PETITS CALCULS

**Exercice 1 - ** - *L1/Math Sup* - $\star$

Montrer, sans le calculer, que le déterminant suivant est divisible par 13 :

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}.$$

**Exercice 2 - ** - *L1/Math Sup* - $\star$

Montrer que $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} = 1+a+b+c$ sans le développer.

Exercice 3 - Sous forme factorisée - *L1/Math Sup* - $\star$

Calculer en mettant en évidence la factorisation le déterminant suivant :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix}.$$

GRANDS CALCULS

Exercice 4 - Déterminant de Vandermonde - *L1/L2/Math Sup/Math Spé* - $\star\star$

Calculer le déterminant suivant :

$$V(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \dots & \dots & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Exercice 5 - Fonction affine - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. On note $A(x)$ la matrice dont le terme général est $a_{i,j} + x$.

1. Montrer que la fonction $x \mapsto \det(A(x))$ est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 1.
2. Pour a et b deux réels distincts et $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, en déduire la valeur du déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 6 - Imbriqué... - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soient $s_1,\dots,s_n\in\mathbb{R}$. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} s_1 & \dots & \dots & s_1\\ \vdots & s_2 & \dots & s_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ s_1 & s_2 & \dots & s_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 7 - Déterminant tridiagonal - *L2/Math Spé/Oral Mines* - ⋆⋆

Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0\\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & -x & 1+x^2 & -x\\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 8 - Tridiagonal - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soient a,b,c des réels et Δ_n le déterminant de la matrice $n\times n$ suivant :

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0\\ c & a & b & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b\\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix}.$$

1. Démontrer que, pour tout $n\geq 1$, on a $\Delta_{n+2}=a\Delta_{n+1}-bc\Delta_n$.
2. On suppose que $b^2=ac$. Démontrer que, pour tout $n\geq 1$, on a $\Delta_n=\frac{(n+1)a^n}{2^n}$.

Exercice 9 - Déterminant circulant - *L1/L2/Math Sup/Math Spé* - ⋆⋆

Soient $a_1,\dots,a_n$ des nombres complexes, et $\omega=e^{2i\pi/n}$, et A et M les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n\\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_n & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Calculer $\det(AM)$ et en déduire $\det(A)$.

Exercice 10 - D'après CCP - *L2/Math Spé* - $\star\star$

Soient $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$ des complexes. Déterminer la valeur du déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & \dots & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Exercice 11 - - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Calculer le déterminant de la matrice $(i^j)_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$.

Calculs théoriques

Exercice 12 - - *L1/Math Sup/L2/Math Spé* - $\star$

Soient n et p des entiers avec $p<n$. Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de AB.

Exercice 13 - Déterminant de la transposition - *L1/Math Sup/L2/Math Spé* - $\star\star$

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\phi(A)={}^tA$. Calculer le déterminant de ϕ.

Comatrice et formules de Cramer

Exercice 14 - - *L1/Math Sup/L2/Math Spé* - $\star\star$

Soit $M\in M_n(\mathbb{Z})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et que M^{-1} soit dans $M_n(\mathbb{Z})$.

Exercice 15 - Rang de la comatrice - *L2/Math Spé* - $\star\star\star$

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Discuter le rang de $\operatorname{comat} A$ en fonction du rang de A.

b. Résoudre, pour $n\geq 3$, l'équation $\operatorname{comat} A=A$.

Exercice 16 - Polynôme caractéristique de la comatrice - *L2/Math Spé* - $\star\star\star\star$

Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le polynôme caractéristique de la comatrice de A.

Applications

Exercice 17 - Inversibilité - *L1/Math Sup* - $\star$

Pour $\alpha\in\mathbb{R}$, on considère

$$M_\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles l'application linéaire associée à M_α est bijective.

