Département de Mathématiques et informatique
Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté Des Sciences
Dhar El Mehraz Fes

Cours D'Algèbre 2
Semestre 2
Filières SMC-SMP

Année Universitaire
2010-2011

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels

1.1. Espaces vectoriels

Définition 1.1 On *appelle espace vectoriel sur $I\!R$ la donnée d'un ensemble E et de deux lois $+$(dite interne) et $\cdot$ (dite externe) telles*

- *Pour tout $(x, y) \in E$, on a $x + y \in E$ ($+$ est une loi interne).*
- *Il existe dans E un élément noté 0 qui satisfait:*
$$\forall x \in E; x + 0 = 0 + x = x.$$
L'élément 0 est appelé élément neutre pour $+$
- *Pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $x + x' = x' + x = 0$. x' est applé l'opposé de x pour la loi $+$, on le note $x' = -x$.*
- *Pour tout x, y, z dans E, on:*
$$(x + y) + z = x + (y + z) \quad \text{associativité de } +$$
- $\forall \alpha, \beta, \gamma \in I\!R,$
  $\forall x, y \in E$
  1. $$(\alpha + \beta)\cdot x = \alpha\cdot x + \beta\cdot x.$$
  2. $$\alpha\cdot(x + y) = \alpha\cdot x + \alpha\cdot y.$$
  3. $$(\alpha \cdot \beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x).$$
  4. $$1\cdot x = x$$

Remarque 1.2 En *remplaçant, dans la définition 1.1 ci-dessus, l'ensemble $I\!R$ par l'ensemble $\mathbb{C}$, on obtient la définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*

1.1.1. Exemples

- Soit n un entier naturel ≥ 1. Sur le produit cartésien $\mathbb{R}^n$ de n copies de $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels, on définit
  1)l'addition:
  $$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
  qu'on appelle loi interne dans $\mathbb{R}^n$
  2) la multiplication par un scalaire réel:
  $$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$
  appelée loi externe.
  Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^n$ est appelé un espace vectoriel su $\mathbb{R}$ ou un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

- L'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$, des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré inférieur ou égal à n.

1.2. Sous-espaces vectoriels

Définition 1.3 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une partie F de E est dite sous-espace vectoriel de E si*

- $0 \in F$.
- *Si $x, y \in F$ alors $x + y \in F$.*
- *Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ alors $\alpha \cdot x \in F$*

Proposition 1.4 *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*

- $F \neq \emptyset$.
- *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a:*
  $$\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F.$$

Démonstration. $\Longleftarrow$

- Montrons que $0 \in F$: Puisque F est non vide, F contient un x. En prenant $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$ on a $-x \in F$ et $x - x = 0 \in F$.

- La propriété $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in F$ entraine la stabilité de F pour $+$ et pour $\cdot$

Exercice 1 *Soit E un espace vectoriel. Une partie F de E est appelée* <u>*sous-espace*</u> *de E si*
1) $F \neq \emptyset$

2) $\forall x, y \in F$; on a :

$$x - y \in F \quad \text{(F est stable pour la loi interne de E)}$$

3) $\forall x \in F, \forall \alpha \in K$; on a :

$$\alpha x \in F \quad \text{(F est stable pour la loi externe définie sur E)}$$

<u>Définition</u> 1.5 **somme de deux sous-espaces:** *Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces de E. La partie*

$$F + G = \{z = x + y; x \in F \text{ et } y \in G\}$$

est un sous-espace vectoriel de E appelé <u>*somme de F et de G*</u>. *Si de plus*

$$F \cap G = \{0\}$$

la somme $F + G$ est dite <u>*directe*</u> *et on note*

$$F + G = F \oplus G.$$

Exercice 2 *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que l'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Exemples 1.1 .

1. *L'espace des matrices carrées d'ordre $n \geq 1$ est somme directe du sous-espace des matrices symétriques du sous-espace des matrices antisymétriques.*

2. *L'espace*

   $$F = \{P \in \mathbb{R}[X]; \ d^\circ P \leq 3\}$$

   est somme des sous-espaces

   $$E_1 = Vect\{1, X, X^2\} \qquad E_2 = Vect\{X^2, X^3\}$$

   mais la somme $E_1 + E_2$ n'est pas une somme directe.

<u>Définition</u> 1.6 (*Combinaison linéaire*) *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $x_1, \ldots, x_p$; p vecteurs de E. Un élément x de E est dit combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_p$ si, il existe p scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que:*

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_p \cdot x_p.$$

Proposition 1.7 **(Sous-espace engendré)** *Soit E un $I\!R$-espace vectoriel, $\{x_1, \ldots x_n\}$ une partie de E. L'ensemble*

$$Vect(x_1, \ldots, x_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \; x_i; \; \lambda_i \in \; I\!R \right\} \text{ (l'ensemble des combinaisons linéaires des } x_i)$$

est un sous-espace vectoriel de E. Le sous-espace vectoriel

$$Vect(x_1, \ldots, x_n)$$

est appelé sous-espace engendré par les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.

Définition 1.8 **(Partie génératrice. Partie libre. Base. Dimension)** *Soit E un espace vectoriel . Une partie non vide $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de E est dite:*
1) *partie génératrice de E si*

$$\forall x \in E, \; \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K;$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

C'est-à-dire que tout élément de E est une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.
2) *partie libre de E si*

$$\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K;$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0\right) \Longrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0).$$

3) *base de E s'elle est à la fois partie génératrice et libre de E.*

L'espace E est dit de dimension finie s'il possède une base de cardinal fini. On montre que toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont un même cardinal appelé dimension de E.

Définition 1.9 **Rang d'un système:** *Étant donné un système $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, non vide, d'éléments d'un espace vectoriel E. On appelle rang de S la dimension du sous-espace vectoriel $Vect(S)$, engendré par le système S.*

Exercice 3 *Déterminer les rangs des systèmes de vecteurs suivants*

$$\{(2, 3, 5), \; (-1, 2, -3), \; (4, -3, 8)\}, \; \{(2, 3, 5), \; (-1, 2, -3), \; (1, 5, 2)\}.$$

Chapitre 2

MATRICES. DÉTERMINANTS

Dans ce chapitre $I\!K$ est soit égal à $I\!R$ soit égal $\mathbb{C}$.

