endomorphismes : théorie

Exercice 16 - $f \circ g$ et $g \circ f$ diagonalisables ? - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On souhaite étudier si le fait que $f \circ g$ est diagonalisable entraîne que $g \circ f$ est diagonalisable. On fixe $\mathcal{B}$ une base de E et on désigne par A (resp. B) la matrice de f (resp. g) dans cette base.

1. Dans cette question, on suppose f et g inversibles.

   (a) En utilisant $\det(BAB - \lambda B)$, démontrer que AB et BA ont le même polynôme caractéristique.
   (b) Soit λ une valeur propre de $f \circ g$, et soit E_λ (resp. F_λ) l'espace propre de $f \circ g$ (resp. de $g \circ f$) associé à λ. Démontrer les inclusions
$$g(E_\lambda) \subset F_\lambda \text{ et } f(F_\lambda) \subset E_\lambda.$$
   (c) Que peut-on en déduire sur les dimensions des espaces E_λ et F_λ ?
   (d) Montrer que si $f \circ g$ est diagonalisable, alors $g \circ f$ est diagonalisable.
2. Dans cette question, on suppose maintenant f et g quelconques.
   (a) Montrer que si $f \circ g$ a une valeur propre nulle, il en est de même de $g \circ f$.
   (b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ tel que $AB - \alpha I$ est inversible. On note C son inverse. Vérifier que
$$(BA - \alpha I)(BCA - I) = \alpha I.$$
   Que peut-on en déduire pour $\det(BA - \alpha I)$?
   (c) Déduire de ce qui précède que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres.
   (d) Donner un exemple simple de matrices A et B tel que AB est diagonalisable, et BA n'est pas diagonalisable.

Exercice 17 - Endomorphisme sur un espace vectoriel réel - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soit f un endormorphisme d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe toujours une droite ou un plan de E stable par f.

Exercice 18 - - *Oral Mines-Ponts* - ⋆⋆

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que g est diagonalisable et inversible, et qu'il existe un entier k tel que $f^k = g$. Prouver que f est diagonalisable.

Exercice 19 - Diagonalisation simultanée - *L2/Math Spé* - ⋆⋆

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u_1, \dots, u_m$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux. Montrer qu'il existe une base de E diagonalisant tous les u_i.

Exercice 20 - Diagonalisation et sous-espaces stables - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

Exercice 21 - Avec une puissance - *L2/Math Spé/Oral Mines* - ⋆⋆⋆

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$ et $p \geq 1$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M^p est diagonalisable et $\ker(M) = \ker(M^p)$.

Exercice 22 - Réduction des endomorphismes anti-involutifs - *Math Spé* - ⋆⋆⋆

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E vérifiant $f^2 = -Id$.

1. Donner un exemple de tel endomorphisme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f n'a pas de valeurs propres réelles. En déduire que la dimension de E est paire.

3. Montrer que, pour tout x de E, $\mathrm{vect}(x, f(x))$ est stable par f.
4. En déduire que si $\dim E = 2n$, il existe des vecteurs $(e_1, \dots, e_n)$ tels que $(e_1, f(e_1), \dots, e_n, f(e_n))$ forme une base de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 23 - Spectre et racine n-ième - *L2/Math Spé* - $\star\star$
Soient $n, p \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $A^p = 1$. Soit ω une racine p-ième de l'unité telle que ω^{-1} n'est pas une valeur propre de A. Montrer que $\sum_{k=0}^{p-1} w^k A^k = 0$.

POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

Exercice 24 - Quel est le polynôme minimal ? - *L2/Math Spé* - $\star$
Donner le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25 - Déterminant et polynôme annulateur - *L2/Math Spé* - $\star\star$
Soit A une matrice réelle de taille n vérifiant

$$A^3 - 3A - 4I_n = 0.$$

Montrer que A est de déterminant strictement positif.

Exercice 26 - Polynômes annulateurs de A et propriétés de A - *L2/Math Spé/Oral Centrale* - $\star\star$
Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
2. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 27 - Polynôme annulateur - *L2/Math Spé/Oral Mines* - $\star\star$
Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f possède un polynôme annulateur P vérifiant $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer qu'on a alors $\mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$.

Exercice 28 - Polynôme annulateur - *L2/Math Spé* - $\star\star$
Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Existe-t-il toujours un polynôme annulateur de u (autre que le polynôme nul, évidemment) ?

Exercice 29 - - *Math Spé* - $\star\star\star$
Soit f un endomorphisme sur $\mathbb{C}^n$, on note M_f et C_f son polynôme minimal et son polynôme caractéristique. Montrer que M_f et C_f ont les mêmes facteurs irréductibles. Généraliser au cas des endomorphismes sur $\mathbb{R}^n$.