

# **TRANSFERT DE CHALEUR**

**Volume 2 :**

**Travaux dirigés et exercices**

*<http://www.grandjean-bpa.com/therm/>*

**Bernard Grandjean ©**

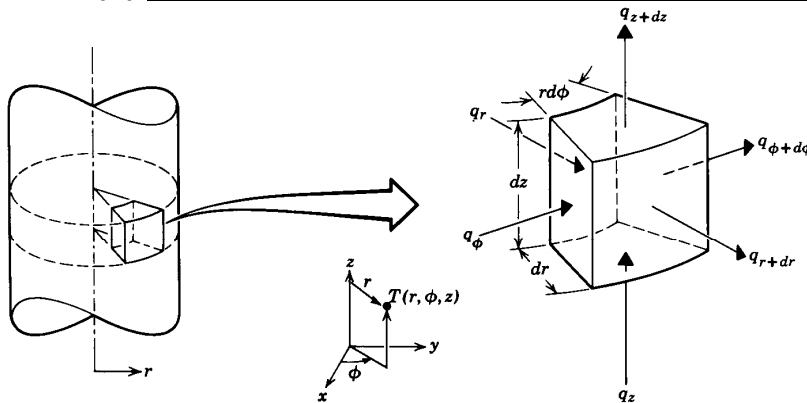
**2013**



## Travaux dirigés et exercices du chapitre 2

Pour ces deux exercices, l'approche est similaire à celle des notes de cours p 2.3 mais faites attention aux expressions du gradient (p 2.1) et ne simplifiez trop vite par  $r$  !

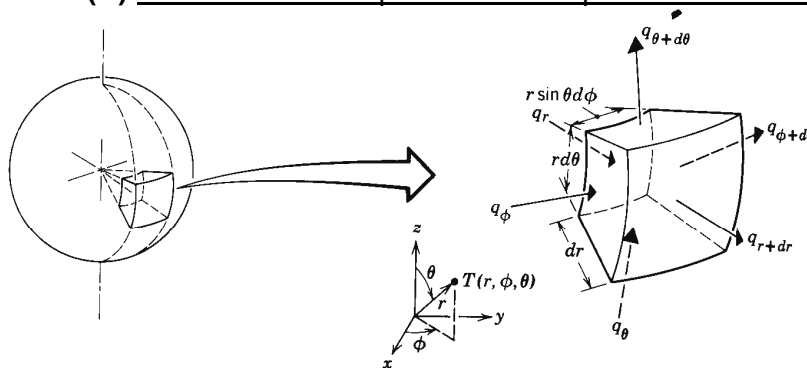
### EX-2.1 (S) Dérivation de l'équation thermique en coordonnées cylindriques



**Figure 2.9** Differential control volume,  $dr \cdot r d\phi \cdot dz$ , for conduction analysis in cylindrical coordinates  $(r, \phi, z)$ .

En utilisant le volume de contrôle ci-dessus  $\Delta r \Delta z r \Delta \phi$  et en supposant une génération de chaleur  $q'''$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ), faites le bilan de chaleur et retrouver l'équation de diffusion thermique en cylindrique.

### EX-2.2(S) Dérivation de l'équation thermique en coordonnées sphériques



**Figure 2.10** Differential control volume,  $dr \cdot r \sin \theta d\phi \cdot r d\theta$ , for conduction analysis in spherical coordinates  $(r, \phi, \theta)$ .

En utilisant le volume de contrôle ci-dessus  $\Delta r r \Delta \theta r \sin \theta \Delta \phi$  et en supposant une génération de chaleur  $q'''$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ), faites le bilan de chaleur et retrouver l'équation de diffusion thermique en sphérique

## Solutionnaire

### 2.1 Dérivation de l'équation thermique en coordonnées cylindriques

1) Hypothèses :  $T = T_{r,\phi,z}$

2) Volume de contrôle  $\Delta r \Delta z r \Delta \phi$

3) Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre – Ce qui sort + Ce qui est généré = Ce qui s'accumule

a) IN/OUT dans la direction r (au travers des faces perpendiculaires à l'axe des r):

$$\Delta z r \Delta \phi q_r'' \Big|_r - \Delta z r \Delta \phi q_r'' \Big|_{r+\Delta r}$$

b) IN/OUT dans la direction z (au travers des faces perpendiculaires à l'axe des z):

$$+ \Delta r r \Delta \phi q_z'' \Big|_z - \Delta r r \Delta \phi q_z'' \Big|_{z+\Delta z}$$

c) IN/OUT dans la direction  $\phi$  (au travers des faces perpendiculaires à l'axe des  $\phi$ ):

$$+ \Delta r \Delta z q_\phi'' \Big|_\phi - \Delta r \Delta z q_\phi'' \Big|_{\phi+\Delta \phi}$$

d) Terme de génération (dans le volume):

$$+ \Delta r \Delta z r \Delta \phi q'''$$

e) Terme d'accumulation (dans le volume) :

$$= \Delta r \Delta z r \Delta \phi \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

On divise par  $\Delta r \Delta z \Delta \phi$  et on fait tendre les incréments vers 0

Terme a :

$$\frac{\cancel{\Delta z} r \cancel{\Delta \phi} q_r'' \Big|_r - \cancel{\Delta z} r \cancel{\Delta \phi} q_r'' \Big|_{r+\Delta r}}{\Delta r \cancel{\Delta z} \cancel{\Delta \phi}} = \frac{r q_r'' \Big|_r - r q_r'' \Big|_{r+\Delta r}}{\Delta r}$$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r q_r'' \Big|_r - r q_r'' \Big|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = -\frac{\partial}{\partial r} (r q_r'')$$

