

TD de Transfert de Chaleur.
Série N°1 Généralités

I - 1°) Exprimer en **Kelvin**, degrés **Fahrenheit** et degrés **Rankine** (température absolue dans le système anglo-saxon) les températures de 0°C , 50°C , 100°C , -17.78°C , -273.15°C .

2°) Déterminer la température à laquelle le nombre qui l'exprime est le même en $^{\circ}\text{C}$ et $^{\circ}\text{F}$. Même question en **K** et en $^{\circ}\text{R}$.

II - 1°) On rencontre dans la littérature anglo-saxonne, la chaleur massique exprimée en **Btu/lbF** (**Btu** : British thermal unit, **lbF** : pound force). Calculer sa valeur dans le **S.I.** ainsi qu'en **C.G.S.** On donne $1\text{lb}=453.5\text{g}$, $1\text{Btu}=1055\text{J}$.

2°) En utilisant les facteurs de conversion entre W et Btu/h, m et ft, K et R, exprimer la constante de Stefan-Boltzmann $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ et le coefficient de h ($\text{W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$) en unité anglo-saxonne Btu/h.ft².R⁴.

Les facteurs de conversion de W, m, et K sont donnés dans le tableau suivant :

$$1 \text{ W} = 3.41214 \text{ Btu/h}$$

$$1 \text{ m} = 3.2808 \text{ ft} \quad \text{Facteur de conversion}$$

$$1 \text{ K} = 1.8 \text{ R}$$

3) En utilisant les facteurs de conversion entre $^{\circ}\text{C}$ et $^{\circ}\text{F}$, le coefficient de conversion entre W et de Btu/h, m et ft, exprimer le coefficient de h ($\text{W/m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}$) en unité anglo-saxonne (Btu/h.ft². $^{\circ}\text{F}$)

III - Une résistance électrique de forme cylindrique ($D=0,4\text{cm}$, $L=1,5\text{cm}$) sur un circuit imprimé dissipe une puissance de $0,6 \text{ W}$. **En supposant que la chaleur est transférée de manière uniforme à travers toutes les surfaces.** Déterminer :

- la quantité de chaleur dissipée par cette résistance au cours d'une période de 24 heures,
- le flux de chaleur,
- la fraction de la chaleur dissipée par les surfaces du haut et du bas.

IV - Un réservoir contient 3m^3 d'eau chaude à $T_i=80^{\circ}\text{C}$. Il est parfaitement calorifugé sauf sur une partie dont la surface est $S=0.3\text{m}^2$. On constate qu'au bout de $\Delta t=5$ heures, la température de l'eau a baissé de 0.6°C quand la température ambiante est de 20°C . En supposant que la capacité calorifique du réservoir est de $10^3 \text{ kcal/}^{\circ}\text{C}$.

1) Calculer:

- la quantité de chaleur perdue en 5 heures,
- le flux de chaleur à travers le couvercle,
- la densité de flux thermique à travers le couvercle,
- la résistance thermique du couvercle,
- le coefficient global de transmission thermique.

On donnera les résultats dans les systèmes M.K.H et S.I.

2) Que se passerait-il au bout de t_j , $10j$?

V) - On remplit en 5 minutes une baignoire de 500 litres avec de l'eau chaude prélevée dans un réservoir supposé à température constante de 50°C . La canalisation de diamètre extérieur de 16 mm et intérieur de 14 mm a une longueur de 10 m.

1) Si la chute de température entre le réservoir et le robinet est de 2°C . Calculer le flux de chaleur perdu par la canalisation pendant le remplissage de la baignoire ainsi que les densités de flux de chaleur correspondants aux surfaces intérieur et extérieur de la canalisation.

A quel pourcentage de perte de chaleur cela correspond-il si on suppose que l'eau froide était à 15°C avant d'être chauffée dans le réservoir?

2) La température de l'eau dans la canalisation revient à la température de 20°C au bout de 30 minutes. Calculer le flux de chaleur perdu dans ces conditions.

3) Quelles quantités d'eau chaude faudrait-il prélever en une seule fois pour que les pertes en énergie entre le réservoir et le robinet ne représentent que 10%, 20%, 50%?

Unités thermiques

S.I. :

Température :

$$T(K) = T(^{\circ}C) + 273,15$$

$$\Delta T(K) = \Delta T(^{\circ}C)$$

Quantité de chaleur :

$$1 \text{ Joule} = 0,239 \text{ cal} = 0,948.10^{-3} \text{ Btu}$$

Flux thermique :

$$1 \text{ W} = 0,239 \text{ cal.s}^{-1} = 0,86 \text{ kcal.h}^{-1} = 3,41 \text{ Btu.h}^{-1}$$

Densité de flux :

$$1 \text{ Wm}^{-2} = 23,6.10^{-6} \text{ cal.cm}^{-2}.\text{s}^{-1} = 0,86 \text{ kcal.m}^{-2}.\text{h}^{-1} = 0,317 \text{ Btu.ft}^{-2}.\text{h}^{-1}$$

Coefficient global de transmission thermique :

$$1 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} = 23,9.10^{-6} \text{ cal.cm}^{-2}.\text{s}^{-1}.\text{^{\circ}C}^{-1} = 0,86 \text{ kcal.m}^{-2}.\text{h}^{-1}.\text{^{\circ}C}^{-1} = 0,176 \text{ Btu.ft}^{-2}.\text{h}^{-1}.\text{^{\circ}F}^{-1}$$

Résistance thermique :

$$1 \text{ K.W}^{-1} = 4,1855^{\circ}\text{C.s.cal}^{-1} = 1,163^{\circ}\text{C.h.kcal}^{-1} = 0,526^{\circ}\text{F.h.Btu}^{-1}$$

C.G.S. : Centimètre, gramme et seconde.

Quantité de chaleur :

$$1 \text{ cal} = 4,1855 \text{ J}$$

Flux thermique :

$$1 \text{ cal.s}^{-1} = 4,1855 \text{ W}$$

Densité de flux :

$$1 \text{ cal.cm}^{-2}.\text{s}^{-1} = 4,1855.10^4 \text{ W.m}^{-2}$$

Coefficient global de transmission thermique :

$$1 \text{ cal.cm}^{-2}.\text{s}^{-1}.\text{^{\circ}C}^{-1} = 4,1855.10^{-4} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

Résistance thermique :

$$1^{\circ}\text{C.s.cal}^{-1} = 0,239 \text{ K.W}^{-1}$$

ANGLO-SAXON :

Température :

$$T(^{\circ}R) = 1,8 T(K)$$

$$T(^{\circ}F) = 1,8 T(^{\circ}C) + 32 \quad \Delta T(^{\circ}F) = 1,8 \Delta T(^{\circ}C)$$

Quantité de chaleur :

$$1 \text{ Btu} = 1055 \text{ J}$$

(Btu = British Thermal Unit)

Flux de chaleur :

$$1 \text{ Btu.h}^{-1} = 0,293 \text{ W}$$

Densité de flux :

$$1 \text{ Btu.ft}^{-2}.\text{h}^{-1} = 3,15 \text{ W.m}^{-2}$$

(1 ft = 0,3048 m) (Feet : pieds en français)

Coefficient global de transmission thermique :

$$1 \text{ Btu.ft}^{-2}.\text{h}^{-1}.\text{^{\circ}F}^{-1} = 5,68 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

Résistance thermique

$$1^{\circ}\text{F.h.Btu}^{-1} = 1,9 \text{ K.W}^{-1}$$

Solution

$$\begin{aligned} \text{D) } 1^\circ) \quad T(K) &= T(^{\circ}\text{C}) + 273.15 \\ T(^{\circ}\text{F}) &= 1.8 * T(^{\circ}\text{C}) + 32 \\ T(^{\circ}\text{R}) &= 1.8 * T(^{\circ}\text{C}) + 491.67 \end{aligned}$$

T(°C)	T(K)	T(°F)	T(°R)
100	373.15	212	631.67
50	323.15	122	581.67
0	273.15	32	491.67
-17.78	255.37	0	459.67
-273.15	0	-459.67	0

$$2^\circ) \quad T(^{\circ}\text{F}) = 1.8 * T(^{\circ}\text{C}) + 32 \quad \text{avec} \quad T(^{\circ}\text{F}) = T(^{\circ}\text{C}) = x$$

$$x = -\frac{32}{0.8} = -40$$

$$0^{\circ}\text{R} = 0 \text{ K}$$

$$\text{II) } 1^\circ) \quad \frac{1 \text{ Btu}}{1 \text{ lb} * 1 \text{ F}} = \frac{1055 \text{ J}}{0.4535 \text{ kg} * \frac{1^{\circ}\text{C}}{1.8}} = 4187 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = \frac{4187}{4185} \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^{\circ}\text{C}} = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot ^{\circ}\text{C}}$$

$$2^\circ) \quad \sigma = 5.67 * 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} = 5.67 * 10^{-8} \frac{3.41214 \frac{\text{Btu}}{\text{h}}}{(3.2808 \text{ ft})^2 (1.8 \text{ R})^4} = \mathbf{0.171 * 10^{-8} \frac{\text{Btu}}{\text{h} \cdot \text{ft}^2 \cdot \text{R}^4}}$$

3°) Le facteur de conversion entre °C et °F est donné par : 1°C = 1.8°F

$$1 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C}} = \frac{3.41214 \frac{\text{Btu}}{\text{h}}}{(3.2808 \text{ ft})^2 (1.8^{\circ}\text{F})} = 0.1761 \frac{\text{Btu}}{\text{h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^{\circ}\text{F}}$$

III)

Hypothèses : La chaleur est transférée de façon uniforme à travers toutes les surfaces.

Analysis (a) la chaleur dissipée par cette résistance au cours d'une période de 24 heures est :

$$Q_{total} = \dot{Q}_{total} \Delta t = (0.6 \text{ W})(24 \text{ h}) = \mathbf{14.4 \text{ Wh} = 51.84 \text{ kJ}} \quad (1 \text{ W} \cdot \text{h} = 3600 \text{ W} \cdot \text{s} = 3.6 \text{ kJ})$$

(b) Le flux de chaleur à la surface de la résistance est

$$S_{total} = 2 \frac{\pi D^2}{4} + \pi DL = 2 \frac{\pi (0.4 \text{ cm})^2}{4} + \pi (0.4 \text{ cm})(1.5 \text{ cm}) = 0.251 + 1.885 = 2.136 \text{ cm}^2$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}_{total}}{S_{total}} = \frac{0.60 \text{ W}}{2.136 \text{ cm}^2} = \mathbf{0.2809 \text{ W/cm}^2}$$

(c) En supposant que le coefficient de transfert de chaleur est uniforme, le transfert de chaleur est proportionnelle à la surface. Ensuite, la fraction de la chaleur dissipée par le haut et le bas des surfaces de la résistance devient

$$\frac{Q_{haut-bas}}{Q_{total}} = \frac{S_{haut-bas}}{S_{total}} = \frac{0.251}{2.136} = \mathbf{0.118} \quad \text{or } (11.8\%)$$

Discussion : Le transfert de chaleur par le haut et le bas des surfaces sont faibles par rapport à celle transféré par la surface cylindrique . C'est le cas des murs au sens thermique du terme.

IV) 1/ Hypothèse : les températures de l'eau et du réservoir sont homogène est égale à une température moyenne $T_{\text{eau}}(t)$ à chaque instant t .

1°) La quantité de chaleur perdue en 5 heures est :

$$Q(t = 5h) = ((m.c)_{\text{eau}} + (m.c)_{\text{réservoir}})(T_{\text{eau}}(t = 5h) - T_{\text{eau}}(t = 0))$$

$$Q(t = 5h) = ((3 * 10^3 * 1 \text{ kcal} / ^\circ\text{C}) + (10^3 \text{ kcal} / ^\circ\text{C}))(-0.6^\circ\text{C}) = -2.4 * 10^3 \text{ kcal} \quad (\text{Système MKH})$$

$$Q(t = 5h) = -2.4 * 10^3 \text{ kcal} = -2.4 * 10^3 * 4.185 \text{ kJ} = -10044 \text{ kJ} \quad (\text{Système International})$$

2°) calcul du flux de chaleur à travers le couvercle

$$\phi(t = 5h) = \frac{Q(t = 5h)}{\Delta t} = \frac{-2.4 * 10^3 \text{ kcal}}{5h} = -480 \frac{\text{kcal}}{h} \quad (\text{Système MKH})$$

$$\phi(t = 5h) = -480 \frac{4185 \text{ J}}{60 * 60 \text{ s}} = -480 * 1.1625 \text{ W} = -558 \text{ W} \quad (\text{SI})$$

3°) calcul du densité de flux thermique à travers le couvercle

$$\varphi(t = 5h) = \frac{\phi(t = 5h)}{S} = \frac{-480 \frac{\text{kcal}}{h}}{0.3 \text{ m}^2} = -1600 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \cdot h} \quad (\text{Système MKH})$$

$$\varphi(t = 5h) = -1600 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \cdot h} = -1600 \frac{4185 \text{ J}}{3600 \text{ m}^2 \cdot \text{s}} = -1600 * 1.1625 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = -1860 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \quad (\text{SI})$$

4°) résistance thermique du couvercle

Par analogie thermique électrique :

$$\Delta U = R_{\text{électrique}} * I \quad \Delta T = R_{\text{thermique}} * \phi \quad \Rightarrow \quad R_{\text{thermique}} = \frac{\Delta T}{\phi}$$

$$R_{\text{thermique}} = \frac{\Delta T}{\phi} = \frac{T_{\text{air}} - T_{\text{eau}}(t = 5h)}{\phi(t = 5h)} = \frac{(20 - (80 - 0.6))^\circ\text{C}}{-480 \frac{\text{kcal}}{h}} = 0.12375 \frac{^\circ\text{C} \cdot h}{\text{kcal}} \quad (\text{Système MKH})$$

$$R_{\text{thermique}} = 0.12375 \frac{^\circ\text{C} \cdot h}{\text{kcal}} = 0.12375 * \frac{^\circ\text{C} \cdot 3600 \cdot \text{s}}{4185 \cdot \text{J}} = 0.12375 * \frac{1}{1.1625} \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}} = 0.1064 \frac{^\circ\text{C}}{\text{W}} \quad (\text{SI})$$

5°) le coefficient global de transmission thermique K

$$\phi = K * S * \Delta T \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\phi}{S * \Delta T} = \frac{\phi}{S * R_{\text{thermique}} * \phi} = \frac{1}{R_{\text{thermique}} * S}$$

$$K = \frac{1}{R_{\text{thermique}} * S} = \frac{1}{0.12375 * 0.3} = 26.93 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \cdot h \cdot ^\circ\text{C}} \quad (\text{Système MKH})$$

$$K = 26.93 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \cdot h \cdot ^\circ\text{C}} = 26.93 * 1.1625 = 31.32 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}} \quad (\text{SI})$$

2/ Si on suppose que $R_{\text{thermique}} = Cte$

$$\phi(t) = \frac{T_{\text{eau}}(t) - T_{\text{air}}}{R_{\text{thermique}}} = -mc \frac{dT}{dt} = -mc \frac{d(T_{\text{eau}}(t) - T_{\text{air}})}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d(T_{\text{eau}}(t) - T_{\text{air}})}{T_{\text{eau}}(t) - T_{\text{air}}} = - \frac{dt}{R_{\text{thermique}} \cdot mc}$$

$$(T_{\text{eau}}(t) - T_{\text{air}}) = (T_{\text{eau}}(0) - T_{\text{air}}) e^{-\frac{t}{R_{\text{thermique}} \cdot mc}} \quad \text{avec } R_{\text{thermique}} \cdot mc = 0.12375 * 410^3 = 495 h^{-1}$$

$$T_{\text{eau}}(t) = 20 + 60 * e^{-\frac{t(h)}{495}}$$

$$t = 1j = 24h$$

$$T_{\text{air}}(24h) = 77^\circ\text{C}$$

$$t = 10j = 240h$$

$$T_{\text{air}}(240h) = 56.9^\circ\text{C}$$

V

1) Soit Q_p la chaleur perdue pendant le remplissage la baignoire ($\Delta t = 5 \text{ min}$)

$$Q_p = 500(\text{kg}) * 1(\text{kcal} / \text{kg} \cdot ^\circ\text{C}) * 2(^{\circ}\text{C}) = 1000\text{kcal} = 4185 \text{ kJ}$$

Soit Q la chaleur nécessaire pour chauffer 500 litres d'eau :

$$Q = 500 * 1 * (50 - 15) = 17.5 \cdot 10^3 \text{ kcal} = 73.2 \cdot 10^3 \text{ kJ}$$

Le flux perdu est :

$$\phi_p = \frac{Q_p}{\Delta t} = \frac{4185}{5 * 60} = 13.95 \text{ kW} = 12.10^3 \text{ kcal.h}^{-1}$$

Densité de flux rapporté à la surface intérieure ou extérieure de la canalisation :

$$\varphi = \frac{\phi_p}{S} = \frac{\phi_p}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot L} = \frac{\phi_p}{\pi \cdot D \cdot L} \quad L=10\text{m}$$

