

UNIVERSITE DE LIEGE  
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

**MECANIQUE DES STRUCTURES  
PREMIERE PARTIE**

Notes de cours  
destinées aux étudiants de 3<sup>ème</sup> Bachelier Génie Civil

Professeur R.MAQUOI  
Ass. Prof. J-M FRANSSEN

2008

# 1 INTRODUCTION

## 1.1 Généralités

Le cours de *Mécanique des Structures* (1<sup>ère</sup> partie) expose les méthodes d'analyse globale des structures constituées de *barres prismatiques à axe rectiligne*.

On utilise le terme *barre* dans son *sens structural générique*. Une barre est un être structural longiligne dont les deux dimensions (hauteur, largeur) de sa section transversale sont faibles devant la troisième dimension, à savoir sa longueur, qui de ce fait *obéit aux lois élémentaires de la théorie des barres développée dans le cours de Mécanique des Matériaux* ; le sens de ce terme ne peut donc être restreint à celui d'une barre de treillis. Lorsque l'on voudra parler précisément de cette dernière, l'appellation complète sera utilisée. On écartera par contre dans ce cours les barres dont la raideur transversale est trop mince et qui ont de ce fait un comportement non linéaire comme les câbles et les habans.

Une barre est donc assimilable à son axe et les grandeurs mécaniques ou géométriques qui caractérisent une section transversale ne dépendent que de l'abscisse de cette section mesurée selon l'axe de la barre à partir d'une extrémité de celle-ci. Ceci va donc nous permettre de considérer une *structure en barres comme définie par les axes des barres qui la composent*.

Les structures constituées de *plaques* ou de *coques* font intervenir des éléments structuraux dont deux dimensions en plan (longueur, largeur) sont grandes vis-à-vis de la troisième (épaisseur). Leur traitement est plus complexe que celui des structures constituées de barres ; il est abordé dans le cadre d'autres cours.

Les *méthodes d'analyse globale* visent à *déterminer*, prioritairement, *les efforts intérieurs* et, secondairement, *l'état déformé* d'une structure donnée soumise à une combinaison donnée d'actions.

Dans le cadre d'un dimensionnement de structure, ces efforts intérieurs et déplacements devront, une fois obtenus, être comparés à des valeurs homologues limites afin de s'assurer que les *états-limites ultimes* et les *états-limites de service* sont satisfais ; cette vérification vise à assurer à la structure une résistance aux actions sollicitantes avec un niveau de sécurité prescrit, d'une part, et à rencontrer les conditions de service exigées ou recommandées, d'autre part. Ces notions de dimensionnement et d'états-limites ne sont pas abordés dans le cadre du présent cours ; ils seront abordés ailleurs, en particulier dans les cours d'application : constructions métalliques, constructions en béton (béton armé, béton précontraint), constructions mixtes acier-béton, constructions en bois, qui font tous partie du programme des cours à la Section des Constructions.

Lorsque les seules équations de la *statique élémentaire* suffisent pour procéder à l'analyse globale d'une structure, celle-ci est dite *statiquement déterminée* ou *isostatique*. Si ce n'est pas le cas, la structure est dite *statiquement indéterminée* ou *hyperstatique*. L'analyse globale de la structure doit alors incorporer le *concept de compatibilité* en sus du *concept d'équilibre*. Le présent cours s'adresse aux structures hyperstatiques ; il postule ainsi un pré requis, à savoir une complète maîtrise de l'analyse des structures isostatiques, ce dernier sujet ayant déjà été l'objet du cours de résistance des matériaux.

Si l'on peut admettre que la déformée prise par la structure sous les actions qui la sollicitent ne modifie pas significativement le mode d'action des forces mises en oeuvre, il est suffisant d'effectuer l'analyse globale de la structure par référence à la configuration

non déformée de cette structure. Cette approche est celle qui a notamment été systématiquement utilisée dans les applications du cours de Mécanique des Matériaux ; on la désigne par *analyse globale au premier ordre*. Si cette hypothèse n'est pas rencontrée, la référence à la configuration déformée de la structure sous les actions qui la sollicitent est indispensable ; l'analyse globale correspondante est dite *analyse globale au second ordre*. L'interdépendance de l'état déformé et de la distribution des efforts intérieurs entraîne que l'analyse globale est alors menée par voie itérative. Une analyse globale au second ordre est donc substantiellement plus complexe qu'une analyse globale au premier ordre.

On distingue par ailleurs l'*analyse globale élastique* et l'*analyse globale plastique*. Dans l'analyse globale élastique, la distribution des efforts intérieurs est déterminée comme si le matériau constitutif de la structure avait un comportement indéfiniment élastique ; il y aura bien sûr lieu de s'assurer a posteriori si le domaine de fonctionnement de la structure sous les actions qui la sollicitent est couvert par le domaine de comportement élastique du matériau. Au contraire, l'analyse globale plastique prend en compte un comportement inélastique important du matériau, ce qui autorise une redistribution des efforts entre sections. Une telle analyse intègre donc nécessairement la loi constitutive du matériau.

Dans sa première partie, le présent cours n'aborde que les *méthodes d'analyse globale élastique au premier ordre*. L'*analyse globale plastique au premier ordre* est l'objet de la deuxième partie. Des notions élémentaires relatives à l'*analyse globale élastique au second ordre* sont données dans une troisième partie. Enfin, une quatrième partie est consacrée aux *fondements des phénomènes d'instabilité élastique*.

## 1.2 Classification d'une structure

On peut classer les structures en fonction de l'un des critères suivants :

- La *nature du matériau* qui les compose : acier, béton, bois, ... ;
- Leur *destination* : bâtiment, industrie, ouvrages d'art, ...
- La *nature de leurs éléments constitutifs* : barres, plaques, coques, ...

Il va sans dire que l'objet du présent cours ressortit davantage à la troisième classification ci-dessus. Les méthodes enseignées dans le cours sont en effet à priori valables pour tout matériau et pour toute destination de la structure.

## 2 THEOREMES FONDAMENTAUX

Les méthodes d'analyse globale des structures trouvent leurs fondements dans des théorèmes qui découlent du *principe des travaux virtuels*.

Une grandeur physique (déplacement  $d$ , contrainte  $\sigma$ ) est dite *virtuelle* si elle est à la fois de valeur *arbitraire, très petite mais non nulle*. Il est assez commode de se la représenter comme une variation de cette grandeur :  $\delta d, \delta \sigma$ .

La figure ci-dessous montre de manière graphique comment est structuré ce chapitre sur les théorèmes fondamentaux.

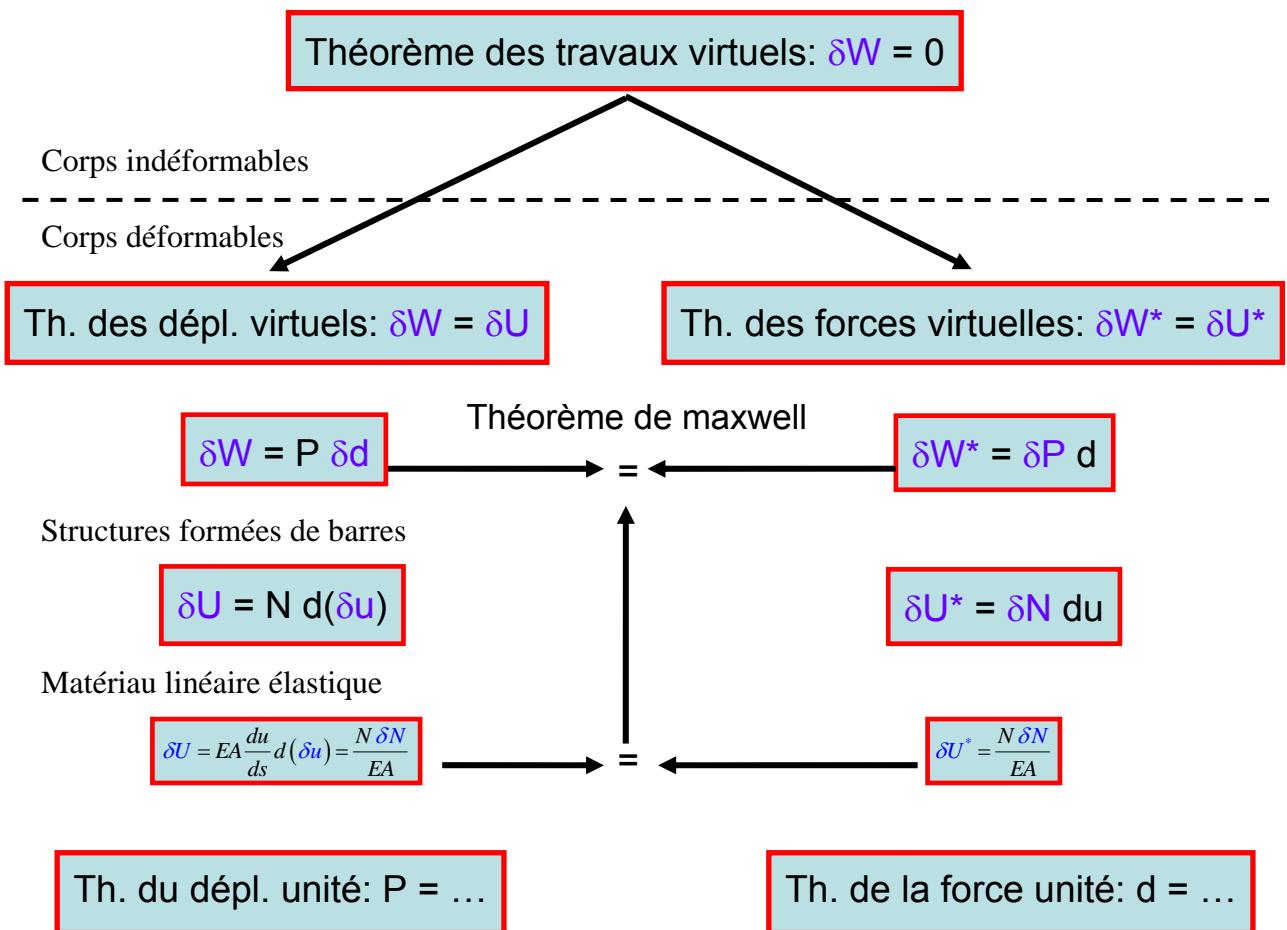


Figure 1 - relation entre les divers paragraphes de ce chapitre

## 2.1 Théorème des travaux virtuels

Le théorème des travaux virtuels s'énonce comme suit pour les **corps indéformables**:

*Pour tout corps **indéformable** en équilibre sous des actions extérieures, le travail virtuel développé par les forces extérieures agissant sur ce corps est nul pour tout déplacement virtuel du corps compatible avec les liaisons de ce dernier avec le monde extérieur.*

Rappelons qu'un travail est, en physique, le produit d'une force par le déplacement de son point d'application le long de la ligne d'action de la force, ou le produit d'un moment par une rotation (travail des forces externes) mais aussi le produit d'une contrainte par une déformation (travail de déformation ou travail des forces internes).

L'application de ce théorème permet notamment de trouver directement les réactions d'appui de structures isostatiques et de déterminer les lignes d'influence relatives aux poutres isostatiques.

Ce théorème peut être généralisé au cas des *corps déformables* moyennant certaines adaptations ; il prend alors l'une des formes suivantes :

- Théorème des *déplacements virtuels* ;
- Théorème des *forces virtuelles*.
- 

### 2.1.1. Théorème des déplacements virtuels

Le théorème des déplacements virtuels s'énonce comme suit :

*Pour tout corps **déformable** en équilibre sous des actions extérieures, le travail virtuel de déformation de ce corps pour tout champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible – c'est-à-dire respectant les liaisons du corps déformable avec le monde extérieur – est égal au travail virtuel développé par les forces extérieures appliquées.*

Cela se traduit par l'équation :

$$\delta W = \delta U \quad (2.1)$$

où  $W$  représente le *travail des forces extérieures* ou *travail extérieur* pour le champ de déplacements virtuels choisi et  $U$  le *travail intérieur de déformation* ou encore *travail intérieur*.

Le théorème des déplacements virtuels traduit l'**équilibre** ; sa mise en œuvre débouche toujours sur des *équations d'équilibre*.

Ce théorème vaut quelle que soit la nature du matériau du corps : rigide, élastique ou élastoplastique.

### 2.1.2. Théorème des forces virtuelles

Le théorème des forces virtuelles s'énonce comme suit :

*Pour tout corps déformable, le travail virtuel complémentaire de déformation de ce corps pour tout système de forces virtuelles statiquement admissible – c'est-à-dire satisfaisant les équations fondamentales d'équilibre – est égal au travail virtuel complémentaire développé par les forces extérieures appliquées.*

Cela se traduit par l'équation :

$$\delta W^* = \delta U^* \quad .(2.2)$$

où  $W^*$  représente le *travail complémentaire des forces extérieures* ou *travail extérieur complémentaire* et  $U^*$  le *travail de déformation complémentaire* ou encore *travail intérieur complémentaire*.

Le *théorème des forces virtuelles* traduit la **compatibilité** des *déformations* (des *déplacements*) prises par le corps déformable ; sa mise en oeuvre débouche toujours sur des *équations de compatibilité*.

Ce théorème vaut quelle que soit la nature du matériau du corps : rigide, élastique ou élastoplastique.

## 2.2 Expression des travaux élémentaires

Les expressions

- des travaux virtuels intervenant dans le théorème des déplacements virtuels et
- des travaux virtuels complémentaires intervenant dans le théorème des forces virtuelles

sont données ici non pas en toute généralité mais bien dans le cadre strict de structures en barres dont l'élément structural constitutif est soumis à moment(s) de flexion  $M$ , effort normal  $N$  et effort(s) tranchant(s)  $V$ .

### 2.1.1. Travail virtuel extérieur et travail virtuel extérieur complémentaire

Les forces extérieures agissant sur le corps se compose de :

- Charges concentrées  $P'$  ;
- Charges réparties  $p'$  ;
- Réactions d'appui  $R'$ .

On notera que le signe « ' » ne désigne nullement une quelconque dérivée mais sert simplement à identifier un état vrai

Dès lors, le *travail virtuel des forces extérieures* s'écrit :

$$\delta W = \sum P' \cdot \delta d + \int p' \cdot \delta d - \sum R' \cdot \delta r \quad (2.5)$$

où  $\delta d$  et  $\delta r$  désignent respectivement les déplacements virtuels des points d'application des forces  $P'$  et  $p'$  et des réactions  $R'$ , mesurés selon la direction d'application de ces forces et réactions. Le signe « moins » précédant le travail des réactions s'explique par le

fait que le déplacement  $r$  est habituellement compté positivement dans le sens opposé au sens positif des réactions.

Par analogie le travail virtuel complémentaire des forces extérieures s'écrit :

$$\delta W^* = \Sigma \delta P.d' + \int \delta p.d' - \sum \delta R.r' \quad (2.6)$$

### 2.1.2. Travail virtuel de déformation et travail virtuel complémentaire de déformation

Considérons un élément de barre délimité par deux sections transversales distantes de  $ds$ .

Si, dans la section à gauche, les efforts intérieurs vrais sont  $N', M', V'$ , ils valent  $N' + dN', M' + dM', V' + dV'$  dans la section à droite. Ils donnent lieu à des déplacements différentiels correspondants (vrais)  $du', d\phi', dv'$ <sup>1</sup>.

Par ailleurs considérons un champ de forces virtuelles,  $\delta N, \delta M, \delta V$  statiquement admissible et un champ de déplacements virtuels  $\delta(du), \delta(d\phi), \delta(dv)$  cinématiquement admissible.

On peut alors dresser le Tableau 2-1.

Tableau 2-1 – Etat de sollicitation et état de déplacement

Etat	Etat de sollicitation		Etat de déplacement différentiel	
Réel	Effort normal	$N'$	Déplacement axial	$du'$
	Moment de flexion	$M'$	Rotation relative	$d\phi'$
	Effort tranchant	$V'$	Glissement relatif	$dv'$
Virtuel	Effort normal	$\delta N$	Déplacement axial	$\delta(du) = d(\delta u)$
	Moment de flexion	$\delta M$	Rotation relative	$\delta(d\phi) = d(\delta\phi)$
	Effort tranchant	$\delta V$	Glissement relatif	$\delta(dv) = d(\delta v)$

d'où l'on tire respectivement :

- L'expression du *travail intérieur de déformation* :

$$\delta U = \int_0^s [N'.d(\delta u) + M'.d(\delta\phi) + V'.d(\delta v)] ds \quad (2.3)$$

- L'expression du *travail intérieur complémentaire de déformation* :

$$\delta U^* = \int_0^s [\delta N.du' + \delta M.d\phi' + \delta V.dv'] ds \quad (2.4)$$

<sup>1</sup> Dans la notation de la résistance des matériaux,  $dv'$  est plutôt noté  $\gamma$

## 2.3 Expressions du théorème des travaux virtuels pour les structures faites d'un matériau à comportement linéaire élastique

Dans le cas d'un matériau à comportement élastique linéaire, la loi de Hooke entraîne notamment la proportionnalité entre un effort intérieur et son déplacement associé.

Ainsi, entre les efforts intérieurs vrais – ainsi appelés parce que produits par les forces extérieures agissant réellement sur le corps - et les déplacements associés, par conséquent, eux aussi vrais, on a :

$$N' = EA \frac{du'}{ds} \quad M' = EI \frac{d\phi'}{ds} \quad V' = GA_v \frac{dv'}{ds} \quad (2.7)$$

où  $E$  est le module de Young,  $I$  le moment d'inertie,  $A$  l'aire de la section transversale et  $A_v$  l'aire réduite de la section cisaillée.

De manière similaire, entre les efforts intérieurs virtuels, - ainsi appelés parce que produits par le champ de forces virtuelles statiquement admissible - et les déplacements associés, par conséquent eux aussi virtuels, on a :

$$\delta N = EA \frac{d(\delta u)}{ds} \quad \delta M = EI \frac{d(\delta \phi)}{ds} \quad \delta V = GA_v \frac{d(\delta v)}{ds} \quad (2.8)$$

On peut bien sûr, à l'inverse, exprimer les déplacements en fonction des efforts intérieurs, soit :

Pour l'état vrai :

$$du' = \frac{N'}{EA} ds \quad d\phi' = \frac{M'}{EI} ds \quad dv' = \frac{V'}{GA_v} ds \quad (2.9)$$

Pour l'état virtuel :

$$d(\delta u) = \frac{\delta N}{EA} ds \quad d(\delta \phi) = \frac{\delta M}{EI} ds \quad d(\delta v) = \frac{\delta V}{GA_v} ds \quad (2.10)$$

Dans cette hypothèse (matériau à comportement élastique linéaire), les expressions des deux théorèmes fondamentaux s'écrivent respectivement sous les formes explicites suivantes :

- Théorème des *déplacements virtuels* :

$$\Sigma P' \cdot \delta d + \int p' \cdot \delta d - \sum R' \cdot \delta r = \int EA \frac{du'}{ds} d(\delta u) + \int EI \frac{d\phi'}{ds} d(\delta \phi) + \int GA_v \frac{dv'}{ds} d(\delta v) \quad (2.11)$$

$$\Sigma P' \cdot \delta d + \int p' \cdot \delta d - \sum R' \cdot \delta r = \int \frac{N' \delta N}{EA} ds + \int \frac{M' \delta M}{EI} ds + \int \frac{V' \delta V}{GA_v} ds$$

La première forme est dite *forme cinématique*, parce que ne faisant intervenir que des déplacements, tandis que la seconde forme est dite *forme mécanique*, parce que ne faisant intervenir que des efforts intérieurs.

- Théorème des *forces virtuelles* :

$$\sum \delta P.d' + \int \delta p.d' - \sum \delta R.r' = \int \frac{N' \delta N}{EA} ds + \int \frac{M' \delta M}{EI} ds + \int \frac{V' \delta V}{GA_v} ds \quad (2.12)$$

On remarquera que dans le cas de matériau élastique linéaire, les seconds membres de (2.11) et (2.12) sont égaux ce qui conduit à la conclusion que  $\delta U = \delta U^*$  et donc que :

$$\sum P'.\delta d + \int p'.\delta d - \sum R'.\delta r = \sum \delta P.d' + \int \delta p.d' - \sum \delta R.r' \quad (2.13)$$

Cette dernière expression ne fait que traduire le *théorème de réciprocité*, dit aussi *théorème de Maxwell*.

## 2.4 Formes particularisées du théorème des travaux virtuels pour les structures faites d'un matériau à comportement élastique linéaire

On verra plus loin que les méthodes d'analyse globale élastique font appel à des *coefficients de flexibilité* (dans la *Méthode des Forces*) ou à des *coefficients de rigidité* (dans la *Méthode des Déplacements*). La détermination de ces deux types de coefficients repose sur une forme particularisée des théorèmes donnés au §2.3 :

- Le *théorème du déplacement unité*, découlant du théorème des déplacements virtuels, pour la détermination des *coefficients de flexibilité* (*Méthode des Forces*) ;
- Le *théorème de la force unité*, découlant du théorème des forces virtuelles, pour la détermination des *coefficients de rigidité* (*Méthode des Déplacements*).
- 

### 2.4.1 Théorème du déplacement unité

Soit une structure déformée sous l'action de forces vraies données et/ou de déplacements imposés. Il y correspond une distribution d'efforts intérieurs vrais  $M, N, V$  (le signe ' est désormais omis par souci de simplification des écritures).

Le *théorème du déplacement unité* sert à déterminer la force  $P$  qui, appliquée en un point donné  $A$  de la structure et dans une direction donnée  $\Delta_A$ , assure l'équilibre de la structure.

Donnons à la structure déformable un champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible tel que le point  $A$  se déplace d'une quantité unitaire dans la direction  $\Delta_A$  tout en faisant en sorte que les points d'application des autres forces éventuellement appliquées subissent un déplacement virtuel nul.

Dans ces conditions le théorème des déplacements virtuels écrit selon sa forme cinématique se réduit à :

$$P.1 = \int EA \frac{du}{ds} \frac{d(\delta u_1)}{ds} ds + \int EI \frac{d\phi}{ds} \frac{d(\delta\phi_1)}{ds} ds + \int GA_v \frac{dv}{ds} \frac{d(\delta v_1)}{ds} ds \quad (2.14)$$

où :

$u, \phi, v$  sont les déplacements vrais de la structure chargée par les forces vraies ;

$\delta u_1, \delta\phi_1, \delta v_1$  sont les déplacements virtuels compatibles associés au déplacement unité imposé en  $A$  selon  $\Delta_A$  dans la structure chargée par les forces vraies.

Pour appliquer ce théorème, on voit clairement que l'on doit connaître l'état déformé de la structure sous l'effet des charges extérieures.

#### 2.4.2 Théorème de la force unité

Soit une structure déformée sous l'action de forces vraies données et/ou de déplacements imposés. Il y correspond une distribution d'efforts intérieurs vrais  $M, N, V$  (le signe ' est désormais omis par souci de simplification des écritures).

Le *théorème de la force unité* sert à déterminer le déplacement  $\Delta_A$  en un point  $A$  de la structure et dans la direction  $\Delta$  qui se produit sous l'état de sollicitation vraie.

Soumettons la structure déformable à un champ de forces virtuelles telles que le travail virtuel complémentaire  $dW^*$  ne comprenne que le déplacement cherché ; il est clair que le champ de forces virtuel ne comporte qu'une force virtuelle appliquée en  $A$  et dans la direction  $\Delta$ . Si on prend cette seule force unitaire, le théorème des forces virtuelles, écrit sous sa forme mécanique, se réduit à :

$$1.d = \int \frac{N \delta N_1}{EA} ds + \int \frac{M \delta M_1}{EI} ds + \int \frac{V \delta V_1}{EA_v} ds \quad (2.15)$$

avec :

$M, N, V$  : distributions vraies des efforts intérieurs ;

$\delta M_1, \delta N_1, \delta V_1$  : distributions des efforts intérieurs virtuels produites par le champ de forces virtuelles choisi.

On notera que les distributions  $\delta M_1, \delta N_1, \delta V_1$  assurent l'équilibre avec la seule force unité.

Les termes « force » et « déplacement » sont à entendre au sens généralisé. Ainsi par exemple, s'il s'agit de trouver la rotation  $\phi$  d'une section donnée de la structure, on appliquera une force associée à cette rotation, soit un moment unitaire  $M=1$ , au droit de cette section.

De manière similaire, s'il s'agit de trouver le déplacement relatif de deux points donnés  $A$  et  $B$  d'une structure donnée soumise à des forces vraies données, le champ de forces virtuelles sera constitué de deux forces unitaires agissant respectivement en  $A$  et  $B$  dans des sens opposés selon la direction  $\Delta$  joignant ces points  $A$  et  $B$ .

**Remarques importantes :**

1. Dans les deux distributions à considérer dans l'expression ci-dessus, la distribution des  $M, N, V$  est la distribution vraie dans la structure réelle. Quant à la distribution des  $\delta M_1, \delta N_1, \delta V_1$ , il suffit qu'elle soit statiquement admissible, c'est-à-dire qu'elle assure l'équilibre; on peut donc la déterminer non pas dans la structure réelle mais dans cette structure rendue isostatique, ce qui est évidemment plus simple.
2. On peut montrer qu'on peut inverser les systèmes, à savoir déterminer la distribution des  $M, N, V$  dans la structure rendue isostatique mais déterminer alors la distribution des  $\delta M_1, \delta N_1, \delta V_1$  dans la structure réelle.
3. Il va sans dire qu'il est aussi loisible de déterminer les deux distributions dans la structure réelle puisque les deux distributions sont non seulement en équilibre avec les forces extérieures mais respectent la compatibilité des déplacements. Par contre, on ne peut les déterminer toutes deux dans une structure rendue isostatique parce que l'indétermination statique ne saurait alors être prise en compte à quelque niveau que ce soit.
4. Il est donc aussi possible de déterminer l'une des distributions dans la structure réelle et l'autre dans la structure dont on a levé une part de l'hyperstaticité – et restant donc hyperstatique mais de degré moindre – mais cela n'offre pratiquement pas d'intérêt.

***2.4.3 Simplifications couramment adoptées***

Dans les seconds membres des expressions (2.14) et (2.15) ci-dessus, on constate qu'il y a chaque fois trois contributions associées respectivement à :

- La déformabilité à l'effort normal ;
- La déformabilité au moment de flexion ;
- La déformabilité à l'effort tranchant.

Dans l'application pratique *manuelle* de ces relations, il est d'usage de se borner à ne prendre en compte que les contributions suffisamment significatives.

Ainsi, dans les structures de type *ossature de bâtiments* (réseaux de poutres et de poteaux), on ne considère normalement que la seule contribution relative à la déformabilité au moment de flexion ; cette simplification ne vaut toutefois que si les éléments structuraux sont à âme pleine. En effet, de grandes ouvertures pratiquées dans l'âme (poutres alvéolaires ou ajourées) sont la cause d'une déformée transversale due à la déformabilité à l'effort tranchant qui peut ne plus être négligée vis-à-vis de la contribution de la déformabilité au moment de flexion.

Par ailleurs, il est clair que si la structure est un *treillis à noeuds articulés*, seule la déformabilité à l'effort normal est présente. Les barres du treillis ne sont en effet soumises ni à flexion, ni à effort tranchant (si l'on « oublie » bien sûr le poids propre des barres) ; la déformabilité à l'effort normal est donc la seule contribution à prendre en compte.

Dans une structure *comportant des mailles triangulées à noeuds rigides*, les contributions des déformabilités à l'effort normal et au moment de flexion seront toutes deux considérées.

Si une structure *comporte des éléments de types divers*, il importe bien sûr de prendre respectivement en compte pour chacun d'entre eux les déformabilités déterminantes qui leur sont propres.

### 3 GENERALITES SUR LES METHODES D'ANALYSE STRUCTURALE ELASTIQUE

Pour trouver les efforts intérieurs et l'état déformé d'une structure donnée soumise à une combinaison d'actions données, on dispose de deux méthodes générales d'analyse globale élastique :

- La *Méthode des Forces*, appelée *Flexibility Method* en terminologie anglaise ;
- La *Méthode des Déplacements*, appelée *Stiffness Method* en terminologie anglaise.

Il s'agit de *méthodes duales*. , ainsi que cela apparaîtra mieux dans le tableau comparatif ci-après (Tableau 3-1).

Ces méthodes sont exposées ici dans le cadre de l'*analyse globale élastique au premier ordre*. Dans ce contexte, le *principe de superposition*, déjà évoqué dans le cours de Mécanique des Matériaux, est applicable ; il peut s'énoncer comme suit :

*Dans une structure analysée au premier ordre et faite d'un matériau à comportement élastique linéaire, tout effet mécanique (réaction, M, N, V, ...) ou géométrique (flèche, pente, rotation, ...) produit par plusieurs actions agissant simultanément sur la structure est égal à la somme de ces mêmes effets produits respectivement par chacune des actions supposées agir séparément.*

Tout comportement non linéaire du matériau (non linéarité matérielle) ou de la structure (non linéarité géométrique) rend le principe de superposition caduc ; il s'agit alors d'effectuer l'analyse globale pour la combinaison d'actions à étudier. En d'autres termes, le principe de superposition n'est plus applicable dans le domaine de réponse non linéaire du matériau constitutif (analyse plastique) et/ou lorsque l'analyse globale est effectuée au second ordre.

Toute structure est définie par un certain nombre de *nœuds*. Ceux-ci sont au moins les *points de rencontre des axes des éléments structuraux constitutifs* de la structure. C'est en ces nœuds que les méthodes d'analyse globale fourniront en premier lieu soit les efforts intérieurs (Méthode des Forces), soit les déplacements, à partir desquels les relations forces-déplacements régissant la réponse structurale de toute barre réunissant deux nœuds adjacents permettront de trouver les efforts intérieurs/déplacements en toute section courante de cet élément, compte tenu des charges agissant entre ces nœuds.

Bien sûr, rien n'empêche de définir des *nœuds additionnels* entre les extrémités des éléments constitutifs de la structure. Cela présente l'avantage d'obtenir directement, en résultat de l'application de la méthode d'analyse, des informations relatives aux efforts intérieurs/déplacements en ces nœuds mais cela augmente par contre la taille du système d'équations à résoudre. Cette manière de faire est assez courante si l'on use de logiciels d'analyse globale ; elle n'est pour ainsi dire pas du tout pratiquée si l'on effectue les calculs à la main.

En raison de la dualité annoncée des deux méthodes d'analyse globale précitées, il est sans doute utile – voire souhaitable – d'en présenter les caractéristiques et propriétés en parallèle.

Lorsque la structure est symétrique et symétriquement/antimétriquement chargée, il est souvent intéressant de choisir des nœuds sur l'axe de symétrie afin de tirer profit des conditions de symétrie/antimétrie pour trouver, avant tout calcul, certaines valeurs des inconnues de type efforts intérieurs (Méthode des Forces) ou déplacements (Méthode des Déplacements) ou certaines relations entre les inconnues.