Terme b :

$$\frac{\cancel{\Delta r} \cancel{r} \cancel{\Delta \phi} q_z''|_z - \cancel{\Delta r} \cancel{r} \cancel{\Delta \phi} q_z''|_{z+\Delta z}}{\cancel{\Delta r} \Delta z \cancel{\Delta \phi}} = \frac{r q_z''|_z - r q_z''|_{z+\Delta z}}{\Delta z} = r \frac{q_z''|_z - q_z''|_{z+\Delta z}}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{q_z''|_z - q_z''|_{z+\Delta z}}{\Delta z} = -\frac{\partial}{\partial z}(q_z'')$$

Terme c :

$$+ \frac{\cancel{\Delta r} \cancel{\Delta z} q_\phi''|_\phi - \cancel{\Delta r} \cancel{\Delta z} q_\phi''|_{\phi+\Delta \phi}}{\cancel{\Delta r} \cancel{\Delta z} \Delta \phi} = \frac{q_\phi''|_\phi - q_\phi''|_{\phi+\Delta \phi}}{\Delta \phi}$$

$$\lim_{\Delta \phi \rightarrow 0} \frac{q_\phi''|_\phi - q_\phi''|_{\phi+\Delta \phi}}{\Delta \phi} = -\frac{\partial}{\partial \phi}(q_\phi'')$$

Terme d :

$$+ \frac{\cancel{\Delta r} \cancel{\Delta z} r \cancel{\Delta \phi} q'''}{\cancel{\Delta r} \cancel{\Delta z} \cancel{\Delta \phi}} = r q'''$$

Terme e :

$$\frac{\cancel{\Delta r} \cancel{\Delta z} r \cancel{\Delta \phi} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}}{\cancel{\Delta r} \cancel{\Delta z} \cancel{\Delta \phi}} = r \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation s'écrit donc :

$$\left[ -\frac{\partial}{\partial r}(r q_r'') \right] - \left[ r \frac{\partial}{\partial z}(q_z'') \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial \phi}(q_\phi'') \right] + r q''' = r \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

La densité de flux s'exprime par la loi de Fourier en utilisant l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

$$\nabla = \delta_r \frac{\partial}{\partial r} + \delta_z \frac{\partial}{\partial z} + \delta_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$q_r'' = -k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad q_z'' = -k \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad q_\phi'' = -k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)$$

$$\left[ -\frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( -k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \right] - \left[ r \frac{\partial}{\partial z} \left( -k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \right] + r q''' = r \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

On divise par r:

$$\frac{\left[ -\frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( -k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \right] - \left[ r \frac{\partial}{\partial z} \left( -k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \right] + r q'''}{r} = \frac{r \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}}{r}$$

$$\left[ \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left( r \left( k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right)}{r} \right] + \left[ \cancel{r} \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \left[ \frac{\frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right)}{r} \right] + q''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

(commentaire: dans la dérivée  $\frac{\partial}{\partial \phi}$ , le terme  $\frac{1}{r}$  ne varie pas avec  $\phi$ )

et on obtient finalement:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + q''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

## 2.2 Dérivation de l'équation thermique en coordonnées sphériques

1) Hypothèses :  $T = T_{r,\phi,\theta}$

2) Volume de contrôle  $\Delta r \ r \Delta \theta \ r \sin \theta \Delta \phi$

3) Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre – Ce qui sort + Ce qui est généré = Ce qui s'accumule

a) IN/OUT dans la direction  $r$  (au travers des faces perpendiculaires à l'axe des  $r$ ):

$$r \Delta \theta \ r \sin \theta \Delta \phi q_r'' \Big|_r - r \Delta \theta \ r \sin \theta \Delta \phi q_r'' \Big|_{r+\Delta r}$$

b) IN/OUT dans la direction  $\phi$  (au travers des faces perpendiculaires à l'axe des  $\phi$ ):

$$+ \Delta r \ r \Delta \theta q_\phi'' \Big|_\phi - \Delta r \ r \Delta \theta q_\phi'' \Big|_{\phi+\Delta \phi}$$

c) IN/OUT dans la direction  $\theta$  (au travers des faces perpendiculaires à l'axe des  $\theta$ ):

$$+ \Delta r \ r \sin \theta \Delta \phi q_\theta'' \Big|_\theta - \Delta r \ r \sin \theta \Delta \phi q_\theta'' \Big|_{\theta+\Delta \theta}$$

d) Terme de génération (dans le volume):

$$+ \Delta r \ r \Delta \theta \ r \sin \theta \Delta \phi q'''$$

e) Terme d'accumulation (dans le volume) :

$$= \Delta r \ r \Delta \theta \ r \sin \theta \Delta \phi \ \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

On divise par  $\Delta r \ \Delta \theta \ \Delta \phi$  et on fait tendre les incréments vers 0