Exercice 18 - Inversibilité d'une matrice à paramètres - *L1/Math Sup* - $\star$

Étudier, suivant la valeur du paramètre $a \in \mathbb{R}$, l'inversibilité des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & m & m & m^2-m \\ 1 & m-1 & 2m-1 & m^2-m \\ 0 & m & m & 0 \\ 1 & m & 3m-1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 - Famille libre - *L1/Math Sup* - $\star$

Soit dans $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs (e_1, e_2, e_3), avec $e_1 = (1,1,t)$, $e_2 = (1,t,1)$ et $e_3 = (t,1,1)$. Dire pour quelles valeurs de t la famille (e_1, e_2, e_3) est libre.

Exercice 20 - A quelle condition la famille est-elle libre ? - *L2/Math Spé* - $\star\star\star$

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille libre de E et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq s}$ une famille de scalaires. On note $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ pour que $(u_i + s)_{1\leq i\leq n}$ soit libre.

Exercice 21 - Polynômes - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soient $(z_0, \dots, z_n)$ des nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille

$$((X-z_0)^n, (X-z_1)^n, \dots, (X-z_n)^n)$$

est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 22 - Similarité - *L1/Math Sup/Oral Mines* - $\star\star$

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A et B sont semblables sur $\mathbb{C}$, ie qu'il existe $P \in Gl_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PBP^{-1}$. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23 - Densité des matrices inversibles - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients complexes. Montrer :

$$\exists \alpha > 0,\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R},\ 0 < |\varepsilon| < \alpha,\ A + \varepsilon I \text{ est inversible.}$$

Exercice 24 - Enigme du berger - *L1/Math Sup* - $\star\star\star$

Un berger possède un troupeau de 101 moutons et remarque par hasard la propriété suivante : pour chaque mouton, il peut trouver une façon de scinder le troupeau des 100 autres moutons en deux troupeaux de 50 moutons et de même poids total. Il en déduit que tous les moutons ont le même poids. Comment a-t-il fait ?

Question 1
a. Montrer par récurrence que le déterminant de toute marice carré, dont les éléments diagonaux sont des nombres impairs, et dont tous les autres sont des nombres pairs, est un nombre impair.
b. En déduire qu'une matrice de cette forme est imversible.

Question 2 L'objectif de cette question est de résoudre l'énigme du berger. On note B la matrice carré de taille 101 construite de la manière suivante :
On numérote les moutons de 1 à 101. Quand le berger retire le ième mouton du troupeau, il sépare alors le reste du troupeau en deux troupeaux égaux (troupeau A, troupeau B)

et de même poids. On note alors $B_{i,j}$ les coefficients de la ième ligne de la matrice B de la façon suivante

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si le j-ième mouton se trouve dans le troupeau A} \\ 2 & \text{si le j-ième mouton se trouve dans le troupeau B .} \end{cases}$$

On note X la matrice de taille 101*1 constituée des poids des moutons

$$X = \begin{pmatrix} \text{poids du monton 1} \\ \text{poids du mouton 2} \\ \vdots \\ \text{poids du mouton 100} \\ \text{poids du mouton 101} \end{pmatrix}.$$

On note M le poids total du troupeau.

a. Calculer
$$B \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b. Calculer
$$BX.$$

c. Montrer que B est inversible.

d. En déduire X et résoudre l'énigme du berger.

Exercice 25 - Résultant - *L2/Math Spé* - ⋆⋆⋆

Soient P et Q des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non constants.

a. Montrer que P et Q ont un facteur commun si, et seulement si, il existe $A, B \in \mathbb{C}[X]$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, tels que $AP = BQ$ et $\deg(A) < \deg(Q)$, $\deg(B) < \deg(P)$.

b. En déduire une caractérisation de la primalité de P et Q par la non-nullité d'un déterminant.

DIVERS

Exercice 26 - Morphismes de groupes de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$ - *L2/Math. Spé* - ⋆⋆⋆⋆

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini, $\phi : GL_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ un morphisme de groupes, $\phi(M)$ s'exprimant comme un polynôme des coefficients de M. Montrer que ϕ est une puissance du déterminant.