Tableau 3-1 – Tableau comparatif des deux méthodes générales d'analyse globale

Concept	Méthode des Forces	Méthodes des Déplacements
Degré d'indétermination .....	<p>..... <b>hyperstatique <math>h</math></b>, appelé aussi <b>degré d'hyperstaticité</b>,</p> <p>soit le nombre d'inconnues hyperstatiques, donné par le nombre total de coupures simples nécessaire pour libérer la structure de départ des efforts intérieurs non déterminables par la statique élémentaire et rendre ainsi la structure de départ statiquement déterminée, c'est-à-dire isostatique.</p> <p>Une coupure simple a pour effet d'annuler un effort intérieur inconnu associé à cette coupure.</p>	<p>....<b>cinématique <math>m</math></b>,</p> <p>soit le nombre d'inconnues cinématiques, donné par le nombre total de blocages élémentaires (blocages simples) nécessaire pour bloquer les degrés de liberté de la structure de départ et rendre ainsi celle-ci cinématiquement déterminée.</p> <p>Un blocage simple a pour effet d'annuler un déplacement inconnu associé à un degré de liberté.</p>
Nature des inconnues	<p>De type <b>statique</b>,</p> <p>soit les <i>efforts intérieurs nodiaux <math>X_j</math></i> libérés par les coupures simples réalisées, l'indice <math>j</math> étant le numéro d'une coupure (et non le numéro d'un nœud !), donc <math>j=1, 2, \dots, h</math>.</p>	<p>De type <b>cinématique</b>,</p> <p>soit les <i>déplacements nodiaux <math>D_j</math></i> empêchés par les blocages simples réalisés, l'indice <math>j</math> étant la direction d'un déplacement (et non un numéro de nœud !), donc <math>j=1, 2, \dots, m</math>.</p>
Structure de référence	<p>Structure <b>statiquement déterminée <math>S_0</math></b> – ou encore isostatique – obtenue en effectuant <math>h</math> coupures simples relatives à des efforts intérieurs dans la structure de départ.</p> <p>Quelle que soit la sollicitation, tous les efforts intérieurs qui en résultent peuvent y être obtenus à partir des seules équations d'équilibre.</p>	<p>Structure <b>cinétiquement déterminée <math>C_0</math></b>, obtenue en bloquant les <math>m</math> degrés de liberté (déplacements) des nœuds de la structure de départ.</p> <p>Quelle que soit la sollicitation, tous les déplacements qui en résultent peuvent y être obtenus à partir des seules équations de compatibilité.</p>

	<p>Une structure statiquement déterminée de référence peut donc être obtenue à partir de la structure hyperstatique donnée en y posant nulles les valeurs de toutes les inconnues hyperstatiques choisies.</p>	<p>Une structure cinématiquement déterminée de référence peut donc être obtenue à partir de la structure hyperstatique donnée en y posant nuls les déplacements associés à tous les degrés de liberté des noeuds.</p>
Système de travail	<p>Effets des actions extérieures et effets des inconnues hyperstatiques évalués dans le système de référence <math>S_0</math>.</p>	<p>Effets des actions extérieures et effets des inconnues cinématiques évalués dans le système de référence <math>C_0</math>.</p>
Spécificité éventuel du système de référence	<p><b>Non univoque</b>, puisque le choix des coupures à effectuer pour rendre la structure statiquement déterminée n'est pas unique.</p> <p>Donc laissée au choix du calculateur (sous réserve toutefois que la structure de référence reste une structure stable et donc ni ne constitue un mécanisme en soi, ni ne comporte de mécanisme partiel), d'où procédure non systématique.</p> <p>Donc envisageable pour un calcul manuel mais très peu propice à la base d'un logiciel d'analyse globale.</p>	<p><b>Univoque</b>, puisque le choix des blocages simples à effectuer pour rendre la structure cinématiquement déterminée est conditionné par la seule topologie de la structure et les degrés de liberté de ses noeuds.</p> <p>Donc aucun choix n'est laissé à l'utilisateur, d'où procédure systématique possible.</p> <p>D'où tout indiqué pour servir de base aux logiciels d'analyse globale.</p>
Sens physique des équations	<p><b>Compatibilité des déplacements relatifs <math>d_i</math> (<math>i = 1, 2, \dots, h</math>)</b> des lèvres de chaque coupure <math>i</math> associée à l'inconnue <math>X_i</math> dans le système de référence <math>S_0</math>.</p>	<p><b>Equilibre des forces nodales extérieures <math>P_i</math>, (<math>i = 1, 2, \dots, m</math>)</b>, agissant au noeud dans la direction de chacun des déplacements <math>D_i</math> dans le système de référence <math>C_0</math>.</p>

## 4 METHODE DES FORCES

Soit une *structure statiquement déterminée* – dite aussi *isostatique* - à analyser sous une combinaison d'actions donnée (forces extérieures directement appliquées). En exprimant l'équilibre d'ensemble, on détermine les réactions d'appui. A l'aide de celles-ci et des charges extérieures appliquées, on sait déterminer les efforts intérieurs en toute section d'une quelconque barre de la structure. En d'autres termes, les équations d'équilibre suffisent pour trouver les dits efforts intérieurs. Les notions utiles relatives à l'analyse globale des structures isostatiques ont été vues ailleurs.

Au contraire, en présence d'une *structure statiquement indéterminée* – dite aussi *hyperstatique* - de degré  $h$ , on ne sait y déterminer la distribution complète des efforts intérieurs, sous une combinaison d'actions donnée, par les seules équations d'équilibre global ; il y a en effet  $h$  efforts intérieurs en surabondance.

Transformons en pensée la structure statiquement indéterminée donnée de degré  $h$  en une structure statiquement déterminée en y effectuant  $h$  coupures simples relatives à  $h$  efforts intérieurs excédentaires. Pour ne rien changer à la sollicitation de la structure, il importe d'*exterioriser les efforts libérés par la pratique des coupures*. Les efforts  $X_i$  correspondants sont à appliquer aux lèvres des coupures simples effectuées et doivent être considérés comme des forces additionnelles agissant, au même titre que les forces extérieures directement appliquées, sur la structure coupurée. Le problème est que ces efforts sont inconnus. La structure statiquement déterminée constituant la structure coupurée comme dit plus haut constitue la *structure isostatique de référence* sur laquelle toutes les opérations subséquentes seront menées.

Il y a de toute évidence de *multiples manières* d'effectuer les coupures dont question et donc d'obtenir un système isostatique de référence. Le choix du système isostatique de référence est indifférent pour autant qu'il constitue un *système stable*, c'est-à-dire qu'il ne soit pas un mécanisme.

*L'objet de la Méthode des Forces*, développée dans le présent chapitre, est de déterminer les valeurs  $X_i$  des  $h$  inconnues hyperstatiques. Ces valeurs permettent d'assurer la continuité de la structure au droit des coupures simples pratiquées ; en d'autres termes, en chacune de ces coupures, il ne peut y avoir de déplacement relatif des lèvres de la coupure sous l'action conjointe des forces extérieures directement appliquées et des inconnues hyperstatiques.

Si la structure à analyser comporte un ou plusieurs appuis élastiques, ceux-ci font partie intégrante de cette structure.

## 4.1 Détermination du degré d'indétermination statique

Le degré d'indétermination statique  $h$  – dit aussi degré d'hyperstaticité – provient de liaisons surabondantes :

- Soit de la structure avec le monde extérieur (*hyperstaticité externe*  $h_e$ );
- Soit à l'intérieur même de la structure (*hyperstaticité interne*  $h_i$ ).

On a donc, en toute généralité :

$$h = h_e + h_i \quad (4.1)$$

Il est sans doute attractif d'établir le degré d'indétermination statique d'une structure en distinguant l'hyperstaticité externe et l'hyperstaticité interne. Il n'y a toutefois aucune obligation à procéder de la sorte. La pratique recommandée consiste à effectuer, dans la structure à analyser, une succession de coupures simples jusqu'à rendre cette structure isostatique puis à faire le bilan du nombre de coupures simples requises pour ce faire ; en effet, chaque coupure simple effectuée revient à libérer un effort intérieur et donc réduire le degré d'hyperstaticité d'une unité.

Un appui à rouleau transmet une seule réaction dans la direction perpendiculaire à la direction du déplacement de cet appui (Figure 4-1 a). Un appui à rotule transmet une réaction habituellement définie par deux composantes orthogonales dont on pourrait choisir la direction de manière arbitraire mais que l'on prend souvent horizontale et verticale (Figure 4-1 b). Un encastrement mobilise trois réactions : deux composantes orthogonales de la réaction auxquelles s'ajoute le moment d'encastrement (Figure 4-1 c).

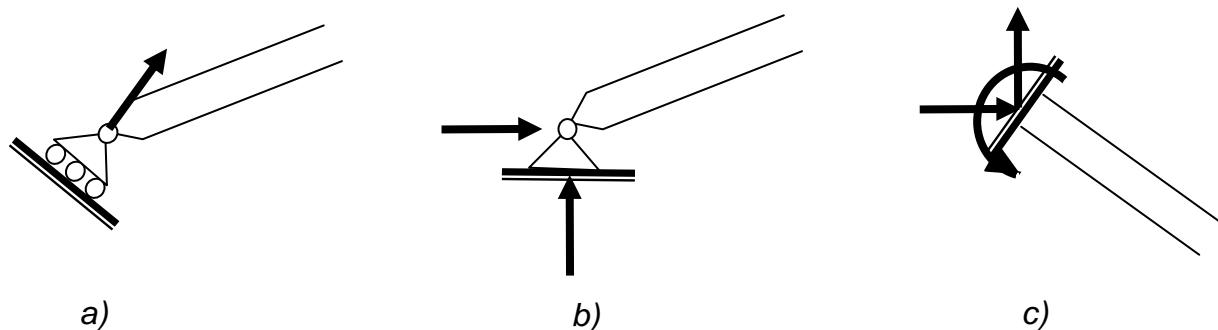


Figure 4-1– Inconnues associées aux réactions d'appui

En une section de barre de structure plane, il y a en général trois efforts intérieurs :  $M$ ,  $N$  et  $V$ . Une barre de treillis à nœuds articulés et chargé en ses seuls nœuds est le siège d'un seul effort intérieur : l'effort normal. Une coupure simple en une section intérieure est toujours relative à un seul effort intérieur. Ainsi, par exemple :

- Une coupure relative à un moment fléchissant dans une section donnée de barre consiste en une rotule insérée dans cette section permettant ainsi une rotation relative des lèvres de la coupure (Figure 4-2 a);
- Une coupure relative à un effort tranchant dans une section donnée de barre revient à y placer deux plateaux parallèles, solidaires des portions adjacentes de la barre et perpendiculaires à l'axe de celle-ci, qui autorisent un déplacement relatif des lèvres de la coupure dans la direction transversale à la barre (Figure 4-2 b);

- Une coupure relative à un effort normal dans une section donnée de barre s'obtient en y plaçant une coulisse qui permet un déplacement normal relatif des lèvres de la coupure (Figure 4-2 c).

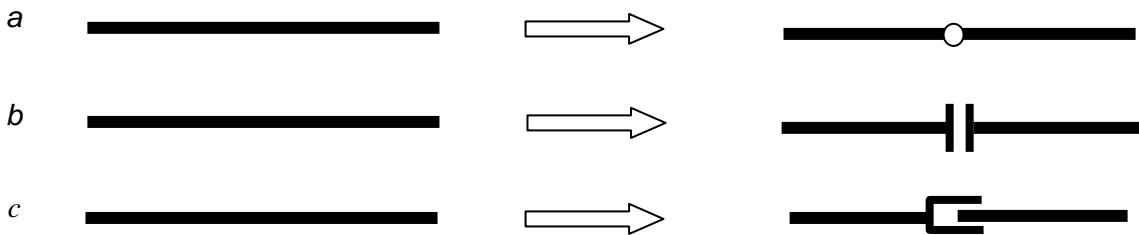


Figure 4-2 – Coupures relatives aux efforts intérieurs

A titre d'exemple, considérons la structure plane de la Figure 4-3 a, constituée d'un cadre à simple travée et d'un tirant réunissant les têtes des poteaux. Le cadre est constitué de deux poteaux et d'un arbalétrier retroussé assemblés rigidement entre eux. Ce cadre est supposé encastré en ses deux pieds. Le tirant est relié au cadre par une rotule parfaite à chacune de ses extrémités ; il n'est pas soumis à des charges entre ses extrémités (poids propre négligé) de sorte que ce tirant ne peut qu'être soumis à un effort normal. Cette structure a un degré d'hyperstatiqueité  $h = 4$ .

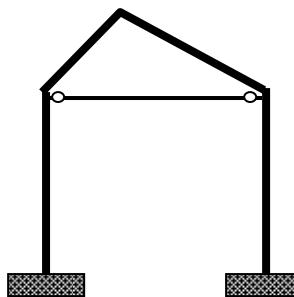


Figure 4-3 – Exemple de structure hyperstatique

En effet, on peut rendre isostatique la structure de la Figure 4-3 en libérant totalement l'enca斯特 au pied du poteau gauche (3 coupures simples relatives respectivement à  $M$ ,  $N$  et  $V$ ) et en coupurant le tirant vis-à-vis de l'effort normal (1 coupure simple relative à  $N$ ) ; les inconnues hyperstatiques sont alors : le moment d'encaissement  $X_1$ , les réactions respectivement verticale  $X_2$  et horizontale  $X_3$  au pied du poteau gauche et l'effort normal  $X_4$  dans le tirant. La structure de référence ainsi obtenue est de type *poutre cantilever* (Figure 4-4 a).

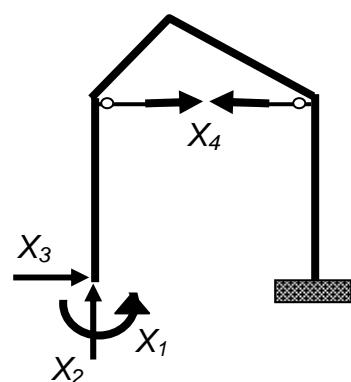
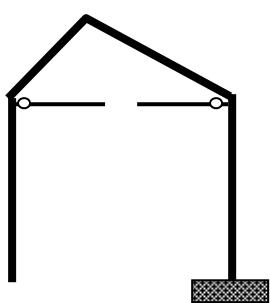
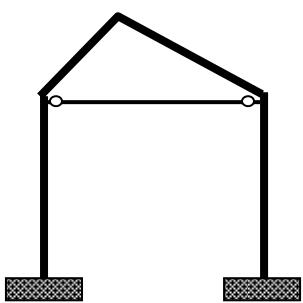
Une deuxième manière de procéder est d'effectuer des coupures simples vis-à-vis des moments d'encaissement au pied des deux poteaux (2 coupures simples relatives à  $M$ ), de la réaction horizontale – aussi appelée *poussée* – en pied de poteau gauche (1 coupure simple relative à  $H$ ) et de l'effort normal dans le tirant (1 coupure simple relative à  $N$ ). Les inconnues sont ici: les moments d'encaissement  $X_1$  et  $X_2$  en pied des deux poteaux, la poussée  $X_3$  en pied de poteau gauche et l'effort normal  $X_4$  dans le tirant. Le système de référence est de type *poutre sur appuis simples d'extrémités* (Figure 4-4 b).

Une troisième manière est de réduire la structure à un *arc tri-articulé* – connu comme étant isostatique - en effectuant des coupures simples vis-à-vis des moments d'encastrement en pied des deux poteaux, du moment de flexion au faîte du cadre (3 coupures simples relatives à  $M$ ) ainsi que de l'effort normal dans le tirant (1 coupure simple relative à  $N$ ) (Figure 4-4 c).

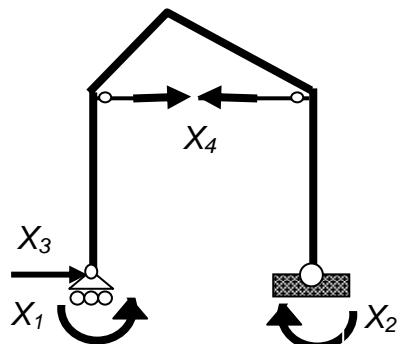
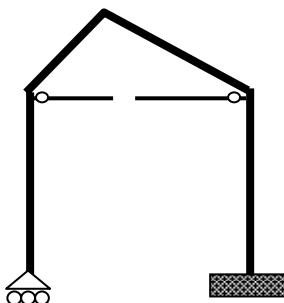
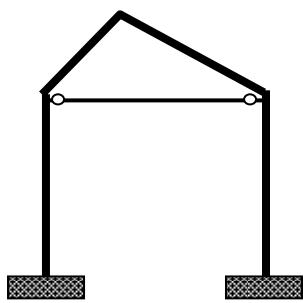
On pourrait encore effectuer des coupures simples vis-à-vis de  $M$ ,  $N$  et  $V$  en faîte du cadre (3 coupures simples) et vis-à-vis de l'effort normal dans le tirant (1 coupure simple); le système de référence est alors constitué de deux poutres cantilevers associées aux deux parties du cadre isolées par les coupures dont question (Figure 4-4 d).

Il existe bien d'autres solutions; elles ne sont pas discutées ici.

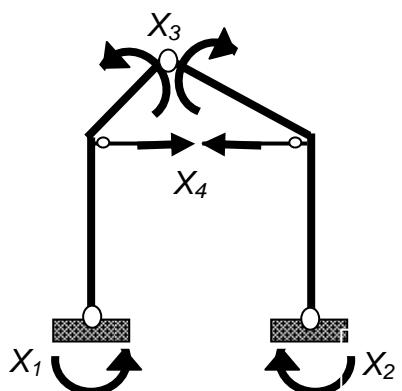
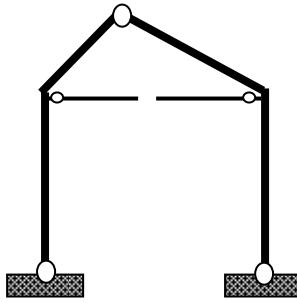
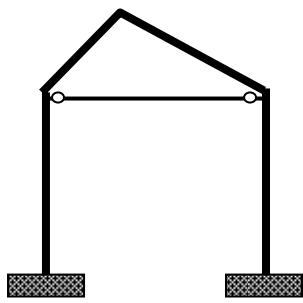
*Tout effort libéré par une coupure consiste en fait en une paire de forces.* Chacune de celles-ci agit sur un des tronçons isolés par la coupure. Il est essentiel de les représenter toutes deux lorsqu'on effectue une coupure interne à la structure ; ce l'est moins s'il s'agit d'une coupure externe, c'est-à-dire effectuée à une liaison de la structure avec la fondation, car l'une de ces forces est directement appliquée à la fondation.



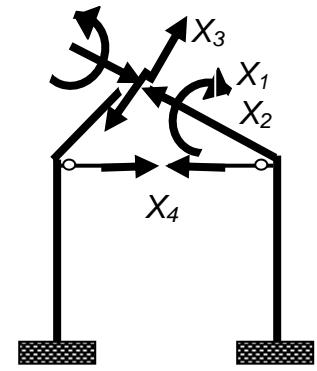
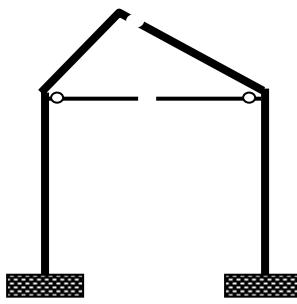
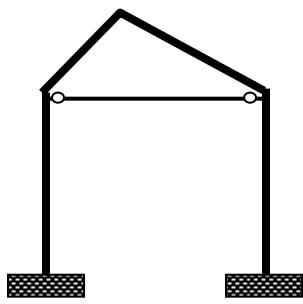
a) Type poutre sur appuis simples



b) Type poutre cantilever



c) Type arc tri-articulé



d) Type double poutre cantilever

Figure 4-4 – Exemples de systèmes de référence pour la Méthode des Forces

On a dit que la structure isostatique de référence doit être stable. Ainsi, celle obtenue en plaçant des rotules (coupures simples relatives au moment de flexion) en pied et en tête des deux poteaux (4 coupures simples) n'est pas acceptable; l'égale hauteur des poteaux permet en effet à la structure de se déformer en parallélogramme, ce qui en fait un mécanisme cinématique (Figure 4-5 b). Il en serait de même si l'on envisageait d'effectuer des coupures simples relatives à la poussée et au moment d'encastrement en pied des deux poteaux; la structure n'est pas intérieurement un mécanisme mais elle l'est globalement puisqu'elle peut librement se déplacer horizontalement à la manière d'un caddie de grande surface (Figure 4-5 c).

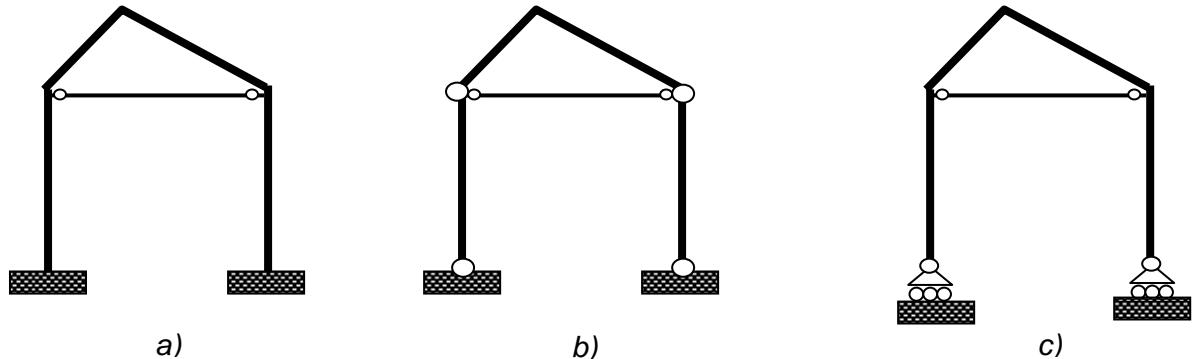


Figure 4-5 – Systèmes de référence non appropriés

A titre d'exercices, on déterminera le degré d'hyperstatilité des structures représentées à la Figure 4-6.

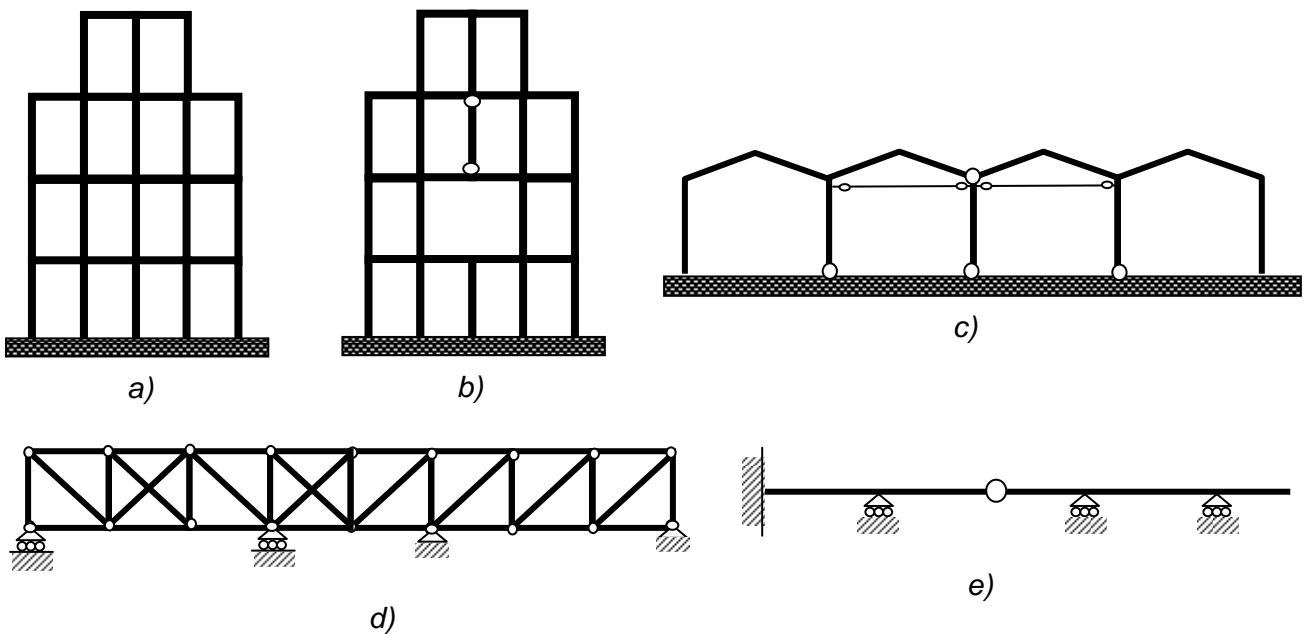


Figure 4-6 – Structures hyperstatiques

Les coupures simples peuvent s'opérer dans des sections arbitraires ; ainsi, *il existe une multiplicité de structures isostatiques de référence* associées à la structure à étudier. Le choix de l'une d'entre elles comme système de référence  $S_0$  n'a pas d'influence sur le résultat final. Toutefois, dans certains cas, un choix judicieux des coupures simples permet de simplifier substantiellement les calculs à effectuer (voir § 4.5).

## 4.2 Equation générale de la Méthode des Forces

Les forces extérieures directement appliquées, d'une part, et les inconnues hyperstatiques extériorisées, d'autre part, produisent des déplacements relatifs des lèvres de chacune des  $h$  coupures simples. Désignons par :

- *Coefficient de flexibilité*  $f_{iP}$ , le déplacement relatif des lèvres de la coupure simple  $i$  produit par les forces extérieures directement appliquées  $P$  ;
- *Coefficient de flexibilité*  $f_{ij}$ , le déplacement relatif des lèvres de la coupure simple  $i$  produit par une inconnue  $j$  des  $h$  inconnues prise à sa valeur unitaire, de sorte que  $X_j f_{ij}$  représente le déplacement relatif des lèvres de la coupure simple  $i$  produit par l'inconnue  $X_j$  prise à sa vraie valeur.

Par le principe de superposition (des déplacements), on obtient le déplacement relatif résultant de la coupure simple  $i$  sous l'effet des forces extérieures directement appliquées  $P$  et de toutes les inconnues  $X_j$  selon :

$$\sum_{j=1}^h f_{ij} X_j + f_{iP} \quad (i = 1, 2, \dots, h) \quad (4.2)$$

En réalité, la structure à étudier ne présente aucune discontinuité aux endroits où des coupures simples ont été pratiquées pour définir la structure isostatique de référence  $S_0$ ; en d'autres termes, le déplacement relatif des lèvres de chacune des  $h$  coupures doit être nul. En écrivant une telle *condition de compatibilité (continuité)* en chacune des  $h$  coupures simples, on obtient un système de  $h$  équations (nombre de coupures simples) à  $h$  inconnues (nombre d'efforts intérieurs inconnus) :

$$\sum_{j=1}^h f_{ij} X_j + f_{iP} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, h) \quad (4.3)$$

ou sous forme matricielle :

$$[F] \langle X \rangle = \langle A \rangle \quad (4.4)$$

$[F]$  est la *matrice de flexibilité* de la structure ; elle est constituée du tableau carré des coefficients de flexibilité  $f_{ij}$  ; elle a les dimensions  $(h \times h)$ . Le vecteur colonne  $[X]$ , de dimensions  $(h \times 1)$ , est le vecteur des inconnues  $X_j$  tandis que le vecteur colonne  $[A]$ , de dimensions  $(h \times 1)$ , a les coefficients de flexibilité  $(-f_{iP})$  comme composantes (au signe près).

La résolution du système d'équations (4.3) ou (4.4) fournit donc les valeurs des  $h$  inconnues  $X_i$ .

## 4.3 Détermination des coefficients de flexibilité $f_{ij}$ et des $f_{iP}$

Rappelons qu'un coefficient de flexibilité  $f_{ij}$  n'est rien d'autre que le déplacement relatif des lèvres de la coupure simple  $i$  (dans la direction  $i$ ) sous l'effet d'une valeur unitaire  $X_j = 1$  de l'inconnue  $X_j$  agissant dans la coupure  $j$  (dans la direction  $j$ ).

Quant au coefficient de flexibilité  $f_{iP}$ , il représente le déplacement relatif des lèvres de la coupure simple  $i$  (dans la direction  $i$ ) sous l'effet des forces extérieures directement appliquées  $P$ .

Ces coefficients se calculent à partir du *théorème de la force unité* selon:

$$f_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} ds + \int \frac{M_i M_j}{EI} ds + \int \frac{V_i V_j}{EA_v} ds \quad (4.5)$$

$$f_{iP} = \int \frac{N_i N_P}{EA} ds + \int \frac{M_i M_P}{EI} j ds + \int \frac{V_i V_P}{EA_v} \quad (4.6)$$

avec :

$M_i, N_i, V_i$  : distributions des  $M, N, V$  dans la structure de référence  $S_0$  sous  $X_i = 1$  ;

$M_j, N_j, V_j$  : distributions des  $M, N, V$  dans la structure de référence  $S_0$  sous  $X_j = 1$  ;

$M_P, N_P, V_P$  : distributions des  $M, N, V$  dans la structure de référence  $S_0$  sous l'effet des forces  $P$ .

En vertu du *principe de réciprocité de Maxwell*, on a :

$$f_{ij} = f_{ji} \quad (4.7)$$

Cette propriété entraîne la *symétrie de la matrice de flexibilité [F] de la structure*, intervenant dans (4.4).

Ainsi qu'on l'a déjà dit au §2.4.3, on ne conserve habituellement que les contributions les plus significatives dans l'expression des coefficients de flexibilité. Ainsi, pour une barre d'ossature plane, les déformabilités dues respectivement à l'effort tranchant et à l'effort normal sont généralement négligeables devant la déformabilité due au moment de flexion ; dans ces conditions, les coefficients de flexibilité se réduisent à :

$$f_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI} ds \quad (4.8)$$

$$f_{iP} = \int \frac{M_i M_P}{EI} ds \quad (4.9)$$

Au contraire, dans un treillis à nœuds articulés et chargé en ses noeuds, les barres sont soumises exclusivement à efforts normaux (poids propre négligé) ; la seule déformabilité à considérer est celle due à l'effort normal. Ici, les coefficients de flexibilité se réduisent à :

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{N_i N_j L_k}{EA_k} \quad (4.10)$$

$$f_{iP} = \sum_{k=1}^n \frac{N_i N_P L_k}{EA_k} \quad (4.11)$$

la somme étant étendue aux  $n$  barres composant le treillis.

Il est clair que les valeurs des coefficients de flexibilité  $f_{ij}$  ( $i \neq j$ ) peuvent indifféremment être positives ou négatives. Celles des coefficients de flexibilité  $f_{ii}$  sont par contre toujours positives.

Si la structure à analyser comporte un ou plusieurs appuis élastiques, il a déjà été dit que ceux-ci doivent être considérés comme faisant partie intégrante de cette structure. Les coefficients de flexibilité  $f_{ij}$  incorporent donc implicitement les effets d'une déformabilité éventuelle des appuis.

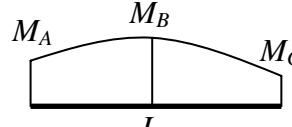
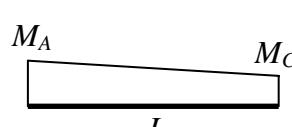
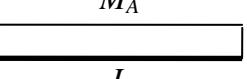
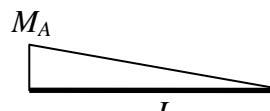
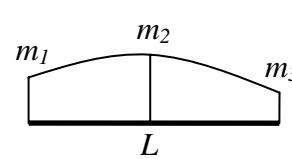
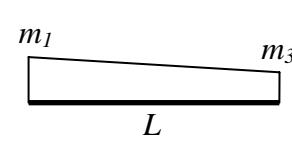
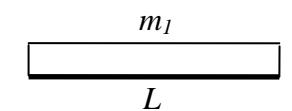
Les termes indépendants  $f_{iP}$  des équations (4.3) représentent les déplacements relatifs des lèvres de la coupure  $i$  sous l'effet des actions extérieures et ce quelle que soit la nature de celles-ci : forces extérieures directement appliquées, effets thermiques ( $f_{iP} = f_{iT}$ ), tassement d'appui ( $f_{iP} = f_{iA}$ ).

#### 4.4 Tables pour le calcul des $f_{ij}$ et $f_{iP}$

Etant donné les distributions de fonctions  $F(x)$  et  $f(x)$  sur un élément structural *prismatique* (c'est-à-dire. de propriétés  $A$ ,  $A_v$  et  $I$  constantes le long de l'élément considéré) de longueur  $L$ , il existe des tables donnant directement le résultat de l'intégrale  $\int_0^L F(x)f(x)dx$

pour les formes les plus courantes de distribution de ces fonctions lorsque celles-ci sont un moment de flexion, un effort normal ou un effort tranchant. L'usage de ces tables accélère le calcul numérique des coefficients de flexibilité. Ces tables constituent donc un outil indispensable pour la mise en œuvre de la Méthode des Forces.