2.1. Matrices

Définition 2.1 *Soient n et p deux entiers naturels non nuls, on appelle matrice de type (n,p) et à termes dans $I\!K$, tout tableau*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Le terme a_{ij} se trouve au croisement de la ligne i et de la colonne j. C'est-à-dire, l'indice i désigne la ligne et j la colonne.
Lorsque $n = p$, on dit que la matrice est carrée d'ordre n.
Une matrice de type (n,p) est dite unilique (resp unicolonne) lorsque $n = 1$ (resp $p = 1$).
L'ensemble des matrices à termes dans $I\!K$ et de type (n,p) est noté: $\mathcal{M}_{(n,p)}(I\!K)$. L'ensemble des matrices carrées d'ordre m et à termes dans $I\!K$ est noté simplement: $\mathcal{M}_m(I\!K)$.
La matrice unilique $(a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{ip})$ est la i-ième ligne de la matrice A.

La matrice unicolonne $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ *est appelée la j-ième colonne de A.*

Définition 2.2 Egalité de deux matrices *Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{st})$ sont dites égales si, et seulement si*

- *elles sont de même type, soit (n,p),*
- *pour tout (r,h), on a $a_{rh} = b_{rh}$.*

2.1.1. Quelques types de matrices carrées d'ordre m

$$I_m = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice identité}} \qquad \Theta = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matrice nulle}}$$

$$aI_m = \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix}}_{\text{Matrice scalaire}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_m \end{pmatrix}}_{\text{Matrice diagonale}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{m-1,m} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{mm} \end{pmatrix}}_{\text{Matrice triangulaire supèrieure}} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{m,m-1} & a_{mm} \end{pmatrix}}_{\text{Triangulaire inférieure}}$$

2.2. Opérations sur les matrices

- **Addition** Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!K)$ deux matrices de même type (n,p). On appelle matrice somme de A et B la matrice $A+B = (c_{ij})$ de type (n,p) avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Remarque 2.3 *On ne peut pas faire la somme de deux matrices de type différents.*

- **Multiplication de deux matrices**

  – Le produit d'une matrice uniligne $(a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1p})$ de type $(1,p)$ par une matrice unicolonne $\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix}$ de type $(p, 1)$ est défini par:

$$(a_{11} \dots a_{1j} \dots a_{1p}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{i1} \\ \vdots \\ b_{p1} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + \dots + a_{1i}b_{i1} + \dots + a_{1p}b_{p1}).$$

- **Produit d'une matrice** $A = (a_{ij})$ **de type** (n,p) **par une matrice** $B = (b_{kl})$ **de type** (p,m) est la matrice $C(c_{ts})$, de type (n,m), définie par

$$A \cdot B = (c_{ts}), \; c_{ts} = \sum_{k=1}^{n} a_{tk}b_{ks}.$$

Remarque 2.4

* *La multiplication des matrices n'est pas commutative:*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 31 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 67 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$$

* *La multiplication est associative.*
* *L'addition est associative.*

- **Multiplication par un scalaire:** La multiplication de la matrice

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

par le nombre a est définie par:

$$\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \dots & \lambda \cdot a_{1j} & \dots & \lambda \cdot a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \lambda \cdot a_{i1} & \dots & \lambda \cdot a_{ij} & \dots & \lambda \cdot a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \lambda \cdot a_{n1} & \dots & \lambda \cdot a_{nj} & \dots & \lambda \cdot a_{np} \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.5 *Le produit $A \cdot B$ des matrices A et B n'est possible que si le nombre des colonnes de la matrice de gauche (A) est égal au nombre des lignes de la matrice de droite (B).*

Conidérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ *et* $B = (4\ 5)$. *On peut faire le produit BA mais on ne peut pas faire le produit AB.*

Proposition 2.6 *L'ensemble $\mathcal{M}_{(n,p)}(I\!K)$, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un $I\!K$-espace vectoriel.*
Les matrices de dimension np.

Définition 2.7 *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de type (n, p). On appelle matrice transposée de A, la matrice ${}^tA$, de type (p, n), définie par:*

$$ {}^tA = (a'_{ij}),\ a'_{ij} = a_{ji}. $$

Proposition 2.8 *Soient A et B deux matrices de même type, alors*

$$ {}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB. $$

Proposition 2.9 *Soient A une matrice de type (n, p) et B une matrice de type (p, r), on a alors*

$$ {}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA. $$

La preuve se réduit à montrer que le coefficient (i, j) de ${}^t(AB)$ comme de ${}^tB \cdot {}^tA$ est le produit scalaire de la j-ème ligne de A et de la i-ème colonne de B.

Définition 2.10 *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n, non nulle. On appelle matrice inverse de A, la matrice carrée, notée: A^{-1}, d'ordre n, définie par:*

$$ A \cdot A^{-1} = I_n. $$

Exemple 2.11

2.3. Rang d'une matrice

Définition 2.12 *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{(n,p)}(I\!K)$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, on pose $L_i = (a_{i1} \dots a_{ip})$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, on pose* $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$. *$L_1, \dots, L_n$ sappelés les vecteurs lignes de A et $C_1, \dots, C_p$ sont appelés les vecteurs colonnes de A. On appelle rang de A la dimension du sous espace de $I\!K^p$ engendré par les vecteurs lignes $L_1, \dots, L_n$ de A.*

2.3.1. Opérations élémentaires sur une matrice $A = (a_{ij})$ de type (n, p)

- **L'opération:** L_{ij} **ou** $L_i \leftrightarrow L_j$
  Soit A une matrice, en permutant la ligne L_i de A avec la ligne L_j de A on obtient une nouvelle matrice. Cette opération est notée L_{ij} ou $L_i \leftrightarrow L_j$

- **L'opération:** $\alpha \cdot L_i \leftarrow L_i$, $\alpha \in I\!\!K^*$
  En multipliant, la ligne L_i de la matrice A, par un nombre α non nul, on obtient une nouvelle matrice. Cette opération est notée $\alpha \cdot L_i \leftarrow L_i$.

- **L'opération:** $\sum\limits_{t=1}^{n} \alpha_t \cdot L_t \leftarrow L_i$, **avec** $\alpha_i \neq 0$.

  Cette opération consiste à remplacer la ligne L_i de A par $\sum\limits_{t=1}^{n} \alpha_t \cdot L_t$.