Densité de flux intérieure de la canalisation:

$$\varphi_{\text{int}} = \frac{\phi_p}{S_{\text{int}}} = \frac{13.95 \text{ kW}}{\pi \cdot 14 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 31.7 \text{ kW.m}^{-2}$$

Densité de flux extérieure de la canalisation :

$$\varphi_{\text{ext}} = \frac{\phi_p}{S_{\text{ext}}} = \frac{13.95 \text{ kW}}{\pi \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 27.8 \text{ kW.m}^{-2}$$

$$\text{Pourcentage de perte : } \frac{Q_p}{Q} = \frac{m \cdot C \cdot \Delta T_{\text{perter}}}{m \cdot C \cdot \Delta T_{\text{chauffage}}} = \frac{\Delta T_{\text{perter}}}{\Delta T_{\text{chauffage}}} = \frac{2}{(50 - 15)} = 5.7\%$$

2) Chaleur perdue pendant le refroidissement de l'eau dans la canalisation Q_r :Hypothèse : à chaque instant t la température de l'eau dans la canalisation est homogène.

$$\phi_r = \frac{(m_{\text{eau du canalisation}} \cdot C)_{\text{eau dans la canalisation}} \cdot \Delta \theta}{\Delta t} \quad \text{avec : } m_{\text{eau du canalisation}} = \rho \cdot \pi \cdot \frac{D_i^2}{4} \cdot L \quad \text{et}$$

$$C = 4185 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$$

$$m_{\text{eau du canalisation}} = 10^3 \cdot 3,14 \cdot \frac{(14 \cdot 10^{-3})^2}{4} \cdot 10 = 1,54 \text{ kg}$$

$$\phi_r = \frac{1,54 * 4185 * (50 - 20)}{30 * 60} = 107 \text{ W}$$

Les densités de flux :

Densité de flux intérieure de la canalisation:

$$\varphi_{\text{int}, r} = \frac{\phi_r}{S_{\text{int}}} = \frac{107 \text{ kW}}{\pi \cdot 14 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 243 \text{ W.m}^{-2}$$

Densité de flux extérieure de la canalisation :

$$\varphi_{\text{ext}, r} = \frac{\phi_r}{S_{\text{ext}}} = \frac{107 \text{ kW}}{\pi \cdot 16 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 213 \text{ W.m}^{-2}$$

3) soit y les pertes en énergie :

En note :

Q_{perdue} : quantité d'énergie perdue,
 $Q_{\text{consommée}}$: quantité d'énergie consommée (chauffage par effet joule),
 $Q_{\text{utilisée}}$: quantité d'énergie utilisée dans la baignoire.

$$Q_{\text{consommée}} = Q_{\text{utilisée}} - Q_{\text{perdue}} \quad \text{Seul le terme perte est négatif.}$$

$$y = \frac{|Q_{\text{perdue}}|}{Q_{\text{consommée}}} = 1 - \frac{Q_{\text{utilisée}}}{Q_{\text{consommée}}}$$

$$Q_{\text{utilisée}} = x * c * (T_{\text{baignoire}} - T_{\text{eau froide}}) = x * c * (48 - 15) = 33 * x * c$$

$$Q_{consommée} = (x + m_{eau \text{ du canalisation}}) * c * (T_{réservoir} - T_{eau \text{ froide}}) = (x + 1.54) * c * (50 - 15)$$

$$y = 1 - \frac{Q_{utilisée}}{Q_{consommée}} = 1 - \frac{33 * x}{35 * (x + 1.54)}$$

$$x = \frac{53,865(1 - y)}{35 * y - 2}$$

Résultats :

y	0.1	0.2	0.5
x(l)	32.3	8.6	1.7

TD : Transferts de Chaleur
Série N°: 2
Conduction de la chaleur en régime stationnaire
Problèmes 1 D.

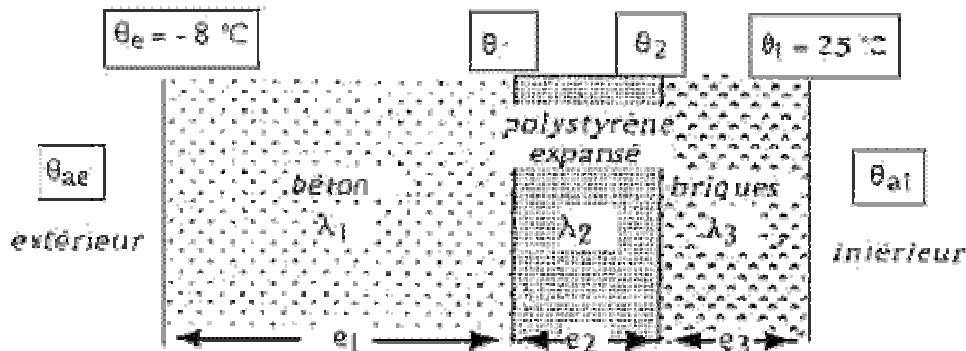
I - Un mur de béton de 15 cm d'épaisseur sépare une pièce à la température $T_i = 20 \text{ °C}$ de l'extérieur où la température est $T_e = 5 \text{ °C}$.

On donne : $h_i = 9.1 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$
 $h_e = 16.7 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$
 $\lambda = 1,74 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Calculer :

- la résistance thermique totale
- la densité de flux
- les températures interne et externe du mur.

II - Le mur d'un local est constitué de trois matériaux différents :



- du béton d'épaisseur $e_1 = 15 \text{ cm}$ à l'extérieur (conductivité thermique $\lambda_1 = 0,23 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$),
- un espace $e_2 = 5 \text{ cm}$ entre les deux cloisons rempli de polystyrène expansé (conductivité thermique $\lambda_2 = 0,035 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$),
- des briques d'épaisseur $e_3 = 5 \text{ cm}$ à l'intérieur (conductivité thermique $\lambda_3 = 0,47 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$).

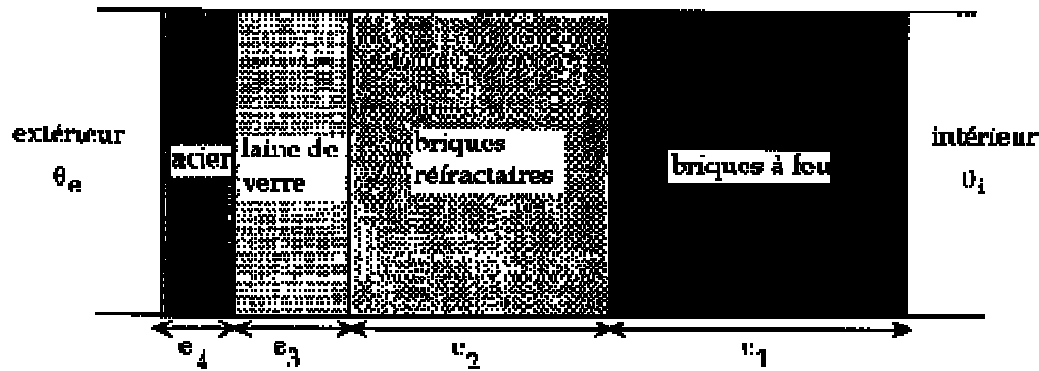
1) On a mesuré en hiver, les températures des parois intérieures θ_i et extérieure θ_e qui étaient $\theta_i = 25 \text{ °C}$ et $\theta_e = -8 \text{ °C}$.

- a) Donner la relation littérale, puis calculer la résistance thermique du mur pour un mètre carré.
- b) Donner la relation littérale, puis calculer le flux thermique dans le mur pour un mètre carré.
- c) Calculer la quantité de chaleur transmise par jour à travers un mètre carré de mur, pour ces températures. En déduire la quantité de chaleur transmise, par jour, à travers 10 m^2 de mur.
- d) Tracer la courbe de variation de température $\theta = f(e)$ à travers le mur, de paroi intérieure à paroi extérieure.

2) Les résistances thermiques superficielles interne et externe du mur ont respectivement pour valeur : $1/h_i = 0,11 \text{ m}^2.\text{K}.\text{W}^{-1}$ et $1/h_e = 0,06 \text{ m}^2.\text{K}.\text{W}^{-1}$

- a) A quels types de transfert thermique ces données se rapportent-elles ?
- b) Calculer les températures ambiantes extérieure θ_{ae} et intérieure θ_{ai} .

III- La paroi d'un four électrique industriel est constituée de plusieurs matériaux comme l'indique le schéma ci-dessous.



Données numériques.

Température ambiante intérieure : $\theta_i = 1092 \text{ }^\circ\text{C}$.

Température ambiante extérieure : $\theta_e = 32 \text{ }^\circ\text{C}$.

Surface intérieure du four : $S = 8,00 \text{ m}^2$.

Résistance superficielle interne pour un mètre carré de paroi : $1/h_i = r_i = 0,036 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$

Résistance superficielle externe pour un mètre carré de paroi : $1/h_e = r_e = 0,175 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$

Caractéristiques des divers matériaux :

Matériau	Épaisseur	Conductivité thermique
Brique à feu	$e_1 = 230 \text{ mm}$	$\lambda_1 = 1,04 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Brique réfractaire	$e_2 = 150 \text{ mm}$	$\lambda_2 = 0,70 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Laine de verre	$e_3 = 50 \text{ mm}$	$\lambda_3 = 0,07 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Acier	$e_4 = 3 \text{ mm}$	$\lambda_4 = 45 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

- 1 . Exprimer littéralement puis calculer la résistance thermique globale R de un mètre carré de paroi.
- 2 . Exprimer littéralement puis calculer la densité de flux thermique ϕ (puissance thermique par unité de surface) traversant la paroi.
- 3 . Déterminer les températures au niveau des diverses interfaces de l'intérieur vers l'extérieur θ_{si} , θ_1 , θ_2 , θ_3 , θ_{se} .
- 4 . En admettant que la transmission de la chaleur est uniforme sur l'ensemble des parois du four, calculer la puissance électrique p nécessaire à son fonctionnement à vide.
- 5 . Calculer le coût de fonctionnement journalier du four sachant que le prix du kW.h est 1,50 Dh.

IV - Soit la section droite d'une résistance électrique constituée d'un cœur en graphite, entouré d'une enveloppe de verre, elle-même enrobée de micanite (mélange de mica et de résine phénolique agissant comme isolant électrique et thermique). On demande de déterminer l'épaisseur optimum de micanite en vue d'assurer le refroidissement maximum de l'enveloppe de verre sachant que 40% de l'énergie électrique dissipée dans la résistance est perdue par convection - rayonnement avec l'ambiance à 20°C avec un coefficient d'échange $h=17\text{W}/\text{m}^2\text{K}$. La conductibilité thermique de la micanite est $\lambda=0,1\text{W}/\text{mK}$. Les caractéristiques électriques de la résistance sont : $P_e=1\text{W}$, $R_e=10^6\Omega$. Sa longueur est de 30mm et son diamètre est de 1mm.

- 1 . Quelle est la température à l'interface graphite - verre?
- 2 . Comparer les résultats avec et sans isolant.

Solution de la série N°: 1
Transferts de chaleur par conduction

I : $\varphi = h_i(T_i - T_{iP}) = (\lambda/e)(T_{iP} - T_{eP}) = h_e(T_{eP} - T_e) = (T_i - T_e)/R$

Avec $R = 1/h_i + e/\lambda = 1/h_e = 0,11 + 0,15/1,74 + 0,06 = 0,2562 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$

De la dernière égalité :

$$\varphi = 15/0,2562$$

$$\varphi = 58,546 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

De la première égalité :

$$T_{iP} = T_i - \varphi/h_i = T_i - \varphi \cdot R_i = 20 - 58,546 \cdot 0,11$$

$$T_{iP} = 13,6 \text{ }^\circ\text{C}$$

De la même façon :

$$T_{eP} = T_e + \varphi/h_e = T_e + \varphi \cdot R_e = 5 + 58,546 \cdot 0,06$$

$$T_{eP} = 8,5 \text{ }^\circ\text{C}$$

II :

1) **a)** $R = R_{be} + R_{poly} + R_{br} = e_1/\lambda_1 + e_2/\lambda_2 + e_3/\lambda_3$
 $= 15 \cdot 10^{-2}/0,23 + 5 \cdot 10^{-2}/0,035 + 5 \cdot 10^{-2}/0,47$
 $R = 2,187 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \cdot \text{m}^2$

b) $\varphi = (\theta_i - \theta_e)/R$

$$\varphi = 15,088 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

c) $Q = \varphi \cdot t = 15,088 \cdot 24 \cdot 3600$

$$Q = 1,304 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2}$$

Pour 10 m^2 de mur :

$$Q' = 10Q$$

$$Q' = 13,04 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{m}^2$$

d) $\varphi = (\theta_1 - \theta_e) \cdot \lambda_1/e_1$

$$\theta_1 = \theta_e + e_1 \cdot \varphi/\lambda_1 = -8 + 9,84$$

$$\theta_1 = 1,84 \text{ }^\circ\text{C}$$

De la même façon :

$$\varphi = (\theta_i - \theta_2) \cdot \lambda_3/e_3$$

$$\theta_2 = \theta_i - e_3 \cdot \varphi/\lambda_3 = 25 - 15,088 \cdot 5 \cdot 10^{-2}/0,47$$

$$\theta_2 = 23,39 \text{ }^\circ\text{C}$$

2) **a)** Transferts thermiques intérieur et extérieur par convection.

b) $\varphi = h_e(\theta_e - \theta_{ae})$

$$\theta_{ae} = \theta_e - \varphi/h_e = -8 - 15,088 \cdot 0,06$$

$$\theta_{ae} = -8,9 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\varphi = h_i(\theta_{ai} - \theta_i)$$

$$\theta_{ai} = \theta_i + \varphi/h_i = 25 + 15,088 \cdot 0,11$$

$$\theta_{ai} = 26,7 \text{ }^\circ\text{C}$$

III- **1)** $R = R_a + R_{lv} + R_{br} + R_{bf} + 1/h_i + 1/h_e$
 $R_T = 1,36 \text{ m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$

2) $\varphi = (\theta_i - \theta_e)/R$

$$\varphi = 779 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

3) $\varphi = h_i(\theta_i - \theta_{si})$ $\theta_{si} = \theta_i - \varphi/h_i = 1064 \text{ }^\circ\text{C}$

$$\varphi = \lambda_1(\theta_{si} - \theta_1)/e_1 \quad \theta_1 = \theta_{si} - \varphi \cdot e_1/\lambda_1 = 892 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\varphi = \lambda_2(\theta_1 - \theta_2)/e_2 \quad \theta_2 = \theta_1 - \varphi \cdot e_2/\lambda_2 = 725 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$\varphi = \lambda_3(\theta_2 - \theta_3)/e_3 \quad \theta_3 = \theta_2 - \varphi \cdot e_3/\lambda_3 = 169 \text{ }^\circ\text{C}$$

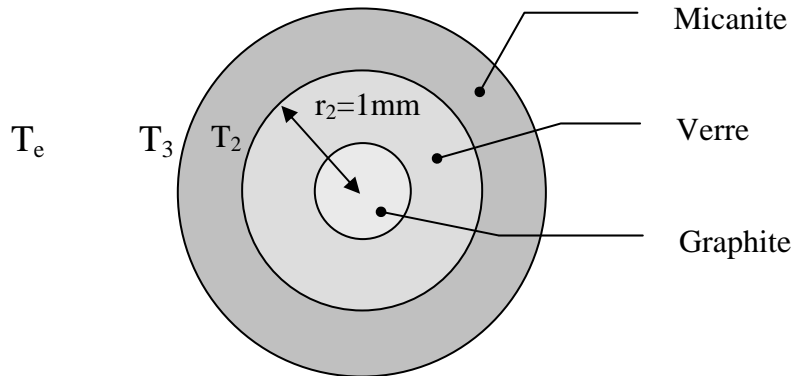
$$\varphi = h_e(\theta_{se} - \theta_e)\theta_{se} = \theta_e + \varphi/h_e = 168 \text{ }^\circ\text{C}$$

4) Puissance = $\Phi = \varphi.S = 6,23 \text{ kW}$

5) $E = P.t = 149,6 \text{ kWh}$

coût = 255 Dh

IV



$Q_{conv+ray} = 0.40 P_E = 0.4W$

(N.B. $P_E = I^2 R_E = I^2 10^6 \Rightarrow I = 10^{-3} \text{ A}$ faible courant)

Avec isolation

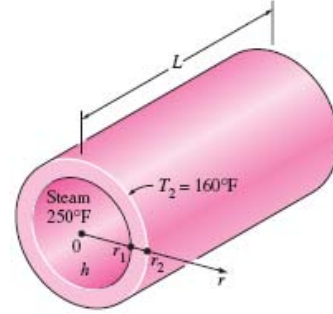
$$T_2 - T_e = Q_{c-v} \left[\frac{\ln r_3/r_2}{2\pi k_{env} L} + \frac{1}{2\pi r_{ext} h_{ext} L} \right]$$

$$= 0.4(93.984 + 53.073) + 58.8 \Rightarrow T_2 \cong 79^\circ c$$

Sans isolant

$$T_2 - T_e = Q_{c-v} \frac{1}{2\pi r_{ext} h_{ext} L} = 0.4 \times 312 = 124.8 \Rightarrow T_2 \cong 145^\circ c$$

Un tube à vapeur de longueur $L=15$ ft (pied), de rayon intérieur $r_1=2$ in (pouces), de rayon extérieur $r_2=2.4$ in (pouces) et de conductivité thermique $\lambda=7,2$ Btu/h.ft.°F. Le fluide dans le tuyau est à une température moyenne de 250°F , et la moyenne du coefficient de convection de chaleur sur la surface intérieure est $h=1.25$ Btu/h.ft².°F. Si la température moyenne à surface extérieure est $T_2=160^\circ\text{F}$, (a) exprimer l'équation de la chaleur et les conditions aux limites dans le cas d'un régime stationnaire et pour une conduction unidimensionnelle, (b) déduire la variation de la température dans la conduite par la résolution de l'équation différentielle.