Le tableau suivant donne quelques-uns des résultats les plus utilisés.

$\int M_x m_i dx$				
	$\frac{L}{30} \begin{bmatrix} M_A(4m_1 + 2m_2 - m_3) \\ +2M_B(m_1 + 8m_2 + m_3) \\ +M_C(-m_1 + 2m_2 + 4m_3) \end{bmatrix}$	$\frac{L}{6} \begin{bmatrix} M_A m_1 \\ +2(M_A + M_C)m_2 \\ +M_C m_3 \end{bmatrix}$	$\frac{L}{6} M_A [m_1 + 4m_2 + m_3]$	$\frac{L}{6} M_A (m_1 + 2m_2)$
	$\frac{L}{6} \begin{bmatrix} M_A m_1 \\ +2M_B(m_1 + m_3) \\ +M_C m_3 \end{bmatrix}$	$\frac{L}{6} \begin{bmatrix} M_A(2m_1 + m_3) \\ +M_C(m_1 + 2m_3) \end{bmatrix}$	$\frac{L}{2} M_A (m_1 + m_3)$	$\frac{L}{6} M_A (2m_1 + m_3)$
	$\frac{L}{6} (M_A + 4M_B + M_C)m_1$	$\frac{L}{2} (M_A + M_C)m_1$	$LM_A m_1$	$\frac{L}{2} M_A m_1$
	$\frac{L}{6} (2M_B + M_C)m_3$	$\frac{L}{6} (M_A + 2M_C)m_3$	$\frac{L}{2} M_A m_3$	$\frac{L}{6} M_A m_3$

## 4.5 Distribution des efforts intérieurs dans la structure réelle

Dès que les valeurs des  $h$  inconnues hyperstatiques  $X_i$  sont obtenues, on peut, par le *principe de superposition*, calculer les valeurs des efforts intérieurs  $M(x)$ ,  $N(x)$  et  $V(x)$  en toute section d'abscisse  $x$  d'une quelconque barre de la structure selon :

$$\begin{aligned} M(x) &= M_p(x) + \sum_{i=1}^h X_i M_i(x) \\ N(x) &= N_p(x) + \sum_{i=1}^h X_i N_i(x) \\ V(x) &= V_p(x) + \sum_{i=1}^h X_i V_i(x) \end{aligned} \quad (4.12)$$

avec :

- |                          |   |
|--------------------------|---|
| $M_p(x), N_p(x), V_p(x)$ | valeurs des $M$ , $N$ , $V$ à l'abscisse $x$ déterminées dans la structure isostatique de référence $S_0$ sous l'effet des seules actions extérieures ;                         |
| $M_i(x), N_i(x), V_i(x)$ | valeurs des $M$ , $N$ , $V$ à l'abscisse $x$ déterminées dans la structure isostatique de référence sous l'effet de l'inconnue hyperstatische $X_i$ prise à sa valeur unitaire. |

## 4.6 Remarques sur le choix des coupures

1. Dans le cas où les forces extérieures sont symétriques (resp. antimétriques) par rapport à un ou plusieurs axes, il est particulièrement judicieux de définir le système isostatique de référence  $S_0$  en effectuant des coupures sur l'axe de symétrie (resp. d'antimétrie). Dans ce cas, en effet, certaines des inconnues peuvent être trouvées nulles ou égales (même signes ou signes opposés) à partir de considérations de symétrie (resp. d'antimétrie). Tout se passe alors comme si le degré d'hyperstaticité était réduit. Il est par exemple évident que :
  - Les inconnues hyperstatiques de type antimétrique ( $V$ ) sont nulles sur l'axe de symétrie d'une structure symétrique symétriquement chargée ;
  - Les inconnues hyperstatiques de type symétrique ( $M$ ,  $N$ ) sont nulles sur l'axe de symétrie d'une structure symétrique antimétriquement chargée.
2. Pour les poutres continues sur appuis fixes, il n'est généralement pas recommandé de choisir les réactions d'appui comme inconnues hyperstatiques. Le choix des moments sur appuis est plus judicieux parce que la matrice de flexibilité est moins peuplée, chaque ligne ne comportant que 3 termes non nuls quel que soit le nombre d'appuis. Ceci est dû à une interférence réduite entre diagrammes des moments.
3. A titre d'exercice, on peut montrer que l'application de la Méthode des Forces au cas de poutres continues prismatiques par travées sur appuis fixes, pour lesquelles les moments sur appuis intermédiaires sont choisis comme inconnues hyperstatiques, conduit à l'équation des trois moments – appelée aussi équation de Clapeyron – déjà

établie en Mécanique des Matériaux. Une telle équation ne comporte qu'au maximum 3 termes en les inconnues, traduisant la continuité sur un appui intermédiaire  $i$ , séparant les travées  $i$  et  $(i+1)$ ; elle fait intervenir le terme en  $M_i$  ainsi que ceux relatifs aux moments aux appuis adjacents situés de part et d'autre de l'appui  $i$ , soit  $M_{i-1}$  et  $M_{i+1}$ :

$$\frac{L_i}{6EI_i} M_{i-1} + \left( \frac{L_i}{3EI_i} + \frac{L_{i+1}}{3EI_{i+1}} \right) M_i + \frac{L_{i+1}}{6EI_i + 1} M_{i+1} = -\frac{S_G^i}{EI_i L_i} - \frac{S_D^{i+1}}{EI_{i+1} L_{i+1}} \quad (4.13)$$

avec :

$S_G^i$  : moment statique par rapport à l'extrémité gauche (G) de la travée  $i$  du diagramme des moments isostatiques  $\mu_i(x)$  dans la travée  $i$  dû aux charges extérieures directement appliquées ;

$S_D^{i+1}$  : moment statique par rapport à l'extrémité droite (D) de la travée  $(i+1)$  du diagramme des moments isostatiques  $\mu_{i+1}(x)$  dans la travée  $(i+1)$  dû aux charges extérieures directement appliquées.

## 5 METHODE DES DEPLACEMENTS

Dans la Méthode des Déplacements, la structure est définie, principalement, par des *nœuds* nécessairement situés aux extrémités des barres qui la composent (en ce compris les extrémités reliées à la fondation) et, accessoirement, par des *nœuds* additionnels situés entre les extrémités de barres. On se contentera ici, sans que cela soit limitatif en quoi que ce soit, de considérer des *nœuds* aux seules extrémités des barres.

Chaque *nœud* d'une structure possède un certain nombre de *degrés de liberté en déplacement*. Pour le cas le plus général, un *nœud de structure tridimensionnelle* à barres assemblées rigidement, a *six degrés de liberté* : trois en translation et trois en rotation. Si la structure est plus simple (structure plane, treillis à *nœuds articulés*, ...), certains des degrés de liberté précités sont sans effet et ne sont dès lors pas pris en considération; en d'autres termes, *on n'utilise que les degrés de liberté directement utiles*.

Les efforts intérieurs dans une barre de structure plane peuvent être traités indépendamment l'un de l'autre si le centre de gravité et le centre de torsion de cette section coïncident ; cela revient à exiger que la section transversale de cette barre soit symétrique par rapport à ses deux axes principaux d'inertie. On admettra qu'il en est ainsi; si ce n'était pas le cas, les résultats de l'analyse resteront approximatifs. Pour une barre de structure plane sollicitée dans son plan, il suffit que la section transversale possède un plan de symétrie coïncidant avec le plan de sollicitation.

Le Tableau 5-1 reprend, pour divers types de structures, leur mode de résistance, le nombre de degrés de liberté d'un de leurs *nœuds* et la nature des efforts intérieurs.

*Tableau 5-1 – Degrés de liberté des nœuds selon le type de structure*

Type de structure	Mode de résistance	Efforts intérieurs	Degrés de liberté par noeud
Poutre continue	Flexion plane	2 : - Moment de flexion - Effort tranchant	2 : - Déplacement vertical dans plan de flexion - Rotation dans plan de flexion
Treillis plan	Efforts normaux	1 : - Effort normal	2 : - Déplacement vertical - Déplacement horizontal
Structure plane chargée dans son plan	Flexion plane	3 : - Moment de flexion - Effort normal - Effort tranchant	3 : - Déplacement horizontal - Déplacement vertical - Rotation
Structure plane chargée perpendiculairement à son plan	Flexion	3 : - Moment de flexion $M_x$ - Moment de flexion $M_y$ - Effort tranchant selon z	3 : - Déplacement transversal au plan de la structure - Rotation autour de x - Rotation autour de y
Treillis spatial	Efforts normaux	1 : - Effort normal	3 : - Déplacements selon 3 axes orthogonaux
Structure spatiale	Flexion	6 : - Effort normal - 2 efforts tranchants - 2 moments de flexion - Moment de torsion	6 : - Déplacements selon 3 axes orthogonaux - Rotations autour de ces 3 mêmes axes orthogonaux

Dans le cadre du présent cours, on traite essentiellement les structures planes, entendant par là les types décrits au Tableau 5-1 à l'exception de la structure spatiale et du treillis spatial. Des exemples des familles abordées sont illustrés à la Figure 5-1.

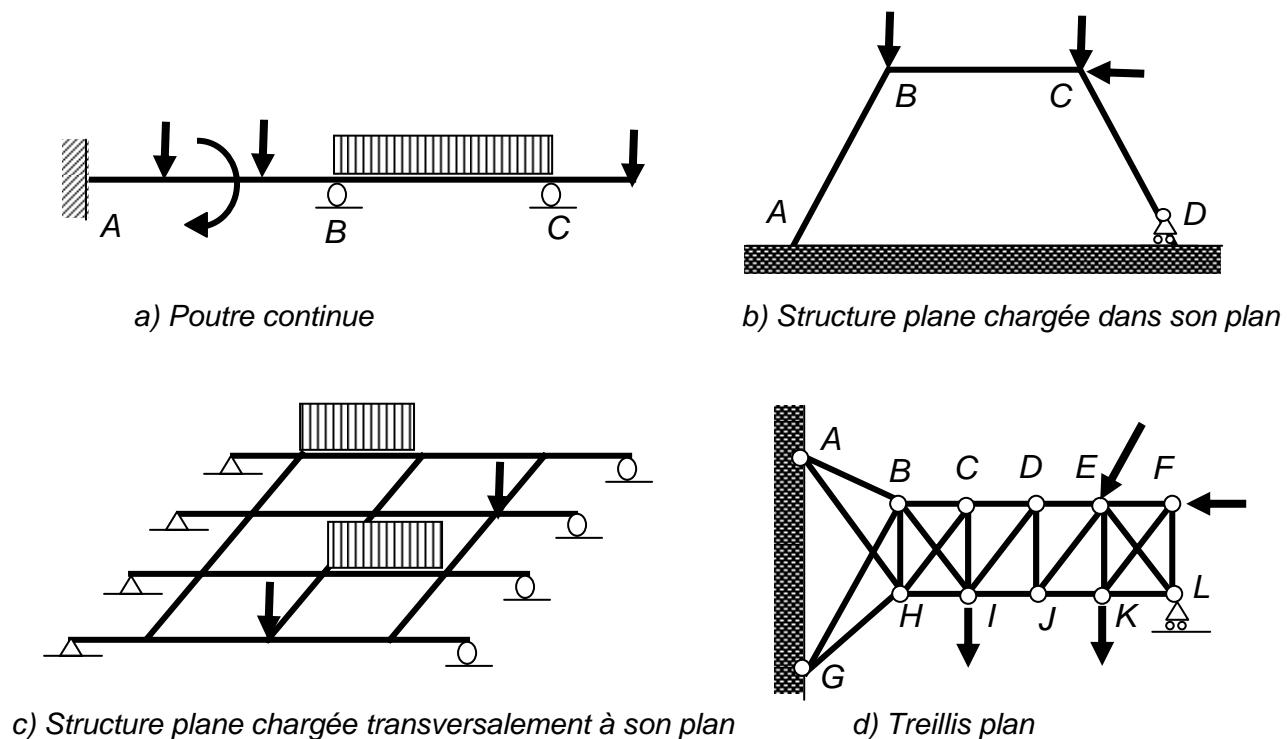


Figure 5-1 – Divers types de structures planes

En l'absence d'effort normal, la poutre de la Figure 5-1-a a un degré d'indétermination cinématique de 2 : les rotations sur les deux appuis à rouleau *B* et *C*.

Celui de la structure plane de la Figure 5-1-b est de 7 : 3 déplacements en chacun des nœuds *B* et *C* et 1 déplacement horizontal au nœud *D*.

Le grillage de poutres de la Figure 5-1-c possède 3 degrés d'indétermination sur chacun des 12 nœuds centraux et 2 (les rotations) sur chacun des 8 appuis, ce qui fait un total de 52.

Quant au treillis plan à nœuds articulés de la Figure 5-1-d, 19 déplacements sont permis : 2 translations selon l'horizontale et selon la verticale aux noeuds *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *H*, *I*, *J* et *K* et une translation horizontale à l'appui *L*.

## 5.1 Systèmes d'axes et signes des déplacements généralisés associés

Les systèmes d'axes utilisés sont du type cartésien (3 axes orthogonaux) *dextrorsum*.

On distingue :

- Le *système global – ou absolu – XYZ*, auquel l'entièreté de la structure sera attachée, unique mais arbitraire ;
- Un *système local xyz*, propre à chacune des barres composant la structure, tel que l'axe *x* est dirigé selon l'axe longitudinal *x* de la barre tandis que les axes *y* et *z* sont orientés selon les axes principaux d'inertie de la section transversale.

Les barres d'une structure seront caractérisées dans les systèmes locaux qui leur sont propres. Les grandeurs aux nœuds subiront ensuite une transformation de manière à les transposer dans le système global auquel la structure est attachée ; il importe en effet que les équations d'équilibre des nœuds, qui sont établies lors de la mise en œuvre de la Méthode des Déplacements, soient exprimées dans le seul système global ; les inconnues déplacements  $D_i$ , les coefficients de rigidité  $k_{ij}$  et les termes indépendants ( $P_i - k_{iP}$ ) seront donc finalement exprimés dans le système global.

La

Figure 5-2 montre, en a), une structure plane, en b), le système global d'axes  $X, Y, Z$  dans lequel cette structure est définie et, en c) et d), deux systèmes locaux d'axes  $x_1, y_1, z_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  servant à caractériser respectivement une traverse horizontale et la traverse oblique. Il est clair que l'orientation de l'axe local  $x$  définit ipso facto le nœud origine de la barre et son nœud extrémité.

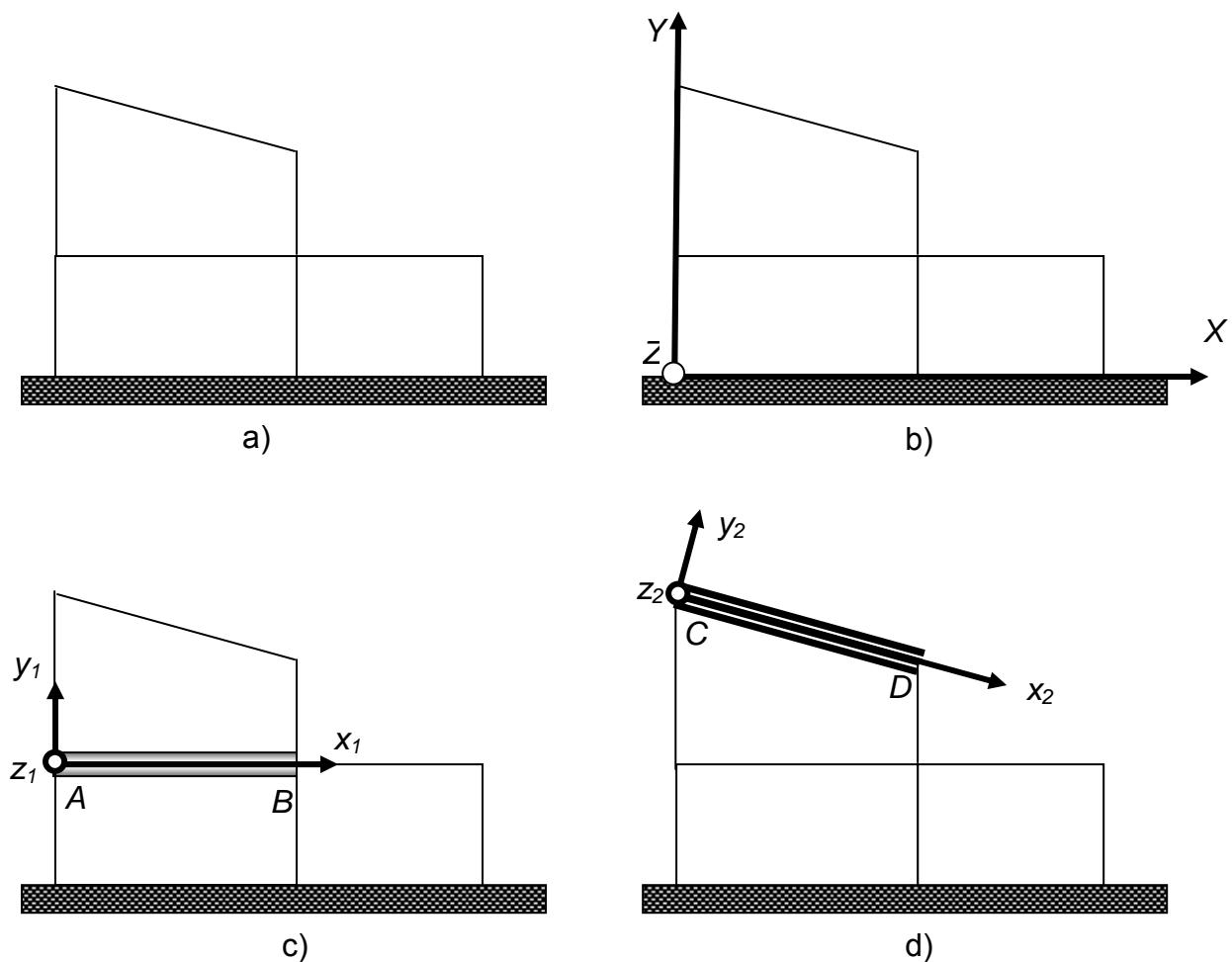


Figure 5-2 – Système global et systèmes locaux

## 5.2 Matrice de rigidité d'un élément

### 5.2.1 Cas général : Barre de structure tridimensionnelle

La barre prismatique la plus complexe qui soit est la barre de structure tridimensionnelle à barres assemblées rigidement (voir Tableau 5-1). Elle est caractérisée par :

- Une longueur  $L$ , mesurée entre ses extrémités ;
- Des raideurs en flexion  $EI_y$  et  $EI_z$  autour des axes fort  $y$  et faible  $z$  de sa section transversale ;
- Une raideur en torsion  $GJ$  autour de son axe longitudinal  $x$ .

A ce stade, on néglige, par souci de simplification, la déformabilité en cisaillement, d'une part, et les effets de gauchissement de la section transversale d'autre part.

Dans un système local, les degrés de liberté et les efforts intérieurs aux nœuds de la barre à laquelle ce système est lié, obéissent à une convention de signe unique : *toute grandeur est positive si son vecteur représentatif est dirigé dans le sens positif de l'axe qui le porte.*

Soit une barre  $AB$  de cette structure. On a vu que les extrémités  $A$  et  $B$  possèdent chacune six degrés de liberté : trois de type translation et trois de type rotation. Les 12 degrés de liberté sont normalement rangés dans un *ordre conventionnel strict* :

- On range les 6 degrés de liberté du nœud origine  $A$  puis les 6 du nœud terminal  $B$  ;
- Dans chacun de ces deux groupes, on range d'abord les 3 degrés de liberté en translation puis les trois degré de liberté en rotation ;
- Dans chacun de ces deux sous-groupes, on suit l'ordre  $x, y, z$ .

Le résultat est indiqué sur la Figure 5-3.

Les efforts intérieurs correspondants à ces douze déplacements suivent ce même schéma strict.

Rappelons que la *barre de référence* de la Méthode des Déplacements a tous ses degrés de liberté bloqués. Tout déplacement unitaire associé à un degré de liberté  $i$  que l'on libère génère une réaction  $k_{ii}$  en  $i$  et une réaction  $k_{ij}$  ( $i \neq j$ ) en chacun des 11 autres blocages ; il y a donc, pour chaque degré libéré  $i$ , au total 12 réactions  $k_{ij}$ .

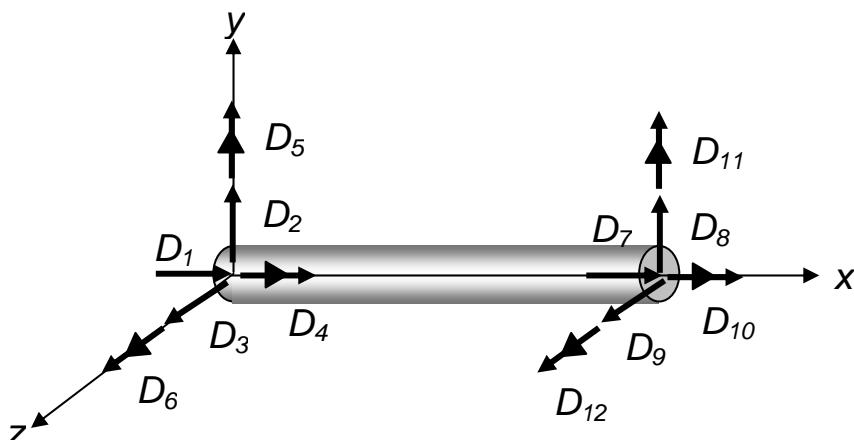


Figure 5-3 – Convention de signes

Il en résulte que la *matrice de rigidité* d'une barre de structure spatiale est un tableau carré de dimensions (12x12) ; elle comporte donc au total 144 termes.

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \dots & k_{1,12} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \dots & k_{2,12} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{12,1} & k_{12,2} & \dots & k_{12,12} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

En vertu du théorème de Maxwell, la *matrice de rigidité d'une barre est symétrique*, soit :

$$k_{i,j} = k_{j,i} \quad (5.2)$$

Les *coefficients de rigidité*  $k_{ij}$  sont des réactions aux déplacements des noeuds de la barre ; elles contribuent donc à maintenir celle-ci en équilibre.

La forme explicite de la matrice de rigidité de la barre de structure tridimensionnelle à barres assemblées rigidement est donnée au Tableau 5-2.

$k_{i,1}$	$k_{i,2}$	$k_{i,3}$	$k_{i,4}$	$k_{i,5}$	$k_{i,6}$	$k_{i,7}$	$k_{i,8}$	$k_{i,9}$	$k_{i,10}$	$k_{i,11}$	$k_{i,12}$
$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
0	$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$		$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$
0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0
0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0	0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0	0	0
0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_y}{L}$	0	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_y}{L}$	0
0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$
$[k]$	$-\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	$\frac{EA}{L}$	0	0	0	0	0
	0	$-\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	$\frac{12EI_z}{L^3}$	0	0	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$
	0	0	$-\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	0	$\frac{12EI_y}{L^3}$	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0
	0	0	0	$-\frac{GJ}{L}$	0	0	0	$\frac{GJ}{L}$	0	0	0
	0	0	$-\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{2EI_y}{L}$	0	0	$\frac{6EI_y}{L^2}$	0	$\frac{4EI_y}{L}$	0
	0	$\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	0	$\frac{2EI_z}{L}$	0	$-\frac{6EI_z}{L^2}$	0	0	$\frac{4EI_z}{L}$

Tableau 5-2 – Forme explicite de la matrice de rigidité de la barre (de référence) bi-encastrée de structure tridimensionnelle

### 5.2.2 Expression des coefficients de rigidité $k_{ij}$

La détermination des *coefficients de rigidité*  $k_{ij}$  se fonde sur l'application du *théorème unité*.

Considérons, à titre d'exemple, les termes des première et deuxième lignes – et donc des première et deuxième colonnes - de la matrice de rigidité de la barre de structure tridimensionnelle à laquelle il est fait référence plus haut. La barre cinématiquement déterminée de référence a ses six degrés de liberté bloqués en chacune de ses extrémités. Elle s'apparente donc à une *barre bi-encastree*; si l'on recourt communément à cette dernière appellation, on ne perdra pas de vue qu'il s'agit d'un raccourci de langage puisque cette caractéristique ne fait que résulter des blocages inhérents à la Méthode des Déplacements.

#### Première ligne (colonne)

L'effet d'un déplacement unitaire  $D_1 = 1$  est un raccourcissement axial de la barre qui ne peut être le fait que d'un effort normal. Ainsi, tous les  $k_{ij}$  sont nuls à l'exception de  $k_{1,1}$  et  $k_{7,1}$  (Figure 5-4).

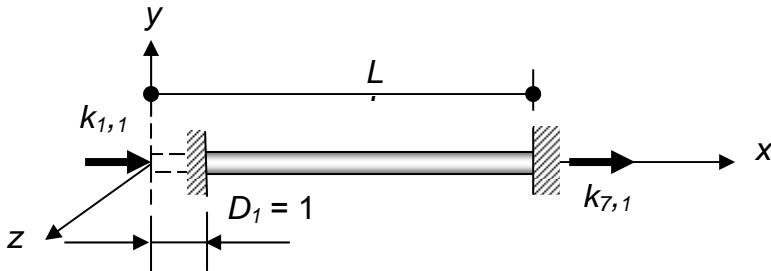


Figure 5-4 – Effet d'un déplacement unitaire  $D_1$

En raison du caractère prismatique de la barre, le déplacement axial  $u$  varie linéairement de 1 à l'extrémité A à 0 à l'extrémité B. On a donc :

$$u = 1 - (x / L) \quad (5.3)$$

On calcule alors, par le théorème du déplacement unité<sup>2</sup> :

$$k_{1,1} = \int_0^L EAu'^2 dx = \frac{EA}{L} \quad (5.4)$$

Il était évidemment possible d'obtenir ce résultat à partir de la loi élémentaire de la Mécanique des Matériaux relative aux pièces sollicitées axialement, à savoir  $\delta = NL/EA$ .

#### Deuxième ligne (colonne)

<sup>2</sup> Le symbole ' est utilisé désormais pour désigner une dérivée première par rapport à la coordonnée selon l'axe de la barre.

L'effet d'un déplacement unitaire  $D_2 = 1$  est une flexion plane dans le plan  $xy$ . En raison du caractère prismatique de la barre, la déformée est antimétrique par rapport à la mi-longueur de la barre. Seuls les moments de flexion autour de l'axe  $z$  et les efforts tranchants associés sont non nuls. Il y correspond donc les seuls coefficients de rigidité non nuls :  $k_{2,2}$ ,  $k_{6,2}$ ,  $k_{8,2}$  et  $k_{12,2}$  (

Figure 5-5).

La déformée cubique doit satisfaire les conditions aux limites suivantes :

$$v = 1 \text{ et } v' = 0 \quad \text{en } x = 0$$

$$v = v' = 0 \quad \text{en } x = L$$

d'où :

$$v = 2(x/L)^3 - 3(x/L)^2 + 1 \quad (5.5)$$

et :

$$v'' = (6/L^2)(2x/L - 1) \quad (5.6)$$

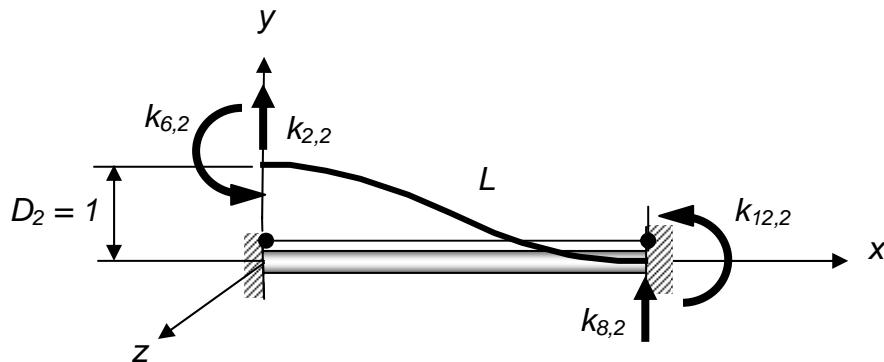


Figure 5-5- Effet d'un déplacement unitaire  $D_2$

On calcule alors :

$$k_{2,2} = \int_0^L EI_z v''^2 dx = \frac{12EI_z}{L^3} \quad (5.7)$$

On obtient directement par équilibre de translation :

$$k_{2,2} + k_{8,2} = 0 \quad (5.8)$$

d'où :

$$k_{8,2} = -\frac{12EI_z}{L^3} \quad (5.9)$$

Par antimétrie, on sait que  $k_{6,2} = k_{12,2}$ .

L'équation d'équilibre en rotation autour de l'axe  $z$ , écrite en  $A$ , à savoir :

$$k_{8,2}L + k_{12,2} + k_{6,2} = 0 \quad (5.10)$$

conduit à :

$$k_{12,2} = k_{6,2} = \frac{6EI_z}{L^2} \quad (5.11)$$

L'étudiant est invité, en guise d'exercice, à établir les expressions d'autres termes de la matrice de rigidité.

### 5.2.3 Formes réduites de la matrice de rigidité de barres de structure plane

En pratique, on n'utilise que la matrice de rigidité à la dimension strictement requise au type de structure à analyser.

Ainsi, par exemple, il n'est en effet point besoin:

- De prendre en compte les degrés de liberté hors plan de la structure si celle-ci a un comportement plan ;
- De prendre comme inconnue cinématique la rotation d'une extrémité de barre qui constitue une vraie articulation dans la structure à analyser - par exemple à un appui - puisqu'on sait a priori que le moment fléchissant y est nul et ce, indépendamment de la rotation qui y apparaît.

Cela revient à supprimer, dans la matrice de rigidité la plus générale de (12x12), les lignes et colonnes associées aux degrés de liberté sans intérêt ; par commodité, les degrés de liberté restants sont renumérotés en continu de même que les inconnues cinématiques qui leur sont associées.

On pourrait, par exemple, établir ainsi les formulations explicites des matrices de rigidité des poutres cinématiquement déterminées suivantes :

- Barre bi-encastrée (de référence) d'une structure plane chargée dans son plan ;
- Barre encastrée-appuyée (de référence) d'une structure plane chargée dans son plan ;
- Barre bi-encastrée (de référence) et barre encastrée-appuyée d'une poutre continue ;
- Barre bi-encastrée (de référence) d'une structure plane chargée perpendiculairement à son plan.

## 5.3 Coefficients de rigidité $k_{iP}$ et vecteur des actions extérieures

Les termes  $k_{ij}$  de la matrice de rigidité d'une barre représentent les réactions aux blocages d'extrémité de cette barre produites par des valeurs unitaires des déplacements respectivement associés à ces blocages; elles sont donc, aux valeurs des inconnues près, une mesure de l'effet des déplacements des noeuds de la structure à analyser.

Il reste évidemment que les forces extérieures appliquées entre les noeuds et/ou des déplacements imposés (variations de température, tassements d'appui,...) sont aussi susceptibles de créer des réactions en ces mêmes blocages ; ces réactions peuvent aussi être considérées comme des coefficients de rigidité et sont désignées par  $k_{iP}$ .

La détermination des  $k_{iP}$  peut se faire par application du théorème du déplacement unité. Toutefois, les expressions cherchées aussi sont les résultats de problèmes élémentaires dont on trouve directement les solutions dans le cours de Mécanique des Matériaux. Bornons-nous donc à citer un seul exemple.

Soit la barre bi-encastrée de structure plane chargée d'une force concentrée  $P$  en travée (Figure 5-6). On notera que la convention de signes adoptée (voir plus haut) impose que cette charge  $P$  soit considérée comme positive si elle agit dans le sens de l'axe  $y$ .