Terme a :

$$\frac{r \cancel{\Delta \theta} \ r \sin \theta \cancel{\Delta \phi} q_r'' \Big|_r - r \cancel{\Delta \theta} \ r \sin \theta \cancel{\Delta \phi} q_r'' \Big|_{r+\Delta r}}{\Delta r \ \cancel{\Delta \theta} \ \cancel{\Delta \phi}} = (\sin \theta) \frac{r^2 q_r'' \Big|_r - r^2 q_r'' \Big|_{r+\Delta r}}{\Delta r}$$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r^2 q_r'' \Big|_r - r^2 q_r'' \Big|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = -\frac{\partial}{\partial r} (r^2 q_r'')$$

Terme b :

$$\frac{\cancel{\Delta r} r \cancel{\Delta \theta} q''|_{\phi} - \cancel{\Delta r} r \cancel{\Delta \theta} q''|_{\phi+\Delta\phi}}{\cancel{\Delta r} \cancel{\Delta \theta} \Delta\phi} = \frac{r q''|_{\phi} - r q''|_{\phi+\Delta\phi}}{\Delta\phi} = r \frac{q''|_{\phi} - q''|_{\phi+\Delta\phi}}{\Delta\phi}$$

$$\lim_{\Delta\phi \rightarrow 0} \frac{q''|_{\phi} - q''|_{\phi+\Delta\phi}}{\Delta\phi} = -\frac{\partial}{\partial\phi}(q'')$$

Terme c :

$$\frac{\cancel{\Delta r} r \sin\theta \cancel{\Delta\phi} q''|_{\theta} - \cancel{\Delta r} r \sin\theta \cancel{\Delta\phi} q''|_{\theta+\Delta\theta}}{\cancel{\Delta r} \Delta\theta \cancel{\Delta\phi}} = \frac{r \sin\theta q''|_{\theta} - r \sin\theta q''|_{\theta+\Delta\theta}}{\Delta\theta} = r \frac{\sin\theta q''|_{\theta} - \sin\theta q''|_{\theta+\Delta\theta}}{\Delta\theta}$$

$$\lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\sin\theta q''|_{\theta} - \sin\theta q''|_{\theta+\Delta\theta}}{\Delta\theta} = -\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta q'')$$

Terme d :

$$+ \frac{\cancel{\Delta r} r \cancel{\Delta\theta} r \sin\theta \cancel{\Delta\phi} q'''}{\cancel{\Delta r} \cancel{\Delta\theta} \cancel{\Delta\phi}} = r^2 \sin\theta q'''$$

Terme e :

$$\frac{\cancel{\Delta r} r \cancel{\Delta\theta} r \sin\theta \cancel{\Delta\phi} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}}{\cancel{\Delta r} \cancel{\Delta\theta} \cancel{\Delta\phi}} = r^2 \sin\theta \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

L'équation s'écrit donc :

$$-\left[\sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(r^2 q_r)\right] - \left[r \frac{\partial}{\partial\phi}(q'')\right] - \left[r \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta q'')\right] + r^2 \sin\theta q''' = r^2 \sin\theta \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

La densité de flux s'exprime par la loi de Fourier en utilisant l'expression du gradient en coordonnées sphériques:

$$\nabla = \delta_r \frac{\partial}{\partial r} + \delta_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta} + \delta_\phi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi}$$

$$q_r = -k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad q_\theta = -k \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial\theta} \right) \quad q_\phi = -k \left( \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial T}{\partial\phi} \right)$$



**TDEX-2.7**

$$-\left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \left( -k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \right) \right] - \left[ r \frac{\partial}{\partial \phi} \left( -k \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \right) \right] - \left[ r \frac{\partial}{\partial \theta} \left( (\sin \theta) (-k) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right) \right]$$

$$+ r^2 \sin \theta q''' = r^2 \sin \theta \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\left[ \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \left( k \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \right) \right] + \left[ \cancel{r} \frac{1}{\cancel{r} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \left( \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \right) \right] + \left[ \cancel{r} \frac{1}{\cancel{r}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \sin \theta \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right) \right]$$

$$+ r^2 \sin \theta q''' = r^2 \sin \theta \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

On divise par  $r^2 \sin \theta$  :

$$\left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( k r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right] + \left[ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) \right] + \left[ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] + q''' = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$



**Travaux dirigés et exercices du chapitre 3:**  
*Conduction dans les solides en régime permanent*

**Exercices**

**Ex-3.1** Profils de température (à l'examen de 1997)

Une paroi de conductivité  $k$  sépare un fluide chaud à la température  $T_a$  d'un fluide froid à la température  $T_b$ . Sur chacune des faces, les coefficients de transfert de chaleur avec les fluides sont respectivement  $h_a$  et  $h_b$ . Pour un régime stationnaire, on étudie la variation de la température le long d'un axe perpendiculaire à la paroi. Pour chacune des trois situations suivantes A, B ou C, décrites ci-dessous, associer la figure qui lui correspond.

Cocher la case

A) la conductivité de la paroi est très élevée  
et dans ce cas, quel est le coefficient le plus élevé ( $h_a$  ou  $h_b$ ) ?