Hypothèses : 1- la conduction thermique est stable et unidimensionnelle car le tuyau est long par rapport à son épaisseur, et il y a une symétrie thermique sur la ligne centrale. 2- La conductibilité thermique est constante. 3- Il n'y a pas de génération de chaleur dans le tuyau.

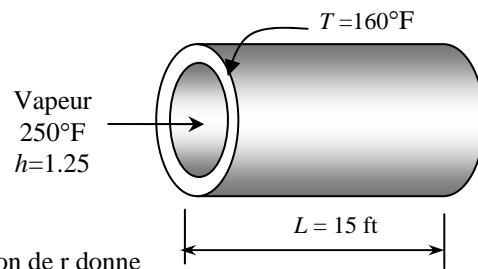
Propriétés : La conductivité thermique est donnée à be $\lambda = 7.2$ Btu/h.ft.°F.

Analysis (a) Notant que le transfert de chaleur est une dimension radiale r de la direction, la formulation mathématique de ce problème peut être exprimé comme

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0$$

et $-k \frac{dT(r_1)}{dr} = h[T_\infty - T(r_1)]$

$$T(r_2) = T_2 = 160^\circ\text{F}$$



(b) L'intégration de l'équation différentielle une fois en fonction de r donne

$$r \frac{dT}{dr} = C_1$$

En multipliant les deux côtés de l'équation ci-dessus par dr/r , l'integration conduit à :

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r}$$

$$T(r) = C_1 \ln r + C_2$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. Appliquant les conditions aux limites :

$$r = r_1: \quad -k \frac{C_1}{r_1} = h[T_\infty - (C_1 \ln r_1 + C_2)]$$

$$r = r_2: \quad T(r_2) = C_1 \ln r_2 + C_2 = T_2$$

D'où les solutions de C_1 et C_2 sont :

$$C_1 = \frac{T_2 - T_\infty}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_1}} \quad \text{and} \quad C_2 = T_2 - C_1 \ln r_2 = T_2 - \frac{T_2 - T_\infty}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_1}} \ln r_2$$

$$T(r) = C_1 \ln r + T_2 - C_1 \ln r_2 = C_1 (\ln r - \ln r_2) + T_2 = \frac{T_2 - T_\infty}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_1}} \ln \frac{r}{r_2} + T_2$$

$$= \frac{(160 - 250)^\circ\text{F}}{\ln \frac{2.4}{2} + \frac{7.2 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}}{(12.5 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F})(2/12 \text{ ft})}} \ln \frac{r}{2.4 \text{ in}} + 160^\circ\text{F} = -24.74 \ln \frac{r}{2.4 \text{ in}} + 160^\circ\text{F}$$

(c) Le flux de chaleur à travers le tuyau est

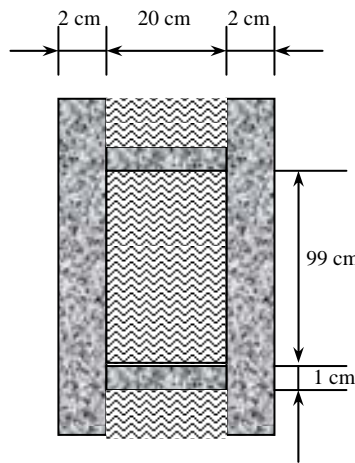
$$\phi = -k.S \frac{dT}{dr} = -k(2\pi rL) \frac{C_1}{r} = -2\pi Lk \frac{T_2 - T_\infty}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{k}{hr_1}}$$

$$= -2\pi(15 \text{ ft})(7.2 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}) \frac{(160 - 250)^\circ\text{F}}{\ln \frac{2.4}{2} + \frac{7.2 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft} \cdot ^\circ\text{F}}{(12.5 \text{ Btu/h} \cdot \text{ft}^2 \cdot ^\circ\text{F})(2/12 \text{ ft})}} = \mathbf{16,800 \text{ Btu/h}}$$

Transfert de chaleur par les murs composés.

Un mur de 4 m de haut et 6 m de long est composé de deux plaques d'acier ($\lambda_a = 15 \text{ W / m} \cdot ^\circ\text{C}$) de 2 cm d'épaisseur chacune, séparés par 1 cm d'épaisseur et 20 cm de largeur des barres d'acier espacé de 99 cm. L'espace entre les plaques d'acier est rempli d'isolant de fibre de verre ($\lambda_i = 0,035 \text{ W/m} \cdot ^\circ\text{C}$). Si la différence de température entre la surface intérieure et celle de l'extérieure du mur est 22°C :

- 1) déterminer le flux de chaleur échangé à travers le mur,
- 2) déterminer le flux de chaleur échangé a travers le mur si on ignore les barres d'acier entre les plaques, car ils n'occupent que 1 pour cent de surface d'échange.



Le mur est construit de deux grandes plaques d'aciers séparés par 1 cm d'épaisseur des barres d'acier espacé de 99 cm. L'espace restant entre les plaques d'acier est rempli d'isolant en fibre de verre. Le flux de chaleur à travers la paroi du mur est à déterminer, et il est à évaluer si les barres d'acier entre les plaques peuvent être ignorées dans l'analyse, car ils n'occupent que 1 pour cent de la surface d'échange de chaleur.

Hypothèses :

- 1 Le transfert de chaleur est stationnaire.
- 2 Le transfert de chaleur à travers le mur peut être estimé à une dimension.
- 3 les conductivités thermiques sont constantes.
- 4 Les surfaces de la paroi sont maintenues à des températures constantes.

Nous considérons que l'analyse de 1 m de haut et 1 m de large portion de la paroi qui est représentative de tout le mur.

Résistance thermique du réseau et les résistances sont



$$R_1 = R_4 = R_{\text{acier}} = \frac{L}{\lambda_{\text{acier}} \cdot S_{\text{acier}}} = \frac{0.02 \text{ m}}{(15 \text{ W/m} \cdot \text{°C})(1 \text{ m}^2)} = 0.00133 \text{ °C/W}$$

$$R_2 = R_{\text{barre}} = \frac{L}{\lambda_{\text{acier}} S_{\text{barre}}} = \frac{0.2 \text{ m}}{(15 \text{ W/m} \cdot \text{°C})(0.01 \text{ m}^2)} = 1.333 \text{ °C/W}$$

$$R_3 = R_{\text{isolant}} = \frac{L}{\lambda_{\text{isolant}} S_{\text{isolant}}} = \frac{0.2 \text{ m}}{(0.035 \text{ W/m} \cdot \text{°C})(0.99 \text{ m}^2)} = 5.772$$

$$\frac{1}{R_{\text{eqv}}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{1}{1.333} + \frac{1}{5.772} \longrightarrow R_{\text{eq}} = 1.083 \text{ °C/W}$$

$$R_{\text{total}} = R_1 + R_{\text{eqv}} + R_4 = 0.00133 + 1.083 + 0.00133 = 1.0856 \text{ °C/W}$$

Le flux de chaleur pour une surface de 1 m² est :

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_{\text{total}}} = \frac{22 \text{ °C}}{1.0857 \text{ °C/W}} = 20.26 \text{ W}$$

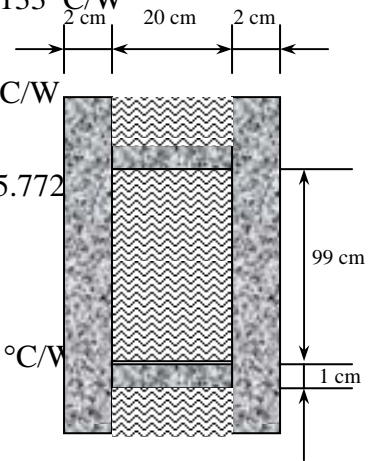
Le flux total échangé à travers le mur rest :

$$\phi_{\text{total}} = (4 \times 6) \dot{Q} = 24(20.26 \text{ W}) = \mathbf{486.3 \text{ W}}$$

Si les barres d'acier entre les plaques sont ignorées dans l'analyse, le flux de chaleur pour une surface de 1 m² est

$$\phi = \frac{\Delta T}{R_{\text{total}}} = \frac{\Delta T}{R_1 + R_{\text{insulation}} + R_4} = \frac{22 \text{ °C}}{(0.00133 + 5.772 + 0.00133) \text{ °C/W}} = 3.81 \text{ W}$$

Le flux de chaleur qui traverse les barres d'acier entre les plaques est de $(20.26 - 3.81) / 20.26 = 81,2\%$ du transfert de chaleur qui traverse le mur, malgré les faibles espace qu'ils occupent, et bien sûr, leur effet ne peut être négligé. Le raccordement des bars servent de "ponts thermiques".



TD de Transfert de Chaleur. Série N°3.

Milieu thermiquement mince

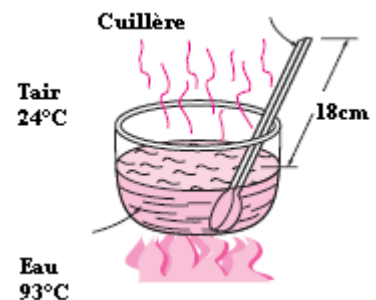
A Déterminer les relations de la longueur caractéristique d'un mur d'épaisseur $2L$, un très long cylindre de rayon r_o et une sphère de rayon r_o .

B Pour réchauffer du lait pour bébé, la mère verse le lait dans une mince paroi de verre dont le diamètre est de 6 cm. La hauteur du lait dans le verre est de 7 cm. Elle place ensuite le verre dans une grande casserole remplie d'eau chaude à 60°C . Le lait est agité en permanence, de sorte que sa température est uniforme en tout temps. Si le coefficient de transfert de chaleur entre l'eau et le verre est $120\text{W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$, déterminer le temps qu'il faut pour que le lait se réchauffe de 3°C à 38°C . En admet que les propriétés du lait sont les mêmes que ceux de l'eau. Dans ces conditions, le lait peut être traité comme un milieu thermiquement mince, Pourquoi ?

Donnés : La conductivité thermique, densité et la chaleur spécifique de l'eau à 20°C sont $\lambda = 0.607\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$, $\rho = 998\text{ kg/m}^3$ et $C_p = 4.182\text{ kJ/kg}\cdot^\circ\text{C}$.

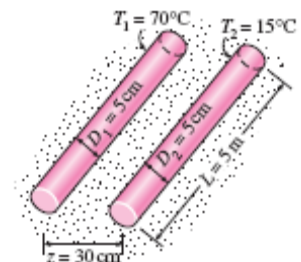
Ailette

Prenons une cuillère en acier inoxydable ($\lambda = 15\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$), partiellement immergé dans l'eau bouillante à 93°C dans une cuisine à 24°C . Le manche de la cuillère est une section de $0,2\text{cm}\times 1,3\text{cm}$, et s'étend dans l'air de 18cm de la surface libre de l'eau. Si le coefficient de transfert de chaleur à la surface de la cuillère exposée à l'air est $h=17\text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$, déterminer la différence de température à la surface du manche de la cuillère. Indiquez vos hypothèses.



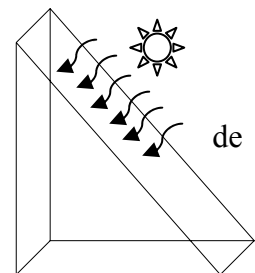
Facteur de forme

Deux tuyaux parallèles, de 5m de long, dans une épaisse couche de béton, circule dans l'un de l'eau chaude et dans l'autre de l'eau froide comme le montre la Figure. Les diamètres des tuyaux sont 5 cm et la distance entre leurs axes est de 30 cm . Les températures des surfaces chaude et froide des tuyaux sont 70°C et 15°C respectivement. La conductivité thermique du béton est $\lambda=0,75\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$. Déterminer le flux de chaleur échangé entre les tuyaux.



Exemple de résolution de problème de conduction 2D par différences finies

Un long barrage en béton ($\lambda=0,6\text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$, coefficient d'absorption de rayonnement : $\alpha_s = 0,7\text{ m}^2/\text{s}$), de section triangulaire dont la surface exposée est soumise à des flux de chaleur solaire $\dot{q}_s = 800\text{ W/m}^2$ et de chaleur convectif avec l'air à une température $T_0=25^\circ\text{C}$ et un coefficient transfert de chaleur $h_0=30\text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$. Les deux mètres du haut du barrage, section verticale, est l'objet de convection de l'eau à $T_i=15^\circ\text{C}$ avec un coefficient de transfert de chaleur $h_i=150\text{ W/m}^2\cdot^\circ\text{C}$. Le flux de chaleur échangé à travers la surface de la base, de deux mètres de long, est considérée comme négligeable. Utiliser la méthode de différence finie d'un maillage $\Delta x=\Delta y=1\text{m}$ et en supposant que le transfert de chaleur est stationnaire à deux dimensions, déterminer les températures du début, milieu et du bas de la surface exposée du barrage.



Méthode de séparation des variables

Problème : (Session Normale : SMP4- juin 2008)

On se propose d'étudier le comportement thermique d'une dalle épaisse de béton soumise à un flux de chaleur. La dalle forme le plancher du rez-de-chaussée du bâtiment à chauffer ; elle est en béton dense, de propriétés thermo physiques homogènes (conductivité thermique, masse volumique, chaleur massique).

On s'intéresse ici au comportement thermique de la dalle d'épaisseur e , que l'on peut caractériser en régime stationnaire par sa réponse à une densité de flux de chaleur $\varphi_0(t)$ imposée sur sa face inférieure ($x=0$). Les dimensions transversales de la dalle sont très grandes devant e , de sorte que le problème peut être supposé **unidimensionnel**. La direction perpendiculaire à la surface S de la dalle est repérée par la cote verticale x à partir du fond (Figure 1). La température de l'air ambiant dans le bâtiment est homogène, de valeur moyenne T_i . La face inférieure de la dalle est parfaitement isolée thermiquement.

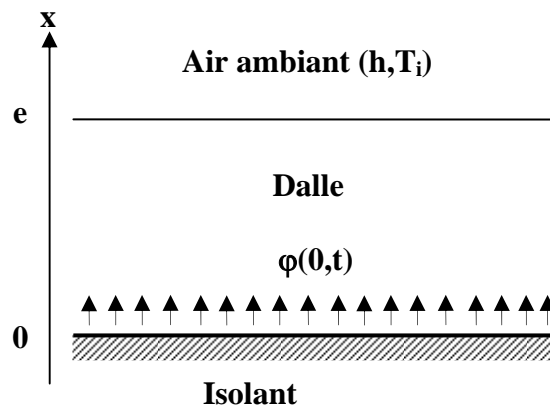


Figure 1.

1. Rappeler la loi de Fourier unidimensionnelle liant la densité du flux de chaleur $\varphi(x, t)$ et la température $T(x, t)$. Quelle est la dimension de φ ? En déduire l'unité de la conductivité thermique λ .

2. En effectuant un bilan thermique de la tranche élémentaire $[x, x + dx]$ de la dalle entre un instant t quelconque et $t + dt$, établir les équations différentielles vérifiées par $\varphi(x, t)$ et par $T(x, t)$.

3. En déduire que l'équation de diffusion thermique est $\frac{\lambda}{\rho \cdot C} \frac{d^2 T(x, t)}{dx^2} = \frac{dT(x, t)}{dt}$. Exprimer la diffusivité thermique a de la dalle, à l'aide des grandeurs thermo physiques de la dalle. Quelle est l'unité de a ?

4. L'échange de chaleur par convection entre la face supérieure de la dalle et l'air ambiant est bien représenté par la loi de Newton, $\varphi(e, t) = h [T(e, t) - T_i]$ où h est considéré comme constant et uniforme sur toute la surface. Quelle est l'unité de h ?