Il est clair que cette force ne génère que des réactions  $k_{2P}$ ,  $k_{3P}$ ,  $k_{5P}$  et  $k_{6P}$ , à savoir des moments d'axe z et des efforts tranchants selon y aux deux extrémités de la barre. Dans sa partie consacrée aux poutres hyperstatiques élémentaires, le cours de Mécanique des Matériaux fournit les expressions de ces efforts intérieurs, à savoir :

$$\begin{aligned} k_{1P} &= k_{4P} = 0 \\ k_{2P} &= -Pb^2(L+2a)/L^3 \\ k_{5P} &= -Pa^2(L+2b)/L^3 \\ k_{3P} &= -Pab^2/L^2 \\ k_{6P} &= Pa^2b/L^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

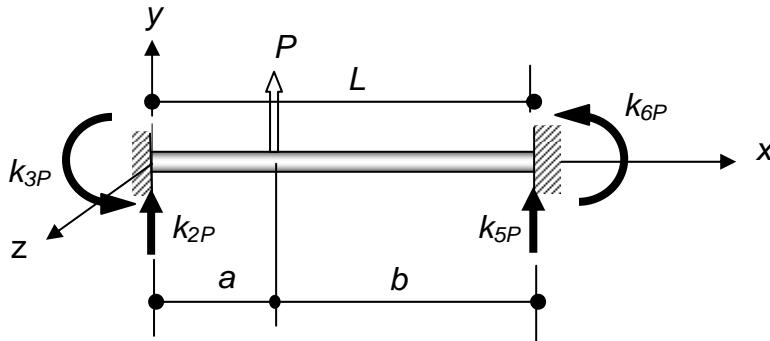


Figure 5-6 – Barre (de référence) bi-encastrée de structure plane chargée d'une force concentrée (positive) en travée

On notera les signes affectant ces quantités respectives – pouvant différer de ceux trouvés dans le cours de Mécanique des Matériaux -. Ceci est simplement le résultat de la convention de signes adoptée pour la Méthode des Déplacements (voir §5.1).

Les coefficients  $k_{iP}$  sont des réactions aux actions extérieures non nodales exercées sur la barre ; ces réactions contribuent elles aussi, au même titre que les  $k_{ij}$ , à maintenir cette barre en équilibre.

Ces  $k_{iP}$  sont habituellement rassemblés dans un vecteur  $\langle k_p \rangle$ , dit *vecteur des actions extérieures non nodales*, en vue de la formulation matricielle des équations de la Méthode des Déplacements. On aurait ainsi pour le cas traité à la Figure 5-6 :

$$\langle k_p \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ -Pb^2(L+2a)/L^3 \\ -Pab^2/L^2 \\ 0 \\ -Pa^2(L+2b)/L^3 \\ Pa^2b/L^2 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

On pourrait aussi établir les expressions des vecteurs des actions extérieures (non nodales) des barres pour les types de barres mentionnés en fin du § 5.2.3.

On notera que pour une barre de treillis, le vecteur  $k_p$  est nécessairement nul. En effet, une telle barre ne peut être chargée entre ses noeuds (poids propre négligé).et toutes les composantes du vecteur des actions extérieures sont séparément nuls.

## 5.4 Relation forces-déplacements d'une barre

Désignons en toute généralité par :

- $m_A$  le nombre de degrés de liberté à l'extrémité origine  $A$  de la barre ;
- $m_B$  le nombre de degrés de liberté à l'extrémité fin  $B$  de la barre.

On sait par la Mécanique des Matériaux que la connaissance des i) actions extérieures sollicitant la barre, et des ii) déplacements des extrémités  $A$  et  $B$  de cette barre (en nombre  $m = m_A + m_B$ ) suffit pour trouver les efforts intérieurs et les déplacements non seulement aux deux extrémités de la barre mais aussi en toute section courante. Il importe donc d'établir la relation reliant les actions extérieures nodales et les déplacements nodaux aux composantes des efforts intérieurs agissant aux extrémités de la barre.

On notera qu'en chacune des extrémités le nombre d'efforts intérieurs inconnus est égal au nombre de ses degrés de liberté, donc au nombre des déplacements nodaux inconnus. En axes locaux, ces efforts intérieurs ne sont rien d'autre que les coefficients  $k_{ij}$  et  $k_{iP}$ ; l'exemple donné à la Figure 5-7-a concerne les efforts normal et tranchant à l'extrémité  $B$  engendrés par un déplacement unitaire en rotation à l'extrémité  $A$  d'une barre encastrée-appuyée de structure plane; rappelons que le nombre de degrés de liberté de cette dernière est  $m = 5$  ( $m_A = 3$  et  $m_B = 2$ ). En axes globaux, ces coefficients n'y sont par contre que les résultantes des composantes des efforts intérieurs; il s'agit donc de les projeter dans le système local d'axes pour obtenir les efforts intérieurs; l'exemple de la Figure 5-7-b concerne les efforts normal et tranchant à l'extrémité  $B$  engendré par un déplacement unitaire de translation selon l'axe global  $Y$  à l'extrémité  $A$  de la même barre encastrée-appuyée.

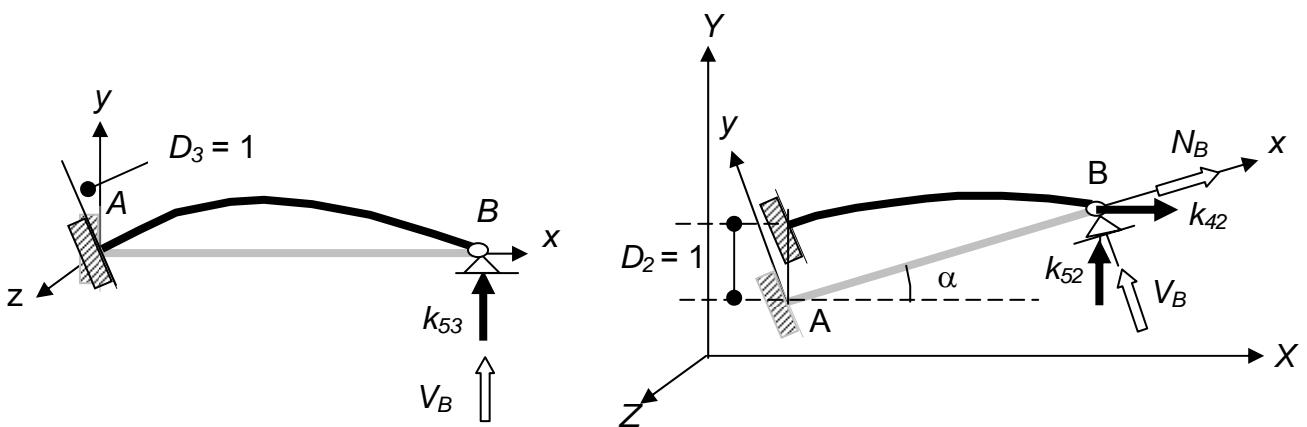


Figure 5-7 – Efforts intérieurs aux extrémités d'une barre cinématiquement déterminée

Par le principe de superposition, on peut écrire que l'effort intérieur  $F_i$  relatif au blocage  $i$  à une extrémité d'une barre vaut :

$$F_i = \sum_{j=1}^m k_{ij} D_j + k_{iP} \quad (5.14)$$

où  $m$  vaut au maximum 12. En exprimant une telle relation pour chacune des forces associées aux  $m$  degrés de liberté (nombre de blocages simples) de la barre et en les regroupant dans un vecteur à  $m$  composantes selon l'ordre conventionnel précisé au §5.2, on obtient :

$$\langle F_b \rangle = [k] \langle D_b \rangle + \langle k_P \rangle \quad (5.15)$$

L'indice  $b$  est utilisé ici pour souligner que les forces  $F$  et les déplacements  $D$  intervenant dans cette expression concernent une barre isolée et non la structure entière.

Cette relation matricielle traduit la *relation forces-déplacements d'une barre*. Les forces  $\langle F \rangle$ , agissant aux extrémités de la barre, sont les réactions nécessaires à l'équilibre de la barre soumise, d'une part, aux déplacements  $\langle D_p \rangle$  et, d'autre part, aux charges extérieures non nodales  $P$ .

## 5.5 Calcul d'une structure

Disposant des *relations forces-déplacements des barres isolées* composant une structure, on peut aborder l'analyse de la structure complète, celle-ci étant rapportée, faut-il le rappeler au système d'axes global.

Cette structure est rendue cinématiquement déterminée – structure de référence  $C_0$  – en y effectuant  $M$  blocages simples aux degrés de liberté possibles de ses noeuds, auxquels on associe  $M$  inconnues cinématiques  $D$  de type déplacement. Ces *inconnues sont rapportées au système global*.

Des *forces nodales extérieures* directement appliquées  $P$ , d'intensité connue, peuvent exister aux noeuds. Ces *forces nodales sont rapportées au système global*.

En toute généralité, en tout blocage  $i$ , il y a équilibre entre la force nodale extérieure directement appliquée  $P_i$  associée à ce blocage et les réactions exercées selon  $i$  sur le noeud bloqué, par les barres qui y aboutissent. Ces réactions sont, au signe près, les réactions exercées selon  $i$  sur les extrémités de ces barres. On a donc :

$$-\left( \sum_{j=1}^M k_{ij,structure} D_j + k_{iP,structure} \right) + P_i = 0 \quad (i = 1, \dots, M) \quad (5.16)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme matricielle:

$$[K] \langle D \rangle + \langle k_P \rangle = \langle P \rangle \quad (5.17)$$

On notera que dans la relation ci-dessus, les  $k_{ij,structure}$  et  $k_{iP,structure}$  sont caractéristiques de la structure entière. En d'autres termes, la réaction  $k_{ij,structure}$  (resp.  $k_{iP,structure}$ ) selon le blocage  $i$  produite par le déplacement  $D_j = 1$  (resp. les forces extérieures non nodales  $P$ ) est constituée de la somme des réactions correspondantes  $k_{ij}$  (resp.  $k_{iP}$ ) dans chacune des barres aboutissant au noeud où a lieu le blocage  $i$ ; ces réactions au niveau des barres isolées ont été explicitées précédemment. Dès lors, on a :

$$\begin{aligned} k_{ij,structure} &= \sum k_{ij} \\ k_{iP,structure} &= \sum k_{iP} \end{aligned} \quad (5.18)$$

la somme étant étendue à toutes les barres affectées simultanément par  $D_i = 1$  et  $D_j = 1$  (resp.  $P$ ). Rien n'empêche toutefois de considérer, par souci de généralité, la somme

étendue à toutes les barres de la structure ; en effet, si les noeuds  $i$  et  $j$  où sont choisis les blocages  $i$  et  $j$  sont différents et n'appartiennent pas à une même barre, on a nécessairement  $k_{ij}=0$ .

Dès lors qu'on a déterminé les  $k_{ij,structure}$  et  $k_{iP,structure}$  - les valeurs des forces nodales  $P_i$  étant des données du problème - , on obtient les  $M$  déplacements inconnus  $D_j$  en résolvant le système d'équations (5.17). Les efforts intérieurs, ou plus généralement leurs composantes, aux extrémités des barres s'obtiennent en appliquant la relation (5.14) à chaque barre prise isolément, dans laquelle  $\langle D_b \rangle$  est le vecteur des déplacements aux deux extrémités de la barre considérée, établi - avec rangement conventionnel au niveau de la barre - à partir des composantes concernées du vecteur  $\langle D \rangle$  désormais connu. La connaissance des efforts intérieurs aux extrémités de la barre permet d'obtenir les efforts intérieurs en toute section courante par les lois élémentaires vues en Mécanique des Matériaux.

## 6 METHODE DES ROTATIONS

### 6.1 Hypothèse à la base de la Méthode des Rotations

La *Méthode des Déplacements* telle qu'exposée au chapitre précédent peut prendre en compte la déformabilité vis-à-vis de tous les types d'effort intérieur : moment de flexion, effort normal, effort tranchant.

Dans bon nombre de structures les contributions respectives de ces sources de déformabilité sont très inégales ; l'idée vient alors assez naturellement de négliger celles dont l'apport est faible vis-à-vis d'autres.

La *Méthode des Rotations* – dont l'appellation apparaîtra mieux plus loin - repose sur l'hypothèse maîtresse que *la déformabilité due à l'effort normal et celle due à l'effort tranchant sont toutes deux négligeables devant la déformabilité due au moment de flexion*. Ainsi, on réduit le types d'inconnues à considérer et le nombre d'équations à résoudre. La Méthode des Rotations n'est donc pas à proprement parler un nouveau type de méthode d'analyse globale mais plutôt un *aménagement particulier de la Méthode des Déplacements*. Elle fournira des résultats différents de ceux obtenus à l'aide de la Méthode des Déplacements générale mais suffisamment proches de ces derniers pour que l'on puisse légitimement s'en servir lors des opérations ultérieures de dimensionnement ou de vérification. Il importe évidemment que l'hypothèse simplificatrice précitée se trouve validée dans la structure à étudier.

Cette démarche de simplification a été faite en vue du calcul à la main ; elle est désormais rendue beaucoup moins utile depuis le développement des ordinateurs et des logiciels d'analyse qu'ils supportent.

Ainsi *la Méthode des Rotations convient bien pour l'analyse de poutres continues et les structures planes à mailles rectangulaires ou pseudo rectangulaires chargées dans leur plan*, sous réserve que les barres composant la structure ne présente pas une section transversale trop évidée (par exemple poutre cellulaire) sous peine de sous-estimer de manière appréciable les déplacements transversaux aux axes des barres.

A l'inverse, *la Méthode des Rotations ne peut s'appliquer aux structures dans lesquelles les efforts normaux jouent un rôle appréciable*. En effet, elle n'est pas susceptible de fournir un quelconque résultat pour les *treillis à noeuds articulés* puisque la seule déformabilité présente, relative aux efforts normaux, est négligée. Pour les *structures triangulées à noeuds rigides*, qui offrent des déformabilités de tous types, elle conduit à négliger notamment la déformabilité aux efforts normaux alors que la contribution de celle-ci reste ici déterminante. D'autres situations pour lesquelles la Méthode des Rotations sera proscrite sont notamment : les arcs surbaissés, dans lesquels le moment de flexion s'accompagne d'un effort normal important, et les tirants et haubans, qui ne résistent pour ainsi dire qu'à des efforts normaux.

Si une structure comporte des éléments structuraux de divers types, on n'appliquera la simplification précitée qu'aux éléments pour lesquels l'hypothèse précitée est justifiable tandis que, pour les autres, il y aura lieu de maintenir la prise en compte des autres types de déformabilité.

La suite du présent chapitre concerne exclusivement les structures planes pour lesquelles la déformabilité au moment de flexion est déterminante.

## 6.2 Concepts de structure plane à nœuds fixes et de structure plane à nœuds mobiles

Conformément à la Méthode des Déplacements, la mise en charge d'une structure entraîne des déplacements selon les directions des degrés de liberté des nœuds.

Dans la Méthode des Rotations, on est amené à distinguer :

- Les *structures planes à noeuds fixes* ;
- Les *structures planes à noeuds mobiles*.

Une structure plan est dite à *noeuds fixes* lorsque tous ses noeuds sont sensés occuper une position invariable (en termes de coordonnées  $X$  et  $Y$ ) dans le plan de la structure ; ils ne subissent donc aucune translation dans ce plan mais peuvent toutefois tourner autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. Un noeud d'une structure à noeuds fixes possède donc en toute généralité un seul degré de liberté : en rotation autour d'un axe parallèle à  $Z$ .

Une structure plan est dite à *noeuds mobiles* lorsque certains de ses noeuds peuvent de déplacer dans le plan de la structure ; ils sont donc susceptibles à la fois de translation dans le plan  $XY$  et de rotation autour d'un axe perpendiculaire à ce plan. En toute généralité, un noeud d'une structure plane à noeuds mobiles possède donc trois degrés de liberté : en translation selon  $X$ , en translation selon  $Y$  et en rotation autour d'un axe parallèle à  $Z$ .

Dans la Méthode des Rotations, *la mobilité ou la fixité des noeuds concerne donc exclusivement l'aptitude ou non à subir une translation dans le plan XY de la structure*.

Il importe dès lors de pouvoir identifier si une structure donnée est à noeuds fixes ou à nœuds mobiles. Cette distinction repose sur un principe simple et sur l'application récurrente de ce principe.

### 6.2.1 Principe du noeud fixe

Considérons le schéma de la

Figure 6-1 dans lequel deux barres  $AB$  et  $AC$  relient un nœud  $A$  à deux nœuds  $B$  et  $C$  qui sont fixes en translation dans le plan  $XY$  défini par ces trois nœuds.

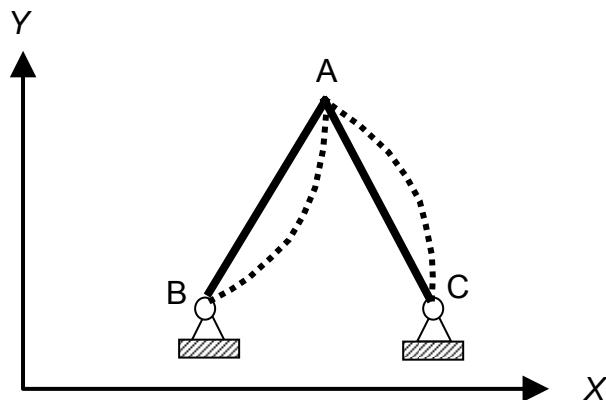


Figure 6-1 – Principe du noeud fixe en translation

En toute généralité, le point  $A$  ne sera mobile que si les longueurs  $AB$  et  $AC$  varient. Une telle variation de longueur ne peut résulter que de l'un et/ou l'autre des effets suivants :

- (a) Raccourcissement de la corde due à la courbure prise sous l'effet de la distribution du moment de flexion;
- (b) Variation de la longueur de la corde due à la courbure additionnelle prise sous l'effet de la déformation d'effort tranchant;
- (c) Variation de la longueur de la corde induite par la déformation d'effort normal.

Conformément à l'hypothèse simplificatrice de la Méthode des Rotations, les déformabilités à la base des effets (b) et (c) sont négligées ; ceux-ci ne sont donc pas à considérer; en conséquence, seul l'effet (a) reste à examiner. Dans le domaine élastique – cadre de cette première partie du cours –, il est aisément démontré – ce qui n'est pas fait ici – que le raccourcissement de la corde d'une barre, engendrée par la prise de courbure de flexion, est d'un ordre inférieur à la variation de longueur produite par l'effort normal. Ceci entraîne, dès lors que l'effet (c) est omis, que l'effet (a) doit a fortiori l'être également ; cette conclusion est par ailleurs pleinement conforme au caractère 1<sup>er</sup> ordre de l'analyse globale considérée dans cette partie du cours. La corde ne peut donc subir aucune variation significative de longueur et le point A est donc assimilé à un point fixe en translation dans le plan XY.

Le principe du nœud fixe en translation s'énonce comme suit :

*Si, dans un plan XY, un nœud A est relié par deux barres AB et AC à deux nœuds B et C, tous deux fixes en translation dans ce plan, le point A peut à son tour être considéré comme fixe en translation.*

### 6.2.2 Application récurrente du principe du nœud fixe en translation

Pour examiner si une structure plane est à nœuds fixes en translation, il suffit d'examiner de proche en proche si chacun des nœuds de la structure est relié à deux noeuds fixes.

Si, en procédant de la sorte, on arrive à la conclusion que tous les noeuds sont fixes, la structure est alors dite à nœuds fixes (Figure 6-2).

Si ce n'est pas le cas, la structure est dite à noeuds mobiles (Figure 6-3).

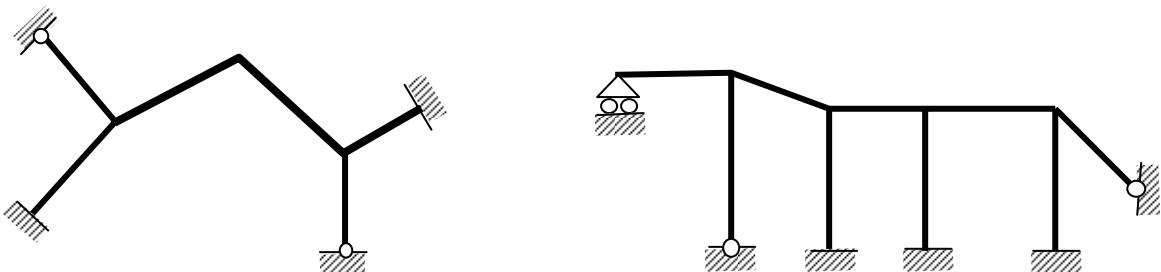


Figure 6-2 – Exemple de structures planes à nœuds fixes en translation

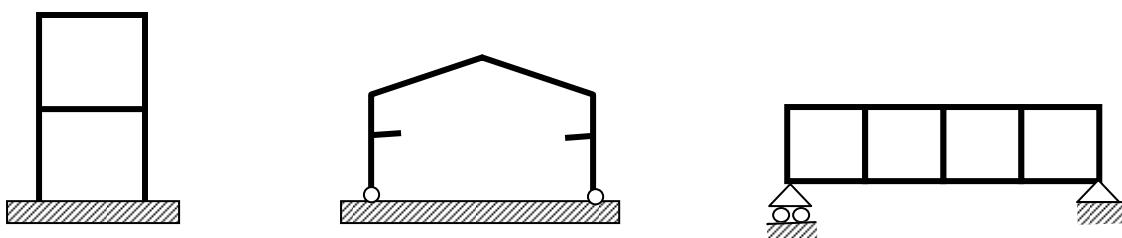


Figure 6-3 – Structures planes à noeuds mobiles en translation

### 6.3 Degré de mobilité d'une structure plane

Une structure plane à nœuds mobiles en translation est caractérisée par son *degré de mobilité*.

*Le degré de mobilité d'une structure est le nombre minimum de blocages simples requis pour transformer cette structure en une structure à nœuds fixes.*

Pour déterminer ce nombre, il est assez commode d'imaginer que tous les nœuds de la structure sont des rotules, ce qui libère la structure de ses degrés de liberté en rotation, ceux-ci étant dénués d'intérêt pour l'objet concerné. Ce faisant, la structure se trouve être désormais un mécanisme cinématique dont la stabilité dans son plan est à restaurer par l'insertion d'appuis unidirectionnels ou bielles de fixation ; le nombre strictement requis de tels appuis/bielles fournit le degré de mobilité cherché.

A titre d'exercice, l'étudiant est invité à déterminer le degré de mobilité des structures représentées à la Figure 6-3.

Le degré de mobilité d'une structure à nœuds mobiles est une caractéristique *intrinsèque* de la structure, indépendante des actions sollicitant la structure.

Néanmoins, dans certaines circonstances, on peut augurer qu'une structure plane à nœuds mobiles en translation se comportera sous son chargement comme si elle était à nœuds fixes. En d'autres termes, il peut arriver qu'on puisse identifier des degrés de liberté en translation qui ne seront pas activés, ce qui entraînera que les déplacements qui leur sont associés sont nuls. Il en est notamment ainsi pour les structures symétriques symétriquement chargées ; en effet, les conditions de symétrie imposent que les sections situées sur l'axe de symétrie y restent après mise en charge de la structure. Dès lors que la fixité des nœuds n'est pas du tout la propriété de la structure mais bien le résultat d'une topologie de la structure combinée à une mise en charge particulières, une telle structure est dite *structure à nœuds pseudo fixes* en translation et son analyse se conduit alors comme celle d'une structure à nœuds fixes en translation.

Ce qui précède suppose que la structure ne pérît pas par instabilité dans le plan sous l'effet de sa sollicitation. On verra ultérieurement dans d'autres cours que la forme d'instabilité n'est pas nécessairement symétrique même si la structure et son chargement le sont. Rappelons que le comportement structural ne fait pas l'objet de cette première partie du cours.

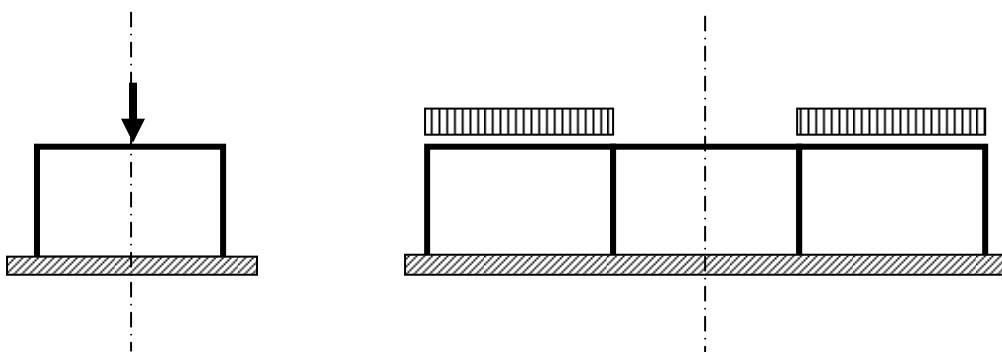


Figure 6-4 – Structures planes à noeuds pseudo fixes en translation

Il faut prendre garde au fait que si, pour réduire encore la taille des calculs, on n'analyse que la moitié de ces structures symétriques, cette moitié est à noeuds mobiles car le noeud que l'on a dû ajouter sur l'axe de symétrie peut se déplacer verticalement.

## 6.4 Méthode des Rotations appliquée aux structures planes à noeuds fixes en translation

### 6.4.1 Inconnues cinématiques

Dès lors qu'ils sont fixes en translation, les noeuds de la structure plane ne possèdent au maximum qu'un degré de liberté : la rotation autour de l'axe  $Z$  perpendiculaire au plan  $XY$  contenant la structure (Figure 6-5-a). Les inconnues cinématiques  $D_j$  consistent donc exclusivement en les rotations des noeuds, désignées par le symbole  $\phi$ .(Figure 6-5-b et c). Ces rotations se font toutes autour d'un axe parallèle à l'axe global  $Z$ , lui-même parallèle aux axe locaux  $z$  ; il n'est dès lors plus nécessaire de distinguer – en ce qui concerne les rotations et des moments de flexion qui y sont associés – entre le système d'axes global et le système d'axes local.

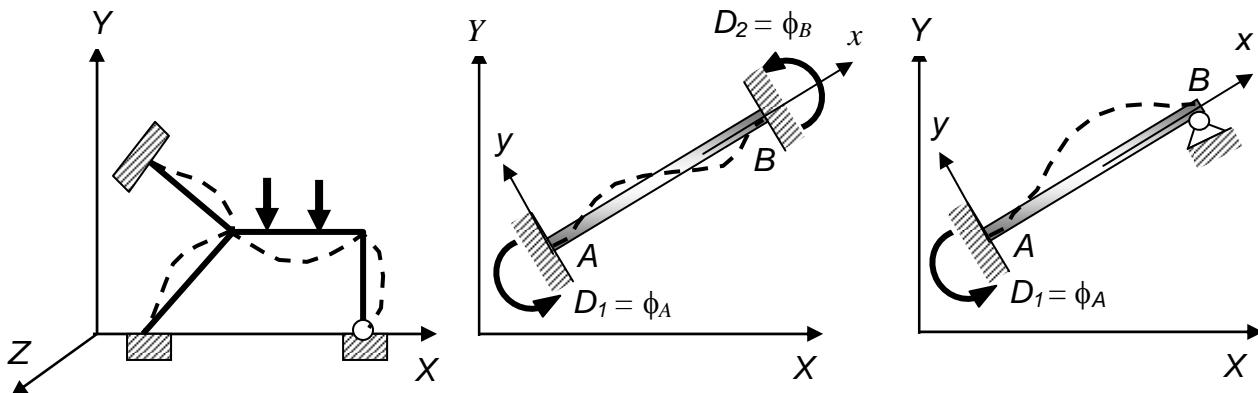


Figure 6-5 – Méthode des Rotations : Degrés de liberté dans le cas de structures planes à noeuds fixes en translation

Le fait que les inconnues cinématiques d'une structure plane à noeuds fixes sont toutes des rotations justifie que la Méthode des Déplacements simplifiée reçoive l'appellation de Méthode des Rotations.

### 6.4.2 Matrices de rigidité des barres

En partant de la matrice de rigidité du cas général (voir Tableau 5-2) et en supprimant les lignes et colonnes relatives aux degrés de liberté dépourvus d'intérêt (Figure 6-5-b et c), on obtient les matrices de rigidité suivantes :

- Barre (de référence) *bi-encastrée* (Figure 6-5-b)

$$[k] = \frac{2EI}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

où :

$$R = \frac{2EI}{L} \quad (6.2)$$

désigne la raideur en flexion de la barre *prismatique*.

- Barre (de référence) *encastrée appuyée* (Figure 6-5-c)

$$[k] = \frac{3EI}{L} = \frac{3R}{2} \quad (6.3)$$

On remarquera que, dans une structure plane à nœuds fixes en translation, les coefficients de rigidité  $k_{ii}$  et  $k_{ij}$  de la matrice de rigidité écrite dans le cadre de la Méthode des Rotations sont toujours positifs (Rappelons que dans la Méthode des Déplacements, les  $k_{ij}$  sont positifs mais les  $k_{ji}$  peuvent être positifs ou négatifs). Par ailleurs, si l'on considère l'équation d'équilibre d'un noeud déterminé où le blocage simple en rotation est d'ordre  $i$  et où sont assemblées rigidement  $q_1$  barres encastrées et  $q_2$  barres articulées à leur autre extrémité, on a :

$$\begin{aligned} k_{ii,structure} &= \sum_{\text{barres}} k_{ii} = \sum_{k=1}^{q_1} \left( \frac{4EI}{L} \right)_k + \sum_{k=1}^{q_2} \left( \frac{3EI}{L} \right)_k \\ k_{ij,structure} &= k_{ij} = \begin{cases} \frac{2EI}{L} & \text{ou} \\ 0 & \end{cases} \end{aligned} \quad (6.4)$$

Le nombre de  $k_{ij}$  de valeur non nulle est donc au plus égal au nombre de barres ( $q_1+q_2$ ) aboutissant au nœuds soumis au blocage  $i$ ; dès lors, on a :

$$k_{ii} > \sum_j k_{ij} \quad (6.5)$$

Le cours d'Analyse Numérique nous apprend que la propriété (6.5) est une condition suffisante pour garantir la convergence de la résolution du système d'équations par approximations successives ; c'est notamment elle qui assure la bonne exécution de la Méthode de Cross exposée au chapitre 7.

### 6.4.3 Vecteur des charges extérieures

Le vecteur des charges extérieures  $\langle k_P \rangle$  ne comporte que les termes associés aux degrés de liberté pris en compte. Leurs composantes ne sont rien d'autre que les moments d'encastrement parfait  $k_{AP}$  et/ou  $k_{BP}$  développés aux extrémités A et B de la barre par les forces extérieures non nodales ; elles sont donc au nombre de deux pour la barre bi-encastrée et de un pour la barre encastrée-articulée.

### 6.4.4 Relation forces-déplacements des barres

Les efforts intérieurs agissant aux extrémités d'une barre sont ceux associés aux degrés de liberté pris en compte. Leurs composantes ne sont rien d'autre que les moments de flexion  $M_A$  et  $M_B$ .

Dès lors la relation forces-déplacements de la barre se réduit à :

- Barre (de référence) *bi-encastrée* (Figure 6-5-b)

$$\begin{pmatrix} M_A \\ M_B \end{pmatrix} = R \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_A \\ D_B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{AP} \\ k_{BP} \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

ou encore, sous forme non matricielle, avec les notations d'ingénieur de la Méthode des Rotations :

$$\begin{aligned} M_A &= R(2\phi_A + \phi_B) + \bar{M}_A \\ M_B &= R(\phi_A + 2\phi_B) + \bar{M}_B \end{aligned} \quad (6.7)$$

- Barre (de référence) *encastrée appuyée* (Figure 6-5-c)

$$M_A = \frac{3}{2} RD_A + k_{AP} \quad (6.8)$$

ou encore, avec les notations d'ingénieur de la Méthode des Rotations :

$$M_A = \frac{3}{2} R\phi_A + \bar{M}_A \quad (6.9)$$

### 6.4.5 Détermination des efforts intérieurs

La solution du système d'équations de la Méthode des Rotations consiste en les rotations des nœuds de la structure plane.