Définition 2.13 *Les opérations $L_i \leftrightarrow L_j, \alpha \cdot L_i \leftarrow L_i$, $\alpha \in I\!\!K^*$, $\sum\limits_{t=1}^{n} \alpha_t \cdot L_t \leftarrow L_i$; définies ci-dessus sont appelées opérations élémentaires sur A.*

Proposition 2.14 *Soient A et B de même type. Si B est obtenue à partir A par une opération élémentaire, alors A et B ont le même rang.*

Définition 2.15 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(I\!\!K)$ est dite échlonnée si*

- *Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.*
- *L'indice de colonne du premier terme non nul de toute ligne non nulle est supérieur à l'indice de colonne du premier terme non nul de la ligne qui la précède.*

Exemple de matrice echlonné

2.4. Déterminants

2.4.1. déterminant de deux vecteurs du plan vectoriel

Définition 2.16 *Soient $u = (x, y)$, $v = (x', y')$ deux vecteurs de $I\!\!R^2$. On appelle déterminant de u et v, le nombre réel $det(u, v)$ défini par:*

$$det(u, v) = xy' - x'y.$$

Exercice 4 *Soient u, v, w trois vecteurs de $I\!\!R^2$ et $\lambda \in I\!\!R$. Montrer que:*

- $det(u + v, w) = det(u, w) + det(v, w)$.
- $det(u, v + w) = det(u, v) + det(u, w)$.
- $det(v, u) = -det(u, v)$.
- $det(\lambda \cdot u, v) = \lambda \cdot det(u, v)$.

2.4.2. Déterminant des matrices carrées d'ordre 2

Définition 2.17 *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

une matrice d'ordre 2. On appelle déterminant de A le nombre réel $det(A)$ défini par

$$det(A) = ad - bc.$$

Notation:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Exercice 5 • *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Montrer que* A *et sa transposée:* ${}^tA$ *ont même déterminant.*

- *Montrer que*

$$\begin{vmatrix} a+x & b \\ c+y & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ y & d \end{vmatrix}.$$

- $$\begin{vmatrix} a & x+b \\ c & y+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & x \\ c & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

- *Clculer*

$$\begin{vmatrix} a+t & x+b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ en fonction de } \begin{vmatrix} a & c \\ x & d \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} t & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

2.4.3. Déterminant des matricesd'ordre 3

Définition 2.18 Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *une matrice d'ordre* 3. *On appelle déterminant de* A, *le nombre* det.A, *défini par:*

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Exercice 6 • *Soit* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. *Calculer* $det(\lambda A)$, *en fonction de* λ *et* $det(A)$.

- *Montrer que*

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+y & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a_{12} & a_{13} \\ y & a_{22} & a_{23} \\ z & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+y & a_{23} \\ a_{31} & a_{32}+z & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & x & a_{13} \\ a_{21} & y & a_{23} \\ a_{31} & z & a_{33} \end{vmatrix}$$

- *Montrque*

$$det({}^tA) = det(A).$$

Définition 2.19 *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$. Pour tout terme a_{ij} de la matrice A, on note A_{ij} la matrice obtenue de A en enlevant à celle-ci la ligne L_i et la colonne C_j.*
On appelle cofacteur de a_{ij} le nombre

$$cof(a_{ij}) = (-1)^{i+j} dét(A_{ij}).$$

Proposition 2.20 *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n.*

- *Soit $1 \leq t \leq n$. On a:*

$$det(A) = \sum_{s=1}^{n} a_{st} cof(a_{st}). \text{ (développement suivant la colonne } C_t)$$

- *Soit $1 \leq s \leq n$. On a:*

$$det(A) = \sum_{t=1}^{n} a_{st} cof(a_{st}). \text{ (développement suivant la ligne } L_s)$$

2.4.4. Résumé des Propriétés des déterminants

1. Un déterminant d'ordre n est transformé en son opposé lorsqu'on échange deux colonnes (idem pour les lignes).
2. Un déterminant d'ordre n est nul dès qu'une des ses colonnes est combinaison linéaire des de ses autres colonnes (idem avec les lignes).
3. Un déterminant d'ordre n est invariant si on ajoute à une de ses colonnes une combinaison linéaire de ses autres colonnes (idem avec les lignes).
4. Un déterminant d'ordre n est multiplié par λ si on multiplie les termes d'une de ses colonnes par λ (idem pour les lignes).
5. Un dterminant d'ordre n est multiplié par λ^n si on multiplie tous ses termes par λ .

2.5. Application des déterminants

1. **Calcul de l'inverse d'une matrice carrée inversible**

   (a) **Calcul de l'inverse une matrice carré d'ordre 2**

   Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ unversible. On a alors $AA^{-1} = I_2$. Donc $detA \neq 0$. On vérifie rapidement que $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.

   (b) Calcul de l'inverse d'une matrice inversible d'ordre 3

   Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{pmatrix}$ inversible. La comatrice de A est la matrice

   $$^{c}A = (b_{ij} = cof(a_{ij}))_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 3}}.$$

   On vérifie que

   $$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\,{}^{t}({}^{c}A).$$

   Exercice 7 *Calculer l'inverse de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. **Résolution des systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues**
   Considérons le système liéaire de deux équations à deux inconnues

   $$\begin{cases} ax + by = u \\ cx + dy = v \end{cases}$$

   En termes matriciels, le système peut aussi s'écrire

   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

   Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors son déterminant $det(A) = ad - bc \neq 0$ et l'inverse de A est

   $$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

   On a alors

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Ce qui donne:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b \\ v & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} a & u \\ c & v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

3. **Résolution des systèmes linéaires de trois équations à trois inconnues**
Considérons le système liéaire de trois équations à trois inconnues

$$\begin{cases} ax & + & by & + & cz & = & u \\ dx & + & ey & + & fz & = & v \\ gx & + & hy & + & iz & = & w \end{cases}$$

Matricielement, le système peut aussi s'écrire

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Si la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ est inversible alors

$$x = \frac{\begin{vmatrix} u & b & c \\ v & e & f \\ w & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & u & c \\ d & v & f \\ g & w & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & u \\ d & e & v \\ g & h & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

Définition 2.21 *On appelle système de Cramer tout système $AX = B$, avec A une matrice carrée inversible.*
Tout systèmes de Cramer est déterminé et sa solution est donnée par:

$$x_i = \frac{detM_i}{det(A)},$$

où M_i est la matrice obtenue de la matrice A en remplçant la i-ième colonne de A par la matrice B.

Chapitre 3

APLICATIONS LINÉAIRES

Dans ce chapitre, $I\!K$ désigne l'ensemble $I\!R$ ou $\mathbb{C}$.