5. On suppose qu'un flux constant φ_0 est maintenu en $x = 0$. Après un temps t très long, on peut considérer le régime comme établi, de sorte que $\varphi(x)$ et $T(x)$ sont indépendants du temps.

a) Montrer que le profil thermique de la dalle est alors donné par

$$T(x) = T_i + \varphi_0 \left(\frac{e}{\lambda} + \frac{1}{h} \right) - \frac{\varphi_0}{\lambda} x.$$

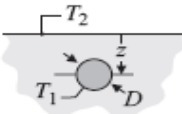
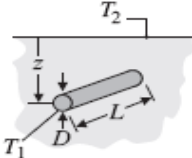
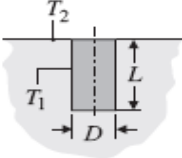
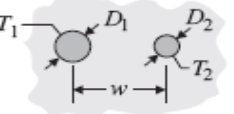
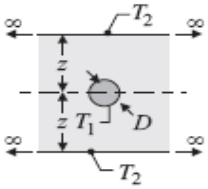
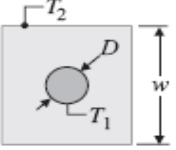
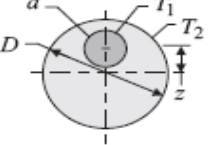
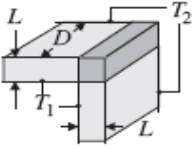
b) Calculer l'écart de température $T(e) - T_i$, pour $\varphi_0 = 20,1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ et $h = 6,7 \text{ SI}$.
 $\lambda = 1,75 \text{ SI}$, $e = 0,26 \text{ m}$, $a = 9 \cdot 10^{-7} \text{ SI}$.

6. En première approximation le flux de chaleur émis par le circuit solaire au fond de la dalle peut être approché par une fonction sinusoïdale du temps de sorte que $\varphi(0,t) = \varphi_0(\delta + \sin(\omega.t))$ où δ est fonction du numéro du jour dans l'année, t le temps écoulé depuis le lever du soleil, ω la pulsation du cycle jour-nuit de période $\mathbf{J} = \mathbf{1}$ jour solaire ($\mathbf{J} = 24$ heures).

Dans la suite des calculs, on se placera au cas où $\delta=0$.

- a)** Quelle est la nature du régime thermique de la dalle ?
- b)** Pour résoudre l'équation de diffusion thermique : $\frac{d^2T(x,t)}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{dT(x,t)}{dt}$, on choisit la méthode de séparation des variables. Dans ce cas, montrer que cette équation peut être réécrite sous la forme suivante : $\frac{a}{g} \frac{d^2g}{dx^2} = \frac{1}{f} \frac{df}{dt}$.
- c)** On admettant des solutions de formes exponentielles complexes comme $A \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot t)$ et $B \cdot \exp(i \cdot k \cdot x)$ et sachant que $i = -\frac{(1-i)^2}{2}$, montrer que le système admet comme solution complexe $k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1-i)$.
- d)** On ne retient que la solution complexe pour k qui possède une partie réelle négative $k = -\sqrt{\frac{\omega}{2a}}(1-i)$, justifier ce choix.
- e)** Montrer que la solution finale complexe est : $\bar{T}(x,t) = T_0 \cdot \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right] \cdot \exp\left[i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}x\right)\right]$.
- f)** Dédire la température réelle $T(x,t) = \text{Re}(\bar{T}(x,t))$ et discuter le résultat.

Facteurs de forme de conduction de certains Systèmes Bidimensionnels $\phi = F_c \lambda (T_1 - T_2)$

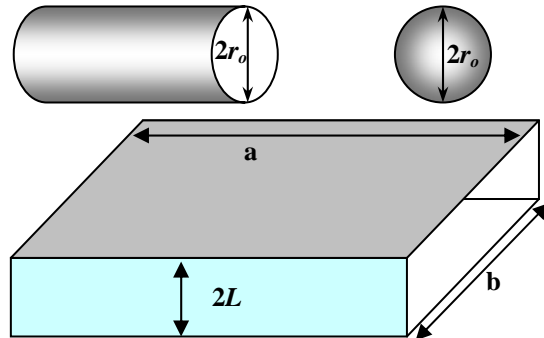
Système	Schéma	Conditions	Facteur de forme (F_c)
Sphère isotherme enterré dans un milieu semi-infini.		$z > D/2$	$\frac{2\pi D}{1 - D/4z}$
Cylindre horizontal isotherme de longueur L enterré dans un milieu semi-infini		$L \gg D$ $L \gg D$ $z > 3D/2$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$ $\frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$
Cylindre vertical dans un milieu semi-infini		$L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$
Conduction entre deux cylindres de longueur infinie L en moyenne		$L \gg D_1, D_2$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1D_2}\right)}$
Cylindre circulaire horizontal de longueur L à mi-chemin entre les plans parallèles d'égale longueur et largeur infinie		$z \gg D/2$ $L \gg z$	$\frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$
Cylindre circulaire de longueur L centré dans un carré solide de longueur égale		$w > D$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\ln(1.08w/D)}$
Excentrique cylindre circulaire de longueur L dans un cylindre de longueur égale		$D > d$ $L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)}$
Conduction par les bords de murs		$D > L/5$	0.54D

Solution :**Milieu thermiquement mince****A**

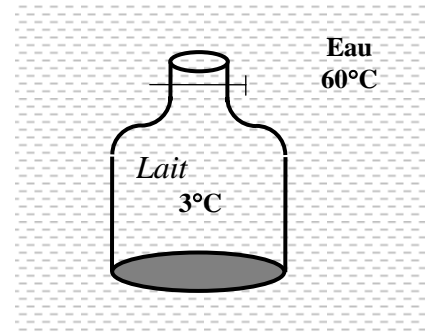
$$L_{c,mur\ plan} = \frac{V}{S} = \frac{2L(a.b)}{2(a.b)} = L$$

$$L_{c,cylindre} = \frac{V}{S} = \frac{\pi r_o^2 h}{2\pi r_o h} = \frac{r_o}{2}$$

$$L_{c,sphère} = \frac{V}{S} = \frac{4\pi r_o^3 / 3}{4\pi r_o^2} = \frac{r_o}{3}$$

**B**

Hypothèses : 1 Le contenant en verre de forme cylindrique d'un rayon de $r_0 = 3$ cm. 2 Les propriétés thermiques du lait sont prises comme ceux de l'eau. 3 Les propriétés thermiques du lait sont constantes à la température ambiante. 4 Le coefficient de transfert de chaleur est constant et uniforme sur toute la surface. 5 Le nombre de Biot, dans ce cas est importante (beaucoup plus grand que 0,1). Toutefois, le système global d'analyse est encore applicable puisque le lait est agité en permanence, de sorte que sa température reste uniforme en tout temps.



Analyse : La longueur caractéristique et le nombre de Biot du verre de lait sont :

$$L_c = \frac{V}{S} = \frac{\pi r_o^2 L}{2\pi r_o L + 2\pi r_o^2} = \frac{\pi(0.03\text{ m})^2(0.07\text{ m})}{2\pi(0.03\text{ m})(0.07\text{ m}) + 2\pi(0.03\text{ m})^2} = 0.01050\text{ m}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = \frac{(120\text{ W/m}^2 \cdot \text{°C})(0.0105\text{ m})}{(0.607\text{ W/m} \cdot \text{°C})} = 2.076 > 0.1$$

Pour les raisons citées ci-dessus, nous pouvons utiliser le système global d'analyse afin de déterminer le temps nécessaire pour que le lait se réchauffe de 3°C à 38°C.

$$b = \frac{hS}{\rho C_p V} = \frac{h}{\rho C_p L_c} = \frac{120\text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}}{(998\text{ kg/m}^3)(4182\text{ J/kg} \cdot \text{°C})(0.0105\text{ m})} = 0.002738\text{ s}^{-1}$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \longrightarrow \frac{38 - 60}{3 - 60} = e^{-(0.002738\text{ s}^{-1})t} \longrightarrow t = 348\text{ s} = 5.8\text{ min}$$

Par conséquent, il faudra environ 6 minutes pour réchauffer le lait de 3°C à 38°C.

Ailette

Hypothèses : 1 La température de la partie immergée de la cuillère est égale à la température de l'eau. 2 La température de la cuillère varie le long de la cuillère $T(x)$. 3 Le transfert de chaleur à partir de l'extrémité de la cuillère est négligeable. 4 Le coefficient de transfert de chaleur est constant et uniforme sur toute la surface de la cuillère. 5 Les propriétés thermiques de la cuillère sont constantes. 6 Le transfert de chaleur par rayonnement et supposé négligeable.

Notant que la section transversale de la cuillère est constante et x a pour origine la surface libre de l'eau. La variation de température le long de la cuillère peut être exprimée comme :

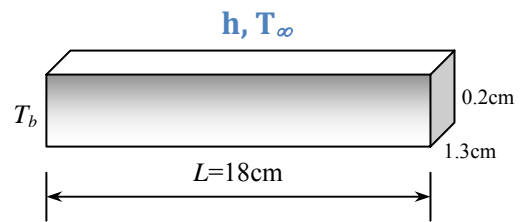
$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh a(L-x)}{\cosh aL}$$

Où

$$p = 2(0.002 + 0.013) = 0.030 \text{ m}$$

$$S_c = (0.002)(0.013) = 0.000026 \text{ m}^2$$

$$a = \sqrt{\frac{hp}{\lambda S_c}} = \sqrt{\frac{17 * 0.03}{15 * 0.000026}} = 36 \text{ m}^{-1}$$



La température de la pointe de la cuillère est déterminée par :

$$T(L) = T_\infty + (T_b - T_\infty) \frac{\cosh a(L-L)}{\cosh aL}$$

$$= 24 + (93 - 24) \frac{\cosh 0}{\cosh(36 \times 0.18)} = 24 + (93 - 24) \frac{1}{326} = 24.2^\circ\text{C}$$

Par conséquent, la différence de température dans l'ensemble du poignée de la cuillère exposée est :

$$\Delta T = T_b - T(L) = (93 - 24.2) = \mathbf{68.8^\circ\text{C}}$$

Facteur de forme

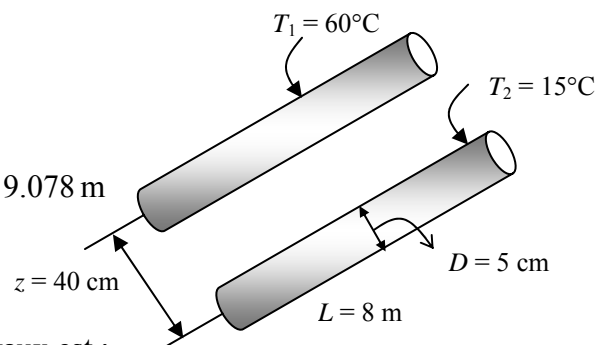
Hypothèse : le transfert de chaleur est en deux dimensions (pas de changement dans la direction axiale).

La conductivité thermique du béton est $\lambda = 0.75 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$.

Le facteur de forme pour cette configuration est donné dans le tableau :

$$F_c = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4z^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1 D_2}\right)}$$

$$= \frac{2\pi(8 \text{ m})}{\cosh^{-1}\left(\frac{4(0.4 \text{ m})^2 - (0.05 \text{ m})^2 - (0.05 \text{ m})^2}{2(0.05 \text{ m})(0.05 \text{ m})}\right)} = 9.078 \text{ m}$$



Le flux de transfert de chaleur échangé entre les tuyaux est :

$$\phi = F_c \lambda (T_1 - T_2) = (9.078 \text{ m})(0.75 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C})(60 - 15)^\circ\text{C} = \mathbf{306 \text{ W}}$$

Problèmes Bi-dimension

Nœud 5 sur la frontière isolée peut être considéré comme un nœud de l'intérieur qui donne :

$$T_{\text{droit}} + T_{\text{gauche}} + T_{\text{haut}} + T_{\text{bas}} - 4T_{\text{nœud}} = 0$$

Utilisation de la méthode du bilan d'énergie et en prenant la direction de tous les transferts de chaleur vers le nœud, les équations aux différences finies pour les nœuds ont été obtenus comme suit :

$$\text{Nœud 1: } h_i \frac{l}{2} (T_i - T_1) + \lambda \frac{l}{2} \frac{T_2 - T_1}{l} + \frac{l/2}{\sin 45} [\alpha_s \dot{q}_s + h_0 (T_0 - T_1)] = 0$$

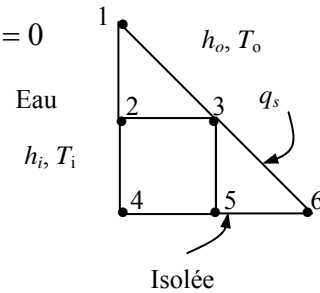
$$\text{Nœud 2: } h_i l (T_i - T_2) + \lambda \frac{l}{2} \frac{T_1 - T_2}{l} + \lambda \frac{l}{2} \frac{T_4 - T_2}{l} + \lambda l \frac{T_3 - T_2}{l} = 0$$

$$\text{Nœud 3: } \lambda l \frac{T_2 - T_3}{l} + \lambda l \frac{T_5 - T_3}{l} + \frac{l}{\sin 45} [\alpha_s \dot{q}_s + h_0 (T_0 - T_3)] = 0$$

$$\text{Nœud 4: } h_i \frac{l}{2} (T_i - T_4) + \lambda \frac{l}{2} \frac{T_2 - T_4}{l} + \lambda \frac{l}{2} \frac{T_5 - T_4}{l} = 0$$

$$\text{Nœud 5: } T_4 + 2T_3 + T_6 - 4T_5 = 0$$

$$\text{Nœud 6: } \lambda \frac{l}{2} \frac{T_5 - T_6}{l} + \frac{l/2}{\sin 45} [\alpha_s \dot{q}_s + h_0 (T_0 - T_6)] = 0$$



Où $l = 1 \text{ m}$, $\lambda = 0.6 \text{ W/m}\cdot\text{°C}$, $h_i = 150 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$, $T_i = 15\text{°C}$, $h_o = 30 \text{ W/m}^2\cdot\text{°C}$, $T_0 = 25\text{°C}$, $\alpha_s = 0.7$, et $\dot{q}_s = 800 \text{ W/m}^2$.

Le système de six équations à six inconnues constitue la formulation de la différence finie du problème. Les températures des six nœuds sont déterminées par la résolution des six équations ci-dessus.

$T_1 = T_{\text{haut}} = 21.3\text{°C}$, $T_2 = 15.1\text{°C}$, $T_3 = T_{\text{milieu}} = 43.2\text{°C}$, $T_4 = 15.1\text{°C}$, $T_5 = 36.3\text{°C}$, $T_6 = T_{\text{bas}} = 43.6\text{°C}$

Discussion Notez que la température la plus élevée se produit à un endroit plus éloigné de l'eau, comme prévu.

Solution de l'épreuve

1. Rappelle de la loi de Fourier unidimensionnelle liant la densité du flux de chaleur $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ et la température

$$\varphi(x, t) = -\lambda \frac{dT(x, t)}{dx}$$

Dimension de φ (\mathbf{W}/\mathbf{m}^2)

$$\frac{J}{s.m^2} = \frac{N.m}{s.m^2} = \frac{N}{s.m} = \frac{kg.m.s^{-2}}{s.m} = kg.s^{-3} \rightarrow [\varphi] = M.T^{-3}$$

L'unité de la conductivité thermique λ

$$\frac{\frac{W}{m^2.s}}{^{\circ}C} = \frac{J}{m^2.^{\circ}C}$$

2. Effectuant le bilan thermique de la tranche élémentaire $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{dx}]$ de la dalle entre un instant \mathbf{t} quelconque et $\mathbf{t} + \mathbf{dt}$:

$$[\varphi_x.s(x) - \varphi_{x+dx}.s(x+dx)]dx = \rho.S(x).dx.C \frac{T_{t+dt} + T_t}{dt}$$

Or $s(x) = s(x+dx) = s$

$$[\varphi_x - \varphi_{x+dx}]S(x).dx = \rho.S(x).dx.C \frac{T_{t+dt} + T_t}{dt}$$

$$d\varphi(x, t) = -\rho.C \frac{dT(x, t)}{dx}$$

3. L'équation de diffusion thermique :

$$\varphi(x, t) = -\lambda \frac{dT(x, t)}{dx}$$

$$-\lambda \frac{d^2T(x, t)}{dx^2} = -\rho.C \frac{dT(x, t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{\rho.C} \frac{d^2T(x, t)}{dx^2} = \frac{dT(x, t)}{dt}}$$

La diffusivité thermique a:

$$\boxed{a = \frac{\lambda}{\rho.C}}$$

L'unité de a est :

$$[a] = \frac{W.m^3.Kg.K}{m.K.Kg.J} = m^2.s^{-1}$$

4. L'unité de h :

$$\frac{W}{m^2.K}$$

5. a) Le régime est stationnaire l'équation de diffusion thermique devient

$$\frac{\lambda}{\rho.C} \frac{d^2T(x, t)}{dx^2} = 0$$

$$T(x) = b + c.x$$

La solution de l'équation est :

$$\text{À } x=0 \quad \varphi(x=0)=\varphi_0 \quad \varphi(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda.c = \varphi_0 \quad \text{d'ou} \quad c = -\frac{\varphi_0}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \text{À } x=e \quad \varphi(e) &= \varphi_0 = h.(T(e) - T_i) \\ T(e) &= \frac{\varphi_0}{h} + T_i \\ T(e) &= b - \frac{\varphi_0}{\lambda} . e \\ \frac{\varphi_0}{h} + T_i &= b - \frac{\varphi_0}{\lambda} . e \\ \frac{\varphi_0}{h} + \frac{\varphi_0}{\lambda} e + T_i &= b \\ T(x) &= \frac{\varphi_0}{h} + \frac{\varphi_0}{\lambda} e + T_i - \frac{\varphi_0}{\lambda} . x \\ T(x) &= T_i + \varphi_0 \left(\frac{1}{h} + \frac{e}{\lambda} \right) - \frac{\varphi_0}{\lambda} . x \end{aligned}$$

b)

$$T(e) = T_i + \varphi_0 \left(\frac{1}{h} + \frac{e}{\lambda} \right) - \frac{\varphi_0}{\lambda} . e = T_i + \frac{\varphi_0}{h}$$

$$\boxed{T(e) - T_i = \frac{\varphi_0}{h} = \frac{20.1}{6.7} = 3.1^\circ\text{C}}$$

6. a) le régime est périodique

b) pour résoudre l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{d^2 T(x,t)}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{dT(x,t)}{dt}$$

On choisit la méthode de séparation des variables.