On obtient les moments de flexion aux extrémités des barres en introduisant les valeurs des rotations des noeuds dans les relations forces-déplacements des barres.

Disposant des moments aux extrémités, on trouve les efforts tranchants, les efforts normaux (sous la réserve discutée plus loin) et les réactions d'appui en exprimant l'équilibre des noeuds, des barres, de portions de structure ou de la structure entière.

On rappellera qu'en raison de la convention de signes adoptée dans la Méthode des Déplacements (Figure 6-6-a), différente de celle adoptée dans le cours de Mécanique des Matériaux (Figure 6-6-b), les relations déduites du théorème des deux moments – servant à calculer les efforts intérieurs dans une section transversale courante - s'écrivent :

$$M(x) = -M_A \frac{L-x}{L} + M_B \frac{x}{L} + \mu(x) \quad (6.10)$$

$$T(x) = \frac{M_A + M_B}{L} + \tau(x)$$

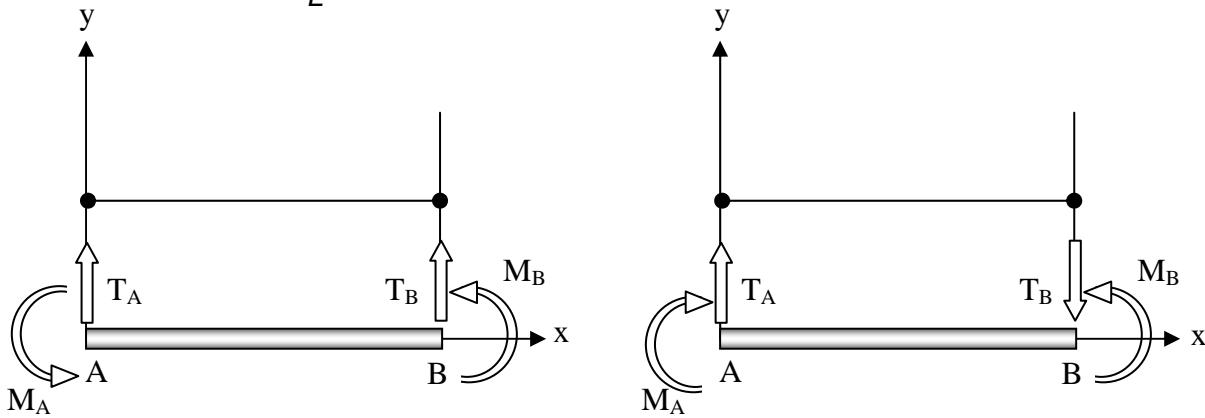


Figure 6-6 – Comparaison des conventions de signes

On notera qu'une fois les efforts intérieurs obtenus, leurs *distributions dans la structure* (diagrammes des  $M$ ,  $N$ ,  $V$ ) se tracent en conformité avec la convention de Mécanique des Matériaux.

Les efforts normaux ne peuvent s'obtenir qu'en exprimant l'équilibre de translation en chaque noeud, à savoir :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= 0 \\ \sum F_y &= 0\end{aligned}\quad (6.11)$$

Si l'on prend soin de choisir des axes appropriés, perpendiculaires aux barres, on peut n'avoir qu'une inconnue par équation.

Si la structure possède  $n$  noeuds, on peut tout au plus écrire  $2n$  équations de translation ; celles-ci ne sauraient jamais que fournir  $2n$  valeurs d'efforts normaux. Si la structure possède un nombre de barres comportant des efforts normaux supérieur à  $2n$ , on ne saura donc pas déterminer les efforts normaux dans toutes les barres. Cette indétermination est simplement une conséquence de la simplification à la base de la Méthode des Rotations, à savoir négliger la déformabilité due aux efforts normaux.

## 6.5 Méthode des Rotations appliquée aux structures planes à noeuds mobiles et à mailles rectangulaires

### 6.5.1 Inconnues cinématiques

Lorsque la structure plane est constituée d'un réseau de poutres orthogonal à un réseau de poteaux, il est assez logique de localiser la structure dans un plan  $XY$  tel que l'axe des  $X$  soit parallèle aux poutres (barres horizontales) et l'axe des  $Y$  parallèle aux poteaux (barres verticales).

L'hypothèse simplificatrice à la base de la Méthode des Rotations – selon laquelle, notamment, la déformabilité aux efforts normaux est négligeable – revient à supposer

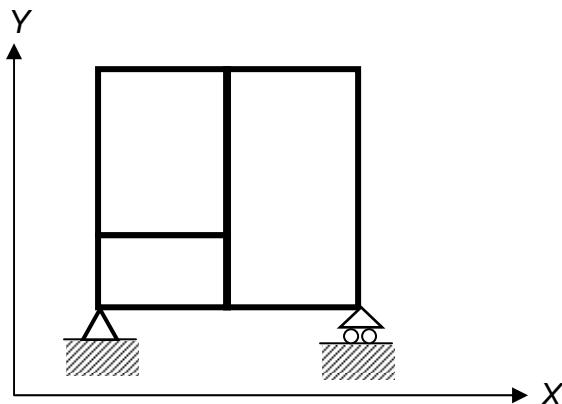
l'incompressibilité (éventuellement l'inextensibilité) des barres. Les types de degrés de liberté de la structure à considérer dès lors sont :

- Le degré en liberté en rotation des nœuds,
- Le degré de liberté en translation horizontale de toute file ininterrompue de poutres,
- Le degré de liberté en translation verticale de toute file ininterrompue de poteaux.

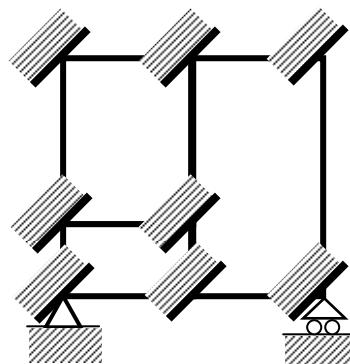
Ainsi, il suffit désormais d'un blocage simple en translation selon l'axe d'une file ininterrompue de barres pour que tous les nœuds de cette file se trouvent bloqués dans cette direction. En conséquence, la structure cinématiquement déterminée  $C_0$  est obtenue en disposant un blocage simple associé à chacun des degrés de liberté précités. Les blocages simples ainsi requis, en nombre  $M$ , constituent les inconnues cinématiques. Celles-ci sont donc de deux natures :

- Les angles de rotation aux nœuds ;
- Les déplacements horizontaux/verticaux des files ininterrompues de poutres/poteaux.

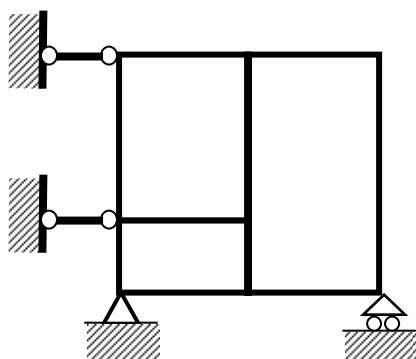
Pour l'exemple de la Figure 6-7-a, on a 8 blocages de rotations de nœuds (Figure 6-7-b), 2 blocages de déplacements horizontaux (Figure 6-7-c), et 1 blocage de déplacements verticaux (Figure 6-7-d), soit au total  $M = 11$ . La structure cinématiquement déterminée de référence  $C_0$  est la structure d'origine munie de ces 11 blocages simples (non représentée à la Figure 6-7).



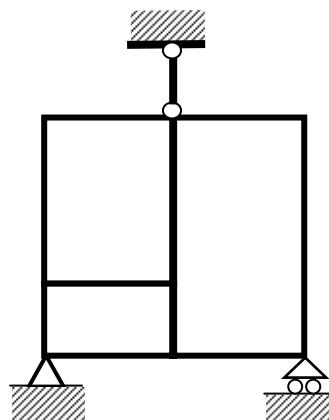
a) Structure à noeuds mobiles et à mailles rectangulaires



b) Blocages des noeuds en rotation



c) Blocages des déplacements horizontaux



d) Blocages des déplacements verticaux

Figure 6-7 – Structure de référence  $C_0$  pour une structure plane à noeuds mobiles en translation et à mailles rectangulaires

### 6.5.2 Matrices de rigidité des barres

En raison de l'incompressibilité/inextensibilité des barres (voir ci-dessus), il n'est nul besoin de se préoccuper des déplacements axiaux de leurs extrémités respectives. Un noeud de structure plane à noeuds mobiles et à mailles rectangulaires ne peut donc subir au plus qu'une rotation et une translation perpendiculaire à l'axe de la barre.

En partant de la matrice de rigidité du cas général (voir Tableau 5-2) et en supprimant les lignes et colonnes autres que celles relatives aux degrés de liberté restant, on obtient les matrices de rigidité suivantes pour une *barre (de référence) horizontale* de longueur  $L$  (Figure 6-8):

- Barre (de référence) *horizontale bi-encastree* :

$$[k] = \frac{2EI}{L^3} \begin{bmatrix} 6 & 3L & -6 & 3L \\ 3L & 2L^2 & -3L & L^2 \\ -6 & -3L & 6 & -3L \\ 3L & L^2 & -3L & 2L^2 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

- Barre (de référence) *horizontale encastrée-appuyée* :

$$[k] = \frac{3EI}{L^3} \begin{bmatrix} 1 & L & -1 \\ L & L^2 & -L \\ -1 & -L & 1 \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

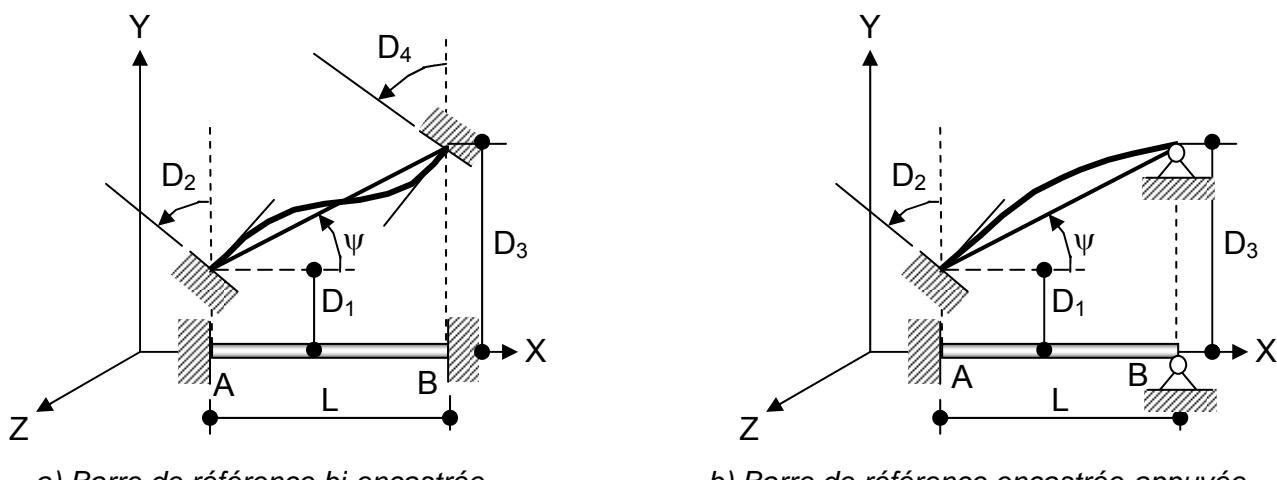


Figure 6-8 – Inconnues cinématiques de la Méthode des Rotations pour une barre horizontale

On désigne par *déviation*  $\psi$  d'une barre l'angle fait par la corde de la barre en configuration déformée par rapport à sa position initiale ; elle représente donc la rotation de la corde de cette barre autour d'un axe perpendiculaire au plan de la structure.

Pour la *barre horizontale*, elle vaut donc :

$$\psi = \frac{D_3 - D_1}{L} \quad (6.14)$$

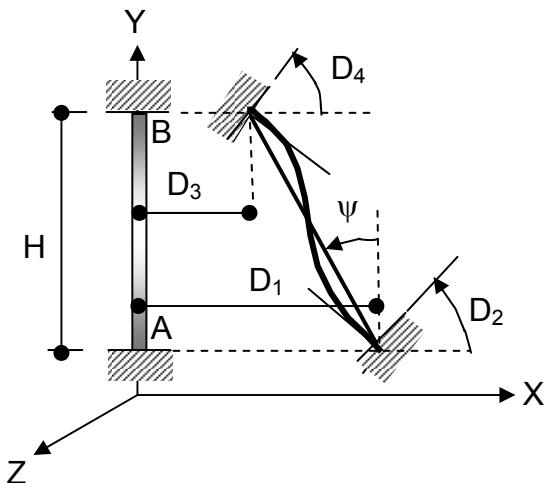
Pour une *barre (de référence) verticale* de longueur (hauteur)  $H$ , les matrices de rigidité s'écrivent (Figure 6-9) :

- Barre (de référence) *verticale bi-encastrée* :

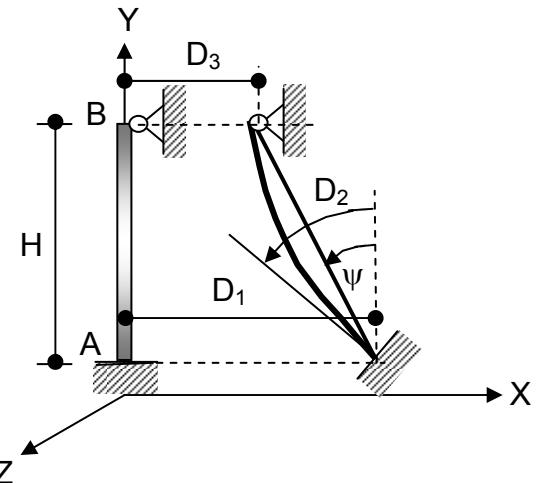
$$[k] = \frac{2EI}{H^3} \begin{bmatrix} 6 & -3H & -6 & -3H \\ -3H & 2H^2 & 3H & H^2 \\ -6 & 3H & 6 & 3H \\ -3H & H^2 & 3H & 2H^2 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

- Barre (de référence) *verticale encastrée-appuyée* :

$$[k] = \frac{3EI}{H^3} \begin{bmatrix} 1 & -H & -1 \\ -H & H^2 & H \\ -1 & H & 1 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$



a) Barre (de référence) bi-encastrée



b) Barre (de référence) encastrée-appuyée

Figure 6-9 - Inconnues cinématiques de la Méthode des Rotations pour une barre (de référence) verticale

Pour la *barre (de référence) verticale*, la déviation vaut :

$$\psi = \frac{D_1 - D_3}{H} \quad (6.17)$$

Comme la déviation d'une barre est, tout comme la rotation d'un noeud, une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan de la structure - donc parallèle à  $Z$  et à  $z$  -, on conçoit aisément qu'on puisse la considérer comme inconnue cinématique relative à une barre en lieu et place des translations des extrémités de cette barre perpendiculairement à l'axe de cette dernière. De la sorte, les *inconnues cinématiques sont toutes de type rotation* : rotations des noeuds et rotations des cordes (déviations) des barres. Ce fait justifie que, pour les structures planes à noeuds mobiles et à mailles rectangulaires, la

Méthode des Déplacements simplifiée soit désignée sous l'appellation de Méthode des Rotations.

### 6.5.3 Vecteur des actions extérieures

Le vecteur des actions extérieures  $\langle k_P \rangle$  comporte quatre composantes pour la barre (de référence) bi-encastrée et trois composantes pour la barre (de référence) encastrée-articulée.

Ces composantes sont :

- Le(s) moment(s) d'encaissement parfait à l'une ou (et) l'autre extrémité(s),
  - Les efforts tranchants,
- produits aux noeuds d'extrémités par les forces directement appliquées *non nodales*.

### 6.5.4 Relation forces-déplacements des barres

Les efforts intérieurs agissant aux extrémités d'une barre sont associés aux inconnues cinématiques retenues ici ; il s'agit donc du moment de flexion et de l'effort tranchant en ces extrémités

Les relations forces-déplacements s'écrivent dès lors respectivement :

- Pour la *barre (de référence) bi-encastrée* :

$$\begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ V_B \\ M_B \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} + \langle k_P \rangle \quad (6.18)$$

- Pour la *barre (de référence) encastrée-appuyée* :

$$\begin{Bmatrix} V_A \\ M_A \\ V_B \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} + \langle k_P \rangle \quad (6.19)$$

Si l'on utilisait la formulation usant des rotations des noeuds d'extrémités et de la déviation de la barre, on aurait les formules explicites suivantes:

- Pour la *barre (de référence) bi-encastrée* (*voir relation 6.12*):

$$\begin{aligned} M_A &= R(2\phi_A + \phi_B - 3\psi) + \overline{M}_A \\ M_B &= R(\phi_A + 2\phi_B - 3\psi) + \overline{M}_B \\ V_A &= \frac{3R}{L}(\phi_A + \phi_B - 2\psi) + \overline{V}_A \\ V_B &= -\frac{3R}{L}(\phi_A + \phi_B - 2\psi) + \overline{V}_B \end{aligned} \quad (6.20)$$

- Pour la *barre (de référence) encastrée-appuyée* :

$$\begin{aligned}
 M_A &= \frac{3R}{2}(\phi_A - \psi) + \overline{M}_A \\
 V_A &= \frac{3R}{2L}(\phi_A - \psi) + \overline{V}_A \\
 V_B &= -\frac{3R}{L}(\phi_A - \psi) + \overline{V}_B
 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Les relations (6.20) et (6.21) sont communément appelées *formules en notations d'ingénieur* par contraste avec la notation matricielle (6.18) et (6.19). Il est vivement conseillé de mémoriser les expressions (6.20) des moments de flexion en raison de leur grande utilité dans certaines circonstances. Il n'est pas indispensable de faire de même pour les expressions des efforts tranchants dans la mesure où elles peuvent aisément être retrouvées à partir de celles des moments de flexion par simple dérivation de ces dernières  $V = \frac{dM}{dx}$ .

Il est clair que la Méthode des Rotations, dans sa présentation classique (en termes de rotations des noeuds et de déviations des barres) ne s'intègre désormais plus directement à la Méthode des Déplacements ; en effet, pour une barre, elle introduit trois déplacements (2 rotations de noeuds et une déviation) alors qu'il y a quatre efforts intérieurs aux extrémités à déterminer : 2 moments de flexion et 2 efforts tranchants.

### 6.5.5 Détermination des efforts intérieurs dans une section courante

Connaissant les moments de flexion et efforts tranchants aux extrémités d'une barre, on peut déterminer ces mêmes efforts intérieurs en toute section courante de cette barre par les relations (6.10).

### 6.5.6 Remarque importante

Lorsqu'on étudie l'état de déplacement produit par une translation d'une file ininterrompue de barres, l'équation d'équilibre n'est pas celle du seul nœud où l'on provoque ce déplacement mais bien celui de tous des nœuds de la file de barres subissant ce déplacement.

Dès lors, si le calcul des  $k_{ij}$  et des  $k_{iP}$  s'étend toujours bien à toutes les barres affectées par le déplacement unité imposé, on notera que celles-ci ne convergent pas en un même nœud mais aboutissent à tous les nœuds de la file concernée par le déplacement unitaire.

Ainsi, par exemple, la structure représentée à la Figure 6-10-a exige deux blocages en rotation des noeuds et un blocage de l'étage vis-à-vis du déplacement horizontal (Figure 6-10-b). Lorsqu'on donne un déplacement horizontal unitaire à l'étage, la réaction au niveau de cet étage, représentée par le coefficient de rigidité  $k_{33}$ , vaut (Figure 6-10-c) :

$$k_{33} = \frac{12EI_1}{H^3} + \frac{12EI_2}{H^3} + \frac{3EI_3}{H^3} \tag{6.22}$$

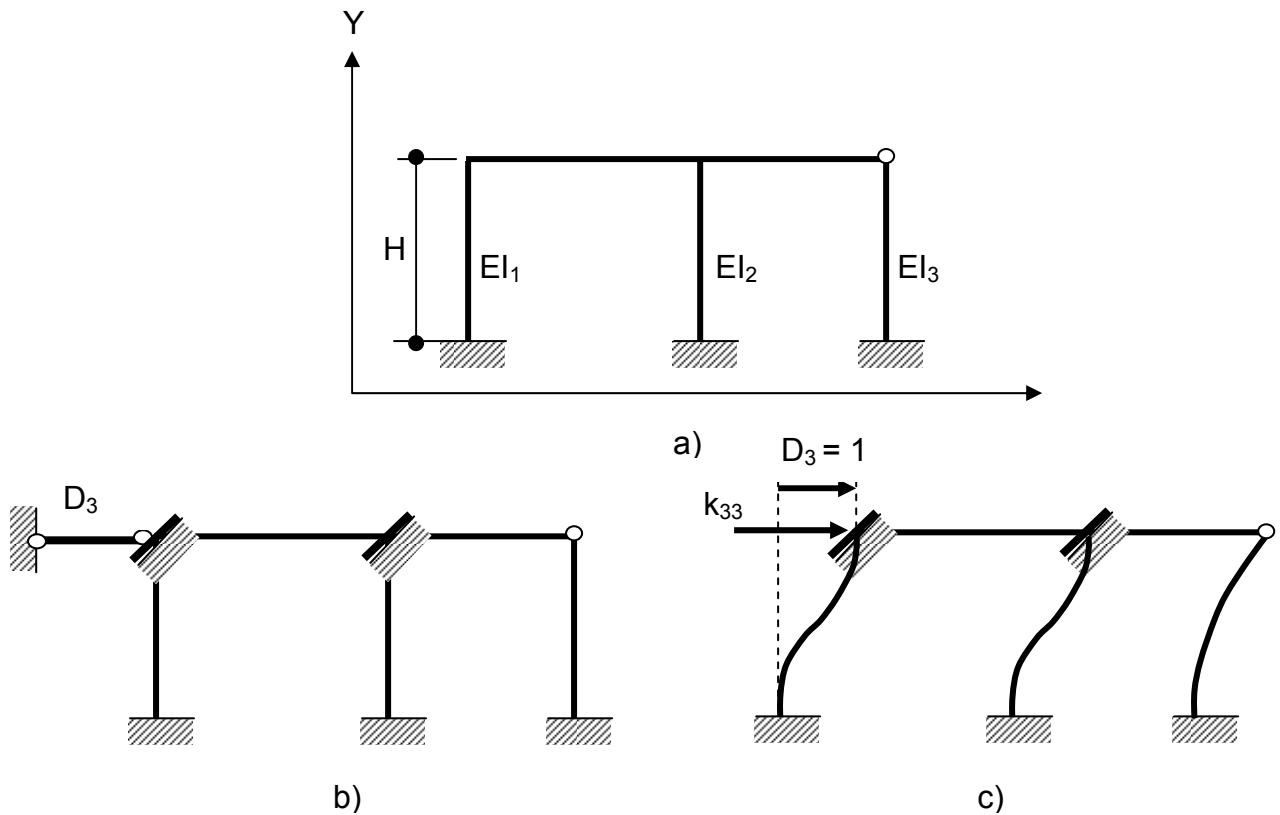


Figure 6-10 – Exemple de détermination d'un  $k_{ij}$

## 7 METHODE DE CROSS

### 7.1 Généralités

La Méthode de Cross est avant tout une méthode d'*application manuelle* pour l'analyse globale de structures planes. En effet, d'un point de vue physique, elle consiste à résoudre le système d'équations linéaires de la Méthode des Rotations par voie itérative selon la technique numérique de *relaxation*.

La méthode de relaxation s'apparente à la méthode d'approximations successives. Toutes deux partent d'estimations initiales des valeurs des inconnues. A chaque itération, la méthode des approximations successives produit des valeurs améliorées des inconnues tandis que la méthode de relaxation fournit des corrections à apporter aux valeurs initiales de ces inconnues.

On s'attendrait à ce que les inconnues de la Méthode de Cross soient les rotations des noeuds par similitude à la Méthode des Rotations. Il est en effet possible de développer la méthode en ce sens. Dès lors que le calculateur est normalement intéressé au premier chef plus par les résultats en termes d'efforts intérieurs que par ceux en termes de déplacements, on donne ici la préférence à une version de la méthode qui permet de trouver directement les moments de flexion aux extrémités des barres. Sous cette forme, la Méthode de Cross est aussi appelée aussi Méthode de Distribution des Moments

Le succès de la Méthode de Cross réside dans sa *remarquable simplicité d'application dès lors qu'on a assimilé les quelques automatismes indispensables qui la régissent*. Pour les types de chargement les plus courants, on peut en effet conduire les calculs pratiquement sans avoir besoin de formulaires, sans mémoriser des relations complexes et sans disposer d'aides matérielles de calcul.

La Méthode de Cross est exposée ici dans le *seul cadre de son application aux structures planes à noeuds fixes*. Il est tout à fait possible, par un artifice basé sur le principe de superposition, d'étendre son champ d'utilisation aux structures planes à noeuds mobiles en translation mais la procédure devient alors plus lourde au point que la méthode perd alors quelque peu de son intérêt.

La Méthode de Cross repose sur la mise en application récurrente de deux règles fondamentales :

- La règle de transmission d'un moment de flexion appliqué à une extrémité d'une barre vers l'autre extrémité de cette barre;
- La règle de répartition d'un moment extérieur, appliqué en un nœud, entre les barres aboutissant en ce noeud.

### 7.2 Règles fondamentales de la Méthode de Cross

#### 7.2.1 Règle de transmission

Dans la Méthode des Rotations – et donc la Méthode de Cross - la barre cinématiquement déterminée de référence d'une structure à noeuds fixes (en translation) a ses extrémités bloquées en rotation, d'où le vocable raccourci de *barre (de référence) bi-encastree*.

Imaginons qu'on libère le blocage de l'extrémité A d'une telle barre pour lui imposer une rotation donnée (Figure 7-1-a). Ceci revient à substituer un appui simple à cette extrémité

à condition d'extérioriser le moment de flexion  $M_A$  à appliquer en  $A$  pour générer la rotation dont question. La question qui se pose est la suivante :

*Quel est le moment qui va naître à l'extrémité encastrée  $B$  lorsqu'on applique un moment de flexion  $M_A$  à l'extrémité  $A$ ?*

Appliquons les relations forces-déplacements (6.20), compte tenu des conditions suivantes (Figure 7-1-a) :

- |                                       |  |
|---------------------------------------|--|
| $\psi = 0$                            | parce que les noeuds $A$ et $B$ sont fixes (en translation),                     |
| $\phi_B = 0$                          | parce l'extrémité $B$ est bloquée en rotation dans la barre de référence,        |
| $\overline{M}_A = \overline{M}_B = 0$ | parce la barre n'est pas soumise à des charges non nodales entre ses extrémités, |

On obtient :

$$M_A = 2R\phi_A$$

$$M_B = R\phi_A$$

d'où :

$$\boxed{M_B = \frac{1}{2}M_A} \quad (7.1)$$

La règle de transmission s'exprime dès lors comme suit :

*Si une barre prismatique  $AB$  appuyée en  $A$  et encastrée en  $B$ , est soumise à un moment de flexion  $M_A$  appliqué à l'extrémité  $A$ , il naît à l'extrémité  $B$  un moment de flexion  $M_B$  valant la moitié de  $M_A$  et de même signe que ce dernier (dans la convention de signes de la Méthode des Déplacements).*

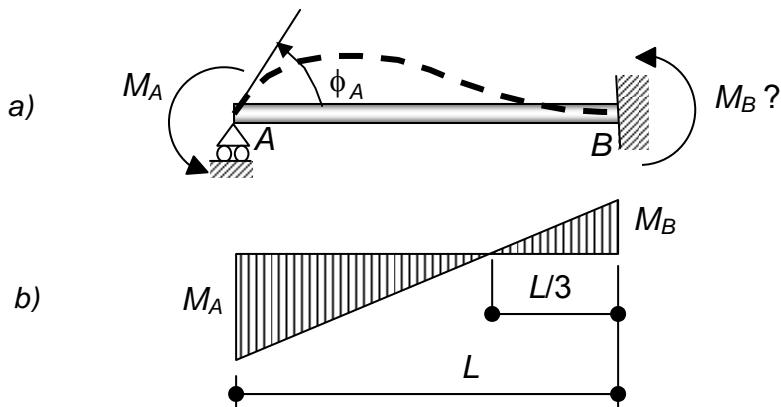


Figure 7-1 – Méthode de cross : Règle de transmission

Le diagramme des moments dans la barre  $AB$ , dessiné avec la convention de signes de la Mécanique des Matériaux<sup>3</sup>, est illustré à la Figure 7-1.

<sup>3</sup> Rappelons que les diagrammes de  $M$ ,  $N$ ,  $V$  sont toujours dessinés avec la convention de signes de la Mécanique des Matériaux (voir Figure 6-6-b)

### 7.2.2 Règle de répartition

Soit un noeud  $A$  en lequel convergent  $n$  barres qui y sont assemblées rigidement entre elles. Parmi ces  $n$  barres, supposons que  $n_1$  de ces barres soient encastrées à leur autre extrémité tandis que le solde, soit  $n_2 = (n - n_1)$ , ont cette extrémité articulée (Figure 7-2).

En ce noeud  $A$ , on applique un moment extérieur  $M_A$ . La question posée est la suivante :

*De quelle manière ce moment extérieur  $M_A$  appliqué au noeud  $A$  va-t-il se répartir à l'extrémité  $A$  de chacune des  $n$  barres ?*

Le noeud  $A$  est fixe en translation car relié à l'autre extrémité des  $n$  barres, elle-même fixe en translation. La structure élémentaire concernée est ainsi cinématiquement indéterminée de degré 1 ; la seule inconnue est la rotation  $\phi_A$  du noeud  $A$ . Lorsque le noeud  $A$  tourne d'un angle  $\phi_A$ , l'extrémité  $A$  de toutes les barres tournent du même angle  $\phi_A$  en raison de l'assemblage rigide des barres en ce point.

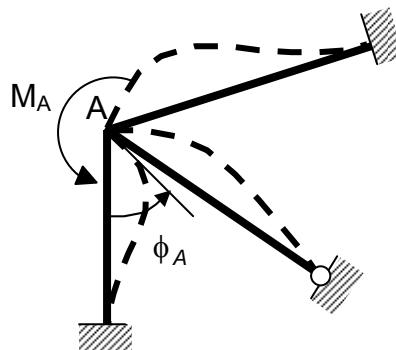


Figure 7-2– Règle de répartition

L'équation d'équilibre de ce noeud s'écrit :

$$k_{AA,structure}\phi_A + k_{AP} = P_A$$

dans laquelle on doit poser :

$k_{AP}=0$  parce qu'aucune des barres n'est chargée de forces *non nodales* entre ses extrémités,

$P_A = M_A$  parce que la seule force nodale existant au noeud  $A$  est le moment extérieur directement appliqué  $M_A$ ,

$$k_{AA,structure} = \sum_{k=1}^n k_{AA,barre\ k} = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{4EI_k}{L_k} + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{3EI_k}{L_k}$$

puisque le coefficient de rigidité  $k_{ii}$  d'une barre (de référence) bi-encastrée est de type  $4EI/L$  tandis que celui d'une barre (de référence) encastrée-articulée est de type  $3EI/L$ .