3.1. Applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps K une application $f : E \longrightarrow F$ est dite linéaire si

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(x+y) = f(x) + f(y) & (\forall\ x,\ y\ \in E) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) & (\forall\ x\ \in E,\ \ \lambda\ \in K) \end{array}}$$

Lorsque $E = F$ on dit que f est un endomorphisme de E. Une application linéaire bijective est appelée isomorphisme . Les isomorphismes d'un espace vectoriel E sur lui même forment un groupe pour la composition des applications qu'on appelle le groupe des automorphismes de E, on le note $GL_K(E)$

Pour toute application linéaire f d'un K-espace vectoriel E dans un K-espace vectoriel F on défini

- le noyau de f par:

$$ker f = \{x \in E : f(x) = 0\},\ \text{(le noyau de } f)$$

- l'image de f par:

$$Imf = \{f(x); x \in E\}\ \text{(l'image de } f).$$

Proposition 3.1 *Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E et Imf est un sous-espace vectoriel de F.*

Exercice 8 • *Montrer que l'application: $f : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ définie par*

$$f(x, y, z) = (x + y, x + y + z),$$

est une application linéaire.

- *Calculer le noyau de f.*
- *Calculer l'image de f.*

Théorème 3.2 *Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à 0.*

Exercice 9 *L'application: $f : I\!R^3 \longrightarrow I\!R^2$ définie par*

$$f(x, y, z) = (x + y, x + y + z),$$

est-t-elle linéaire?

Rang d'une application linéaire : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire d'un K-espace vectoriel E, de dimension finie, dans un K-espace vectoriel F . La dimension de Imf est appelée rang de f et on le note rgf.

Exercice 10 *Déterminer le rang de chacune des applications suivantes:*

$$f : \begin{array}{ccc} I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, x + y, x - y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} I\!R^3 & \longrightarrow & I\!R^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, x + y, x - y) \end{array}$$

Théorème 3.3 (du rang) *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. On a alors*

$$\boxed{dim\ E = dim\ kerf\ +\ rgf.}$$

Exercice 11 *Vérifier le théorème du rang pour les applications suivantes:*

$$f : \begin{array}{ccc} I\!R^2 & \longrightarrow & I\!R^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x, x + y, x - y) \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} I\!R^3 & \longrightarrow & I\!R^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x, x + y, x - y) \end{array}$$

3.1.1. Opérations sur les applications linéaires

Addition. Soient f et g deux applications linéaires d'un K-espace vectoriel E dans un K espace vectoriel F. L'application

$$f+g : E \longrightarrow F; x \longmapsto f(x)+g(x)$$

est linéaire appelée somme de f et g.

Multiplication par un scalaire: Soient $f : E \longrightarrow F$ une application d'un K-espace vectoriel E dans un K espace vectoriel F et α un élément de K. L'application

$$\alpha f : E \longrightarrow F; x \longmapsto \alpha f(x)$$

est linéaire.

Théorème 3.4 *Soit E et F deux K-espaves vectoriels, l'ensembles des applications linéaires de E dans F; muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire est un K-espace vectoriel.*

Composée d'applications: Soient E, F et G trois K-espaces vectoriels; $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires. L'application gof définie par:

$$\begin{aligned} gof \; : \; & E \longrightarrow G \\ & x \longmapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

est applée la composée de g et de f et elle est linéaire.

3.1.2. Matrice d'une application linéaire

Définition 3.5 *Soient f une application linéaire d'un K-espace vectoriel E dans un K-espace vectoriel F, tous deux de dimension finie; $B=\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E et $B'=\{f_1,\dots,f_m\}$ une base de F. On apelle matrice de f dans les bases B, B' la matrice:*

$$M(f,B,B') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1i} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{mi} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

avec

$$f(e_i) = a_{1i}f_1 + \cdots a_{mi}f_m.$$

3.1.3. Effet de changement de base

3.1.4. Matrice de passage

Définition 3.6 *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $e=\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E.*

Considérons une nouvelle base $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$. Evidemment chaque $E_I \in \mathcal{E}$ s'écrit de façon unique

$$E_I = p_{1I}e_1 + \dots + p_{iI}e_i + \dots + p_{nI}e_n.$$

La matrice

$$P = (p_{iI})$$

est appelée matrice de passage de la base $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ à la base $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$.

Exercice 12 • *Vérifier que $E = \{E_1 = (1,0,1), E_2 = (1,1,0), E_3 = (0,0,1)\}$ est une base de $I\!R^3$.*

- *Donner la matrice P, de passage de la base canonique de $I\!R^3$ à la base $E = \{E_1 = (1,0,1), E_2 = (1,1,0), E_3 = (0,0,1)\}$.*
- *Calculer la matrice Q, de passage de la base $E = \{E_1 = (1,0,1), E_2 = (1,1,0), E_3 = (0,0,1)\}$ à la base canonique.*
- *Calculer le produit PQ. onclure.*

3.1.5. Effet de changement de base sur les composantes d'un vecteur:

Soient E un $I\!K$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ deux bases de E $P = (p_{iI}$ la matrice de passage de $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ à la base $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ et $Q = (q_{Ii})$ la matrice de passage de $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_n\}$ à $e = \{e_1, \dots, e_n\}$. On sait que P et Q sont inversibles et sont inverses l'une de l'autre et on a:

$$\boxed{\begin{aligned} E_I &= \sum_{i=1}^{n} p_{iI}e_i, \\ e_i &= \sum_{I=1}^{n} q_{Ii}E_I. \end{aligned}}$$

Tout élément x de E s'écrit:

$$\begin{aligned} x &= x_ie_i = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \quad \text{(écriture de } x \text{ dans la base } e) \\ x &= X_IE_I = \sum_{I=1}^{n} X_IE_I \quad \text{(écriture de } x \text{ dans la base } \mathcal{E}). \end{aligned}$$

Les relations entre les anciennes composantes: x^i et les nouvelles composantes: X^l de x sont données par les formules de changement suivantes.

$$\boxed{\begin{aligned} x_i &= \sum_{l=1}^{n} p_{il} X_l, \\ X_l &= \sum_{i=1}^{n} q_{il} x_i. \end{aligned}}$$

Matricielement,

$$\boxed{\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\text{les anciennes coordonnées de } x} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_{11} & \dots & p_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{matrice de passage}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_{\text{les nouvelles coordonnées de } x}}$$

3.1.6. Effet de changement de base sur la matrice d'une application linéaire:

Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimenions finies, B, B' deux bases de E, B_1, B_1' deux bases de F, f une application linéaire de E dans F, $M_{B',B_1'}$ la matrice de f dans les bases B' et B_1', M_{B,B_1} la matrice de f dans les bases B et B_1, $P_{B',B}$ la matrice de passage de B à B' et Q_{B_1',B_1} la matrice de passage de B_1 à B_1'. On a alors

$$M_{B',B_1'} = Q^{-1}_{B_1',B_1} \cdot M_{B,B_1} \cdot P_{B',B}.$$

Lorsque $E = F$, $B = B_1$ et $B' = B_1'$ on a $P_{B',B} = Q_{B_1',B_1}$ et

$$M_{B',B'} = P^{-1}_{B',B} \cdot M_{B,B} \cdot P_{B',B}.$$

$$\begin{array}{ccc} (E,B') & \xrightarrow{f} & (F,B_1') \\ P_{B',B}\downarrow & & \downarrow Q_{B_1',B_1} \\ (E,B) & \xrightarrow{f} & (F,B_1) \end{array}$$

Chapitre 4

DIAGONALISATION. TRIGONALISATION

4.1. Applications linéaires

Les espaces considérés sont des espaces vectoriels de dimension finie sur $I\!K$ qui est $I\!R$ ou $\mathbb{C}$.