On écrit :

$$\begin{aligned} T(x,t) &= g(x).f(t) \\ \frac{d^2 T(x,t)}{dx^2} &= f(t). \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{dT(x,t)}{dt} = \frac{1}{a} g(x). \frac{df(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$f(t). \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{1}{a} g(x). \frac{df(t)}{dt}$$

$$\frac{a}{g(x)} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt}$$

c) On admettant des solutions de formes exponentielles complexes comme :

$$f(t) = A. \exp(i.\omega.t) \quad \text{et} \quad g(x) = B. \exp(i.k.x)$$

$$\text{L'équation} \quad \frac{a}{g(x)} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} \quad \text{devient} \quad :$$

$$\frac{a}{B. \exp(i.k.x)} B.i^2 . k^2 . \exp(i.\omega.x) = \frac{1}{A. \exp(i.\omega.t)} A.i.\omega. \exp(i.\omega.t)$$

$$-a.k^2 = i.\omega$$

$$\text{Sachant que } i = -\frac{(1-i)^2}{2}$$

$$a.k^2 = \frac{(1-i)^2}{2} \cdot \omega \qquad k^2 = \frac{(1-i)^2}{2.a} \cdot \omega$$

D'où

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot (1-i)$$

d) Deux solution possible pour g(x)

$$g(x) = B \cdot \exp\left(i(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) = B \cdot \exp\left((i+1)\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$$

$$\operatorname{Re}[g(x)] = B \cdot \exp\left(+\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} B \cdot \exp\left(+\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) = +\infty \text{ pas de convergence}$$

Et

$$g(x) = B \cdot \exp\left(-i(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) = B \cdot \exp\left(-(i+1)\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$$

$$\operatorname{Re}[g(x)] = B \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} B \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) = 0 \text{ Convergence. On retient cette solution complexe qui possédant une partie réelle négative.}$$

e) la solution finale est :

$$\bar{T}(x,t) = \bar{g}(x) \cdot \bar{f}(t) = B.A \cdot \exp\left(-(i+1)\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) \cdot \exp(i \cdot \omega t) = B.A \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x + i \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)\right)$$

À (x=0,t=0) :

$$\bar{T}(0,0) = B.A = T_0$$

$$\bar{T}(x,t) = T_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x + i \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)\right)$$

f)

$$T(x,t) = \operatorname{Re}[\bar{T}(x,t)] = T_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$$

$\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$ traduit l'amortissement, $T = \frac{2.\pi}{\omega}$ la période temporelle, $\Lambda = \frac{2.\pi}{\sqrt{\frac{\omega}{2.a}}}$ la période

spatiale ou longueur d'onde et $v = \sqrt{2.a.\omega}$ la vitesse de propagation.

Solution TD 3:

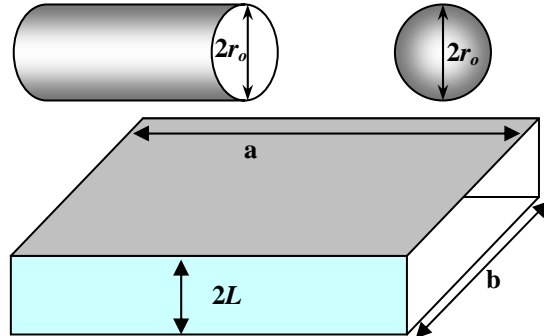
Milieu thermiquement mince

A

$$L_{c,mur\ plan} = \frac{V}{S} = \frac{2L(a.b)}{2(a.b)} = L$$

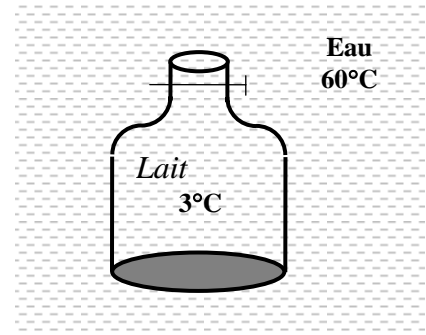
$$L_{c,cylindre} = \frac{V}{S} = \frac{\pi r_o^2 h}{2\pi r_o h} = \frac{r_o}{2}$$

$$L_{c,sphère} = \frac{V}{S} = \frac{4\pi r_o^3 / 3}{4\pi r_o^2} = \frac{r_o}{3}$$



B

Hypothèses : 1 Le contenant en verre de forme cylindrique d'un rayon de $r_0 = 3$ cm. 2 Les propriétés thermiques du lait sont prises comme ceux de l'eau. 3 Les propriétés thermiques du lait sont constantes à la température ambiante. 4 Le coefficient de transfert de chaleur est constant et uniforme sur toute la surface. 5 Le nombre de Biot, dans ce cas est importante (beaucoup plus grand que 0,1). Toutefois, le système global d'analyse est encore applicable puisque le lait est agité en permanence, de sorte que sa température reste uniforme en tout temps.



Analyse : La longueur caractéristique et le nombre de Biot du verre de lait sont :

$$L_c = \frac{V}{S} = \frac{\pi r_o^2 L}{2\pi r_o L + 2\pi r_o^2} = \frac{\pi (0.03\text{ m})^2 (0.07\text{ m})}{2\pi (0.03\text{ m})(0.07\text{ m}) + 2\pi (0.03\text{ m})^2} = 0.01050\text{ m}$$

$$Bi = \frac{hL_c}{\lambda} = \frac{(120\text{ W/m}^2 \cdot \text{°C})(0.0105\text{ m})}{(0.607\text{ W/m} \cdot \text{°C})} = 2.076 > 0.1$$

Pour les raisons citées ci-dessus, nous pouvons utiliser le système global d'analyse afin de déterminer le temps nécessaire pour que le lait se réchauffe de 3°C à 38°C.

$$b = \frac{hS}{\rho C_p V} = \frac{h}{\rho C_p L_c} = \frac{120\text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}}{(998\text{ kg/m}^3)(4182\text{ J/kg} \cdot \text{°C})(0.0105\text{ m})} = 0.002738\text{ s}^{-1}$$

$$\frac{T(t) - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{-bt} \longrightarrow \frac{38 - 60}{3 - 60} = e^{-(0.002738\text{ s}^{-1})t} \longrightarrow t = 348\text{ s} = 5.8\text{ min}$$

Par conséquent, il faudra environ 6 minutes pour réchauffer le lait de 3°C à 38°C.

Ailette

Hypothèses : 1 La température de la partie immergée de la cuillère est égale à la température de l'eau. 2 La température de la cuillère varie le long de la cuillère $T(x)$. 3 Le transfert de chaleur à partir de l'extrémité de la cuillère est négligeable. 4 Le coefficient de transfert de chaleur est constant et uniforme sur toute la surface de la cuillère. 5 Les propriétés thermiques de la cuillère sont constantes. 6 Le transfert de chaleur par rayonnement et supposé négligeable.

Notant que la section transversale de la cuillère est constante et x a pour origine la surface libre de l'eau. La variation de température le long de la cuillère peut être exprimée comme :

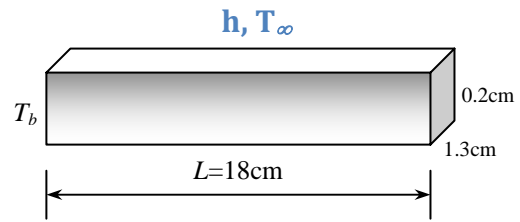
$$\frac{T(x) - T_\infty}{T_b - T_\infty} = \frac{\cosh a(L-x)}{\cosh aL}$$

Où

$$p = 2(0.002 + 0.013) = 0.030 \text{ m}$$

$$S_c = (0.002)(0.013) = 0.000026 \text{ m}^2$$

$$a = \sqrt{\frac{hp}{\lambda S_c}} = \sqrt{\frac{17 * 0.03}{15 * 0.000026}} = 36 \text{ m}^{-1}$$



La température de la pointe de la cuillère est déterminée par :

$$T(L) = T_\infty + (T_b - T_\infty) \frac{\cosh a(L-L)}{\cosh aL}$$

$$= 24 + (93 - 24) \frac{\cosh 0}{\cosh(36 \times 0.18)} = 24 + (93 - 24) \frac{1}{326} = 24.2^\circ\text{C}$$

Par conséquent, la différence de température dans l'ensemble du poignée de la cuillère exposée est :

$$\Delta T = T_b - T(L) = (93 - 24.2) = \mathbf{68.8^\circ\text{C}}$$

Facteur de forme

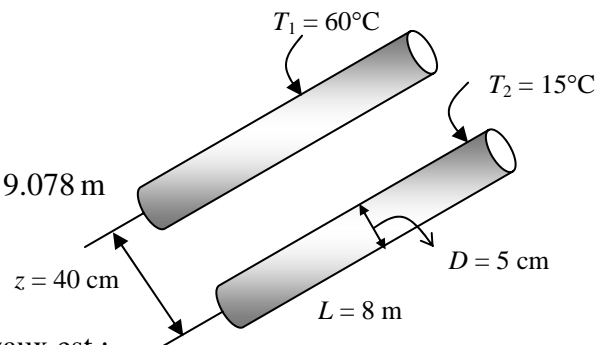
Hypothèse : le transfert de chaleur est en deux dimensions (pas de changement dans la direction axiale).

La conductivité thermique du béton est $\lambda = 0.75 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C}$.

Le facteur de forme pour cette configuration est donné dans le tableau :

$$F_c = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4z^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1 D_2}\right)}$$

$$= \frac{2\pi(8 \text{ m})}{\cosh^{-1}\left(\frac{4(0.4 \text{ m})^2 - (0.05 \text{ m})^2 - (0.05 \text{ m})^2}{2(0.05 \text{ m})(0.05 \text{ m})}\right)} = 9.078 \text{ m}$$



Le flux de transfert de chaleur échangé entre les tuyaux est :

$$\phi = F_c \lambda (T_1 - T_2) = (9.078 \text{ m})(0.75 \text{ W/m}\cdot^\circ\text{C})(60 - 15)^\circ\text{C} = \mathbf{306 \text{ W}}$$

Problèmes Bi-dimension

Nœud 5 sur la frontière isolée peut être considéré comme un nœud de l'intérieur qui donne :

$$T_{\text{droit}} + T_{\text{gauche}} + T_{\text{haut}} + T_{\text{bas}} - 4T_{\text{nœud}} = 0$$

Utilisation de la méthode du bilan d'énergie et en prenant la direction de tous les transferts de chaleur vers le nœud, les équations aux différences finies pour les nœuds ont été obtenus comme suit :

$$\text{Nœud 1: } h_i \frac{l}{2} (T_i - T_1) + \lambda \frac{l}{2} \frac{T_2 - T_1}{l} + \frac{l/2}{\sin 45} [\alpha_s \dot{q}_s + h_0 (T_0 - T_1)] = 0$$

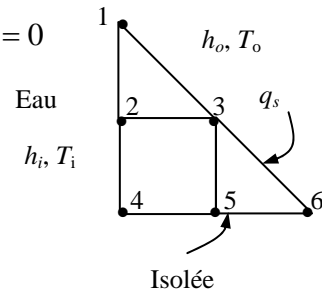
$$\text{Nœud 2: } h_i l (T_i - T_2) + \lambda \frac{l}{2} \frac{T_1 - T_2}{l} + \lambda \frac{l}{2} \frac{T_4 - T_2}{l} + \lambda l \frac{T_3 - T_2}{l} = 0$$

$$\text{Nœud 3: } \lambda l \frac{T_2 - T_3}{l} + \lambda l \frac{T_5 - T_3}{l} + \frac{l}{\sin 45} [\alpha_s \dot{q}_s + h_o (T_0 - T_3)] = 0$$

$$\text{Nœud 4: } h_i \frac{l}{2} (T_i - T_4) + \lambda \frac{l}{2} \frac{T_2 - T_4}{l} + \lambda \frac{l}{2} \frac{T_5 - T_4}{l} = 0$$

$$\text{Nœud 5: } T_4 + 2T_3 + T_6 - 4T_5 = 0$$

$$\text{Nœud 6: } \lambda \frac{l}{2} \frac{T_5 - T_6}{l} + \frac{l/2}{\sin 45} [\alpha_s \dot{q}_s + h_o (T_0 - T_6)] = 0$$



Où $l = 1$ m, $\lambda = 0.6$ W/m \cdot °C, $h_i = 150$ W/m 2 ·°C, $T_i = 15$ °C, $h_o = 30$ W/m 2 ·°C, $T_0 = 25$ °C, $\alpha_s = 0.7$, et $\dot{q}_s = 800$ W/m 2 .

Le système de six équations à six inconnues constitue la formulation de la différence finie du problème. Les températures des six nœuds sont déterminées par la résolution des six équations ci-dessus.

$T_1 = T_{\text{haut}} = 21.3$ °C, $T_2 = 15.1$ °C, $T_3 = T_{\text{milieu}} = 43.2$ °C, $T_4 = 15.1$ °C, $T_5 = 36.3$ °C, $T_6 = T_{\text{bas}} = 43.6$ °C

Discussion Notez que la température la plus élevée se produit à un endroit plus éloigné de l'eau, comme prévu.

Solution de l'épreuve

1. Rappelle de la loi de Fourier unidimensionnelle liant la densité du flux de chaleur $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{t})$ et la température

$$\varphi(x, t) = -\lambda \frac{dT(x, t)}{dx}$$

Dimension de φ (\mathbf{W}/\mathbf{m}^2)

$$\frac{J}{s.m^2} = \frac{N.m}{s.m^2} = \frac{N}{s.m} = \frac{kg.m.s^{-2}}{s.m} = kg.s^{-3} \rightarrow [\varphi] = M.T^{-3}$$

L'unité de la conductivité thermique λ

$$\frac{\frac{W}{m^2}}{^\circ C} = \frac{J}{m^2 \cdot ^\circ C}$$

1. Effectuant le bilan thermique de la tranche élémentaire $[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \mathbf{dx}]$ de la dalle entre un instant \mathbf{t} quelconque et $\mathbf{t} + \mathbf{dt}$:

$$[\varphi_x \cdot s(x) - \varphi_{x+dx} \cdot s(x+dx)] dx = \rho \cdot S(x) \cdot dx \cdot C \frac{T_{t+dt} - T_t}{dt}$$

Or $s(x) = s(x+dx) = s$

$$[\varphi_x - \varphi_{x+dx}] S(x) \cdot dx = \rho \cdot S(x) \cdot dx \cdot C \frac{T_{t+dt} - T_t}{dt}$$

$$d\varphi(x, t) = -\rho \cdot C \frac{dT(x, t)}{dt}$$

2. L'équation de diffusion thermique :

$$\varphi(x, t) = -\lambda \frac{dT(x, t)}{dx}$$

$$-\lambda \frac{d^2 T(x, t)}{dx^2} = -\rho \cdot C \frac{dT(x, t)}{dt}$$

$$\boxed{\frac{\lambda}{\rho \cdot C} \frac{d^2 T(x, t)}{dx^2} = \frac{dT(x, t)}{dt}}$$

La diffusivité thermique a :

$$\boxed{a = \frac{\lambda}{\rho \cdot C}}$$

L'unité de a est :

$$[a] = \frac{W.m^3.Kg.K}{m.K.Kg.J} = m^2.s^{-1}$$

3. L'unité de h :

$$\frac{W}{m^2.K}$$

4. a) Le régime est stationnaire l'équation de diffusion thermique devient

$$\frac{\lambda}{\rho \cdot C} \frac{d^2 T(x, t)}{dx^2} = 0$$

$$T(x) = b + c \cdot x$$

La solution de l'équation est :

$$\text{À } x=0 \quad \varphi(x=0) = \varphi_0 \quad \varphi(x) = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda \cdot c = \varphi_0 \quad \text{d'ou} \quad c = -\frac{\varphi_0}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \text{À } x=e \quad \varphi(e) &= \varphi_0 = h.(T(e) - T_i) \\ T(e) &= \frac{\varphi_0}{h} + T_i \\ T(e) &= b - \frac{\varphi_0}{\lambda}.e \\ \frac{\varphi_0}{h} + T_i &= b - \frac{\varphi_0}{\lambda}.e \\ \frac{\varphi_0}{h} + \frac{\varphi_0}{\lambda}.e + T_i &= b \\ T(x) &= \frac{\varphi_0}{h} + \frac{\varphi_0}{\lambda}.e + T_i - \frac{\varphi_0}{\lambda}.x \\ T(x) &= T_i + \varphi_0 \left(\frac{1}{h} + \frac{e}{\lambda} \right) - \frac{\varphi_0}{\lambda}.x \end{aligned}$$

b)

$$T(e) = T_i + \varphi_0 \left(\frac{1}{h} + \frac{e}{\lambda} \right) - \frac{\varphi_0}{\lambda}.e = T_i + \frac{\varphi_0}{h}$$

$$\boxed{T(e) - T_i = \frac{\varphi_0}{h} = \frac{20.1}{6.7} = 3.1^\circ\text{C}}$$

5. a) le régime est périodique

b) pour résoudre l'équation de diffusion thermique :

$$\frac{d^2 T(x,t)}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{dT(x,t)}{dt}$$

On choisit la méthode de séparation des variables.