En se souvenant (voir équation 6.2) que la raideur  $R_k$  d'une barre  $k$  vaut:

$$R_k = \frac{2EI_k}{L_k} \quad (7.2)$$

on peut écrire :

$$k_{AA,structure} = \sum_{k=1}^n k_{AA,barre\ k} = \sum_{k=1}^{n_1} 2R_k + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{3}{2}R_k$$

De l'équation d'équilibre du noeud A, on tire la valeur de la seule inconnue cinématique :

$$\phi_A = \frac{M_A}{\sum_{k=1}^n k_{AA,barre\ k}} = \frac{M_A}{\sum_{k=1}^{n_1} 2R_k + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{3}{2}R_k}$$

En substituant cette expression de  $\phi_A$  dans la relation forces-déplacements de la barre générique  $k$ , il vient :

$$M_{Ak} = k_{AA,barre\ k}\phi_A = M_A \frac{k_{AA,barre\ k}}{\sum_{k=1}^n k_{AA,barre\ k}} = M_A \frac{R_k}{\sum_{k=1}^{n_1} R_k + \sum_{k=1}^{n_2} \frac{3}{4}R_k} \quad (7.3)$$

La règle de répartition s'énonce dès lors comme suit :

*Si on applique un moment extérieur  $M_A$  en un noeud fixe A où aboutissent n barres, ce moment se répartit entre celles-ci au prorata de leurs coefficients de rigidité respectifs (en toute généralité), c'est-à-dire au prorata de leurs raideurs respectives (si les barres sont prismatiques).*

Introduisons maintenant le concept de coefficient de partage  $\pi_{A,k}$  relatif à l'extrémité A de la barre  $k$  :

$$\pi_{Ak} = \frac{k_{AA,barre\ k}}{\sum_{k=1}^n k_{AA,barre\ k}} \quad (7.4)$$

La définition du coefficient de partage entraîne que la somme des valeurs des coefficients de partage en un nœud quelconque de la structure, associées à l'ensemble des barres qui convergent en ce nœud, vaut 1 :

$$\sum_{k=1}^n \pi_{Ak} = 1 \quad (7.5)$$

Le coefficient de partage de  $M_A$  pour la barre  $k$  apparaît donc comme le *facteur par lequel il faut multiplier le moment de flexion extérieur directement appliqué  $M_A$  pour obtenir le moment de flexion  $M_{Ak}$  à l'extrémité A de la barre* :

$$M_{Ak} = M_A \pi_{Ak} \quad (7.6)$$

### 7.3 Mise en œuvre de la Méthode de Cross

Comme on l'a déjà indiqué, l'application de la Méthode de Cross à une structure donnée soumise à des actions données revient à résoudre le système d'équations de la Méthode des Rotations, relatif au problème posé, par la technique numérique dite de *relaxation*.

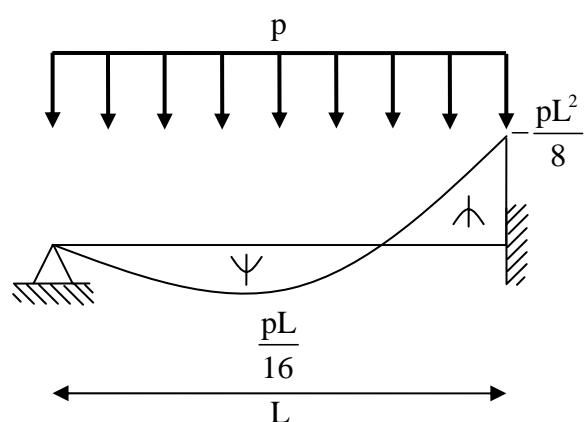
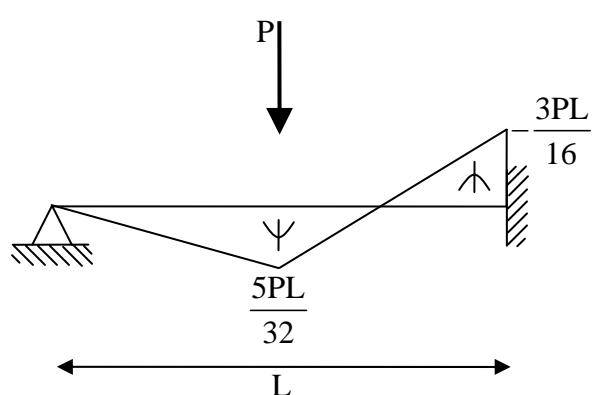
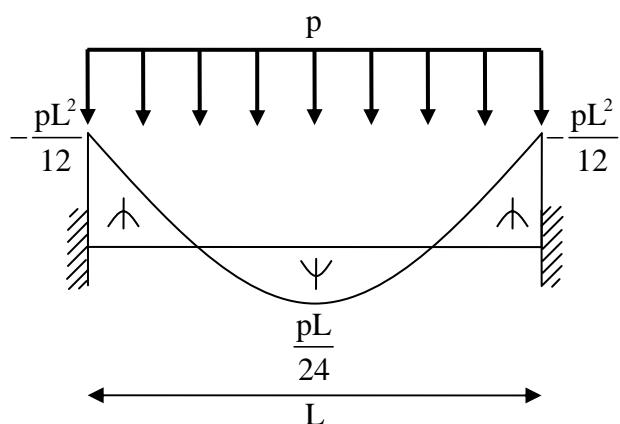
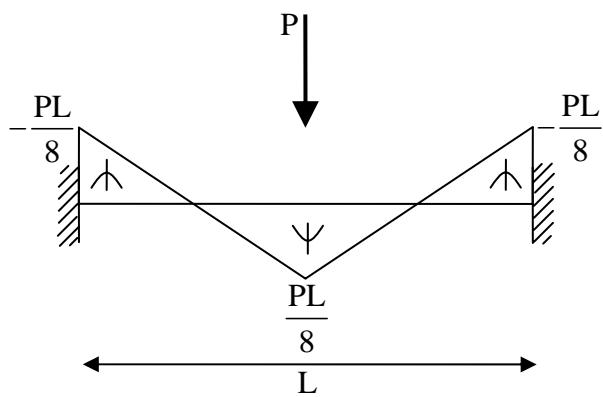
On part de valeurs initiales des moments aux extrémités non articulées des barres – les moments d'encastrement parfait – et à chaque étape, on calcule une correction à apporter à ces moments initiaux.

La procédure se termine lorsque la valeur correction est devient non significative.

### 7.3.1 Préparation du Schéma de Cross

Analyser une structure plane par la Méthode de Cross est avant tout travailler sur un Schéma de Cross. Ce dernier consiste en une figure (non nécessairement à l'échelle) de la structure concernée dans laquelle :

- On identifie clairement les divers nœuds de la structure à l'aide de quelconques symboles, pour lesquels il est néanmoins recommandé d'utiliser de lettres majuscules bien évidemment distinctes.
- On attache une colonne de travail aux deux extrémités de toutes les barres constituant la structure ; à ce stade, on aurait une situation illustrée par la Figure 7-3 à sous réserve de la priver tout nombre et de la mention relative à l'ordre de déblocage des nœuds.
- En chaque nœud de la structure, on reporte en tête de chaque colonne associée à ce noeud extrémité de chacune des barres qui y convergent la valeur du coefficient de partage  $\pi_k$  ; il est recommandé de reporter ces valeurs dans une couleur autre que celle qui sera utilisée pour les résultats des calculs effectués ultérieurement dans ce schéma ; une alternative consiste à reporter ces valeurs le long des barres, à proximité immédiate du nœud extrémité concerné. Les valeurs des coefficients de partage sont indiquées sur fond grisé dans l'exemple de la Figure 7-3.
- En tête des colonnes associées aux extrémités de barres où existent des moments d'encastrement parfait, on reporte en valeur et en signe les valeurs de ces moments (voir Etape 2 ci-dessous) et ce dans une autre couleur que celle utilisée pour la transcription des valeurs des coefficients de partage.



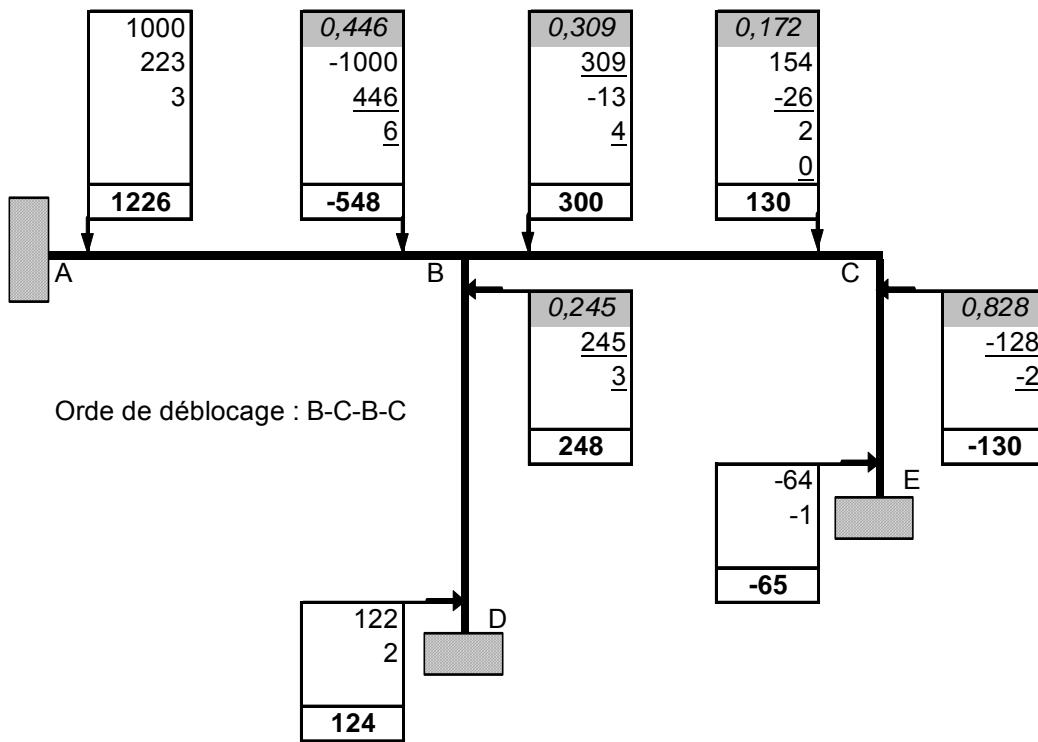


Figure 7-3 – Exemple d'application d'un schéma de Cross

### 7.3.2 Calculs préliminaires

Les calculs préliminaires consistent successivement à :

- *Calculer en chaque nœud, où aboutissent au moins deux barres qui y sont assemblées rigidement, les valeurs des coefficients de partage relatives aux barres qui y convergent.*

Chacune de ces valeurs est nécessairement inférieure à l'unité. Il est conseillé de les exprimer avec au plus trois décimales. On sait que la somme des valeurs du coefficient de partage en un nœud, relatives à toutes les barres assemblées rigidement en ce nœud, doit valoir 1 (voir équation (7.5)). Afin d'éviter dès le départ des erreurs – même mineures - qui ne manqueraient pas d'affecter la suite des calculs, il est recommandé de calculer séparément chacun des coefficients de partage dont on a besoin en chaque nœud. Des arrondis ou des troncatures dans les valeurs retenues font que souvent la somme en un nœud des valeurs calculées séparément n'est pas trouvée rigoureusement égale à 1. Il convient de procéder à l'équilibrage utile des valeurs calculées pour que la somme vaille strictement 1.

Pour l'exemple de la Figure 7-3, les données sont les suivantes :

- |                                |                               |
|--------------------------------|-------------------------------|
| - Longueur barre $AB$ : 6,10 m | - Inertie barre $AB$ : 0,73 / |
| - Longueur barre $BC$ : 8,80 m | - Inertie barre $BC$ : 0,73 / |
| - Hauteur barre $BD$ : 9,30 m  | - Inertie barre $BD$ : 0,61 / |
| - Hauteur barre $CE$ : 5,30 m  | - Inertie barre $CE$ : 3,12 / |

où / est une valeur de référence d'inertie

Admettons une raideur flexionnelle de référence  $EI = 50 \text{ MNm}^2$ .

Les coefficients de rigidité valent :

$k_{ii, \text{barre } AB} = 4*50*0,73/6,1 =$	23,9 MNm
$k_{ii, \text{barre } BC} = 4*50*0,73/8,8 =$	16,6 MNm
$k_{ii, \text{barre } BD} = 4*50*0,61/9,3 =$	13,1 MNm
$k_{ii, \text{barre } CE} = 4*50*2,12/5,3 =$	80,0 MNm

Les coefficients de partage valent :

Au nœud *B* :

$\pi_{AB,A} = 23,9/(23,9 + 16,6 + 13,1) =$	0,446
$\pi_{BC,A} = 16,6/(23,9 + 16,6 + 13,1) =$	0,309
$\pi_{BD,A} = 13,1/(23,9 + 16,6 + 13,1) =$	0,245

Sommel	1,000
--------	-------

Au nœud *C*

$\pi_{CB,C} = 13,1/(13,1 + 80) =$	0,172
$\pi_{CE,C} = 80/(13,1 + 80) =$	0,828
Somme	1,000

- *Calculer les moments d'encastrement parfait aux extrémités des barres soumises à des charges extérieures directement appliquées non nodales.*

Puisque les valeurs obtenues sont utilisées comme estimations initiales des moments aux nœuds et vont intervenir au départ de la mise en œuvre du schéma de Cross, il importe, pour exprimer ces moments, de choisir un système d'unités qui rende les nombres correspondants ni trop grands, ni trop petits ; on conseille de n'utiliser que des nombres entiers tels que le plus grand de ces nombres soit de l'ordre du millier ou de la dizaine de milliers. Bien sûr une alternative consiste à adopter un système d'unités quelconques mais de travailler dans le schéma de Cross avec des valeurs qui sont des multiples ou des sous-multiples décimaux de celles-ci ; lorsque les résultats du schéma de Cross auront été obtenus, il importera évidemment d'opérer les conversions inverses pour restaurer la cohérence.

Pour l'exemple de la Figure 7-3, les données sont les suivantes :

Charge uniformément répartie sur la seule barre *AB*, à raison de 322,5 kN/m.

Moments d'encastrement parfait :

$$\overline{M}_A = 322,5*6,1^2/12 = + 1000 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_B = - 322,5*6,1^2/12 = - 1000 \text{ kNm}$$

### 7.3.3 Procédure de la distribution des moments

La Méthode de Cross est une illustration exemplaire du principe de superposition des effets.

Ci-après, on décrit les étapes de la procédure en termes généraux d'abord puis en référence à l'exemple d'application introduit plus haut (Figure 7-3).

1. *Etape 1 : On rend la structure cinématiquement déterminée en bloquant les nœuds en rotation (à l'exception de ceux qui sont articulés dans la structure concernée).*

La structure de la Figure 7-3 possède deux degrés de liberté en rotation. On la rend cinématiquement déterminée en bloquant les nœuds *B* et *C*, de sorte que les traverses *AB* et *BC* deviennent désormais des barres (de référence) bi-encastrees.

2. *Etape 2 : Dans la structure rendue cinématiquement déterminée, on calcule les moments d'encastrement parfait dans les barres chargées par des forces non nodales ; ces moments sont des moments de flexion de déséquilibre pour les nœuds correspondants de la structure rendue cinématiquement déterminée.*

Seule la barre *AB* est chargée entre ses extrémités ; cette charge est uniformément répartie sur la longueur totale de cette barre. Les extrémités *A* et *B* sont respectivement un encastrement réel avec le monde extérieur et un encastrement résultant du blocage simple placé en *B* lorsqu'on a rendu la structure cinématiquement déterminée. Le moment d'encastrement parfait est 1000 kNm (voir fin du §7.3.2). Compte tenu de la convention de signes de la Méthode des Déplacements, ce moment est positif en *A* et négatif en *B*.

3. *Etape 3 : On débloque un nœud quelconque où existe un moment de flexion de déséquilibre, les autres nœuds restent bloqués en rotation dans la position occupée à ce moment. On note le symbole représentant le nœud débloqué. Le déblocage de ce nœud revient à libérer le moment de flexion de déséquilibre ; ce nœud est alors soumis à un moment de flexion extérieur égal mais de signe opposé au moment de flexion de déséquilibre. Ce moment de flexion extérieur se répartit entre les barres aboutissant au nœud au prorata des raideurs de ces barres et ce, en application de la règle de répartition. Un moment naît donc à l'extrémité de chacune de ces barres et transmet à l'autre extrémité – pour autant qu'elle soit réellement encastrée ou en raison d'un blocage y introduit – un moment de flexion valant la moitié du premier et ce, en application de la règle de transmission. A ce moment, la structure libérée en un nœud mais restant bloquée aux autres nœuds a atteint un état d'équilibre en ce noeud. On tire un trait sous les valeurs des moments équilibrés. Les moments de flexion résultant de la transmission sont des moments de flexion venant attaquer les nœuds où ils ont été transmis ; ce sont donc des moments de déséquilibre pour ceux-ci.*

Le seul nœud où existe un moment de déséquilibre est le nœud *B* (il existe bien un moment en *A* mais le nœud n'a pas à être débloqué puisqu'il s'agit d'un encastrement réel dans la structure d'origine) ; on ne peut donc que débloquer le nœud *B*. On note *B* sous la mention « Ordre de déblocage ». Au déblocage de *B*, le moment de déséquilibre de - 1000 kNm devient un moment de flexion extérieur de +1000 kNm qui s'applique au nœud *B*. Ce moment de flexion se distribue entre les barres *BA*, *BD* et *BC* au prorata de leurs coefficients de partage respectifs, à savoir 0,446, 0,245 et 0,309 ; ceci donne lieu à des moments de flexion à l'extrémité *B* de 446 kNm dans la barre *BA*, 245 kNm dans la barre *BD* et 309 kNm dans la barre *BC*. La moitié de ces

moments de flexion doit être transmise à l'autre extrémité de ces barres, soit 223 kNm vers *A*, 122 kNm vers *D* et 154 kNm vers *C*. Le moment de flexion de 154 kNm devient un moment de déséquilibre pour le nœud *C*. Dès ce moment, le nœud *A* se trouve en équilibre. On souligne les moments équilibrés en *B* - mais *C* ne l'est plus.

4. *Etape 4: On bloque le nœud libéré à l'étape 3 dans la position qu'il occupe après son déblocage et on libère un quelconque autre nœud où existe un moment de déséquilibre. On répète les opérations de l'étape 3.*

Le nœud *C* est à son tour débloqué. On note *C* (à la suite de *B* qui s'y trouve déjà) sous la mention « Ordre de déblocage ». Le moment de flexion de déséquilibre de 154 kNm se transforme en un moment de flexion extérieur de – 154 kNm appliqué au nœud *C* où convergent les barres *CE* et *CB*. Il se distribue au prorata des raideurs de ces barres, soit 0,828 et 0,172 ; un moment de flexion de  $0,828 \times (-154) = -128$  kNm apparaît en *C* dans la barre *CE* et un autre de  $0,172 \times (-154) = -26$  kNm apparaît en *C* dans la barre *CB*. La moitié de ces moments de flexion doit être transmise, soit -64 kNm vers *E* et -13 kNm vers *B*. Le moment de flexion -13 kNm vient attaquer le nœud *B*. A ce moment, le nœud *C* est équilibré – et on souligne les moments équilibrés en *C* - mais le nœud *B* ne l'est plus.

5. *Etape 5 et suivantes : on répète les opérations décrites à l'étape 4 en libérant successivement un nœud à la fois (en ce compris des nœuds qui auraient déjà été débloqués lors d'une étape antérieur mais auraient été remis en déséquilibre sous l'effet de moments de flexion issus de la transmission). On procède de la sorte de manière récurrente jusqu'à ce que les moments de déséquilibre qui subsistent soient suffisamment faibles que pour pouvoir être négligés. Il est habituel de stopper la procédure lorsque le plus grand moment de déséquilibre qui subsiste est de l'ordre du % du plus grand moment d'enca斯特rement parfait de départ.o..*

On bloque le nœud *C* dans la position atteinte et on débloque ensuite le nœud *B*. On note *B* (à la suite de *BC* qui s'y trouvent déjà) sous la mention « Ordre de déblocage ». Le moment de déséquilibre de -13 kNm devient un moment extérieur +13 kNm qui se répartit entre les trois barres selon  $0,446 \times 13 = 6$  kNm dans *BA*,  $0,245 \times 13 = 3$  kNm dans *BD* et  $0,309 \times 13 = 4$  kNm dans *BC*. Les moments transmis sont de  $6/2 = 3$  kNm vers *A*, de  $3/2 = 2$  kNm vers *D* et de  $4/2 = 2$  kNm vers *C*. Le moment de 2 kNm en *C* est un moment de déséquilibre pour ce nœud. A ce moment, le nœud *B* est à nouveau en équilibre – et on souligne les moments équilibrés en *B* - mais le nœud *C* ne l'est plus.

Le nœud *C* est débloqué. On note *C* (à la suite de *BCB* qui s'y trouvent déjà) sous la mention « Ordre de déblocage ». Le moment de flexion de déséquilibre de 3 kNm se transforme en un moment de flexion extérieur de – 2 kNm appliqué au nœud *C* où convergent les barres *CE* et *CB*. Il se répartit selon  $0,828 \times (-2) = -2$  kNm dans la barre *CE* et un autre de  $0,172 \times (-2) = 0$  kNm dans la barre *CB*. Il n'y a rien à transmettre vers *B* – et on souligne les moments équilibrés en *C* - de sorte qu'on a atteint un stade pour lequel les nœuds *B* et *C* sont tous deux équilibrés. On a donc atteint le terme de la procédure.

6. *Etape 6 : Il reste à effectuer la somme algébrique des valeurs reportées les unes au-dessous des autres dans les colonnes du schéma de Cross associées aux extrémités des barres. Les valeurs obtenues fournissent les valeurs des moments de flexion résultants en ces extrémités ; il s'agit donc, pour chacune des barres, de moments dits hyperstatiques auxquels il faudra superposer les moments isostatiques dus aux charges extérieures non nodales appliquées aux diverses barres considérées simplement appuyées (application du théorème des deux moments).*

Pour l'exemple traité, on obtient les moments hyperstatiques suivants :

- En *A* : 1226 kNm
- En *B* dans *BA* : -548 kNm
- En *B* dans *BC* : 300 kNm
- En *B* dans *BD* : 248 kNm
- En *C* dans *CB* : 130 kNm
- En *C* dans *CE* : -130 kNm
- En *E* : -65 kNm

### 7.3.4 Calcul des rotations des noeuds

Chaque fois qu'un nœud *i* se trouve mis en équilibre à l'issue d'une étape de la procédure décrite au §7.3.3, ce nœud subit une rotation  $\Delta\phi_{i,i}$ . Celle-ci est la valeur initiale lors du premier équilibrage (déblocage avec répartition-transmission) ou une correction lors des équilibrages ultérieurs.

En désignant par  $\Delta M_{ek,i}$  le *moment partiel équilibré* à l'extrémité *i* d'une quelconque barre d'ordre *k*, lors d'une étape quelconque de la procédure et par  $\Delta\phi_{k,i}$  la *correction de la rotation* au nœud *i*, entraînée par la mise en équilibre de ce nœud au cours de cette étape, on a, en vertu de la relation forces-déplacements d'une barre :

$$\Delta M_{ek,i} = k_{ii,\text{barre } k} \Delta\phi_{k,i} \quad (7.6)$$

d'où :

$$\Delta\phi_{k,i} = \frac{\Delta M_{ek,i}}{k_{ii,\text{barre } k}} \quad (7.7)$$

La rotation totale du nœud s'obtient en sommant les rotations partielles au cours des équilibrages successifs de ce nœud. En écrivant qu'en fin de procédure on a :

$$M_{ek,i} = \sum_{\text{équil}} \Delta M_{ek,i} = k_{ii,\text{barre } k} \sum_{\text{équil}} \Delta\phi_{k,i} = k_{ii,\text{barre } k} \phi_{k,i} \quad (7.8)$$

on tire :

$$\phi_{k,i} = \frac{\sum_{\text{équil}} \Delta M_{ek,i}}{k_{ii,\text{barre } k}} = \frac{M_{ek,i}}{k_{ii,\text{barre } k}} \quad (7.9)$$

avec, rappelons-le,  $k_{ii,\text{barre } k} = 2R_{ki}$  pour une barre (de référence) bi-encastrée et  $k_{ii,\text{barre } k} = \frac{3}{2}R_{ki}$  pour une barre (de référence) encastrée-articulée.

Il est utile de rappeler qu'en accord avec la procédure décrite au §7.3.2, les moments équilibrés dont question plus haut sont identifiés par les valeurs soulignées dans la colonne relative à l'extrémité *i* de la barre *k* dans le schéma de Cross.

Toutes les barres *k* aboutissant en un nœud *i* et assemblées rigidement entre elles en ce même nœud doivent prendre une même rotation  $\phi_i$  qui est la rotation du nœud. On doit donc avoir, quel que soit *k*,  $\phi_{k,i} = \phi_i$ .

### 7.3.5 Vérification des résultats

On effectue des vérifications élémentaires consistant à vérifier a posteriori :

- L'équilibre en rotation de chaque nœud, ce qui garantit le caractère *statiquement admissible* de la distribution des moments ;
- L'égalité des angles de rotation en un nœud de toutes les barres qui y convergent, ce qui assure la *compatibilité cinématique*.

Si ces vérifications sont concluantes, la procédure a été exécutée correctement et les résultats seront exacts sous la réserve évidente que les calculs préliminaires ne soient pas entachés d'erreurs.

#### Vérification de l'équilibre des nœuds

Au nœud *B*, la somme des moments doit être nulle dès lors qu'au moment de flexion extérieur directement appliqué n'agit en ce nœud dans la structure concernée :

$$-548 + 300 + 248 = 0 \quad \text{donc satisfait}$$

Au nœud *C*, la somme des moments doit être nulle dès lors qu'au moment de flexion extérieur directement appliqué n'agit en ce nœud dans la structure concernée :

$$+130 - 130 = 0 \quad \text{donc satisfait}$$

#### Vérification de la rotation des barres

Au nœud *B* :

$$\text{Barre } BA : \phi_{B,BA} = (446 + 6) \text{ kNm}/23,9 \text{ MNm} = 452/23,9 \cdot 10^3 = 18,91 \text{ mrad}$$

$$\text{Barre } BC : \phi_{B,BC} = (309 + 4) \text{ kNm}/16,6 \text{ MNm} = 313/16,6 \cdot 10^3 = 18,86 \text{ mrad}$$

$$\text{Barre } BD : \phi_{B,BD} = (245 + 3) \text{ kNm}/13,1 \text{ MNm} = 248/13,1 \cdot 10^3 = 18,93 \text{ mrad}$$

Au nœud *C* :

$$\text{Barre } CE : \phi_{C,CE} = (-128 - 2) \text{ kNm}/80 \text{ MNm} = -130/80 \cdot 10^3 = -1,63 \text{ mrad}$$

$$\text{Barre } CB : \phi_{C,CB} = (-26 - 0) \text{ kNm}/16,6 \text{ MNm} = -26/16,6 \cdot 10^3 = -1,57 \text{ mrad}$$

La rotation du nœud *B* est positive ; en vertu de la convention de signe de la Méthode des Déplacements – et donc de la Méthode de Cross – elle se produit donc dans le sens trigonométrique. La rotation du nœud *C*, négative, se produit dans le sens horlogique.

On constate que les rotations des diverses barres en un même nœud – qui doivent être égales – ne sont pas strictement identiques ; ceci est dû aux arrondis pratiqués lors des répartitions et de la troncature opérée lorsqu'on estime avoir atteint une extinction suffisante des corrections à apporter lors de la procédure récurrente. Elles sont toutefois suffisamment proches pour trouver la vérification concluante.

### 7.3.6 Remarques pratiques

Il est primordial de noter au fur et à mesure, sous le schéma de Cross, l'ordre de déblocage des nœuds ; cela permet éventuellement de contrôler à nouveau le détail des calculs après coup et de dépister et/ou corriger d'éventuelles erreurs. Dans le cas où il n'y a que deux nœuds à débloquer, cela n'a qu'un intérêt mineur car on ne peut débloquer les

deux nœuds qu'en alternance. Par contre, lorsque le nombre de nœuds à débloquer est plus important, il est utile de garder trace de l'ordre dans lequel on a procédé sous peine d'éprouver beaucoup de difficultés à restaurer cet ordre par la suite.

L'ordre de déblocage des nœuds dans la procédure de Cross est a priori quelconque. L'opération de répartition-transmission a pour résultat de diminuer l'amplitude des moments de déséquilibre ; cela est dû, d'une part, à la répartition, en un nœud, du moment de déséquilibre entre les diverses barres qui aboutissent en ce nœud et, d'autre part, au fait que la transmission le long d'une barre réduit un moment à la moitié de sa valeur.

La condition (6.9) constitue un *critère suffisant de convergence* de la résolution d'un schéma de Cross. La convergence sera d'autant plus rapide que l'on corrigera, à chaque étape, l'équation la plus « déséquilibrée », c'est-à-dire que l'on débloquera le nœud soumis au moment de déséquilibre résultant (somme algébrique des moments de déséquilibre qui le sollicitent à cette étape) le plus grand en valeur absolue. On conçoit dès lors qu'il est particulièrement judicieux – bien que nullement obligatoire – d'*adopter un ordre de déblocage des nœuds tel que, à chaque étape, on débloque le nœud où le moment de déséquilibre reste le plus grand (en valeur absolue)*. En pratiquant de la sorte, on réduit le nombre d'étapes requis pour atteindre la solution.

## 7.4 Détermination des efforts intérieurs

La Méthode de Cross fournit les valeurs des moments de flexion aux extrémités des barres.

A partir de ces derniers, on peut trouver les efforts intérieurs en une section courante par les relations (6.10).

## 7.5 Moments d'encastrement parfait en cas de déplacements imposés aux nœuds

Il est des circonstances où les forces extérieures ne sont pas le résultat d'actions extérieures directement appliquées (forces, moments) mais de *déplacements imposés* à certains nœuds (en raison de variations de température, de tassements d'appui, ...).

Considérons à titre d'exemple une poutre continue dont un appui subit une dénivellation imposée d'amplitude  $f$  (

Figure 7-4-a).

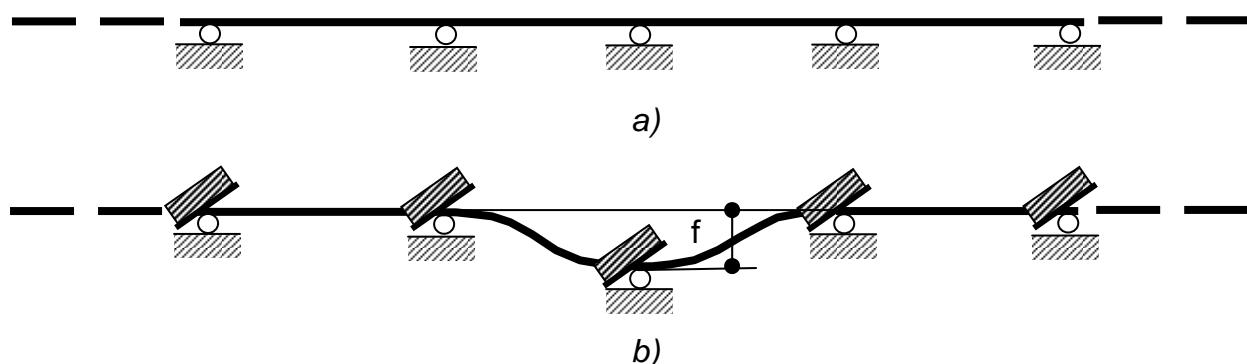


Figure 7-4 – Dénivellation d'appui dans une poutre continue

La position déformée de la structure de référence cinématiquement déterminée, obtenue en bloquant tous les nœuds en rotation, présente l'allure de la

Figure 7-4-b. La dénivellation d'appui a de toute évidence pour effet de faire naître des moments de flexion aux extrémités de chacune des travées adjacentes à l'appui dénivelé. Ces moments constituent les termes indépendants  $k_{IP}$  dans les équations d'équilibre de la Méthode des Déplacements et correspondent aux moments dits d'encastrement parfait de la Méthode de Cross.

Il importe donc d'établir l'expression de ces moments dans une barre de référence (bi-encastrée ou encastrée-articulée) dont les extrémités subissent une translation différentielle  $f$  perpendiculaire à l'axe de la barre ou, ce qui revient au même, dans une barre (de référence) soumise à une déviation  $\psi$ .