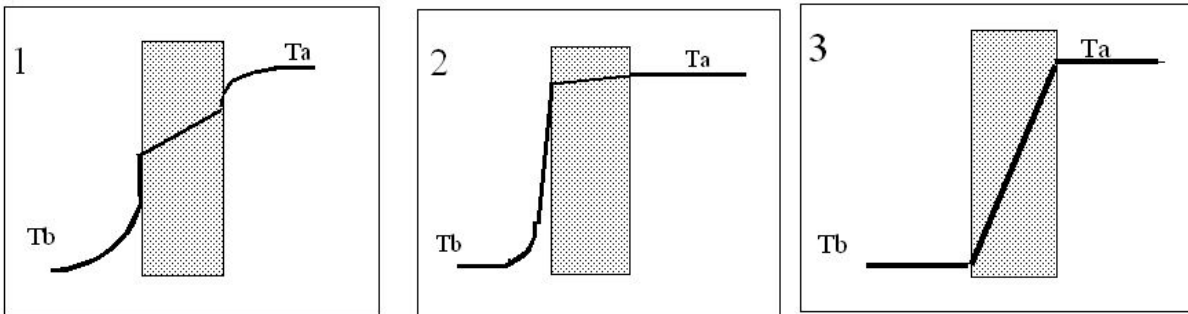
1  2  3

B) les deux coefficients  $h_a$  et  $h_b$  sont très élevés

1  2  3

C) les coefficients sont moyens mais  $h_a > h_b$

1  2  3



**Ex-3.2(S)** Mur avec différentes conditions frontières (voir figure notes de cours p 3.1)

Trouver l'expression du profil de température dans un mur d'épaisseur  $L$ , de conductivité  $k$  et dont la face à  $x=0$ , est soumise à un flux constant  $q''_0$  alors que l'autre à  $x=L$  échange sa chaleur par convection (coefficient  $h_F$ ) avec un fluide à une température  $T_F$ . (Refaire toute la démonstration: schéma, hypothèses, bilan, conditions frontières)

Réponse: 
$$T(x) = -\frac{q''_0}{k}x + q''_0 \left[ \frac{1}{h_F} + \frac{L}{k} \right] + T_F$$

**Ex-3.3** Épaisseur d'un isolant (à l'examen de sept. 1989)

Vous souhaitez isoler la paroi intérieure d'un mur d'une maison. Ce mur en brique, d'épaisseur  $L_B=0.10$  m, a une conductivité thermique  $k_B=0.72$  W/m<sup>2</sup>/C. En utilisant le concept de résistance thermique (on présentera un schéma du problème réel ainsi que le schéma correspondant des résistances thermiques), déterminez l'épaisseur de la couche d'isolant (laine de verre,  $k_I=0.043$  W/m/C) à installer pour limiter les pertes thermiques à une valeur de 50 W/m<sup>2</sup> dans les conditions suivantes d'utilisation:

- température intérieure de la pièce  $T_1 = 20^\circ\text{C}$
- température extérieure de l'air  $T_2 = -20^\circ\text{C}$
- coefficient de transfert de chaleur dans la pièce  $h_1=10$  W/m<sup>2</sup>/C
- coefficient de transfert de chaleur à l'extérieur  $h_2=100$  W/m<sup>2</sup>/C

Quelles seraient les pertes thermiques sans isolation ?  
Réponses: épaisseur d'isolant = 2.37 cm,  $q''=161$  W/m<sup>2</sup>

## Travaux dirigés No 1

### Ex-3.4(S) Conduction avec génération de chaleur (à l'examen final 1991)

Une sphère métallique de rayon  $R$  et de conductivité  $k$  est le siège d'une génération de chaleur uniforme  $q'''$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ). Cette sphère échange avec l'environnement à la température  $T_E$  et le coefficient de transfert de chaleur à la surface vaut  $h$ .

- Déterminer l'expression du profil de température dans la bille métallique.
- Sans utiliser l'expression du profil obtenue en a) et par un raisonnement indépendant, retrouver la température à la surface.

Réponse a):  $T(r) = -\frac{q'''}{6k}(r^2 - R^2) + \frac{Rq'''}{3h} + T_E$

### Ex-3.5 Pertes thermiques d'un tube isolé (à l'examen de sept. 1990)

Un fluide, à une température  $T_F=150^\circ\text{C}$ , s'écoule dans une tube d'acier (rayon intérieur  $r_1=0.023$  m, rayon extérieur  $r_2=0.026$  m) de conductivité thermique  $k_A=12$   $\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$ . Le coefficient de transfert de chaleur,  $h_F$  entre le fluide et la paroi interne du tube est égal à  $450$   $\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$ . Ce tube est recouvert d'un isolant (rayon externe  $r_3=0.050$  m) de conductivité thermique  $k_{\text{ISO}}=0.05$   $\text{W}/\text{m}\cdot\text{K}$ . L'air environnant est à la température  $T_{\text{AIR}}=20^\circ\text{C}$ , et le coefficient d'échange à la surface de l'isolant vaut  $h_{\text{AIR}}=5$   $\text{W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$ .

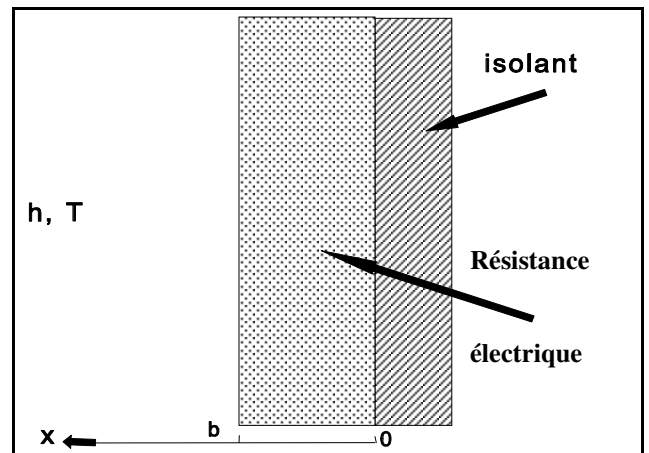
- Faites le schéma de ce problème et, en utilisant le concept de résistance thermique, faites le schéma de l'analogie électrique.
- Trouvez l'expression des pertes thermiques, par unité de longueur de tube, pour les conditions indiquées ci-dessus.
- L'augmentation de l'épaisseur d'isolation réduirait-elle les pertes thermiques ?.