On écrit :

$$\begin{aligned} T(x,t) &= g(x).f(t) \\ \frac{d^2 T(x,t)}{dx^2} &= f(t). \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{1}{a} \frac{dT(x,t)}{dt} = \frac{1}{a} g(x). \frac{df(t)}{dt} \end{aligned}$$

$$f(t). \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{1}{a} g(x). \frac{df(t)}{dt}$$

$$\frac{a}{g(x)} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt}$$

c) On admettant des solutions de formes exponentielles complexes comme :

$$f(t) = A.\exp(i.\omega.t) \quad \text{et} \quad g(x) = B.\exp(i.k.x)$$

$$\text{L'équation} \quad \frac{a}{g(x)} \frac{d^2 g(x)}{dx^2} = \frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt} \quad \text{devient} \quad :$$

$$\frac{a}{B.\exp(i.k.x)} B.i^2.k^2.\exp(i.\omega.x) = \frac{1}{A.\exp(i.\omega.t)} A.i.\omega.\exp(i.\omega.t)$$

$$-a.k^2 = i.\omega$$

$$\text{Sachant que } i = -\frac{(1-i)^2}{2}$$

$$a.k^2 = \frac{(1-i)^2}{2} \cdot \omega \qquad k^2 = \frac{(1-i)^2}{2.a} \cdot \omega$$

D'où

$$k = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot (1-i)$$

d) Deux solution possible pour g(x)

$$g(x) = B \cdot \exp\left(i(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) = B \cdot \exp\left((i+1)\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$$

$$\operatorname{Re}[g(x)] = B \cdot \exp\left(+\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} B \cdot \exp\left(+\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) = +\infty \text{ pas de convergence}$$

Et

$$g(x) = B \cdot \exp\left(-i(1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) = B \cdot \exp\left(-(i+1)\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$$

$$\operatorname{Re}[g(x)] = B \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[g(x)] = \lim_{x \rightarrow \infty} B \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) = 0 \text{ Convergence. On retient cette solution complexe qui possédant une partie réelle négative.}$$

e) la solution finale est :

$$\bar{T}(x,t) = \bar{g}(x) \cdot \bar{f}(t) = B.A \cdot \exp\left(-(i+1)\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) \cdot \exp(i \cdot \omega t) = B.A \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x + i \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)\right)$$

À (x=0,t=0) :

$$\bar{T}(0,0) = B.A = T_0$$

$$\bar{T}(x,t) = T_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x + i \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)\right)$$

f)

$$T(x,t) = \operatorname{Re}[\bar{T}(x,t)] = T_0 \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right) \cdot \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$$

$\exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2.a}} \cdot x\right)$ traduit l'amortissement, $T = \frac{2.\pi}{\omega}$ la période temporelle, $\Lambda = \frac{2.\pi}{\sqrt{\frac{\omega}{2.a}}}$ la période

spatiale ou longueur d'onde et $v = \sqrt{2.a.\omega}$ la vitesse de propagation.

TD de Transfert de Chaleur.
Série N°4 : Rayonnement thermique

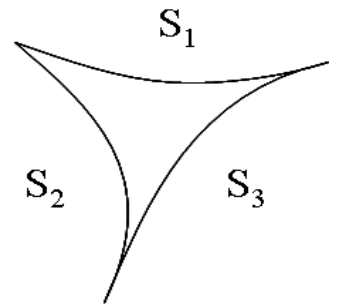
I) Utilisation des abaques.

Pour la configuration illustrée sur la Figure, avec S_3 la surface plane annulaire entre les deux cylindres. Déterminer les expressions F_{13} , F_{31} , F_{32} et F_{23} en fonction de F_{11} , F_{12} et les trois surfaces S_1 , S_2 et S_3 . F_{33} est le facteur de forme entre les deux surfaces annulaires opposées. S_1 est la surface intérieure du cylindre extérieur et S_2 la surface externe du cylindre intérieur.

Pour $L=20\text{cm}$, $r_1=20\text{cm}$ et $r_2=10\text{cm}$, déterminer F_{11} , F_{12} et F_{13} .

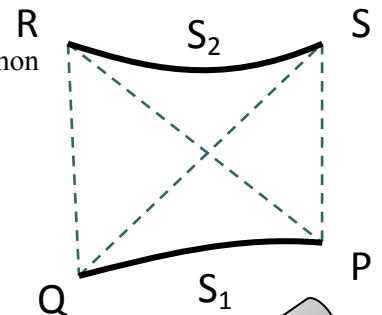
II) Règle de Hottel

Démontrer que :
$$F_{12} = \frac{S_1 + S_2 - S_3}{2S_1}$$

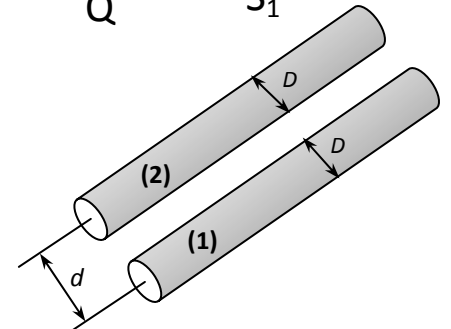


III) Méthode des cordes croisées : Facteur de forme entre 2 surfaces non concaves quelconques (sans obstacle)

Démontrer que :
$$F_{12} = \frac{(S_{PR} + S_{QS}) - (S_{RQ} + S_{PS})}{2.S_1}$$



IV) Application de la méthode des cordes croisées : Deux cylindres parallèles infiniment longs d'un diamètre D sont situés sur une distance d l'un de l'autre. Déterminer le facteur de forme F_{12} entre ces deux cylindres.



V) une lampe de 100 W est alimentée sous 220 V. Elle est constituée d'un filament de tungstène placé au centre d'une ampoule sphérique de 8 cm de diamètre à l'intérieur de laquelle on fait le vide.

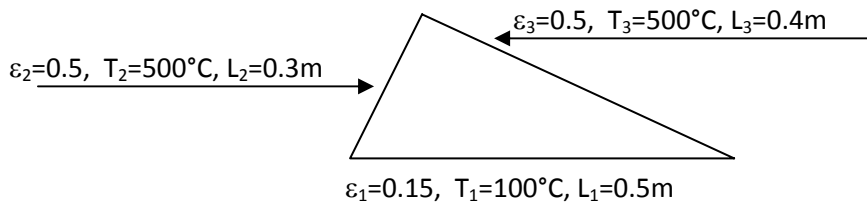
Pour que la lumière soit assez blanche, il est nécessaire que la température du filament soit de 2600 K.

- 1) Déterminer le diamètre et la longueur du filament si le facteur d'émission total hémisphérique du tungstène est de 0.3 (résistivité du tungstène $88 \mu\Omega\text{cm}$).
- 2) Déterminer la puissance rayonnée dans le visible (entre 0.4 et 0.7 μm) si le facteur d'émission spectral hémisphérique est de 0.45 dans ce domaine.
- 3) Quelle est la puissance absorbée par l'ampoule en supposant que le verre est parfaitement transparent jusqu'à 2.7 μm et se comporte comme un corps noir au-delà, en admettant que le facteur d'émission spectral hémisphérique du tungstène est de 0.2 dans tout le domaine au-delà 2.7 μm .
- 4) Déterminer la température de l'ampoule si le facteur d'émission total hémisphérique du verre est de 0.93 en négligeant les pertes de chaleur par convection naturelle.

VI) Flux net d'une surface grise

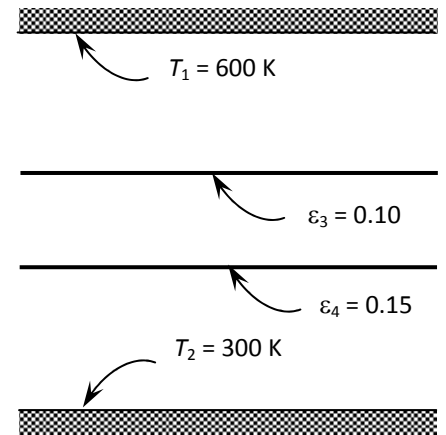
Soit trois surfaces planes (1,2 et 3) grises de dimensions semi infini fermées (voir figure) :

- Calculer les facteurs de forme suivant (voir figure) : $F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33}$.
- Donner la radiosité de chaque surface.
- Donner la définition du flux net d'une surface 1.
- Calculer le flux net de la surface 1.



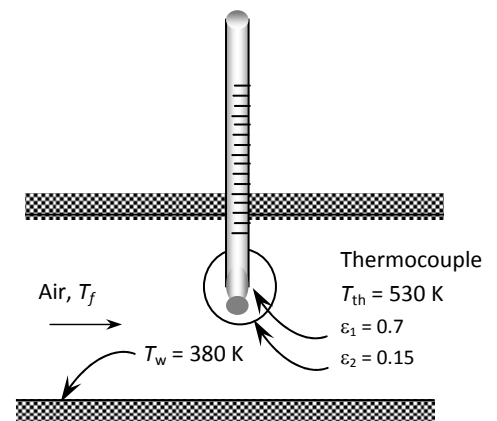
VII) Deux boucliers fins d'émissivités $\epsilon_3=0.10$ et $\epsilon_4=0.15$ sont, des deux côtés, placés entre deux très grandes plaques parallèles, qui sont maintenues aux températures uniformes $T_1=600K$ et à $T_2=300K$ et ont les émissivités $\epsilon_1=0.6$ et $\epsilon_2=0.7$, respectivement.

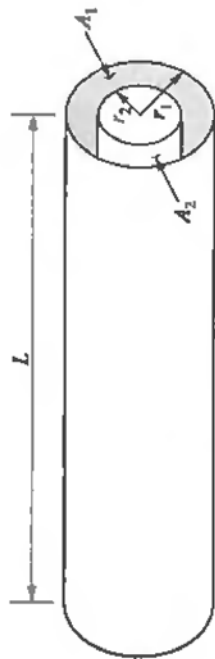
Déterminez les flux nets échangé entre les deux plaques (1 et 2) avec et sans les boucliers par unité de surface des plaques. Déterminez les températures des boucliers T_3 et T_4 à l'équilibre thermique.



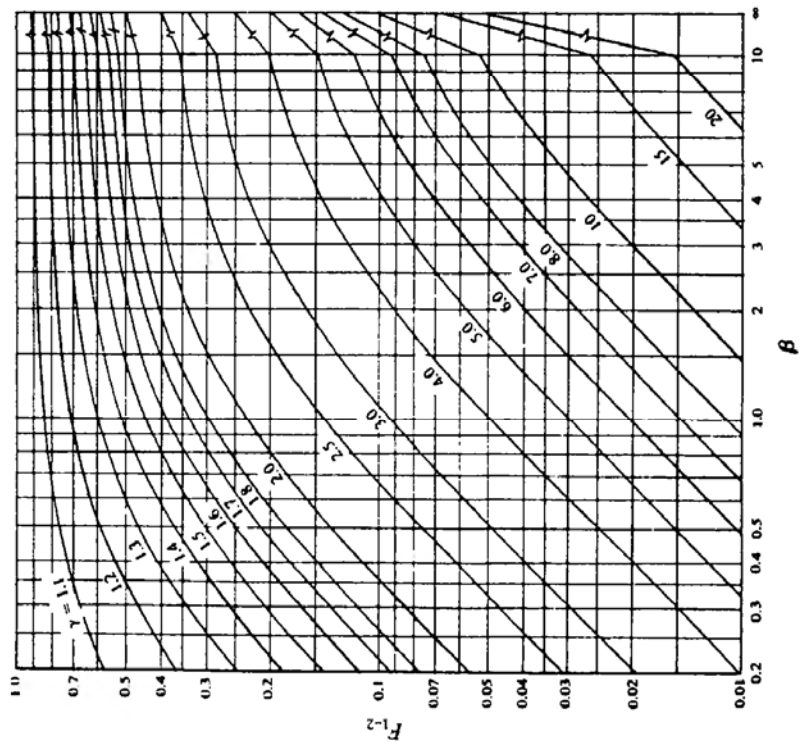
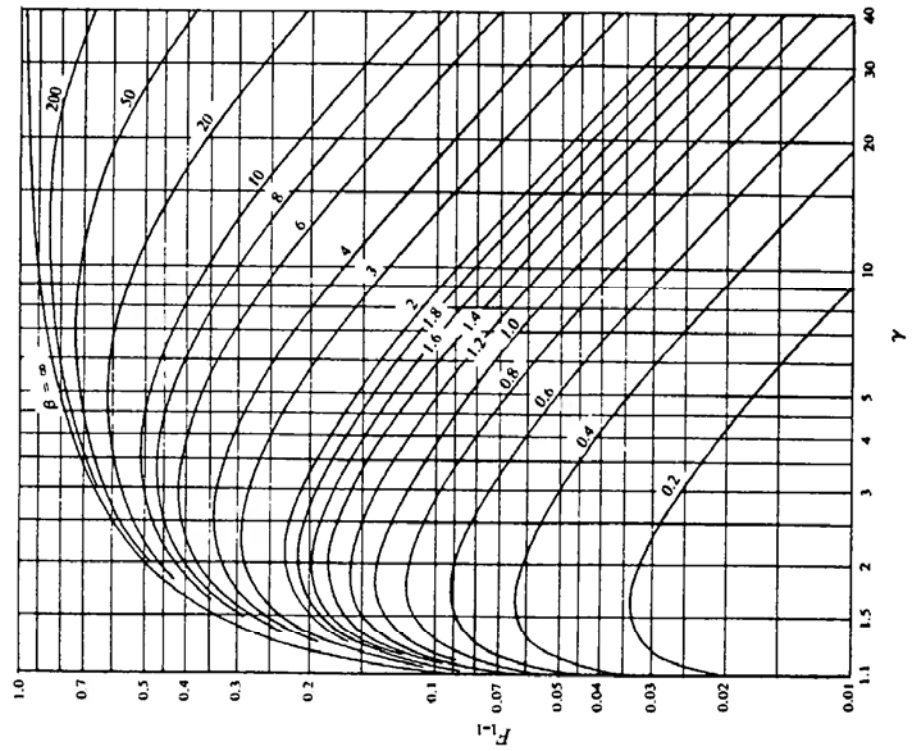
VIII) Un thermocouple protégé par le papier d'aluminium d'émissivité $\epsilon_2=0.15$ est utilisé pour mesurer la température de gaz chauds coulant dans un conduit dont les murs sont maintenus à $T_w=380 K$. Le thermomètre montre une lecture de température $T_{th}=530 K$.

En supposant l'émissivité de la jonction de thermocouple $\epsilon_1=0.7$ et le coefficient de transfert de chaleur de convection $h=120 W/m^2 \text{ } ^\circ C$, déterminez la température réelle du gaz. Qu'il est la lecture du thermomètre si aucune protection de radiation n'a été utilisée ?