- Dans le cas de la barre (de référence) bi-encastrée (Figure 7-5), la dénivellation différentielle est :

$$f = D_3 - D_1 \quad (7.10)$$

ce qui correspond à une déviation :

$$\psi = \frac{D_3 - D_1}{L} \quad (7.11)$$

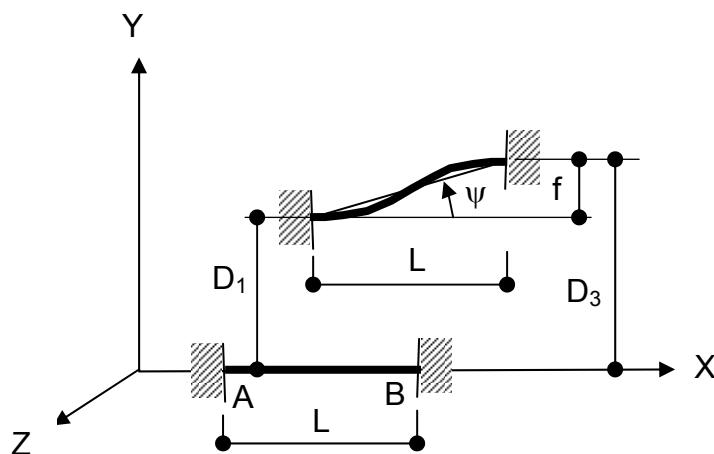


Figure 7-5 – Dénivellation d'appui dans la barre (de référence) bi-encastrée

A partir de (6.20), on calcule aisément, avec  $\phi_A = \phi_B = 0$  et  $\bar{M}_A = M_B = 0$  :

$$\begin{aligned} M_A &= M_B = -3R\psi \\ &= -\frac{6EI/f}{L^2} \end{aligned} \quad (7.12)$$

- Dans le cas de la barre (de référence) articulée-encastrée, on établit de manière similaire à partir de (6.21) :

$$\begin{aligned} M_A &= -\frac{3}{2} R \psi \\ &= -\frac{3Elf}{L^2} \end{aligned} \tag{7.13}$$

Si l'illustration ci-dessus fait référence à une dénivellation d'appui, il va de soi que toute autre cause de déplacements imposés et soumettant la structure à des efforts intérieurs est traitée de manière analogue ; une variation uniforme de température de la structure ou d'une partie de la structure relève d'une telle cause.

## 7.6 Détermination approchée des moments secondaires dans les structures planes en treillis à nœuds rigides

Il est possible d'appliquer les principes développés plus haut pour évaluer les *moments de flexion secondaires naissant dans les structures planes en treillis* en raison du fait que l'exécution des nœuds est généralement telle que les barres y sont plutôt assemblées rigidement qu'articulées.

Un treillis à nœuds rigides continue à travailler principalement aux efforts normaux ; l'analyse globale d'une telle structure montre en effet que les valeurs de ces efforts normaux sont trouvées très proches de celles qui seraient obtenues en supposant les nœuds articulés. En corollaire de la rigidité des noeuds, ces derniers ne peuvent librement et les barres subissent dès lors des restreintes flexionnelles à leurs extrémités. Il en résulte qu'en sus d'un effort normal, chaque barre de la structure est soumise à une distribution linéaire de moment de flexion, dont les valeurs maximales se produisent aux extrémités de la barre, c'est-à-dire aux nœuds ; les moments de flexion dont question sont appelés *moments secondaires*. Cette appellation n'est toutefois pas des plus appropriées car l'adjectif «secondaire» peut laisser entendre que ces moments sont quantités négligeables, ce qui n'est généralement pas le cas.

La pratique est très souvent d'omettre ces moments secondaires pour le dimensionnement des structures en treillis réalisées en acier. En d'autres termes, on fait ici encore l'hypothèse de nœuds articulés pour calculer aisément les efforts intérieurs ; ceux-ci se réduisent ici aux seuls efforts normaux dans les barres de la structure. Cette pratique n'est toutefois tolérée que si la structure est sollicitée par des *actions de nature essentiellement statique* (sa justification réside dans la capacité du matériau à l'*adaptation plastique*, notion qui sera abordée dans une autre partie du présent cours et développée en détail dans le cours de Constructions métalliques et mixtes). Elle est *inacceptable* si le treillis en acier est *sujet à la fatigue*, à savoir soumis à des actions éminemment variables dans le temps et répétées un grand nombre de fois ; la vérification à la fatigue fait référence à l'étendue de variation des contraintes et il est clair qu'il faut calculer celle-ci en tenant compte à la fois des efforts normaux et des moments de flexion. Le problème peut donc se poser de déterminer ces moments de flexion secondaires.

On peut bien sûr imaginer d'effectuer l'analyse globale d'un treillis à nœuds rigides comme on le ferait d'une ossature. Le degré d'hyperstaticité devient alors très élevé et l'effort pour aboutir aux efforts intérieurs est considérable (à tout le moins si l'on effectue les calculs à la main). On peut procéder de manière beaucoup plus simple et suffisamment précise en procédant comme suit :

- On évalue les *efforts normaux* de manière classique en *supposant les nœuds articulés* ; on a déjà dit plus haut que les valeurs ainsi obtenues sont proches de la réalité.
- On évalue *indépendamment* les *moments secondaires*. Pour ce faire, on admet que *les déplacements élastiques des nœuds du treillis à nœuds rigides sont les mêmes que ceux du treillis à nœuds articulés* ; cette hypothèse est pour ainsi dire le corollaire immédiat, comme déjà dit ci-dessus, de la proximité entre efforts normaux correspondants calculés respectivement dans le treillis à nœuds rigides et dans le treillis à nœuds articulés ; ces déplacements sont obtenus par application directe du théorème de la force unité. Les nœuds, fixés en translation dans cette position, sont fixés angulairement de sorte que les tangentes aux configurations déformées des barres y soient parallèles aux directions qu'avaient ces barres dans leur configuration à vide, soit avant mise en charge du treillis. Dans cette situation, les barres ne sont pas chargées entre leurs extrémités (poids propre négligé) et les rotations de leurs extrémités sont nulles puisque les nœuds ont été empêchés de tourner. Les moments de déséquilibre qui sollicitent les nœuds sont exclusivement générés par les déviations prises par les barres lors de la déformation du treillis ; toute déviation de barre se détermine directement à partir des composantes du déplacement des extrémités de cette barre selon la perpendiculaire à l'axe de cette dernière. On effectue alors une procédure de Cross sur le treillis dont les nœuds sont ainsi sollicités ; les moments obtenus aux extrémités des barres au terme de cette procédure constituent les moments secondaires recherchés.

## 8 TREILLIS PLANS

A côté des systèmes composés de poutres essentiellement fléchies, on trouve les *structures en treillis*. Les treillis sont utilisés comme substitut de poutres pour franchir de plus grandes portées; des treillis spéciaux très légers sont aussi employés pour de faibles portées.

Un treillis est une structure composée de *barres supposées articulées à leurs extrémités* (nœuds) et chargée par des *forces appliquées exclusivement aux nœuds*. De la sorte, en admettant que le poids propre reste négligeable devant les charges nodales, les barres du treillis ne sont soumises qu'à des *efforts axiaux* de traction ou de compression, constants barre par barre.

On se borne à n'étudier que les treillis plans.

### 8.1 Treillis plans isostatiques

Un *treillis isostatique* est à la fois *extérieurement et intérieurement isostatique*. Il est extérieurement isostatique si ses liaisons avec le monde extérieur sont telles que l'ensemble des réactions d'appui sont déterminables à partir des seules équations d'équilibre global de la structure. Un treillis est dit intérieurement isostatique si, les réactions étant supposées connues, les efforts dans toutes les barres du treillis sont déterminables par les méthodes élémentaires de la statique.

#### 8.1.1 Efforts intérieurs

La détermination des efforts dans les barres d'un treillis plan isostatique s'effectue selon l'une des méthodes suivantes, développées ailleurs, à savoir :

- La *méthode de l'équilibre des nœuds*, appelée méthode de Culmann;
- La *méthode des coupes*, appelée méthode de Ritter ;
- Les *méthodes de la graphostatique*, telle la méthode de Cremona.

Ces méthodes s'appliquent indifféremment que les charges soient fixes ou mobiles ; dans ce dernier cas, il y a toutefois intérêt à utiliser le concept de ligne d'influence (voir chapitre 9) de l'effort dans une barre déterminée afin de déterminer les valeurs extrema de l'effort dans cette barre.

#### 8.1.2 Déplacements

En raison des noeuds articulés et des charges appliqués seulement aux nœuds, l'état déformé d'un treillis plan soumis à un chargement donné est *univoquement déterminé par la position déformée des nœuds* de ce treillis.

Le travail intérieur de déformation ne comporte que des contributions dues aux efforts axiaux  $N_i$  naissant dans les barres d'ordre  $i$ . En affectant de l'indice  $i$  les caractéristiques (longueur  $L$ , aire  $A$  de section transversale, module d'élasticité  $E$  du matériau constitutif) de la barre générique, le déplacement  $d_j$  d'un nœud  $j$  dans une direction donnée  $\Delta_j$  est donnée par le théorème de la force unité qui s'écrit en l'espèce :

$$d_j = \sum_{i=1}^n \frac{N_{i,P} N_{i,1}}{E_i A_i} L_i \quad (8.1)$$

avec :

$N_{i,P}$  effort dans la barre  $i$  du treillis plan isostatique sous l'effet des charges extérieures directement appliquées (et/ou de déplacements imposés)

$N_{i,1}$  effort dans la même barre  $i$  du treillis plan isostatique sous l'effet d'un effort unitaire appliqué au nœud  $j$  et dans la direction  $\Delta_j$ .

La somme est étendue aux  $n$  barres constituant le treillis.

On constate donc que, pour la détermination d'un déplacement de nœud, on doit procéder à la *détermination de deux familles d'efforts intérieurs* :

- L'une correspondant aux *actions extérieures effectives* ;
- L'autre correspondant à une *force unitaire* dont le point d'application et la direction sont conditionnés par le déplacement recherché.

La direction du déplacement d'un nœud de treillis plan donné sous des actions extérieures données (forces, déplacements imposés) est a priori inconnue. Elle serait complètement déterminée si l'on connaissait les valeurs des composantes de ce déplacement selon *deux directions orthogonales*. Dès lors, on exerce successivement au nœud concerné une force unitaire selon chacune de ces deux directions et on applique le théorème de la force unité dans chacun des deux cas; ceci permet de trouver les valeurs du déplacement selon ces directions orthogonales, à partir desquelles, par combinaison vectorielle, on trouve la *valeur et la direction* du déplacement résultant.

Lorsqu'on désire obtenir la *variation de distance entre deux nœuds* donnés  $A$  et  $B$  d'un treillis plan (Figure 8-1), il suffit d'appliquer la relation ci-dessus en prenant toutefois comme état de charge unitaire (engendrant donc les valeurs  $N_{i,1}$ ) celui constitué par *deux forces unitaires égales et opposées* agissant selon la droite joignant les nœuds  $A$  et  $B$  (Figure 8-1.b).

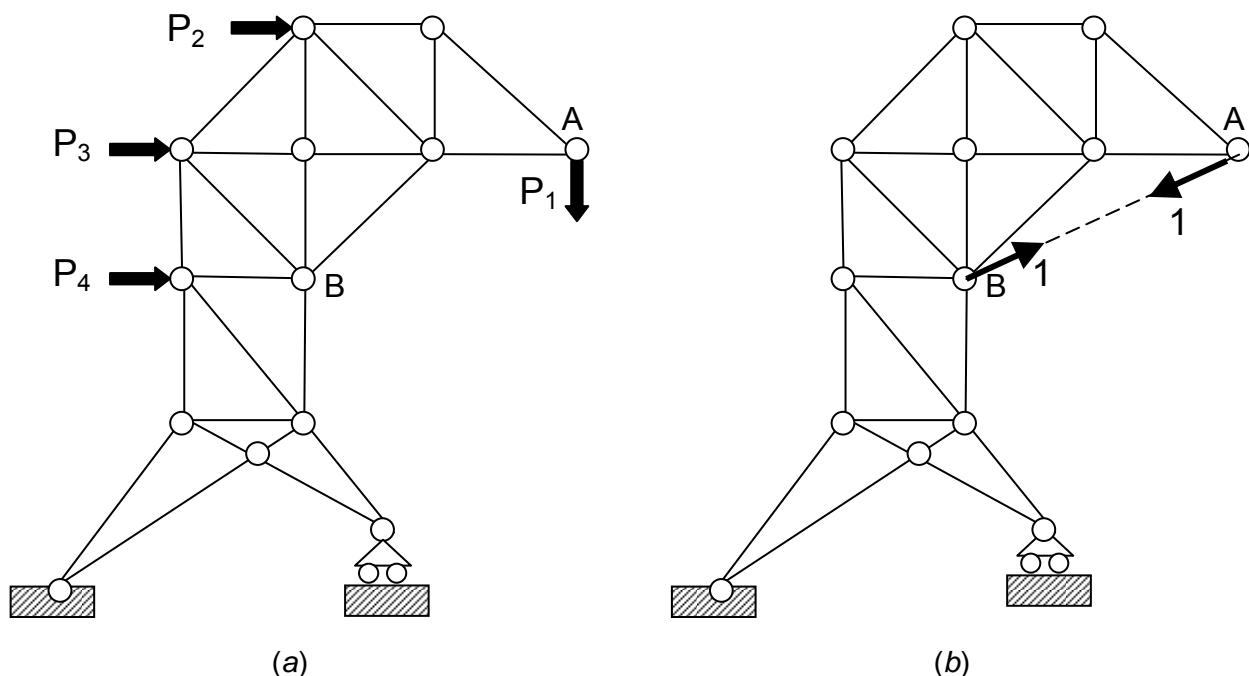


Figure 8-1 – Calcul de la variation de distance entre deux nœuds de treillis plan

Les déplacements calculés comme indiqués ci-dessus supposent évidemment qu'il n'y ait aucun jeu dans les assemblages des barres entre elles. Si ces assemblages aux noeuds sont réalisés par soudage, le résultat est assez correct. Par contre, si l'on utilise la rivure ou les boulons (non préserrés), on sait – et la pratique le montre – que les jeux inévitables contribuent à accroître les déplacements dans une mesure qu'il n'est pas aisément d'évaluer très précisément. La vérification aux états limites de service consiste à s'assurer que les déplacements calculés restent inférieurs à des valeurs limites spécifiées (recommandées) dans les codes. Il importe donc de corriger les résultats obtenus de manière à en obtenir une évaluation plus réaliste; à cet effet, une pratique couramment utilisée en bureau d'études, consiste à répercuter le surcroit de flexibilité dû aux jeux dans les assemblages au travers d'une réduction - de l'ordre de 10%. - du module d'élasticité du matériau constitutif.

## 8.2 Treillis plan hyperstatiques

L'hyperstaticité d'un treillis plan hyperstatique peut être due à une hyperstaticité extérieure, à une hyperstaticité intérieure ou à une hyperstaticité à la fois extérieure et intérieure. Quelle que soit la situation, la procédure décrite ci-après, fondée sur la méthode des forces, subsiste.

### 8.2.1 Efforts intérieurs

La détermination des efforts intérieurs dans un treillis hyperstatique est illustrée ci-après dans le cas d'un treillis une fois hyperstatique. On considère d'abord que l'hyperstaticité est extérieure puis qu'elle est intérieure. Les deux treillis étudiés sont choisis de manière à être semblables et ainsi permettre une comparaison des résultats et tirer une conclusion intéressante.

#### Treillis plan extérieurement une fois hyperstatique

Soit le treillis plan de la Figure 8-2.a. Il y a deux réactions en chacun des deux appuis alors qu'on ne dispose que de 3 équations d'équilibre global; le degré d'hyperstaticité extérieur est donc de un. Intérieurement le treillis est isostatique.

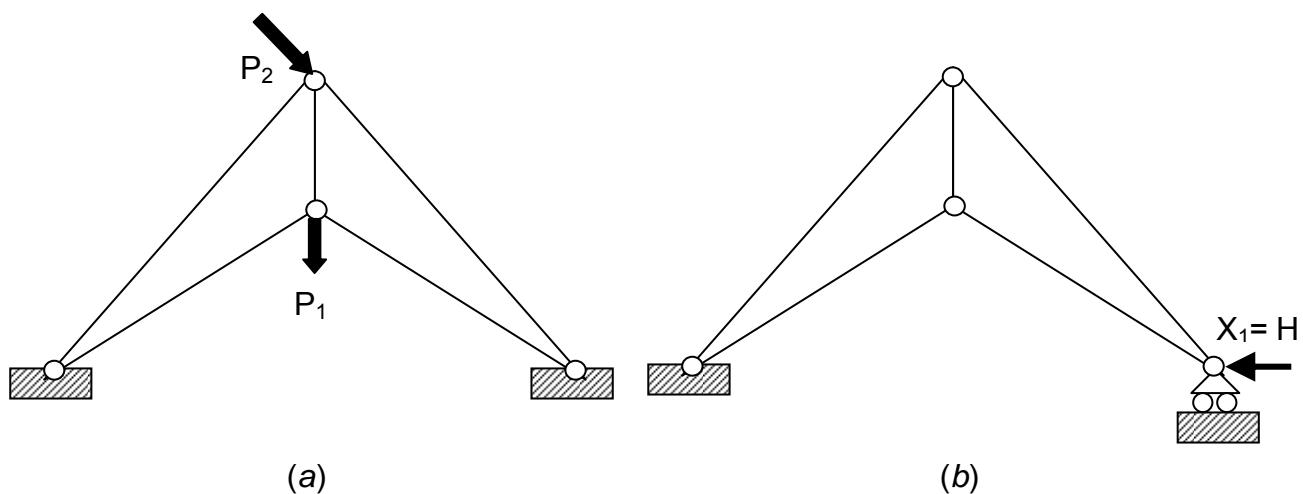


Figure 8-2 – Treillis plan extérieurement une fois hyperstatique

On choisit la poussée  $H$  (réaction horizontale) à l'appui de droite comme inconnue hyperstatique  $H = X_1$  (Figure 8-2.b); on rend le treillis isostatique (système  $S_0$ ) en

effectuant une coupure relative à la poussée, soit en transformant un des appuis fixes en un appui à rouleaux à libre déplacement horizontal. La seule équation de la méthode des forces s'écrit :

$$f_{11}X_1 + f_{1P} = 0 \quad (8.2)$$

On calcule successivement :

- Les efforts  $N_{i,P}$  dans les barres du système  $S_0$  sous l'effet des forces extérieures directement appliquées ;
- Les efforts  $N_{i,1}$  dans les barres du système  $S_0$  sous l'effet d'une poussée unitaire  $H = 1$ .

On détermine les coefficients de flexibilité selon

$$f_{11} = \sum_{i=1}^n \frac{N_{i,1}^2}{EA_i} L_i \quad (8.3)$$

$$f_{1P} = \sum_{i=1}^n \frac{N_{i,1} N_{i,P}}{EA_i} L_i \quad (8.4)$$

Les deux sommes s'étendent à toutes les barres du treillis, soit 5 en l'espèce.

Et on en déduit la valeur de l'inconnue hyperstatique  $H$ :

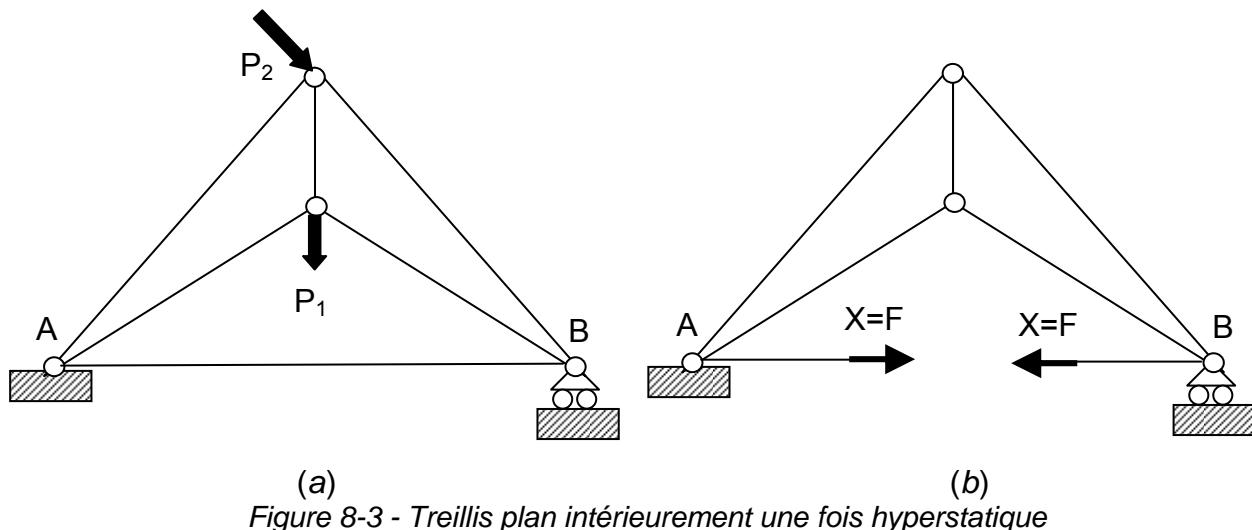
$$H = X_1 = -\frac{f_{1P}}{f_{11}} \quad (8.5)$$

Lorsque la valeur de  $H$  est connue, les efforts dans le treillis hyperstatique concerné s'obtiennent par le principe de superposition selon :

$$N_i = N_{i,P} + H N_{i,1} \quad (8.6)$$

### Treillis plan intérieurement une fois hyperstatique

Soit le treillis plan de la Figure 8-3.a, dont les propriétés des barres et les charges appliquées sont identiques à celles du treillis traité précédemment (si ce n'est qu'il compte la barre AB en plus). Il est isostatique extérieurement puisqu'il est globalement assimilable à une poutre sur deux appuis. Par contre, il comporte une barre excédentaire, car trois barres aboutissent aux nœuds d'appui; le degré d'hyperstaticité intérieur est donc de un.



On choisit l'effort  $F$  dans le tirant  $AB$  comme inconnue hyperstatique  $X_1$ ; on rend le treillis isostatique (système  $S_0$ ) en effectuant une coupure relative à l'effort axial dans une barre excédentaire, soit la barre  $AB$  (Figure 8-3.b). La seule équation de la méthode des forces et les expressions des coefficients de flexibilité  $f_{11}$  et  $f_{1P}$  sont formellement identiques à celles écrite en (8.3) et (8.4). Toutefois les symboles qui y interviennent sont respectivement :

- Les efforts  $N_{i,P}$  dans les barres du système  $S_0$  sous l'effet des forces extérieures directement appliquées ;
- Les efforts  $N_{i,1}$  dans les barres du système  $S_0$  sous l'effet d'une force unitaire  $X_1 = F = 1$  appliquée aux lèvres de la coupure simple pratiquée dans le tirant  $AB$ .

Et on en déduit encore la valeur de l'inconnue hyperstatique  $F$  selon :

$$H = X_1 = -\frac{f_{1P}}{f_{11}} \quad (8.7)$$

Les deux sommes s'étendent à toutes les barres du treillis, soit 6 en l'espèce.

On remarque toutefois que 5 valeurs sont non nulles parmi les  $N_{i,P}$  puisque la sixième valeur – effort dans la barre  $AB$  – est nulle en raison de la coupure pratiquée dans cette barre; elles sont d'ailleurs identiques à celles déjà calculées dans les barres correspondantes du système de référence utilisé pour le treillis hyperstatique extérieurement . L'expression de  $f_{1P}$  comporte donc 5 termes et sa valeur sera la même que dans le cas précédent.

Par contre, il y a 6 valeurs non nulles parmi  $N_{i,1}$  car la barre  $AB$  est ici soumise à un effort unitaire. Comme les termes intervenant dans l'expression de  $f_{11}$  sont des carrés, ils sont tous positifs et le résultat obtenu ici sera supérieur à celui obtenu dans le cas précédent puisque comportant un terme positif de plus.

Lorsque la valeur de  $F$  est connue, les efforts dans le treillis hyperstatique concerné s'obtiennent par le principe de superposition selon :

$$N_i = N_{i,P} + FN_{i,1} \quad (8.8)$$

### Comparaison

Dans les deux cas traités plus haut, les efforts  $F$  et  $H$  jouent un rôle analogue sur les systèmes de référence respectifs, qui sont tout à fait analogues. Il n'en reste pas moins que la valeur absolue de l'effort  $F$  dans le tirant sera inférieur à celle de la poussée  $H$ .

Cette différence s'explique par le fait que l'effort  $F$  est une sorte de poussée s'exerçant par l'intermédiaire d'une barre déformable axialement de sorte que les appuis du treillis soumis aux forces extérieures peuvent s'écartier alors qu'ils ne le peuvent pas dans le cas précédent (appuis fixes).

La valeur de l'effort résultant dans chacune des cinq barres communes aux deux treillis examinés n'est donc pas la même dans les deux treillis.

Ceci met clairement en évidence un piège dans lequel le calculateur doit absolument éviter de tomber : ne pas confondre « faire une coupure » et « enlever la barre » ou, plus précisément, appliquer les efforts unités aux extrémités de la barre coupurée au lieu de les appliquer aux lèvres d'une coupure dans cette barre. En d'autres termes, *la coupure effectuée dans une barre ne signifie nullement la suppression de cette barre*.

### Treillis plan hyperstatique de degré h

La procédure décrite plus haut peut évidemment se généraliser au cas d'un treillis plan plus qu'une fois hyperstatique. On aura bien sûr à résoudre alors un système d'équations du type :

$$\sum_{j=1}^h X_j f_{ij} + f_{i,P} = 0 \quad (i = 1, h) \quad (8.9)$$

avec :

$$f_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{N_{k,i1} N_{k,j1}}{E_k A_k} L_k \quad (8.10)$$

$$f_{i,P} = \sum_{k=1}^n \frac{N_{k,i1} N_{k,p}}{E_k A_k} L_k \quad (8.11)$$

et :

$k$  indice repérant la barre générique et les propriétés de celle-ci ;

$N_{k,i1}$  effort dans la barre  $k$  sous l'effet d'une force unité  $X_j = 1$  appliquée aux lèvres de la coupure  $i$  ;

$N_{k,j1}$  effort dans la barre  $k$  sous l'effet d'une force unité  $X_j = 1$  appliquée aux lèvres de la coupure  $j$  ;

$N_{k,p}$  effort dans la barre  $k$  sous l'effet des forces extérieures directement appliquées  $P$ .

Les efforts intérieurs s'obtiennent selon :

$$N_k = N_{k,P} + \sum_{j=1}^h X_j N_{k,j1} \quad (8.12)$$

#### Remarque

La méthode exposée plus haut reste d'application pour la recherche des efforts intérieurs induits dans le treillis plan par des effets thermiques, des tassements d'appui ou des bridages ; dans ces cas, il suffit d'adopter les quantités appropriées pour les seconds membres des équations de compatibilité

### 8.2.2 Déplacements

Le déplacement  $d_j$  d'un nœud  $j$  dans une direction donnée  $\Delta_j$  est ici encore donné par le théorème de la force unité qui s'écrit en l'espèce :

$$d_j = \sum_{i=1}^n \frac{N_{i,P} N_{i,1}}{E_i A_i} L_i \quad (8.13)$$

Seule la signification des symboles  $N_{i,P}$  et  $N_{i,1}$  est à aménager en raison de l'hyperstaticité de la structure étudiée. On a vu, à l'occasion du théorème de la force unité (voir § 2.4.2) que l'une des deux distributions d'efforts axiaux doit nécessairement être déterminée dans le treillis hyperstatique étudié tandis que l'autre distribution peut l'être dans le treillis rendu isostatique puisqu'il suffit qu'elle soit statiquement admissible. Le choix de l'une ou de l'autre est indifférent.

## 9 LIGNES D'INFLUENCE

### 9.1 Concept de ligne d'influence

Toute structure doit être dimensionnée de manière que toute section soit à même de résister aux sollicitations extrêmes auxquelles elle peut être soumise. Lorsque les actions sur une structure donnée sont des *charges mobiles* (par exemple : essieux de convoi sur un pont routier ou ferroviaire, galets de pont roulant sur la poutre de roulement, ...), il est nécessaire de pouvoir déterminer la position particulière de ces charges mobiles pour lesquelles un effet donné, de nature mécanique ( $M$ ,  $N$ ,  $V$ ) ou géométrique (flèche, pente, rotation, ...), dans une section donnée atteint une valeur extrême, donc une valeur maximale ou minimale. La recherche de cette position particulière des charges mobiles est grandement facilitée si l'on introduit le *concept de ligne d'influence* ; ce concept est étudié ci-après dans le seul cadre de constructions soumises à un système de charges parallèles à une direction fixe, celle-ci étant prise verticale parce que associée au sens d'action de la gravité

Une *ligne d'influence* est toujours *relative à un effet donné* dans une *section donnée*. Par convention, une ligne d'influence est toujours tracée pour une charge gravitaire et unitaire ( $P = 1$ ) mobile, donc agissant à une abscisse variable  $x$  et dont on étudie l'effet dans la section d'abscisse fixe  $\alpha$ .

On appelle *ligne d'influence d'un effet  $E(\alpha)$*  dans une section  $\alpha$  la courbe telle que son ordonnée  $y$ , lue à une abscisse  $x$ , fournit, à une certaine échelle, la valeur de l'effet  $E(\alpha)$  recherché pour une charge verticale unitaire  $P = 1$  appliquée à l'abscisse  $x$  (Figure 9-1).

Une ligne d'influence est donc une fonction analytique de l'abscisse  $x$  positionnant la charge mobile unitaire appliquée. Conventionnellement il est d'usage de reporter les ordonnées positives d'une ligne d'influence au-dessus de la ligne repère  $Ox$ .

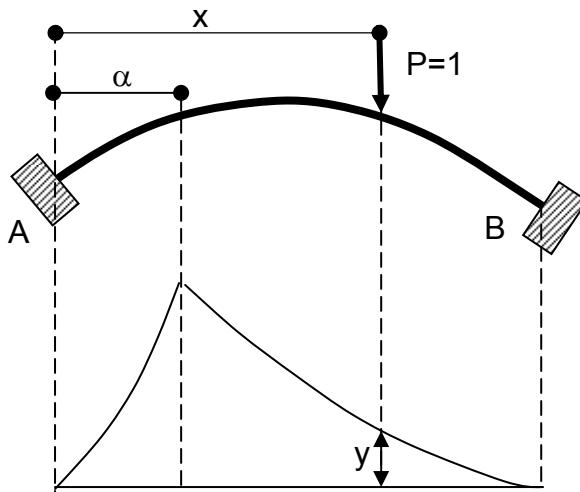


Figure 9-1 – Principe d'une ligne d'influence

Il importe d'éviter toute confusion entre une *ligne d'influence* d'un effet  $E$  dans une section donnée  $\alpha$  et un *diagramme* de ce même effet. Tous deux dépendent de deux paramètres indépendants : la position  $x$  de la charge et la position de la section  $\alpha$ ; toutefois :

- Pour un diagramme, l'abscisse  $\alpha$  de la section varie tandis que l'abscisse  $x$  de la charge mobile est fixée : Diagramme d'un effet =  $f(\bar{\alpha}, \bar{x})$ .
- Pour une ligne d'influence; l'abscisse  $\alpha$  de la section est fixée tandis que l'abscisse  $x$  de la charge mobile varie : Ligne d'influence d'un effet =  $f(\bar{\alpha}, x)$ .

Une ligne d'influence peut s'obtenir de diverses manières :

- Par *calcul* ;
- Par *construction graphique* ;
- Par *voie expérimentale*.

Seule la première des manières citées ci-dessus – détermination par calcul – est développée ici. Dans ce contexte, on peut envisager deux approches pour l'établissement d'une ligne d'influence :

- Dans la *première approche*, la ligne d'influence d'un effet déterminé dans une section déterminée consiste à *placer une force unitaire  $P = 1$  successivement en diverses abscisses de la structure et à calculer, pour chacune de ces positions, la valeur de l'effet recherché dans la section concernée*. On reporte alors en ordonnées à partir d'une ligne droite repère la valeur de l'effet dont question au droit de la position de la charge associée à cet effet. En reportant cet ensemble de valeurs, en nombre égal au nombre de positions choisies, on obtient autant de points de la ligne d'influence cherchée ; il suffit de les réunir pour obtenir la ligne d'influence.
- Dans la *seconde approche*, on détermine *directement* la ligne d'influence cherchée en faisant usage des *théorèmes de Land* qui sont exposés dans la suite.