(PS: on négligera les résistances de contact) Réponses: b) pertes= 47.5  $\text{W}/\text{m}$  c) oui, car  $(dq/dr_3) < 0$

### Ex-3.6 Profil dans une résistance électrique (à l'examen de 1997)

Une résistance électrique (épaisseur  $b$ , largeur  $W$ , hauteur  $L$ ) est isolée parfaitement sur une de ses faces. Sur l'autre face, il y a échange par convection (avec un coefficient  $h$ ) avec l'air environnant (à la température  $T_\infty$ ). En régime permanent, on suppose que la conductivité  $k$  de la résistance est constante et que la génération de chaleur par effet Joule est uniforme et vaut  $q'''$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ).

- Déterminer l'expression du profil de température dans la résistance électrique (on négligera les effets de bouts).
- Sans utiliser l'expression du profil obtenue en a), trouver la température sur la surface en contact avec l'air.
- A quelle profondeur dans la plaque électrique observe-t-on la température maximale ? Tracer sur la figure ci-dessus la forme du profil de température dans la plaque.



Réponse a):  $T(x) = -\frac{q'''}{2k}x^2 + q'''b\left(\frac{1}{h} + \frac{b}{2k}\right) + T_\infty$

## Travaux dirigés No 2

### *Conduction dans les ailettes*

#### Ex-3.7(S) Température de l'anse d'un chaudron

L'anse d'un chaudron est une tige métallique de 10 mm de rayon et de 0.5 m de longueur. Les deux parties inférieures de l'anse sont soudées au chaudron qui est à une température de 90°C. Sachant que le coefficient de transfert de chaleur avec l'air ambiant est de 35 W/(m².K) et que l'air est à 30°C, déterminer la température au milieu de l'anse si la tige est faite:

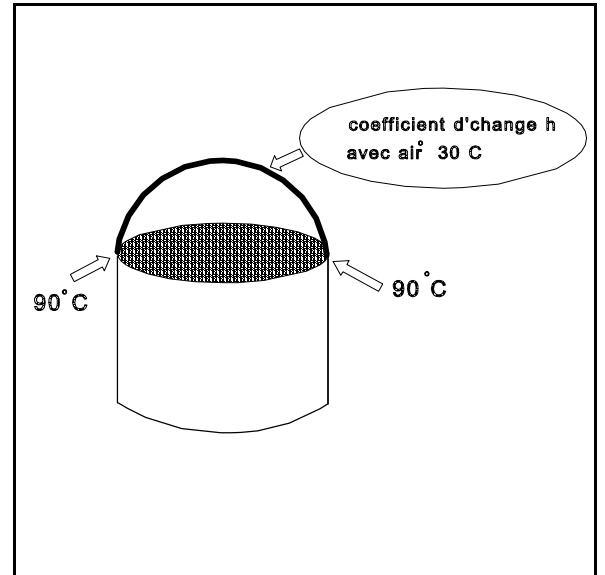
- en cuivre,  $k=385$  W/(m.K)
- en acier,  $k=44$  W/(m.K)

(on pourra négliger la courbure de l'anse et le gradient radial de température)

*réponses: 66.9 et 35.1 °C*

Travail complémentaire:

- Avec Excel par exemple, étudier l'effet de  $h$  et de  $k$  sur la température au milieu de l'anse du chaudron ( $T_C$ ). Tracer les graphes  $T_C$  vs  $h$  ( $h$  variant entre 1 et 100 W/m².K) et  $T_C$  vs  $k$  ( $k$  variant de 10 à 400 W/m.K). Commentez.



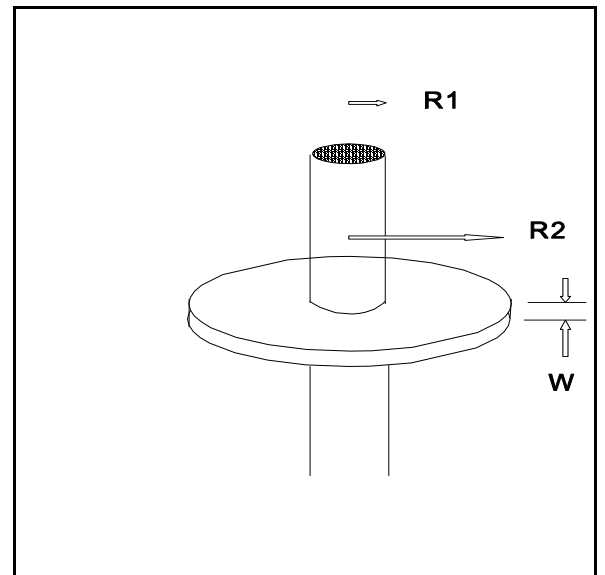
#### Ex-3.8(S) Ailette circulaire (à l'examen de 1989)

Une ailette circulaire d'épaisseur  $W$  et de rayon extérieur  $R_2$  est installée sur un tube de rayon externe  $R_1$  dont la surface est à la température  $T_1$ . L'air environnant est à la température  $T_\infty$  et le coefficient de convection à la surface de l'ailette est  $h$ .