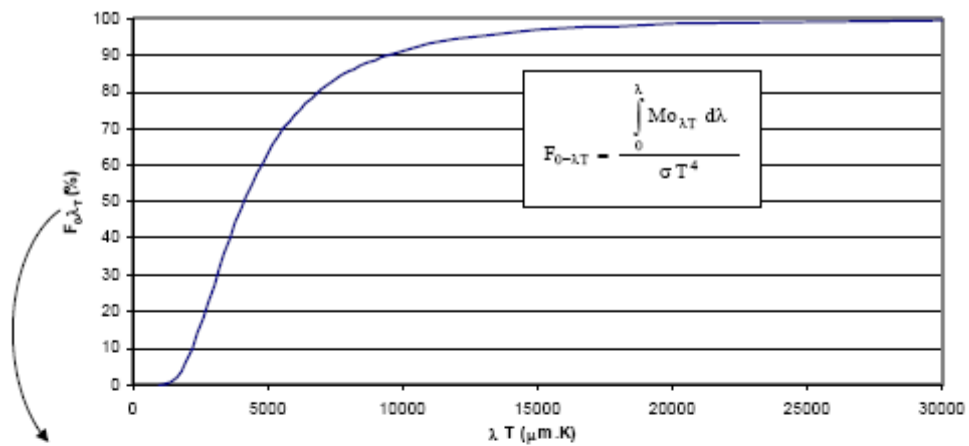


$\gamma = r_1/r_2$ $\beta = L/r_2$



Facteur de forme - Deux cylindres concentriques de longueur finie.

Fraction d'énergie $F_{0-\lambda T}$ rayonnée par un corps noir entre 0 et λ



a \ b	0	40	80	120	160
1 000	0,03	0,05	0,08	0,11	0,16
1 200	0,21	0,29	0,38	0,49	0,62
1 400	0,78	0,96	1,17	1,41	1,68
1 600	1,97	2,30	2,66	3,06	3,48
1 800	3,94	4,42	4,94	5,49	6,07
2 000	6,68	7,31	7,97	8,65	9,36
2 200	10,09	10,84	11,61	12,40	13,21
2 400	14,03	14,66	15,71	16,57	17,44
2 600	18,32	19,20	20,09	20,99	21,89
2 800	22,79	23,70	24,61	25,51	26,42
3 000	27,33	28,23	29,13	30,03	30,92
3 200	31,81	32,70	33,58	34,45	35,32
3 400	36,18	37,03	37,88	38,71	39,54
3 600	40,36	41,18	41,98	42,78	43,56
3 800	44,34	45,11	45,87	46,62	47,36
4 000	48,09	48,81	49,53	50,23	50,92
4 200	51,60	52,28	52,94	53,60	54,25
4 400	54,88	55,51	56,13	56,74	57,34
4 600	57,93	58,51	59,09	59,65	60,21
4 800	60,66	61,30	61,83	62,35	62,87
5 000	63,38	63,88	64,37	64,85	65,33
5 200	65,80	66,26	66,72	67,16	67,60
5 400	68,04	68,46	68,88	69,30	69,70
5 600	70,11	70,50	70,89	71,27	71,65
5 800	72,02	72,38	72,74	73,09	73,44
6 000	73,78	74,12	74,45	74,78	75,10
6 200	75,41	75,72	76,03	76,33	76,63
6 400	76,92	77,21	77,49	77,77	78,05
6 600	78,32	78,59	78,85	79,11	79,36
6 800	79,61	79,86	80,10	80,34	80,58
7 000	80,90	81,04	81,26	81,47	81,70
7 200	81,92	82,13	82,34	82,55	82,75
7 400	82,95	83,15	83,34	83,53	83,72
7 600	83,91	84,09	84,27	84,45	84,62

a \ b	0	40	80	120	160
7 800	84,80	84,97	85,14	85,30	85,47
8 000	85,63	85,78	85,94	86,10	86,25
8 200	86,40	86,55	86,69	86,83	86,98
8 400	87,12	87,25	87,39	87,52	87,66
8 600	87,80	87,92	88,04	88,17	88,29
8 800	88,41	88,53	88,65	88,77	88,88
9 000	88,89	89,11	89,22	89,33	89,44
9 200	89,55	89,65	89,76	89,86	89,96
9 400	90,06	90,16	90,26	90,35	90,45
9 600	90,54	90,63	90,72	90,81	90,90
9 800	90,99	91,08	91,16	91,25	91,33
10 000	91,42				

a \ b	0	200	400	600	800
10 000	91,42	91,81	92,19	92,54	92,87
11 000	93,18	93,48	93,76	94,02	94,27
12 000	94,50	94,73	94,94	95,14	95,33
13 000	95,51	95,68	95,84	96,00	96,14
14 000	96,29	96,42	96,54	96,67	96,78
15 000	96,89	97,00	97,10	97,19	97,29
16 000	97,37	97,46	97,54	97,62	97,69
17 000	97,77	97,83	97,90	97,96	98,02
18 000	98,08	98,14	98,19	98,24	98,29
19 000	98,34	98,38	98,43	98,47	98,51
20 000	98,55				
30 000	99,53				
40 000	99,78				
50 000	99,89				
60 000	99,93				
70 000	99,96				
80 000	99,97				
90 000	99,98				
100 000	99,99				

Utilisation :
 $\lambda T = a + b$

Exemple : $\lambda T = 2720 \mu m.K$
 se lit à 2600 + 120
 d'où : $F_{0-\lambda T} = 20,99 \%$

Solution

I)

by (11.37),

$$2F_{1-3} + F_{1-2} + F_{1-1} = 1 \quad \text{or} \quad F_{1-3} = \frac{1}{2}(1 - F_{1-2} - F_{1-1})$$

and by reciprocity

$$F_{3-1} = \frac{A_1}{2A_3}(1 - F_{1-2} - F_{1-1})$$

Also, since $F_{2-2} = 0$,

$$2F_{2-3} + F_{2-1} = 1 \quad \text{or} \quad F_{2-3} = \frac{1}{2}(1 - F_{2-1})$$

and reciprocity gives

$$F_{2-3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} F_{1-2} \right) \quad \text{and} \quad F_{3-2} = \frac{A_2}{2A_3} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} F_{1-2} \right)$$

Again by (11.34),

$$F_{3-3} + F_{3-1} + F_{3-2} = 1$$

or

$$\begin{aligned} F_{3-3} &= 1 - F_{3-1} - F_{3-2} \\ &= 1 - \frac{A_1}{2A_3}(1 - F_{1-2} - F_{1-1}) - \frac{A_2}{2A_3} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} F_{1-2} \right) \\ &= 1 - \frac{A_1 + A_2}{2A_3} + \frac{A_1}{2A_3}(2F_{1-2} + F_{1-1}) \end{aligned}$$

From Fig. 11-15, with $\gamma = 2.0$ and $\beta = 2.0$, $F_{1-1} = 0.23$; $F_{1-2} = 0.34$. The areas are:

$$A_1 = 2\pi(20)(20) = 2513 \text{ cm}^2 \quad A_2 = 2\pi(10)(20) = 1257 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = \pi[(20 \text{ cm})^2 - (10 \text{ cm})^2] = 942 \text{ cm}^2$$

From Problem 11.12,

$$F_{3-3} = 1 - \frac{2513 \text{ cm}^2 + 1257 \text{ cm}^2}{2(942 \text{ cm}^2)} + \frac{2513 \text{ cm}^2}{2(942 \text{ cm}^2)} [2(0.34) + 0.23] = 0.213$$

(See Problem 11.29 also.)

II)

$$S_1 F_{12} + S_1 F_{13} = S_1 \quad (F_{11} = 0)$$

$$S_2 F_{21} + S_2 F_{23} = S_2 \quad (F_{22} = 0) \quad \text{Conservation de l'énergie (système géométriquement fermé)}$$

$$S_3 F_{31} + S_3 F_{32} = S_3 \quad (F_{33} = 0)$$

$$S_1 F_{12} = S_2 F_{21} \quad , \quad S_1 F_{13} = S_3 F_{31} \quad , \quad S_2 F_{23} = S_3 F_{32} \quad \text{Réciprocité}$$

$$F_{12} = \frac{S_1 + S_2 - S_3}{2S_1}$$

III)

Pour PQRS (enceinte fermée S_1 convexe) : $S_1 F_{12} + S_1 F_{1-PR} + S_1 F_{1-QS} = S_1$

Pour PQR (plan de fermeture) : $S_1 F_{1-PR} = \frac{S_1 + S_{PR} - S_{RQ}}{2}$

Pour PQS (plan de fermeture) : $S_1 F_{1-QS} = \frac{S_1 + S_{QS} - S_{PS}}{2}$

$$D'où \quad F_{12} = \frac{S_{RQ} + S_{PS} - (S_{PR} + S_{QS})}{2 \cdot S_1}$$

IV) Le facteur de forme entre les deux cylindres en face l'un de l'autre pour $d / D > 3$ est déterminée par à l'utilisation de la méthode des cordes croisées.

$$F_{1-2} = \frac{\sum \text{diag} - \sum \text{cotés}}{2S_i}$$

$$F_{1-2} = \frac{2\sqrt{d^2 + D^2} - 2d}{2(\pi D / 2)}$$

D'ou
$$F_{1-2} = \frac{2(\sqrt{d^2 + D^2} - d)}{\pi D}$$

v)

1) Déterminer le diamètre et la longueur du filament si le facteur d'émission total hémisphérique du tungstène est de 0.3 (résistivité du tungstène $88 \mu\Omega\text{cm}$).

$$M_T^0 = \varepsilon_{Tu} \cdot \sigma \cdot T^4 = 0.3 * 5.67 \cdot 10^{-8} * 2600^4 = 7.7710^5 \text{ Wm}^{-2}$$

$$\phi = S * M_T^0 = 100 \text{ W}$$

$$S = \pi \cdot D \cdot L = \frac{100}{M_T^0} = \frac{100}{7.7710^5}$$

$$D \cdot L = 4.1 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$$

La résistance électrique du fil est :

$$R_e = \frac{V^2}{P} = \frac{220^2}{100} = 484 \Omega$$

$$R_e = \rho \frac{L}{\frac{\pi \cdot D^2}{4}} = 484 \Omega$$

$$\frac{L}{D^2} = 43197 \cdot 10^4 \text{ m}^{-1}$$

D'où :

$L = 0.898 \text{ m}$ $D = 4.56 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

2) la puissance rayonnée dans le visible (entre 0.4 et 0.7 μm) si le facteur d'émission spectral hémisphérique est de 0.45 dans ce domaine :

$$P_{\text{Visible}} = S * \int_{0.4}^{0.7} M_{\lambda,T}^0 d\lambda = S * \varepsilon_{\text{visible}} \left(\int_0^{0.7} M_{\lambda,T}^0 d\lambda - \int_0^{0.4} M_{\lambda,T}^0 d\lambda \right) = S * \varepsilon_{\text{visible}} (F_{0-0.7T} - F_{0-0.4T}) \sigma \cdot T^4$$

$$\lambda_1 = 0.4 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad T = 2600 \text{ K} \rightarrow \lambda_1 \cdot T = 0.4 * 2600 = 1040 \mu\text{m} \cdot \text{K} \rightarrow F_{0-0.4T} = \frac{0.05}{100} = 0.0005$$

$$\lambda_2 = 0.7 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad T = 2600 \text{ K} \rightarrow \lambda_2 \cdot T = 0.7 * 2600 = 1820 \mu\text{m} \cdot \text{K} \rightarrow F_{0-0.7T} = \frac{4.18}{100} = 0.0418$$

$$P_{\text{Visible}} = \pi * D * L * \varepsilon_{\text{visible}} (0.0418 - 0.0005) 5.67 \cdot 10^{-8} * 2600^4$$

$$P_{\text{Visible}} = \pi * 4.56 \cdot 10^{-5} * 0.898 * 0.45 * (0.0418 - 0.0005) 5.67 \cdot 10^{-8} * 2600^4 = 6.2 \text{ W}$$

Le calcul peut être fait autrement :

$$P_{\text{Totale}} = \varepsilon * S * \sigma * T^4 = P = 100 \text{ W}$$

La puissance totale rayonnée par le fil est :

$$S * \sigma * T^4 = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{100}{0.3}$$

$$P_{Visible} = S * \varepsilon_{visible} (F_{0-0.7T} - F_{0-0.4T}) \sigma T^4 = P \frac{\varepsilon_{Visible}}{\varepsilon} (F_{0-0.7T} - F_{0-0.4T})$$

3) la puissance absorbée par l'ampoule en supposant que le verre est parfaitement transparent jusqu'à 2.7 μm et se comporte comme un corps noir au-delà, en admettant que le facteur d'émission spectral hémisphérique du tungstène est de 0.2 dans tout le domaine au-delà 2.7 μm :

$$P_{Inf} = S * \varepsilon_{visible} (1 - F_{0-2.7T}) \sigma T^4 = P \frac{\varepsilon_{Inf}}{\varepsilon} (1 - F_{0-2.7T})$$

$$\lambda_3 = 2.7 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad T = 2600\text{K} \rightarrow \lambda_3 T = 2.7 * 2600 = 7020 \mu\text{m.K} \rightarrow F_{0-2.7T} = \frac{80.97}{100} = 0.8097$$

$$P_{Inf} = P \frac{\varepsilon_{Inf}}{\varepsilon} (1 - F_{0-2.7T}) = 100 * \frac{0.2}{0.3} (1 - 0.8097) = 12.7 \text{ W}$$

4) Régime stationnaire : la puissance absorbée par le verre est égale à la puissance rayonnée par le verre vers l'extérieure, d'où :

$$S_{Verre} * \varepsilon_{Verre} \sigma T_{Verre}^4 = P_{Inf} = 12.3 \text{ W}$$

Avec ε_{Verre} facteur d'émission total hémisphérique du verre

$$T_{Verre}^4 = \frac{12.3 \text{ W}}{S_{Verre} * \varepsilon_{Verre} * \sigma} = \frac{12.3}{0.93 * 5.67 * 10^{-8} * 4 * \pi * (4 * 10^{-2})^2}$$

$$T_{Verre}^4 = 1.16 * 10^{10} \text{ K} \Rightarrow T_{verre} = 328 \text{ K}$$

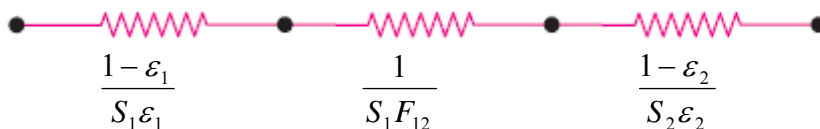
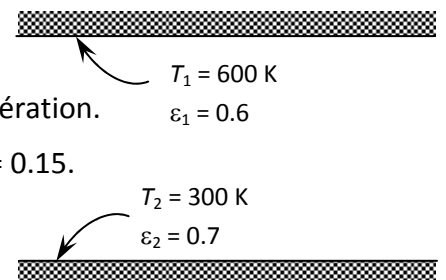
VII)

Hypothèses :

- Les surfaces sont opaques, diffuse, et grises.
- Convection de transfert de chaleur n'est pas pris en considération.

Les émissivités des surfaces sont : $\varepsilon_1 = 0.6$, $\varepsilon_2 = 0.7$, $\varepsilon_3 = 0.10$ et $\varepsilon_4 = 0.15$.