4.2. Introduction

Soit u l'endomorphisme de $I\!R^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique

$$\{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)$$

est

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer U^m, $m \geq 1$.

2. Déterminer la matrice de u dans la nouvelle base

$$\begin{aligned} E_1 &= (-4,3,2), \\ E_2 &= (-4,0,1), \\ E_3 &= (2,1,0); \end{aligned}$$

   puis calculer U^m.

Solution :

1. Il est, pratiquement, très difficile de répondre à la première question avant de traiter la deuxième.

2. Soit

$$P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage de la base canonique à la nouvelle base: $\{E_1, E_2, E_3\}$. la matrice de u dans la nouvelle base est

$$V = P^{-1}UP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

et

$$U^m = \left(P\ V\ P^{-1}\right)^m = P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^m \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Désormais, réduire un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dmension finie signifie, chercher une base dans laquelle sa matrice est la plus simple possible(en général diagonale ou triangulaire).

Dans toute la suite de ce chapitre, $I\!K$ désigne un corps commutatif et E un K-espace vectoriel de dimension finie.

4.3. Valeurs propres Vecteurs propres

Soit u un endomorphisme de E. On appelle vecteur propre de u tout $x \neq 0$ de E tel qu'il existe λ dans K vérifiant

$$u(x) = \lambda\, x.$$

Un élément λ de K est appelé valeur propre de u s'il existe x non nul dans E tel que $u(x) = \lambda\, x$.

Un vecteur propre x (resp. une valeur propre λ) est dit associé à une valeur propre λ (resp. à un vecteur propre x) de u si $u(x) = \lambda\, x$. Pour toute valeur propre λ, l'ensemble

$$E_\lambda = \{x \in E, u(x) = \lambda\, x\}.$$

est un sous-espace vectoriel de E, appelé sous-espace propre associé à la valeur propre λ.

Exercice 13

Soit

$$u : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2; (x, y) \longmapsto (x + y, x + y)$$

- *Montrer $X = (1, -1)$ et $Y = (1, 1)$ sont des vecteurs propres de u.*
- *Donner deux valeurs propres de u.*

Les sous-espaces propres de u sont stables par u:

$$\forall\, x \in E_\lambda;\ u(x) = \lambda\, x \in E_\lambda.$$

Proposition *4.1 Soient λ_1 et λ_2 deux valeurs propres distinctes, de u, Alors le système $\{x_1, x_2\}$ est libre.*

4.4. Polynôme caractéristique Trigonalisation diagonalisation

Définition *4.2 Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle polynôme caractéristique d le polynôme*

$$P_A(X) = det(A - X I_n).$$

Les racines de P_A sont les valeurs propres de A.

Exercice 14 • *Montrer que λ est valeur propre de A si et seulement si $det(A - \lambda I_n) = 0$.*

- *Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \geq n$ et A la matrice de u dans une base de E. Montrer que les valeurs propres de u sont les valeurs propres de A.*

Polynôme caractéristique de quelques matrices:

1) *La matrice A est d'ordre 2.*
Posons:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On a:

$$P_A(X) = X^2 - (a + d)\, X + det(A).$$

2) *La matrice A est d'ordre 3.*
Posons:

$$A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

On a:

$$P_A(X) = -X^3 + tr(A)\, X^2 - (a\, e + a\, i + e\, i - b\, d - c\, g - f\, h)\, X + det(A)$$

Dans le cas général on peut écrire

$$P_A(X) = (-1)^n \left[X^n - tr(A)\, X^{n-1} + \cdots + (-1)^n\, det(A)\right]$$

où n est la dimension de E et $tr(A)$ désigne la trace de A .

Trigonalisation *Une matrice carrée A est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire. Un endomorphisme u est trigonalisable s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire.*

Théorème *4.3 Soit u un endomorphisme d'un K-espace E de dimension finie $n \geq 1$. Si toutes les valeurs propres de u sont dans K, alors u est trigonalisable.*

DÉMONSTRATION. Nous allons faire un raisonnement par récurrence sur la dimension de E. Si $n = 1$ alors toute matrice de u est trigonalisable. Supposons le théorème vérifié pour tous les espaces de dimension $\leq n$. Soit λ une valeur propre de u et e un vecteur propre de u associé à λ. il existe un supplémentaire F de Ke dans E, c'est à dire $E = K\,e \oplus F$. Soit

$$\begin{array}{rccc} pr : & E & \longrightarrow & F \\ & \alpha\, e + y & \longmapsto & y, \end{array}$$

la projection de E sur F parallèllement à $K\,e$. Nous pouvons alors définir un endomorphisme de F de la façon suivante:

$$\begin{array}{rccc} v : & F & \longrightarrow & F \\ & y & \longmapsto & pr \circ u(y). \end{array}$$

Pour toute base $\{a_2, \ldots, a_n\}$ de F, on a:

$$u(a_i) = \alpha_i\, e + v(a_i) = \alpha_i + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{ij} a_j; \; i = 2, \ldots, n.$$

La matrice de u dans la base $\{e, a_2, \ldots, a_n\}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & & & & \\ \vdots & & V & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix};$$

où V est la matrice de v dans la base $\{a_2, \ldots, a_n\}$. Il est evident que

$$P_u(X) = (\lambda - X)\, P_v(X).$$

Donc v a toutes ses valeurs propres dans K. D'après l'hypothèse de récurrence, v est trigonalisable et u l'est aussi.