- Faites un bilan de chaleur sur un élément de volume approprié de l'ailette et obtenez l'équation différentielle que doit satisfaire la température de cette ailette.  
(remarque: on ne demande pas d'intégrer cette équation)
- Quelles sont les différentes conditions frontières possibles ?
- Si on appelle  $q_C$ , les pertes de chaleur (en watts) au travers de cette ailette, donnez alors les expressions du rendement et de l'efficacité de l'ailette.

*Réponse a:*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2h}{kW} (T - T_\infty) = 0$$

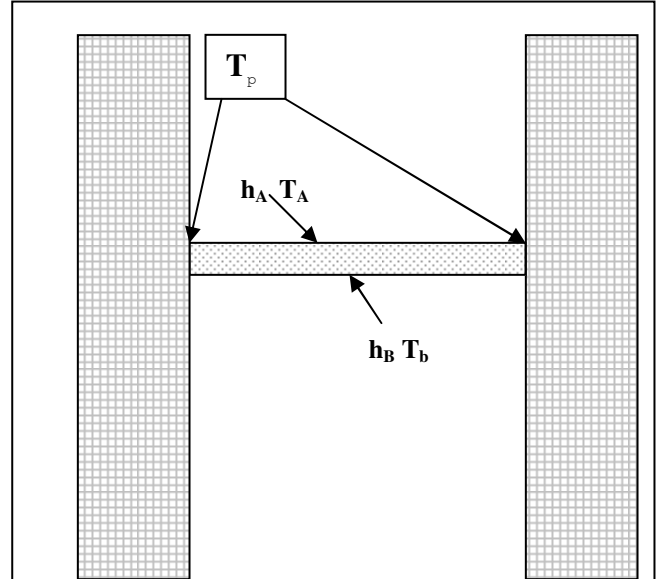


## Exercice

**Ex-3.9(S) Profil de température dans une ailette fixée entre deux parois**

Une ailette de largeur  $W$ , d'épaisseur  $t$  et de longueur  $L$  est fixée entre deux pièces métalliques dont les températures sont identiques et égales à  $T_p$ . Les deux faces de l'ailette ne sont pas soumises aux mêmes conditions. La face supérieure de l'ailette est soumise à un courant d'air à une température  $T_A$  et le coefficient d'échange vaut  $h_A$ . La face inférieure quant à elle, est soumise à un autre courant d'air à la température  $T_B$  et le coefficient d'échange vaut  $h_B$ . Afin de déterminer le profil axial de température,

(attention: on supposera que les extrémités latérales sont isolées et les régions A et B sont séparées; la convection ne se fait que sur les faces horizontales ).



- Faites un bilan de chaleur sur un volume approprié. Posez clairement vos hypothèses et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température.
- Posez les conditions frontières.
- Obtenez l'expression générale du profil de température ainsi que les relations que doivent vérifier les constantes d'intégration figurant dans cette expression

Réponse a:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \left[ T \frac{h_A + h_B}{kt} - \frac{h_A T_A + h_B T_B}{kt} \right] = 0$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} - [\alpha T - \beta] = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \frac{d^2U}{dx^2} - U = 0$$

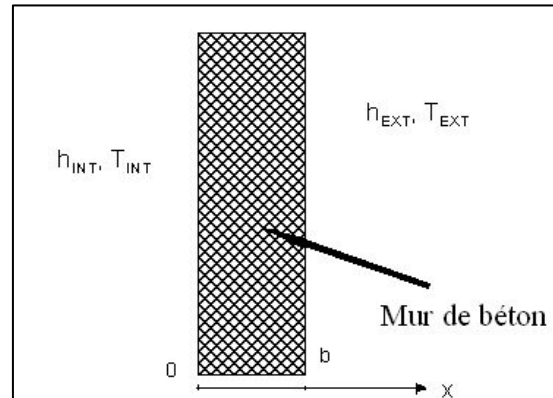
avec  $\alpha = \frac{h_A + h_B}{kt}$ ,  $\beta = \frac{h_A T_A + h_B T_B}{kt}$  et  $U = \alpha T - \beta$

**Travaux dirigés No 3**  
**Exemple d'examen No 1**

**GCH-18243 Examen partiel No 1 - 25 pts      Aucun document sauf 1 feuille (recto-verso)**  
**19 Septembre 2003, Durée 110 min**

**I) Profil dans un mur de béton ( 6 pts)**

Un mur de béton (épaisseur  $b$ , largeur  $W$ , hauteur  $L$ , conductivité  $k$ ) sépare une pièce à la température  $T_{INT}$ , de l'extérieur dont la température est  $T_{EXT}$ . Les coefficients de transfert de chaleur sur les faces intérieure et extérieure de ce mur sont respectivement  $h_{INT}$  et  $h_{EXT}$