La *première approche* est valable en toute généralité. Elle nécessite que, pour chaque position de la charge, on détermine la valeur de l'effet recherché. Dans une structure hyperstatique cela nécessite de « résoudre » le problème hyperstatique; ce faisant, les résultats obtenus consiste non seulement en la valeur de l'effet recherché mais en outre en valeurs de tout un ensemble d'autres effets. Ainsi, cette manière de procéder est assez fastidieuse ; elle permet par contre la *détermination de lignes d'influence relatives à de multiples effets*.

Par contraste, la *seconde approche* « cible » exclusivement *la ligne d'influence recherchée*. On verra toutefois plus loin que la détermination d'un nombre limité de lignes d'influence relatives à des effets mécaniques distincts judicieusement choisis – appelées *lignes d'influence primaires* – permet de construire la ligne d'influence relative à un quelconque autre effet.

Puisqu'une ligne d'influence d'un effet donné dans une section donnée est calculée pour une charge mobile unitaire, l'effet résultant pour un *train de charges mobiles* est obtenu en *chargeant la ligne d'influence* concernée par les charges individuelles composant ce train de charges, prises avec leur sens et leur valeur (voir §9.2).

## 9.2 Chargement d'une ligne d'influence et recherche des effets extrêmes

Le chargement d'une ligne d'influence repose sur le principe de superposition. Dès lors le concept de ligne d'influence ne peut être envisagé que dans les structures ayant un comportement élastique au premier ordre ; pour tout autre type de comportement, le principe de superposition n'est en effet plus applicable.

Dès lors, la valeur d'un effet résultant  $E(\alpha)$ , produit par des forces concentrées mobiles  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  placées sur la structure en des endroits tels que les ordonnées de la ligne d'influence au droit de ces forces soient  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ , est donné par :

$$E(\alpha) = \sum_{i=1}^n P_i y_i \quad (9.5)$$

Si, en outre, il existe des charges réparties sur une longueur  $ab$  selon une loi  $p=p(x)$ , l'effet total sera :

$$E(\alpha) = \sum_{i=1}^n P_i y_i + \int_a^b p(x) y(x) dx \quad (9.6)$$

La valeur de l'effet  $E(\alpha)$  dépend évidemment de la position occupée par le train de charges sur l'ouvrage. On a déjà dit que les valeurs extrêmes de l'effet  $E(\alpha)$  sont déterminantes pour le dimensionnement des sections. Il importe donc de les rechercher. Il n'y a pas d'autre solution que de procéder par tâtonnements à la recherche des positions des trains de charge conduisant aux valeurs extrêmes de l'effet  $E(\alpha)$ . Pour des charges agissant toutes dans le sens de la gravité, l'effet maximum positif s'obtient bien sûr en chargeant les plages positives de la ligne d'influence de l'effet  $E(\alpha)$  et en s'abstenant, autant que faire se peut, d'en charger les plages négatives. On procède de manière similaire pour la recherche de l'effet minimum : on charge au maximum les plages négatives en évitant si possible de charger les plages positives. Dans le cas de trains de charges comportant des charges gravitaires et des charges contre-gravitaires, le processus est un peu plus laborieux mais s'inspire des mêmes principes, ce qui importe étant le produit de la charge et de l'ordonnée correspondante de la ligne d'influence, prises toutes deux avec leurs signes respectifs.

### 9.3 Détermination de lignes d'influence d'effets mécaniques

Par effets mécaniques, on entend les efforts intérieurs  $M$ ,  $N$  et  $V$  dans une section et les diverses réactions d'appui (réaction, horizontale, réaction verticale, moment d'encastrement).

#### 9.3.1 Structures isostatiques

Pour rappel, il a déjà été montré dans un autre cours que la ligne d'influence d'un effet mécanique dans une structure isostatique sous l'action d'une force verticale unitaire mobile  $P = 1$  s'obtient comme suit :

- *On effectue la coupure simple relative à l'effet dont on recherche la ligne d'influence ;*
- *On donne aux lèvres de la coupure du système coupuré un déplacement compatible avec les liaisons restantes de la structure et ce, dans un sens tel que lesdites lèvres se déplacent dans le sens positif de l'effet recherché ;*
- *La ligne d'influence cherchée est donnée par la déformée de la structure coupurée et sollicitée de la sorte ;*
- *L'échelle de lecture des ordonnées de la ligne d'influence est donnée par le segment représentant le déplacement relatif des lèvres de la coupure.*

#### 9.3.2 Structures hyperstatiques

La règle donnée au §9.3.1 pour les structures isostatiques s'étend sans la moindre modification à la détermination de la ligne d'influence d'un effet mécanique dans une structure hyperstatische. La seule différence réside dans la complexité différente de la mise

en œuvre, en particulier dans le calcul de la déformée. En effet, si la structure est isostatique, le fait d'effectuer la coupure simple conduit à la transformer en un mécanisme tandis que si la structure est hyperstatique, il débouche sur une structure de degré d'hyperstaticité réduit d'une unité, donc au moins isostatique.

Démontrons cette extension de la règle aux structures hyperstatiques en considérant le cas d'un arc à deux rotules dont on recherche la ligne d'influence de la poussée horizontale  $H$  (Figure 9-2.a) en une des naissances de l'arc, repérée 1.

Désignons par  $P = 1$  la force verticale unitaire mobile faisant naître la poussée horizontale  $H$ . Selon la procédure indiquée plus haut, on effectue une coupure simple relative à la poussée cherchée, ce qui revient à disposer à substituer à l'appui fixe situé en 1 un appui à rouleau permettant un libre déplacement horizontal.

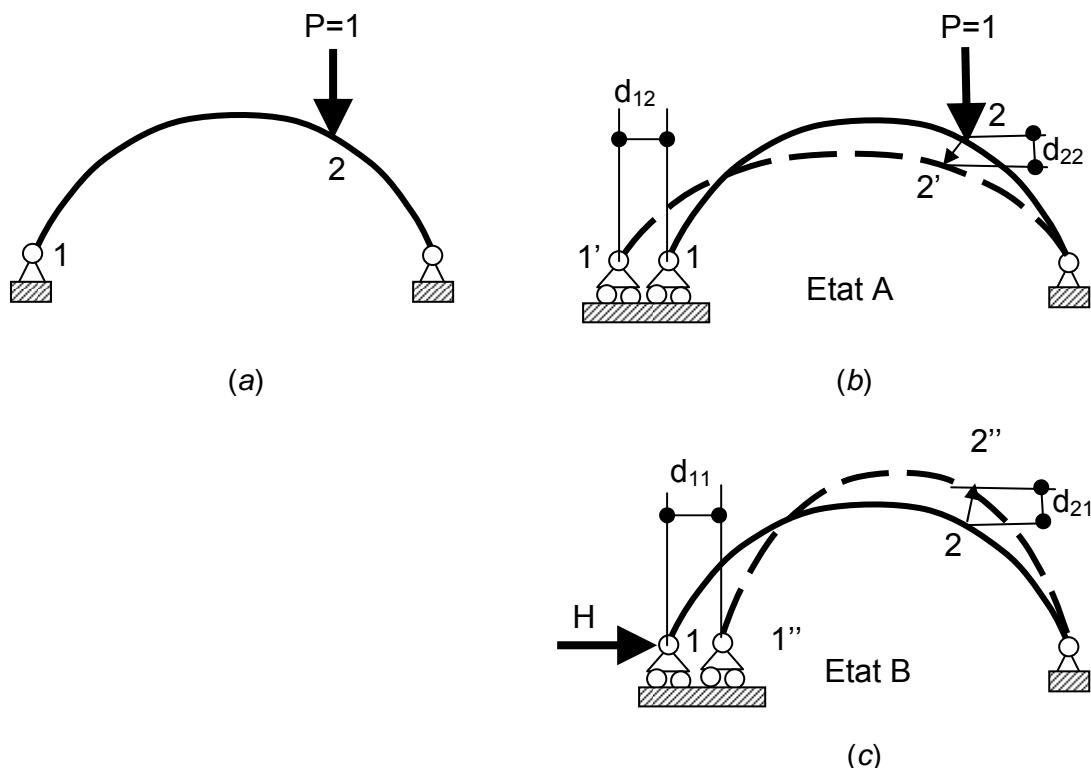


Figure 9-2 – Ligne d'influence de la poussée dans un arc à deux rotules

Sous l'effet de la force  $P = 1$  appliquée à une abscisse quelconque – repérée par le point 2 – du système coupuré, le point 1 se déplace horizontalement d'une quantité  $d_{12}$ <sup>4</sup> pour arriver en position 1' ; simultanément le point 2 vient en 2' (Figure 9-2.b). La poussée  $H$  inconnue a une valeur telle que tout déplacement horizontal du point 1 est empêché ainsi que l'exige la situation de la structure non coupurée. Cette poussée  $H$ , appliquée au point 1 dans le système coupuré, doit donc produire un déplacement  $d_{11}$  de même grandeur que  $d_{12}$  mais de sens inverse, amenant le point 1 en position 1'' ; en même temps le point 2 vient en position 2'' (Figure 9-2.c). Dès lors la valeur de  $H$  se déduira de l'équation vectorielle :

<sup>4</sup> Par convention, le premier indice repère le point subissant le déplacement tandis que le second désigne le point où la force extérieur unitaire  $P$  est appliquée.

$$\vec{d}_{12} + \vec{d}_{11} = 0 \quad (9.7)$$

Considérons respectivement :

- L'état A (Figure 9-2.b), relatif au système coupuré soumis à la seule force extérieure  $P = 1$  appliquée au point 2, pour lequel le déplacement horizontal (direction associée à la poussée) en 1 est  $d_{12}$  tandis que le déplacement du point 2 projeté<sup>5</sup> sur la direction de la force  $P$  est désigné par  $d_{22}$  ;
- L'état B (Figure 9-2.c) relatif au système coupuré soumis à la seule force extérieure  $H$  au point 1, pour lequel le déplacement en 1 est  $d_{11}$  tandis que le déplacement du point 2 projeté sur la direction verticale (direction associée à la force  $P$ ) est désigné par  $d_{21}$ .

Le théorème de réciprocité de Maxwell permet d'écrire :

$$\vec{H} \vec{d}_{12} = \vec{P} \vec{d}_{21} = \vec{1} \vec{d}_{21} \quad (9.8)$$

Ou encore, compte tenu de (9.7) :

$$-\vec{H} \vec{d}_{11} = \vec{1} \vec{d}_{21} \quad (9.10)$$

D'où :

$$\vec{H} = -\frac{\vec{d}_{21}}{\vec{d}_{11}} \quad (9.11)$$

Si l'on définit le sens positif des déplacements comme étant le sens positif des efforts auxquels ils sont associés, l'équation vectorielle se réduit à :

$$H = -\frac{d_{21}}{d_{11}} \quad (9.12)$$

Ainsi, à chaque position 2 de la charge  $P$ , correspond une valeur de  $d_{21}$  donc de  $H$  ; la valeur de la poussée  $H$ , exprimée comme une fonction de la position  $x$  de la charge n'est donc rien d'autre que l'expression formelle de la ligne d'influence cherchée. Cette expression appelle les observations suivantes :

- La grandeur obtenue est le rapport de deux déplacements ; elle est donc adimensionnelle.
- La valeur du dénominateur  $d_{11}$  est indépendante du point d'application 2 de la charge mobile  $P = 1$ , ce qui assure la proportionnalité entre  $H$  et  $d_{21}$ .
- Le déplacement  $d_{11}$  est une quantité positive parce que dirigée dans le sens où l'on mesure positivement la poussée  $H$  ; si l'on pose  $H > 0$ ,  $d_{21}$  doit donc être négatif et être dirigé de bas en haut puisque les déplacements verticaux sont pris positifs dans le sens de la gravité. Dès lors, en reportant les valeurs  $d_{21}$  positivement vers le haut à partir de la ligne de repère de la ligne d'influence, on obtient cette ligne d'influence en grandeur et en signe puisque, conformément à la convention de report des ordonnées d'une ligne d'influence (voir §9.1), les ordonnées de celles-ci sont positives vers le haut, à l'inverse des flèches.
- $H = 1$  si  $d_{11} = d_{21}$ , le signe étant absorbé par la convention de signe ; de ce fait,  $d_{11}$  constitue l'échelle du dessin de la ligne d'influence puisqu'il représente alors le déplacement des lèvres de la coupure sous l'effet de  $H = 1$ .

L'expression (9.12) obtenue ci-dessus dans un cas particulier et la discussion qui y fait suite revêtent un caractère général. Elles s'appliquent à tous les systèmes élastiques quel

<sup>5</sup> La projection du déplacement est à considérer parce que le théorème de Maxwell, qui va être appliqué, se réfère à la notion de travail, qui est le produit d'une force par le déplacement de son point d'application projeté sur la direction de la force.

que soit l'effort intérieur concerné par la ligne d'influence cherchée. Il suffit d'appliquer aux lèvres de la coupure effectuée deux forces égales et opposées ;  $d_{11}$  représente le déplacement relatif des lèvres de la coupure projeté sur la direction commune des deux forces.

La procédure de recherche de la *ligne d'influence d'un effort intérieur* dans une structure hyperstatique telle que décrite plus haut constitue le *premier théorème de Land* (1890), qui s'énonce comme suit :

*Pour trouver la ligne d'influence d'un effet mécanique donné dans une section donnée d'une structure hyperstatique, on effectue la coupure simple relative à cet effet et on impose aux lèvres de cette coupure un déplacement généralisé (c'est-à-dire associé à l'effet considéré) de même sens que cet effet. Les ordonnées de la ligne d'influence cherchée sont données par l'état de déplacement de la structure coupurée et sollicitée comme dit ci-dessus. L'échelle de cette ligne d'influence est donnée par le segment qui, sur le dessin obtenu, représente le déplacement relatif des lèvres de la coupure.*

La mise en œuvre du premier théorème de Land – que l'on pourrait qualifier de cinématique – permet de trouver directement, en-dehors de tout calcul - l'*allure générale* des lignes d'influence dans les systèmes hyperstatiques. Là réside son intérêt majeur.

A titre d'exercice, on établira l'expression formelle de la ligne d'influence d'un moment de flexion  $M$  dans une section donnée  $\alpha$  d'une structure hyperstatique, s'écrit :

$$M = -\frac{d_{21}}{\phi_{11}} \quad (9.13)$$

où  $\phi_{11}$  désigne la rotation relative des lèvres de la coupure effectuée en 1 (section où le moment de flexion est recherché) sous l'action d'une paire de couples unitaires  $M = 1$  appliqués au point 1. Ce qui précède reste donc valable à condition de prendre les termes « déplacement » et « force » dans le sens généralisé. Si la ligne d'influence du moment de flexion était tracée en grandeur réelle, l'échelle serait donnée par le segment vertical  $CD$  intercepté par les tangentes au point 1 prolongées, à une distance horizontale égale à l'unité de longueur; comme la ligne d'influence est toujours tracée à une certaine échelle des longueurs  $\bar{u}_x$ , tous les segments de la figure seront multipliés par  $\bar{u}_x$ ; dès lors l'échelle des ordonnées de la ligne d'influence sera représentée par le segment  $CD = \bar{u}_M$  intercepté par les deux tangentes au point 1 prolongées sur une verticale distante de 1 d'une longueur  $\bar{u}_x$  (Figure 9-3).

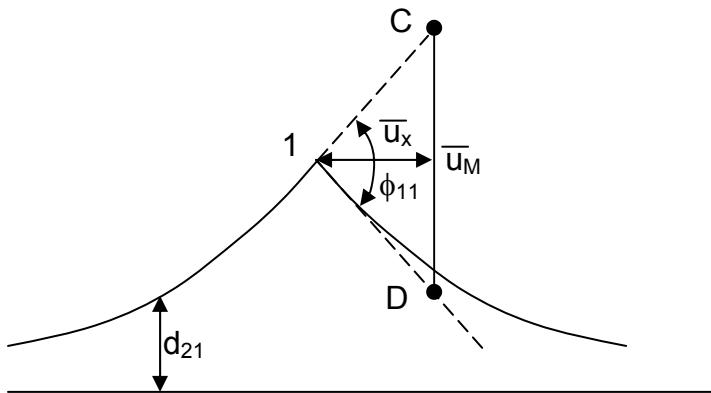


Figure 9-3 – Unité de mesure dans le cas d'une ligne d'influence d'un moment de flexion

Il est clair que si la structure d'origine est plus d'une fois hyperstatique, les déplacements  $d_{21}$  et  $d_{11}$  (ou  $\phi_{11}$ ) sont à calculer dans un système coupuré qui reste hyperstatique.

Le fait que le système coupuré puisse être hyperstatique et que l'introduction de l'élément déformateur dans la section coupurée puisse y faire naître des efforts intérieurs non nuls et inconnus, autres que celui relativement auquel on a effectué la coupure simple, explique que l'utilisation qualitative intuitive du premier théorème de Land peut inspirer diverses formes possibles de la ligne d'influence cherchée sans fournir pour autant d'indication sur la forme à retenir.

Il en est ainsi par exemple pour la ligne d'influence du moment de flexion dans une section 5 de la travée intermédiaire d'une poutre continue à trois travées, pour laquelle on peut imaginer les deux formes représentées à la Figure 9-4.

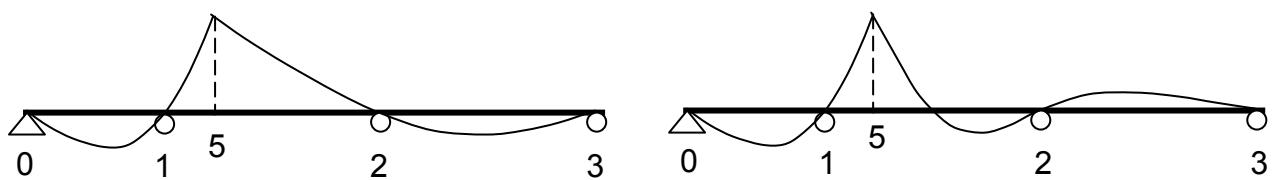


Figure 9-4 – Diverses allures intuitives possibles d'une ligne d'influence  $Li M_5$

#### 9.4 Détermination de lignes d'influence d'effets géométriques

Par effets géométriques, il faut entendre notamment les flèches (déplacements verticaux) et les rotations élastiques.

Imaginons de rechercher la ligne d'influence du déplacement vertical d'une section S de poutre encastrée-appuyée sous l'action d'une charge concentrée unitaire mobile  $P = 1$  se déplaçant d'une extrémité à l'autre de cette poutre (Figure 9-5.a).

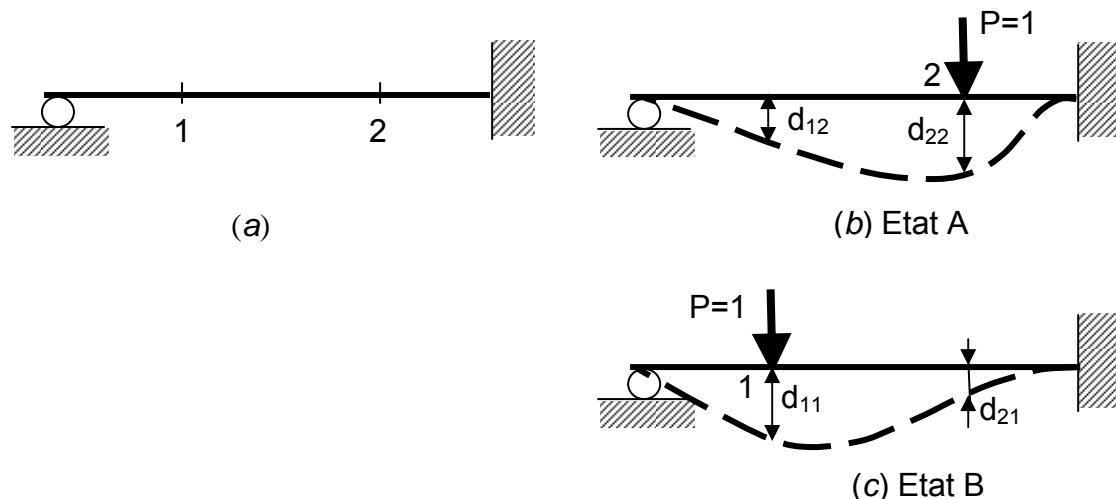


Figure 9-5 – Ligne d'influence d'un effet géométrique

Une charge verticale unitaire appliquée au point 2 produit un déplacement vertical  $d_{12}$  au point 1 et  $d_{22}$  au point 2 (Figure 9-5.b). Si on place la force verticale unitaire au point 1, elle produit un déplacement vertical  $d_{21}$  du point 2 et  $d_{11}$  du point 1. En vertu du théorème de réciprocité de Maxwell, et en considérant les états A et B représentés aux Figure 9-5.a et b, on peut écrire :

$$1 \cdot d_{12} = 1 \cdot d_{21} \quad (9.14)$$

d'où

$$d_{12} = d_{21} \quad (9.15)$$

Dès lors, on tire le second théorème de Land pour le calcul de la ligne d'influence d'un déplacement vertical :

*La ligne d'influence du déplacement d'une section 1, projeté sur une direction déterminée  $\Delta$  est donnée par la déformée de la structure sous l'action d'une force unitaire  $P = 1$  appliquée au point 1 dans la direction  $\Delta$ .*

On peut généraliser le théorème ci-dessus au calcul de la ligne d'influence d'un autre type d'effet géométrique, par exemple la rotation de la section située en 1. Il suffit d'appliquer un couple unitaire  $M = 1$  en 1 et de rechercher la déformée correspondante de la structure. Ceci est justifié par le théorème de réciprocité de Maxwell appliqué aux états suivants :

*Etat A* structure chargée par une force verticale unitaire  $P = 1$  au point 2 et produisant un déplacement vertical  $d_{22}$  du point 2 et une rotation  $\phi_{12}$  au point 1 ;

*Etat B* structure chargée par un couple unitaire  $M = 1$  au point 1 et produisant un déplacement vertical  $d_{21}$  du point 2 et une rotation  $\phi_{11}$  au point 1.

On obtient la relation  $\phi_{12} = d_{21}$ .

Ainsi donc le second théorème de Land pour le calcul de la ligne d'influence d'une rotation d'une section :

*La ligne d'influence de la rotation d'une section 1 est donnée par la déformée de la structure sous l'action d'un couple unitaire  $M = 1$  appliqué au point 1.*

En toute généralité, le second théorème de Land peut s'exprimer comme suit :

*La ligne d'influence d'un effet géométrique sans une section 1 est donnée par la déformée de la structure sous l'action d'un effort généralisé unitaire associé à l'effet géométrique recherché appliqué au point 1.*

On ne saurait assez insister sur le fait qu'il y a donc deux formes du théorème de Land qui ne s'énoncent pas de la même manière et qui, dès lors, ne conduisent pas à des procédures identiques. La première forme est applicable aux lignes d'influence d'effets mécaniques tandis que la seconde forme est applicable aux lignes d'influence d'effets géométriques.

## 9.5 Dérivées de la fonction $f(\alpha,x)$

La fonction  $f(\alpha,x)$  représentant l'expression analytique d'une ligne d'influence dépend à la fois de l'abscisse  $x$  de la force unitaire et de l'abscisse  $\alpha$  de la section considérée. On peut imaginer de dériver cette fonction par rapport soit à  $x$ , soit à  $\alpha$ . On peut montrer assez aisément ce qui suit :

- *La dérivée, par rapport à l'abscisse  $x$  de la force concentrée mobile unitaire  $P = 1$ , de la ligne d'influence d'un effet  $E(\alpha)$  dans une section  $\alpha$  représente la ligne d'influence de cet effet relative à un couple unitaire mobile  $M=1$ .*

Ce résultat peut notamment être mis à profit pour l'étude des effets du freinage sur les tabliers de pont, les charges mobiles verticales subissant une décélération qui se traduit par des forces horizontales agissant avec un certain bras de levier par rapport à l'axe de l'ouvrage sur lequel elles roulent.

- *La ligne d'influence d'un effet dérivé d'un effet dit fondamental, relative à une force concentrée mobile unitaire  $P = 1$ , est obtenue en appliquant l'opérateur différentiel correspondant à la ligne d'influence de l'effet fondamental.*

Ainsi, par exemple, on sait par les lois élémentaires de la Mécanique des matériaux que

$$T = \frac{dM}{dx} \text{ et que } M = -EI \frac{d^2v}{dx^2} \quad (9.1)$$

Dès lors, si l'on dispose de la ligne d'influence  $Li\ M$  du moment de flexion  $M$  dans une section  $\alpha$ , on obtient la ligne d'influence de l'effort tranchant  $T$  dans cette même section  $\alpha$  selon :

$$Li\ T = \frac{d(Li\ M)}{d\alpha} \quad (9.2)$$

De manière similaire, si l'on dispose de la ligne d'influence  $Li\ v$  du déplacement vertical  $v$  dans une section  $\alpha$ , on peut obtenir aisément les lignes d'influence du moment fléchissant  $M$  et de l'effort tranchant  $T$  selon :

$$Li\ M = -EI \frac{d^2(Li\ v)}{d\alpha^2} \quad (9.3)$$

$$Li\ T = -EI \frac{d^3(Li\ v)}{d\alpha^3} \quad (9.4)$$

## 9.6 Lignes d'influence primaires et secondaires

Pour une structure donnée, il n'est pas nécessaire de déterminer par calcul toutes les lignes d'influence individuelles dont on a besoin en vue du dimensionnement.

Pour une structure hyperstatique de degré  $h$ , on sait que  $h$  efforts intérieurs sont inconnus et que tous les autres peuvent être obtenus à partir des relations de la statique élémentaire. En conséquence, il suffit de déterminer  $h$  lignes d'influences relatives à des effets indépendants – désignées par *lignes d'influence primaires*, pour obtenir, par combinaisons linéaires adéquates répondant aux exigences de la statique, les lignes d'influence, dites *lignes d'influence secondaires*, relatives aux autres effets.

A titre d'illustration, considérons la poutre continue sur trois appuis représentée à la

Figure 9-6.a. Cette structure est une fois hyperstatique. Recherchons par exemple la ligne d'influence de la réaction sur l'appui intermédiaire C, prise comme inconnue hyperstatique ; en vertu du premier théorème de Land, cette ligne d'influence est donnée (

Figure 9-6.b) par la déformée de la poutre simplement appuyée en *A* et *B*, libérée de son appui intermédiaire mais soumise, en lieu et place de cet appui, à une force concentrée unitaire dirigée de bas en haut (sens positif de la réaction au point *C*).

Si l'on désire maintenant obtenir d'autres lignes d'influence – par exemple la ligne d'influence de la réaction en *A* –, il n'est pas nécessaire de reproduire un processus analogue au précédent ; en effet, l'équilibre moment par rapport au point *B* fournit la relation suivante :

$$R_A L + R_c L_2 - 1 \cdot x' = 0$$

d'où :

$$R_A = -R_c \frac{L_2}{L} + 1 \cdot \frac{x'}{L}$$

et dès lors:

$$LI R_A = -\frac{L_2}{L} LI R_C + \frac{x'}{L}$$

Ainsi les ordonnées de *LI R<sub>A</sub>* seront les différences entre celles d'une droite  $x'/L$  et celles de la ligne d'influence de *R<sub>C</sub>* réduites dans le rapport  $L_2/L$ . Le résultat est donné à la

Figure 9-6.c.

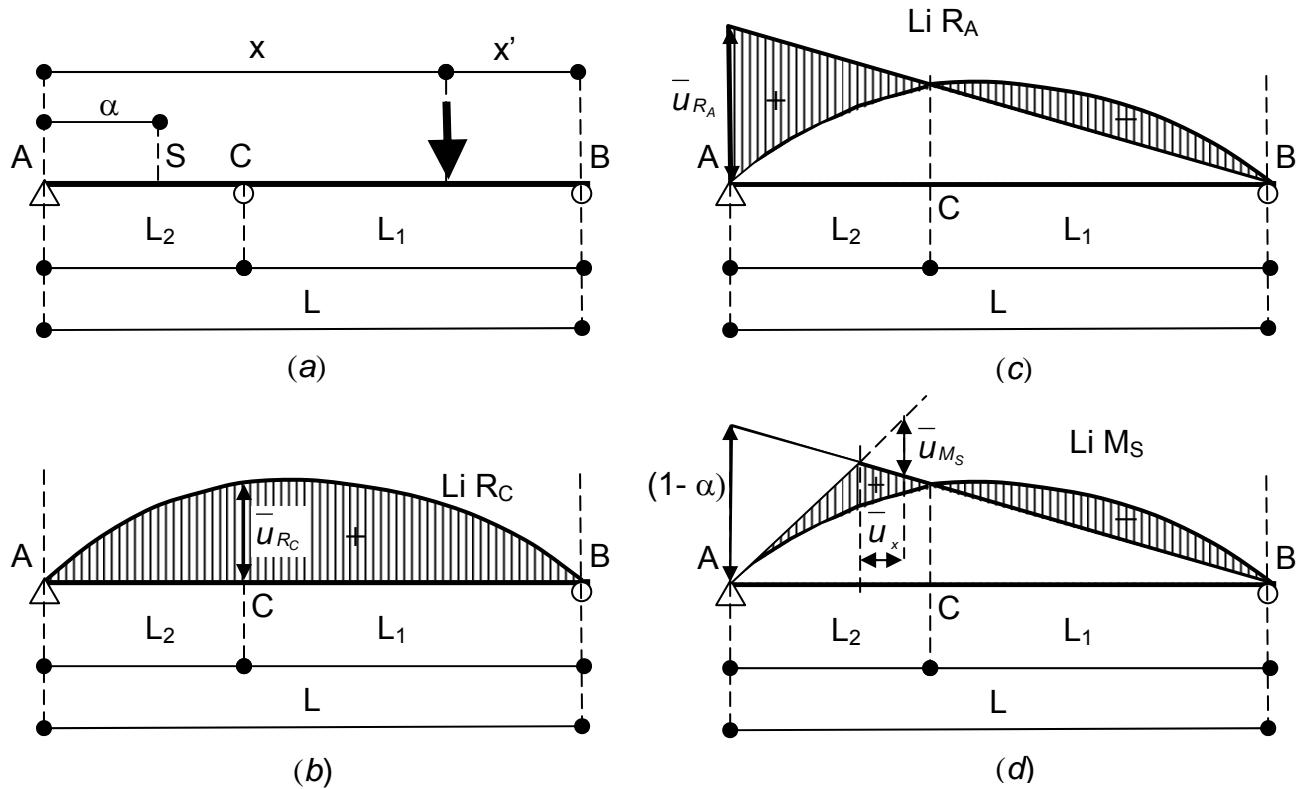
De manière similaire, la ligne d'influence du moment de flexion dans la section  $S$  d'abscisse  $\alpha$  s'obtient à partir de celle de  $R_A$  car l'équilibre exige :

$$M_S = R_A \alpha \quad (x \geq \alpha)$$

$$M_S = R_A \alpha - 1 \cdot (\alpha - x) \quad (x \leq \alpha)$$

Le résultat est donné à la

Figure 9-6.d.



*Figure 9-6 – Lignes d'influence primaires et secondaires*

En résumé, pour la détermination des lignes d'influence dans une structure de degré d'hyperstaticité  $h$ , on procède comme suit :

- On fait choix de  $h$  grandeurs hyperstatiques indépendantes (efforts intérieurs) dont les lignes d'influence sont établies par application du premier théorème de Land (lignes d'influence primaires) ;
- On déduit les autres lignes d'influence (lignes d'influence secondaires) par combinaisons linéaires des  $h$  lignes d'influence primaires, selon les règles de la statique.