Diagonalisation Un endomorphisme u d'un espace E de dimension finie n est diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Théorème 4.4 *Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension finie n,*

$$I\!K = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$$

l'ensemble des valeurs propres de u et α_i l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i dans $P_u(X)$; on a alors

$$u \text{ est diagonalisable} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = n, \\ \text{et} \\ \dim E_{\lambda_i} = \alpha_i. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION.
($\Longleftarrow$). Soit B_i une base de E_{λ_i}; $i = 1, \ldots, r$. Puisque la somme des E_{λ_i} est directe et la somme des dimensions des E_{λ_i} est égale à la dimension de E alors la réunion des B_i est une base de E, formée de vecteurs propres; donc u est diagonalisable.

($\Longrightarrow$) Puisque u est diagonalisable, E possède une base formé de vecteurs propres et

$$P_u(X) = (\lambda_1 - X)^{\beta_1} \cdots (\lambda_r - X)^{\beta_r}$$

avec $\beta_i = dim E_{\lambda_i}$. Ceci termine la démonstration.

4.5. Application à la résolution des systèmes linéaires

Les systèmes considérés dans ce paragraphe sont les systèmes avec le nombre de lignes est égal au nombre d'inconues:

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \cdots + \cdots + \cdots = \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où les a_{ij} et les b_i sont des réels ou des complexes. Rappellons que résoudre ce système, c'est chercher les n-uplet $(x_1, \ldots, x_n) \in I\!K$ qui stisfassent, simultanément, les n équations ci-dessus.
Le système est dit déterminé lorsqu'il poede une et une seule solution.
Le système est dit indéterminé, lorsqu'il possède une infinité de solutions.
Le système est dit incompatible, lorsqu'il n'a aucune solution.

Deux systèmes S et S' sont dits équivalents lorsqu'ils possèdent les mêmmes solutions.

Soit $f : I\!K^n \longrightarrow I\!K^n$, l'endomorphisme de $I\!K^n$; défini par:

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in I\!K^n;$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1} a_{ij}x_j, \ldots, \sum_{j=1} a_{nj}x_j).$$

Il est évident que le système S ci-dessus possède une solution si et seulement si le vecteur $b = (b_1, \dots, b_i, \dots, b_n) \in Imf$.

Traduction matricielle du système

Considérons la matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq l \\ 1 \leq j \leq n}}$,appelée matrice du système, dont les termes sont les coefficients du système S c-dessus, le terme a_{ij} se trouve dans le croisement de la ligne i avec la colonne j. Posons

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$. L'écriture matricielle du système est

$$AX = b$$

Supposons que la matrice A est diagonalisable ou trigonalisable.Il existe alors une martrice P, carrée d'ordre n et inversible telle que la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale ou triangulaire.

Cas 1: $D = P^{-1}AP$ est diagonale. On a alors

$$AX = b \Longleftrightarrow P^{-1}APX = P^{-1}BP \Longleftrightarrow DX = P^{-1}BP.$$

Cas 2: $T = P^{-1}AP$ est triangulaire. On a alors

$$AX = b \Longleftrightarrow P^{-1}APX = P^{-1}BP \Longleftrightarrow DX = P^{-1}BP.$$

Les systèmes $DX = P^{-1}BP$ et $DX = P^{-1}BP$ sont quivalents au système S de départ et leur résolution est plus facile.

4.6. sous-espaces vectoriels

Exercice 1

Soient les sous-ensembles de suivants :

- $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$,
- $G = \{(a - b, a + b, a - 3b), (a, b) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.
3. Le vecteur $(2, 1, 3)$ appartient-il à $F \cap G$?
4. La somme $F + G$ est-elle directe?

Exercice 2

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$F \cap G = F + G \Longleftrightarrow F = G.$$

4.7. Familles libres. Génératrices. Dimension. Rang

Exercice 1

1) Montrer que la partie

$$B = \left\{ a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Calculer les coordonnées de chaqu'un des vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dans la base B.

3) Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient-t-il à $vect\{a, b\}$?

Exercice 2

1. Donner une partie de $\mathbb{R}^3$ qui est libre mais pas génératrice.

2. Donner une partie de $\mathbb{R}^3$ qui soit génératrice mais pas libre

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $x_1, \ldots, x_m$ des vecteurs de E tels que, aucun d'entre eux n'est combinaison linéaire des autres. Montrer que les vecteurs $x_1, \ldots, x_m$ forment un système libre.

Exercice 4

Soit $\mathcal{P}_3$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3. Vérifier que les ensembles $B_i, i = 1, 2, 3$ suivants sont des base s de $\mathcal{P}_3$:

- $B_1 = \{1, X, X^2, X^3\}$,
- $B_2 = \{1, 1 - X, X - X^2, X^2 - X^3\}$.
- $B_3 = \{1, 1 + X, 1 + X + X^2, 1 + X + X^2 + X^3\}$.

exercice 5

Donner le rang de $\{v_1, v_2, v_3\}$ dans chacun des cas suivants:

- $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (-1, 1, -1)$.
- $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 0, -1), v_3 = (1, 8, 13)$
- $v_1 = (1, 2, -3), v_2 = (1, 0, -1), v_3 = (1, 10, -1)$.

4.8. Opérations sur les matrices

Exercice 1

Calculer la somme des deux matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Calculer $2A - 3B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 11 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 \\ -7 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculer (si possible) $A^2, A^3, AB, (AB)^2, BA$.

Exercice 4

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer (si possible) AB, BA et $AB - BA$. Conclusion?

Exercice

Calculer D^k de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4.9. Rang d'une matrice

Déterminer lerang des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4.10. Inverse d'une matrice

Execice 1

1. Déterminer s'il existe l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Vérifier que
$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0.$$
À l'aide de la relation ci-dessus, déterminer l'inverse de A.
- Soit la matrice
$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. M est-elle inversible? Si oui, déterminer M^{-1}.

Exercice 2

Considérons la matrice
$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Trouver la matrice

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

telle que le produit AB soit égal à la matrice identité I_2. Prouver que $BA = I_2$.

Exercice 3

Soit la matrice
$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 3A^2 - 3A + 5I_3$. Cette matrice est-elle inversible?
Si oui, trouver son inverse.