Le flux net entre les surfaces 1 et 2 sans boucliers est donné par :



$$\phi_{12, \text{sans boucliers}} = \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1 - \varepsilon_1}{S_1 \varepsilon_1} + \frac{1}{S_1 F_{12}} + \frac{1 - \varepsilon_2}{S_2 \varepsilon_2}}$$

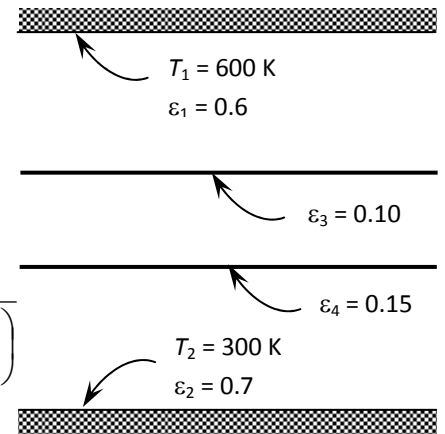
Or $F_{12}=1$, $S_1=S_2=S$

D'où :

$$\begin{aligned}\varphi_{12,\text{sans boucliers}} &= \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1} \\ &= \frac{(5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)[(600 \text{ K})^4 - (300 \text{ K})^4]}{\frac{1}{0.6} + \frac{1}{0.7} - 1} \\ &= \mathbf{3288 \text{ W/m}^2}\end{aligned}$$

Le flux net entre les surfaces 1 et 2 avec boucliers est donné par :

$$\begin{aligned}\varphi_{12,\text{avec boucliers}} &= \frac{\sigma(T_1^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_3} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1\right) + \left(\frac{1}{\varepsilon_4} + \frac{1}{\varepsilon_4} - 1\right)} \\ &= \frac{(5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)[(600 \text{ K})^4 - (300 \text{ K})^4]}{\left(\frac{1}{0.6} + \frac{1}{0.7} - 1\right) + \left(\frac{1}{0.10} + \frac{1}{0.10} - 1\right) + \left(\frac{1}{0.15} + \frac{1}{0.15} - 1\right)} \\ &= \mathbf{206 \text{ W/m}^2}\end{aligned}$$

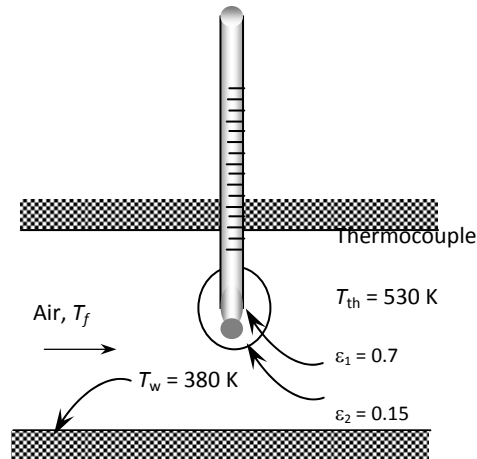


La température d'équilibre thermique de boucliers sont déterminés à partir de :

$$\begin{aligned}\varphi_{13} &= \frac{\sigma(T_1^4 - T_3^4)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_3} - 1\right)} \\ 206 \text{ W/m}^2 &= \frac{(5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)[(600 \text{ K})^4 - T_3^4]}{\left(\frac{1}{0.6} + \frac{1}{0.10} - 1\right)} \longrightarrow T_3 = \mathbf{549 \text{ K}}\end{aligned}$$

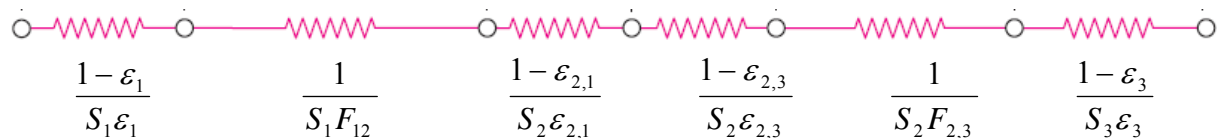
$$\begin{aligned}\varphi_{42} &= \frac{\sigma(T_4^4 - T_2^4)}{\left(\frac{1}{\varepsilon_4} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \\ 206 \text{ W/m}^2 &= \frac{(5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)[T_4^4 - (300 \text{ K})^4]}{\left(\frac{1}{0.15} + \frac{1}{0.7} - 1\right)} \longrightarrow T_4 = \mathbf{429 \text{ K}}\end{aligned}$$

VIII La température des gaz chauds dans un conduit est mesurée par un thermocouple. La température du gaz est à déterminer et sans rapport avec un écran de protection.



Hypothèses : Les surfaces sont opaques, diffuse et grises.

Le flux net échangé entre la surface du thermocouple et la surface du conduit est :



$$\phi_{\text{Thermocouple-w, Avec Ecran}} = \frac{\sigma(T_{th}^4 - T_w^4)}{\frac{1-\epsilon_1}{S_1\epsilon_1} + \frac{1}{S_1F_{12}} + \frac{1-\epsilon_{2,1}}{S_2\epsilon_{2,1}} + \frac{1-\epsilon_{2,3}}{S_2\epsilon_{2,3}} + \frac{1}{S_2F_{2,3}} + \frac{1-\epsilon_3}{S_3\epsilon_3}}$$

S_1 surface de la sonde
 $S_1 \approx S_2$ surface de l'écran
 S_3 surface du conduit

Notant que $F_{12}=1$, $F_{23}=1$ et S_1/S_3 tend vers zéro

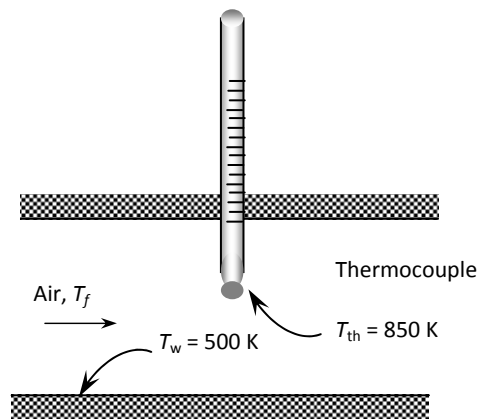
D'où :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{Thermocouple-écran}} &= \frac{\phi_{\text{Thermocouple-w, Avec Ecran}}}{S_1} = \frac{\sigma(T_{Th}^4 - T_w^4)}{\left(\frac{1}{\epsilon_1}\right) + \left(2\frac{1}{\epsilon_2} - 1\right)} \\ &= \frac{(5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)[(530 \text{ K})^4 - (380 \text{ K})^4]}{\left(\frac{1}{0.7}\right) + \left(2\frac{1}{0.15} - 1\right)} \\ &= 239.2 \text{ W/m}^2 \end{aligned}$$

A l'équilibre thermique la densité de flux échangée par le thermocouple par convection est égale à celle échangée par rayonnement.

$$\begin{aligned} \phi_{\text{convection, Thermocouple}} &= \phi_{\text{rayonnement, thermocouple}} \\ h(T_{gaz} - T_{th}) &= 239.2 \text{ W/m}^2 \\ 120 \text{ W/m}^2 \cdot \text{°C}(T_{gaz} - 530) &= 239.2 \text{ W/m}^2 \longrightarrow T_{gaz} = \mathbf{531.99 \text{ K}} \end{aligned}$$

Sans écran du thermocouple la température du gaz est :



$$T_{gaz} = T_{th} + \frac{\varepsilon_{th} \sigma (T_{th}^4 - T_w^4)}{h}$$

$$= 530 \text{ K} + \frac{(0.7)(5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4)[(530 \text{ K})^4 - (380 \text{ K})^4]}{120 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}} = \mathbf{549.2 \text{ K}}$$

VI

- Calculer les facteurs de forme suivant (voir figure) : $F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33}$.

$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$ surfaces planes

Application de la Règle de Hottel : $F_{12} = \frac{S_1 + S_2 - S_3}{2S_1}$

$$F_{12} = \frac{S_1 + S_2 - S_3}{2S_1} = \frac{L_1 + L_2 - L_3}{2L_1} = \frac{0.5 + 0.3 - 0.4}{2 * 0.5} = \frac{0.4}{1} = 0.4$$

$$F_{13} = \frac{S_1 + S_3 - S_2}{2S_1} = \frac{L_1 + L_3 - L_2}{2L_1} = \frac{0.5 + 0.4 - 0.3}{2 * 0.5} = \frac{0.6}{1} = 0.6$$

$$F_{23} = \frac{S_2 + S_3 - S_{21}}{2S_2} = \frac{L_2 + L_3 - L_1}{2L_2} = \frac{0.3 + 0.4 - 0.5}{2 * 0.3} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

$$S_2 F_{23} = S_3 F_{32} \Rightarrow F_{32} = \frac{L_2}{L_3} F_{23} = \frac{0.3}{0.4} \frac{1}{3} = 0.25$$

$$S_2 F_{21} = S_1 F_{12} \Rightarrow F_{21} = \frac{L_1}{L_2} F_{12} = \frac{0.5}{0.3} 0.4 = \frac{2}{3}$$

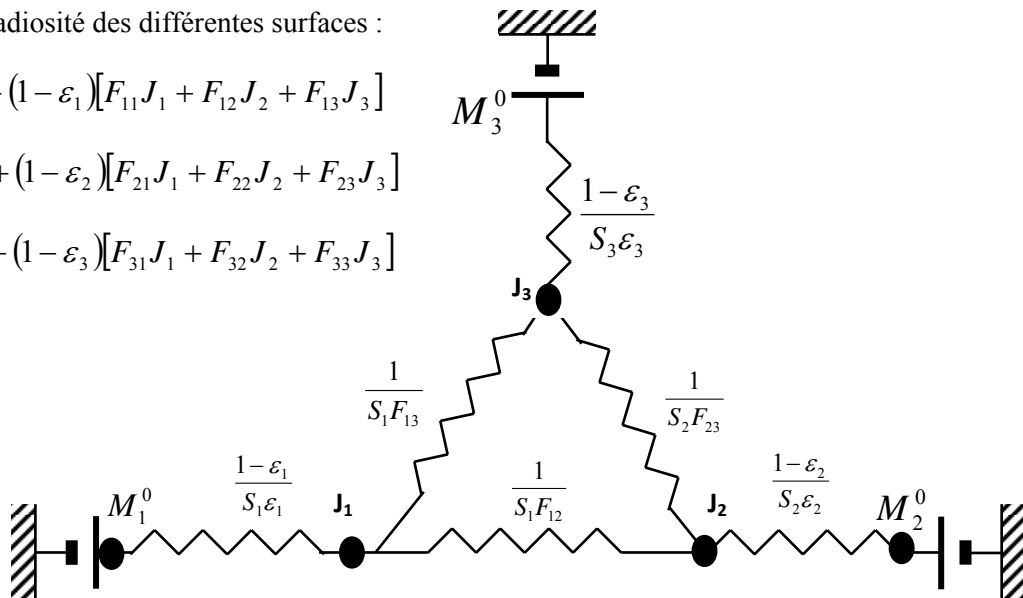
$$S_3 F_{31} = S_1 F_{13} \Rightarrow F_{31} = \frac{L_1}{L_3} F_{13} = \frac{0.5}{0.4} 0.6 = 0.75$$

- Radiosité des différentes surfaces :

$$J_1 = \varphi_1 + (1 - \varepsilon_1)[F_{11}J_1 + F_{12}J_2 + F_{13}J_3]$$

$$J_2 = \varphi_2 + (1 - \varepsilon_2)[F_{21}J_1 + F_{22}J_2 + F_{23}J_3]$$

$$J_3 = \varphi_3 + (1 - \varepsilon_3)[F_{31}J_1 + F_{32}J_2 + F_{33}J_3]$$



- Définition du flux net d'une surface 1 :

Le flux net de la surface 1 est égal à la différence entre celui le flux émis et celui absorbé.

$$\phi_{1,nette} = \frac{S_1 \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} (M_1^0 - J_1)$$

- Calcule du flux net de la surface 1.

$$\begin{pmatrix} -\varphi_1 \\ -\varphi_2 \\ -\varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & (1-\varepsilon_1)F_{12} & (1-\varepsilon_1)F_{13} \\ (1-\varepsilon_2)F_{21} & -1 & (1-\varepsilon_2)F_{23} \\ (1-\varepsilon_3)F_{31} & (1-\varepsilon_3)F_{32} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_1 \sigma^* T_1^4 \\ -\varepsilon_2 \sigma^* T_2^4 \\ -\varepsilon_3 \sigma^* T_3^4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.34 & 0.51 \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0.375 & 0.125 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 164 \\ 16466 \\ 16466 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.34 & -0.51 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{6} \\ -0.375 & -0.125 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

$$[K] = [M][J]$$

$$[M]^{-1}[K] = [M]^{-1}[M][J] = [I][J] = [J]$$

Après inversion de la matrice :

$$\begin{pmatrix} J_1 = 25536 \\ J_2 = 29934 \\ J_3 = 29785 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\phi_{1,nette}}{S_1} = \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} (M_1^0 - J_1) = -4477 \text{ Wm}^{-2}$$

La surface 1 reçoit de la chaleur.

Solution de L'exercice VI de du TD N°4

- Calculer les facteurs de forme suivant (voir figure) : $F_{11}, F_{12}, F_{13}, F_{21}, F_{22}, F_{23}, F_{31}, F_{32}, F_{33}$.

$F_{11} = F_{22} = F_{33} = 0$ surfaces planes

Application de la Règle de Hottel : $F_{12} = \frac{S_1 + S_2 - S_3}{2S_1}$

$$F_{12} = \frac{S_1 + S_2 - S_3}{2S_1} = \frac{L_1 + L_2 - L_3}{2L_1} = \frac{0.5 + 0.3 - 0.4}{2 * 0.5} = \frac{0.4}{1} = 0.4$$

$$F_{13} = \frac{S_1 + S_3 - S_2}{2S_1} = \frac{L_1 + L_3 - L_2}{2L_1} = \frac{0.5 + 0.4 - 0.3}{2 * 0.5} = \frac{0.6}{1} = 0.6$$

$$F_{23} = \frac{S_2 + S_3 - S_{21}}{2S_2} = \frac{L_2 + L_3 - L_1}{2L_2} = \frac{0.3 + 0.4 - 0.5}{2 * 0.3} = \frac{0.2}{0.6} = \frac{1}{3}$$

$$S_2 F_{23} = S_3 F_{32} \Rightarrow F_{32} = \frac{L_2}{L_3} F_{23} = \frac{0.3}{0.4} \frac{1}{3} = 0.25$$

$$S_2 F_{21} = S_1 F_{12} \Rightarrow F_{21} = \frac{L_1}{L_2} F_{12} = \frac{0.5}{0.3} 0.4 = \frac{2}{3}$$

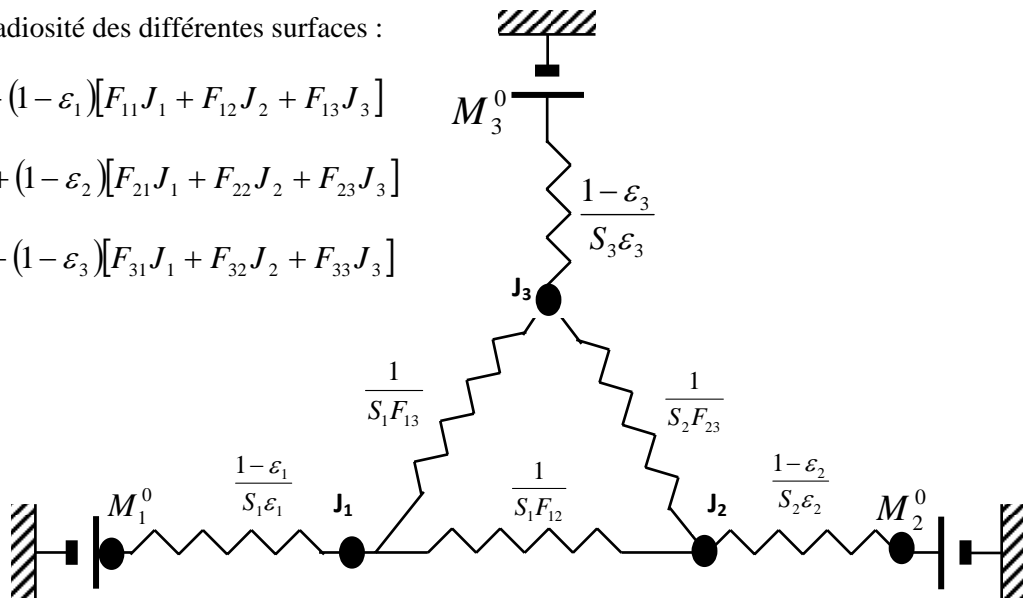
$$S_3 F_{31} = S_1 F_{13} \Rightarrow F_{31} = \frac{L_1}{L_3} F_{13} = \frac{0.5}{0.4} 0.6 = 0.75$$

- Radiosité des différentes surfaces :

$$J_1 = \varphi_1 + (1 - \varepsilon_1) [F_{11} J_1 + F_{12} J_2 + F_{13} J_3]$$

$$J_2 = \varphi_2 + (1 - \varepsilon_2) [F_{21} J_1 + F_{22} J_2 + F_{23} J_3]$$

$$J_3 = \varphi_3 + (1 - \varepsilon_3) [F_{31} J_1 + F_{32} J_2 + F_{33} J_3]$$



- Définition du flux net d'une surface 1 :

Le flux net de la surface 1 est égal à la différence entre celui le flux émis et celui absorbé.

$$\phi_{1,nette} = \frac{S_1 \varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} (M_1^0 - J_1)$$

- Calcule du flux net de la surface 1.

$$\begin{pmatrix} -\varphi_1 \\ -\varphi_2 \\ -\varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & (1-\varepsilon_1)F_{12} & (1-\varepsilon_1)F_{13} \\ (1-\varepsilon_2)F_{21} & -1 & (1-\varepsilon_2)F_{23} \\ (1-\varepsilon_3)F_{31} & (1-\varepsilon_3)F_{32} & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_1 \sigma^* T_1^4 \\ -\varepsilon_2 \sigma^* T_2^4 \\ -\varepsilon_3 \sigma^* T_3^4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.34 & 0.51 \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{6} \\ 0.375 & 0.125 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 164 \\ 16466 \\ 16466 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0.34 & -0.51 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{6} \\ -0.375 & -0.125 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}$$

$$[K] = [M][J]$$

$$[M]^{-1}[K] = [M]^{-1}[M][J] = [I][J] = [J]$$

Après inversion de la matrice :

$$\begin{pmatrix} J_1 = 25536 \\ J_2 = 29934 \\ J_3 = 29785 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\phi_{1,nette}}{S_1} = \frac{\varepsilon_1}{1 - \varepsilon_1} (M_1^0 - J_1) = -4477 \text{ Wm}^{-2}$$

La surface 1 reçoit de la chaleur.