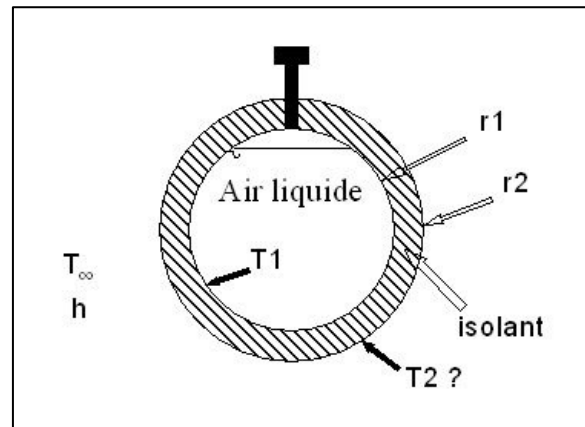
- a) Faites un bilan de chaleur sur un volume de contrôle pertinent et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température dans le mur (on négligera les effets de bouts) (2 pts)
- b) Intégrer cette équation, poser les conditions frontières et déterminer l'expression du profil de température dans le mur (4. pts)

Réponse

$$T(x) = C_1 x + C_2; \quad C_2 = T_{INT} + \frac{k C_1}{h_{INT}}; \quad C_1 = \frac{(T_{EXT} - T_{INT})}{\left( \frac{k}{h_{INT}} + b + \frac{k}{h_{EXT}} \right)}$$

**II) Stockage d'air liquide dans un réservoir sphérique (6 pts)**

Un réservoir sphérique de rayon  $r_1 = 1.5$  m, contient de l'air liquide. Le réservoir est isolé par une épaisseur de 0.05 m d'un matériau isolant de conductivité  $k = 0.05$  W/(m.K). On peut supposer que la paroi externe du réservoir reste à température constante  $T_1 = 80$  K. A la surface de l'isolant, il y a échange par convection avec l'air ambiant à la température  $T_\infty = 283$  K et le coefficient de convection  $h$  est égal à 18 W/(m<sup>2</sup>.K).



- a) En utilisant, le concept des résistances thermiques, calculer la température  $T_2$ , à la surface de l'isolant en contact avec l'air. (4.5 pts) (On négligera la résistance de contact paroi-isolant)  
(réponse 272.6K)

- b) Est-ce que l'épaisseur de l'isolant vous paraît suffisante ? Commenter. (1.5 pt)

On rappelle les expressions des résistances pour la sphère creuse:

$$R_{conduction \text{ sphère creuse}} = \frac{1}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$R_{convection \text{ sur une sphère}} = \frac{1}{4\pi h r_2^2}$$

### III) Température d'un fil électrique ( 3 pts)

Un fil électrique de 1 mm de diamètre est dénudé sur une longueur de 1 m. Calculer la température de ce fil (température qu'on supposera uniforme), sachant que la puissance générée par effet joule est de 1.5 watt/m, que la température de l'air est de 20 °C et que le coefficient de transfert de chaleur à la surface du fil avec l'air environnant vaut 12. W/m<sup>2</sup>.C.

Réponse : 59.8

### IV) Quiz (2 pts) Cocher la bonne réponse:

- Pour la construction d'une ailette, il est préférable d'utiliser un matériau qui à un faible conductivité. VRAI  FAUX
- Dans une ailette, l'augmentation de la conductivité favorise la diminution du gradient de la température. VRAI  FAUX
- Dans un bilan de chaleur associé à un problème de conduction, si il y a un terme de génération de chaleur alors le terme d'accumulation est non nul. VRAI  FAUX
- À l'interface entre deux solides, plus la résistance de contact est faible, plus la différence entre les températures de ces deux surfaces est grande. VRAI  FAUX

Réponses : FVFF

### V) Ailette en forme de cylindre creux (8 pts)

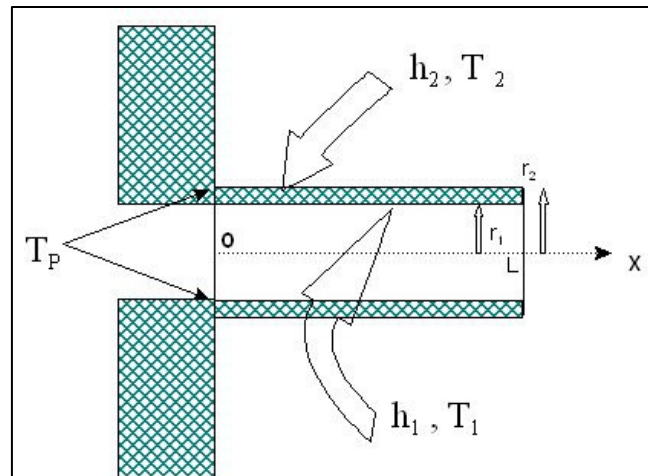
Une ailette, de longueur L, a la forme d'un cylindre creux. Sa base est fixée sur une paroi à la température  $T_p$ . La face intérieure du cylindre est refroidie par de l'air à la température  $T_1$  avec un coefficient de convection  $h_1$  alors que la face extérieure est refroidie avec un air à la température  $T_2$  avec un coefficient de convection  $h_2$ .