Exercices sur les déterminants

Exercice 1

1. Calculer les déterminants suivants:

$$d_1 = \begin{vmatrix} m-1 & m-2 \\ m-3 & m-4 \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 0 & 1 & 2b \end{vmatrix} \quad d_3 = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad d_4 = \begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

2. Pour quelles valeurs de m la matrice $A_m = \begin{pmatrix} m-1 & m-2 \\ m-3 & m-4 \end{pmatrix}$ est inversible?

Exercice 2

Calculer les déterminants suivants

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \quad d_2 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & k \end{vmatrix} \quad d_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \quad d_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Exercice 3

1. Résoudre les systèmes suivants:

$$S_1 : \begin{cases} (m-1)x + my + z = m+1 \\ mx + 2y + 3z = 3 \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m-1 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} -mx + (m+1)y + mz = m+1 \\ (2m-1)x + (m-1)y - mz = m^2-1 \\ -2x - 4y + 2mz = m^2-3m-4 \end{cases}$$

2. Pour quelles valeurs de m, le système S_1 est indéterminé?

3. Même question pour le système S_2.

Exercices sur les applications linéaires

Exercice 1

On considère l'application $\varphi : I\!R^2 \longrightarrow I\!R^2; (x, y) \longmapsto (2x - y, x + 3y)$

1. Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(I\!R^2)$.
2. Calculer $\varphi(0, 1)$, $\varphi(1, 0)$, $\varphi(2, -2)$, $\varphi(-4, -1)$.
3. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_5 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
Déterminer AX_i pour chaque X_i.
4. Donner la matrice de φ dans la base canonique.
5. L'application φ est-elle injective? est-elle surjective? est-elle un automorphisme?
6. l'application φ est-elle diagonalisable? est-elle trigonalisable?
7. Montrer que la partie $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$ est une base de $I\!R^2$.
8. Donner la matrice de passage de la base canonique à la base B.
9. Donner la matrice de φ dans la base canonique puis, sa matrice dans la base B.

Exercice 2

Soit f l'application linéaire de $I\!R^3$ dans $I\!R^3$ définie par:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + y - z \\ 2x + 4y - 2z \\ x - y + 3z \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique.
2. Soient $E_1 = Ker(f - 2id)$, $E_2 = Ker(f - 4id)$, $E_3 = Ker(f - 6id)$, où id désigne l'application identité de $I\!R^3$. Donner une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces.
3. Choisir $v_1 \in E_1$, $v_2 \in E_2$ et $v_3 \in E_3$ tels que la deuxième coordonnée de v_1, la troisième coordonnée de v_2 et la prmière coordonnée de v_3 soient égales à 1. Montrer que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $I\!R^3$.
4. Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1}.
6. exprimer A' en fonction de A, P et P^{-1}.

7. Montrer que $A^n = PA'^n P^{-1}$ pour $n \geq 1$. Calculer A^n pour $n \geq 1$.

8. Déterminer toutes les matrices $B' = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & w \\ x & y & z \end{pmatrix}$ telles que $A'B' = B'A'$. En déduire toutes les matrices B' de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (l'espace des matrices carrées d'ordre 3) telles que $B'^3 = A'$.

9. Déterminer toutes les matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $B^3 = A$.

Exercice 3

Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X], \\ P & \mapsto & XP'(X) - 2P(X). \end{cases}$$

1. $n = 2$
   (a) Montrer que f est une application linéaire, à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Déterminer Imf. Quelle est le rang de f ?
   (c) Donner la dimension de $Kerf$, puis déterminer $Kerf$.
2. On prend $n = 3$. Mêmes questions que pour $n = 2$.
3. n quelconque. Même questions que pour $n = 2$.

exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 dont une base est (e_1, e_2, e_3). On considère l'endomorphisme f défini par :

$$f(e_1) = e_2 + e_3, \; f(e_2) = e_3 + e_1, \text{ et } f(e_3) = e_1 + e_2$$

Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Déterminer l'expression de $f(x)$ dans la base (e_1, e_2, e_3). f est-il un automorphisme de E ?

Exercice 5

Soit E un espace vectoriel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Dḿontrer que la donnée de :

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = e_1 + e_2 \\ \varphi(e_2) = e_1 - e_2 \\ \varphi(e_3) = e_1 + \lambda e_3 \end{cases}$$

définit une application linéaire φ de E dans E.
Ecrire le transformé du vecteur $u = xe_1 + ye_2 + ze_3$. Comment choisir λ pour que φ soit injective ? Surjective ?

Diagonalisation. Trigonalisation

Exercice 1

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

Déterminer si les matrices suivantes sont diagonalisables et si elles le sont, donner une base dans laquelle elles sont diagonales.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Considrons les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ -1 & -35 & \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer le déterminant de chaque matrice.
2) Dans chaque cas (sauf pour K), trouver toutes les valeurs propres de la matrice, ainsi que les espaces propres associs. Prciser si la matrice est diagonalisable ou non sur $I\!R^3$. Dans le cas o elle est diagonalisable, dterminer lexponentielle e^{tA} (pour la matrice A) pour chaque $t \in I\!R$.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Dhar Lmahraz

Filières	:	SMP – SMC
Cours	:	Algèbre2
Année	:	2010 – 2011
Semestre	:	S_2

Série 1: Espaces vectoriels

Exercice 1(Sous-espaces)

Soit

$$\begin{aligned} E = \mathbb{R}_2[X] &= \{P(X) = aX^2 + bX + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}, \\ F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\} \end{aligned}$$

Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2(Somme de deux sous-espaces)

On consière l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}^3$ et le vecteur $u = (1, 1, 1)$. On pose

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}, \\ G &= Vect(u) = \{\alpha u, \alpha \in \mathbb{R} = (\alpha, \alpha, \alpha)\}. \end{aligned}$$

- Vérifier que F et G sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^3$.
- La somme $F + G$ est-elle directe?
- F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3(Combinaison linéaire)

Les vecteurs u suivants, sont-ils combinaison linéaire des vecteurs u_1, u_2 suivants:

1) $u = (1, 2)$, $u_1 = (1, -2)$, $u_2 = (2, 3)$
2) $u = (2, 5, 3)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$
3) $u = (3, 1, m)$, $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (1, -1, 4)$

Exercice 4(Sous-espace engendré. Base. Coordonnées. Changement de base)

Soit

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0\}.$$

- Donner une base de F.
- On admet que $B = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ et $B' = \{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (1, 1, 0)\}$ sont deux bases de F. Donner les coordonnées de $(2, -2, 2)$ dans la base B puis, dans la base B'.

Exercice 5(rang d'un système de vecteurs)

Déterminer, suivant les valeurs de α, le rang de chacun des systèmes S_1, S_2, S_3 suivants:
$S_1 = \{a = (\alpha, 1, 1),\ b = (1, \alpha, 1),\ c = (1, 1, \alpha)\}$ $S_2 = \{u = (\alpha, 1, 1),\ b = (-1, -\alpha, -1),\ c = (-1, -1, \alpha)\}$

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Dhar Lmahraz

Filières	:	SMP – SMC
Cours	:	Algèbre2
Année	:	2010 – 2011
Semestre	:	S_2

Série 2: Matrices et déterminants

Exercice 1

Montrer que les matrices suivantes ont pour déterminant zéro

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 10 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Calculer l'inverse des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Dhar Lmahraz

Filières	:	SMP – SMC
Cours	:	Algèbre2
Année	:	2010 – 2011
Semestre	:	S_2

Série 3: Applications linéaires

Exercice 1 Soit trois vecteurs e_1, e_2, e_3 formant une base de $I\!R^3$. On note T la transformation linéaire définie par

$$\begin{aligned} T(e_1) &= e_3, \\ T(e_3) &= e_3 \\ T(e_2) &= -e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

1. Déterminer le noyau de cette application. Ecrire la matrice A de T dans la base (e_1, e_2, e_3).
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer e_1, e_2, e_3 en fonction de f_1, f_2, f_3. Les vecteurs f_1, f_2, f_3 forment-ils une base de $I\!R^3$?
3. Calculer $T(f_1), T(f_2), T(f_3)$ en fonction de f_1, f_2, f_3. Ecrire la matrice B de T dans la base (f_1, f_2, f_3) et trouver la nature de l'application T.
4. On pose
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Vérfier que P est inversible et calculer P^{-1}. Quelle relation lie A, B, P et P^{-1} ?
5. Donner une base de ImT et déduire le rang de T.

Exercice 2

Soit f l'application linéaire de $I\!R^3$ dans $I\!R^3$ définie par:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + y - z \\ 2x + 4y - 2z \\ x - y + 3z \end{pmatrix}$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique.
2. Soient $E_1 = Ker(f - 2id)$, $E_2 = Ker(f - 4id)$, $E_3 = Ker(f - 6id)$, où id désigne l'application identité de $I\!R^3$. Donner une base et la dimension de chacun de ces sous-espaces.

3. Choisir $v_1 \in E_1$, $v_2 \in E_2$ et $v_3 \in E_3$ tels que la deuxième coordonnée de v_1, la troisième coordonnée de v_2 et la prmière coordonnée de v_3 soient égales à 1. Montrer que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Calculer $f(v_1)$, $f(v_2)$, $f(v_3)$. En déduire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$.
5. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ et calculer P^{-1}.
6. exprimer A' en fonction de A, P et P^{-1}.
7. Montrer que $A^n = PA'^n P^{-1}$ pour $n \geq 1$. Calculer A^n pour $n \geq 1$.

Exercice 3

Soit f l'application linéaire définie par

$$\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,$$
$$f(\alpha, \beta) = (\alpha + 2\beta, -2\alpha + 3\beta, \alpha + \beta, 3\alpha + 5\beta, -\alpha + 2\beta).$$

1. Quel est l'espace de départ de f.
2. Quel est l'espace d'arriver de f.
3. Calculer le rang de f.
4. f est-elle surjective?

Exercice 4

Soit

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ aX^2 + bX + c & \longmapsto & ((a - b + c, b + c) \end{array}$$

1. Déterminer la dimension de $ker f$ et dire si oui ou non, f est injective.
2. Calculer le rang de f. f est surjective?
3. f est-il un isomorphisme.

Exercice 5

1) Soit $B = \{a = (1, 0, -1), b = (0, 0, 1), c = (0, 1, 0)\}$. Vérifier que B est une base de $\mathbb{R}^3$. 2) Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la bse B est la matrice A. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Université Sidi Mohamed Ben Abdellah
Faculté des Sciences
Département de Mathématique
Dhar Lmahraz

Filières	:	SMP – SMC
Cours	:	Algèbre2
Année	:	2010 – 2011
Semestre	:	S_2

Série 4: Diagonalisation

Exercice 1 Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des endomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3; \quad f(x,y,z) = (x+y, 2x+y+2z, y+z), \\ g : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^4; \quad g(x,y,z,t) = (t, -y, -z, x) \end{aligned}$$

Contenu mathématiques du semestre S_2 pour les fili'eres SMP-SMC

Mathmatique I

- Elment 1 : Analyse 1 (Cours, TD)

1. Suites de nombre réels : convergence et limite. 2. Suites particulière : Suites arithmétiques, suites géométriques et suites arithmético-géométrique. 3. Suites alternées et suites adjacentes. 4. Fonction numrique d'une variable réelle : Calcul des limites, continuité. 5. Théorème des valeurs intermédiaires. 6. Notion de dérivabilité (dérivée première et drivée d'ordres supérieurs). 7. Fonctions convexes. 8. Fonction monotones et Fonctions réciproques des Fonctions circulaires et fonctions hyperboliques. 9. Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis. 10. Formule de Taylor, polynômes d'interpolations et calcul approché. 11. Fonctions équivalentes et développements limités.

- Elément 2 : Algèbre 1 (Cours, TD)

1. Systèmes d'équations linéaires et résolution par la méthode de Gauss ou pivots, 2. Propriétés vectorielles de n : Famille libres, famille génératrices, notion de base et base canonique, 3. Le plan 2 et le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, 4. L'espace affine E2: Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires, équation d'une droite et équation d'un cercle, 5. Produit scalaire, produit vectoriel dans 3 et Projection orthogonale. 6. Fonctions polynômiales. Polynôme irréductible dans et dans. . Fractions rationnelles. 7. Division euclidienne et division suivant les puissances croissantes. 8. Décomposition des fractions en éléments simples dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

Mathématique II

- Elément 1 : Analyse 2 (Cours, TD)

1. Introduction la notion d'intégrale l'aide des calculs des aires. 2. Théorème fondamental de l'analyse et calcul des primitives. 3. Intégration par parties et intégration par changement de variable. 4. Intégration des fractions rationnelles. 5. Intégrale dépendent d'un paramètre. 6. Intégrale généralisée et critères de convergences. 7. Equations différentielles du premier ordre. 8. Equations différentielles du second ordre coefficients constants. 9. Séries numériques. 10. Généralités de suites et séries de fonctions. 11. Séries entières, rayons de convergences et fonctions analytiques réelles, 12. Séries trigonométriques et séries de Fourier.

- Elément 2 : Algèbre 2 (Cours, TD)

1. Espaces vectoriels, sous espaces et sous espaces engendrés. 2. Applications linéaires et endomorphismes. 3. Calcul matriciel et rang d'une matrice. 4. Déterminant d'une matrice carrée et applications. 5. Changement de bases et matrices de passage. 6. Polynôme caractéristique, diagonalisation, trigonalisation. 7. Applications aux systèmes linéaires.