On supposera que le flux de chaleur axial à  $x=L$  sur l'extrémité de l'ailette est négligeable.

a) Faites un bilan de chaleur sur un élément de volume approprié de l'ailette et obtenez l'équation différentielle que doit satisfaire la température de cette ailette. (4.5 pts)

b) Quelles sont les conditions frontières ? (1 pt)

c) Obtenez l'expression du profil de température. (2.5 pts)





**Solutionnaire Ex-3.2 Mur avec différentes conditions frontières**

Trouver l'expression du profil de température dans un mur d'épaisseur  $L$  ( de surface  $A$ ), de conductivité  $k$  et dont la face à  $x=0$ , est soumise à un flux constant  $q_0''$  alors que l'autre à  $x=L$  échange sa chaleur par convection (coefficient  $h_F$ ) avec un fluide à une température  $T_F$ . (Refaire toute la démonstration: schéma, hypothèses, bilan, conditions frontières)

1) Hypothèses :

$$T=T(x) \quad k=\text{Constante} \quad \text{régime permanent} \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

2) Volume de contrôle  $A \Delta x$

3) Bilan sur le volume de contrôle

$$\text{Ce qui rentre} - \text{Ce qui sort} + \text{Ce qui est généré} = \text{Ce qui s'accumule}$$

$$\text{Ce qui rentre} - \text{Ce qui sort} = 0$$

$$A q_x''|_x - A q_x''|_{x+\Delta x} = 0$$

On divise par  $A\Delta x$  et on fait tendre  $\Delta x$  vers 0

$$\frac{A q_x''|_x - A q_x''|_{x+\Delta x}}{A\Delta x} = \frac{q_x''|_x - q_x''|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q_x''|_x - q_x''|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{\partial q_x''}{\partial x} = 0$$

On intègre une première fois :

$$-\frac{\partial q_x''}{\partial x} = 0 \Rightarrow q_x'' = C_1$$

On utilise la loi de Fourier

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} = C_1$$

Et on intègre une deuxième fois :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{C_1}{k} \Rightarrow T_x = \left( -\frac{C_1}{k} \right) x + C_2 \quad (1)$$

Les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$  sont obtenues en écrivant les conditions frontières

$$\text{CF1 : } \hat{a} x = 0 \Rightarrow q_x''|_{x=0} = q_0'' \Rightarrow q_x''|_{x=0} = \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = C_1 = q_0''$$

$$\text{CF2 : } \hat{a} x = L \Rightarrow q_x''|_{x=L} = h_F (T_{x=L} - T_F)$$

**TDEX-3.8**

$$q_x'' \Big|_{x=L} = \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=L} = C_1 = q_0'' = h_F \left( \left[ \left( -\frac{C_1}{k} \right) x + C_2 \right]_{x=L} - T_F \right)$$
$$q_0'' = h_F \left\{ \left( -\frac{q_0''}{k} \right) L + C_2 - T_F \right\}$$
$$\Rightarrow C_2 = q_0'' \left[ \frac{1}{h_F} + \frac{L}{k} \right] + T_F$$

Et en remplaçant  $C_1$  et  $C_2$  dans (1), on obtient l'expression de la variation de la température dans le mur :

$$T_x = -\frac{q_0''}{k} x + q_0'' \left[ \frac{1}{h_F} + \frac{L}{k} \right] + T_F$$

### Solutionnaire Ex-3.4 Conduction avec génération de chaleur

Une sphère métallique de rayon R et de conductivité k est le siège d'une génération de chaleur uniforme  $q'''$  ( $W/m^3$ ). Cette sphère échange avec l'environnement à la température  $T_E$  et le coefficient de transfert de chaleur à la surface vaut h.

a) Déterminer l'expression du profil de température dans la bille métallique.

1) Hypothèses :

$$T=T(r) \quad k=\text{Constante} \quad q''' = \text{Constante régime permanent} \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

2) Volume de contrôle  $4\pi r^2 \Delta r$

3) Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre – Ce qui sort + Ce qui est généré = Ce qui s'accumule

$$4\pi r^2 q_r|_r - 4\pi r^2 q_r|_{r+\Delta r} + 4\pi r^2 \Delta r q''' = 0$$

On divise par  $4\pi \Delta r$  et on fait tendre  $\Delta r$  vers 0

$$\frac{\cancel{4\pi} r^2 q_r|_r - \cancel{4\pi} r^2 q_r|_{r+\Delta r}}{\cancel{4\pi} \Delta r} + \frac{\cancel{4\pi} r^2 \cancel{\Delta r} q'''}{\cancel{4\pi} \cancel{\Delta r}} = 0$$

Par définition :  $\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r^2 q_r|_r - r^2 q_r|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = -\frac{\partial}{\partial r}(r^2 q_r)$  on obtient donc :

$$-\frac{\partial}{\partial r}(r^2 q_r) + r^2 q''' = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2 q_r) = r^2 q'''$$

On intègre une première fois:  $(r^2 q_r) = \frac{r^3}{3} q''' + C_1$

On exprime alors la densité de flux par la loi de Fourier  $q_r = -k \frac{\partial T}{\partial r}$  :

$$r^2 \left( -k \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{r^3}{3} q''' + C_1 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{\frac{r^3}{3} q''' + C_1}{k r^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{r^{\cancel{3}}}{\cancel{3}} \frac{q'''}{3k} - \frac{C_1}{k r^2} = -\frac{q'''}{3k} r - \frac{C_1}{k r^2}$$

et on intègre une deuxième fois pour obtenir la variation T(r):

$$\boxed{T_r = \left( -\frac{q'''}{3k} \right) \frac{r^2}{2} - \frac{C_1}{k} \left( -\frac{1}{r} \right) + C_2} \quad (1)$$

On utilise les conditions frontières (ou de symétrie) pour déterminer les constantes d'intégration  $C_1$  et  $C_2$

CF1: à  $r=0$  la température est finie, ou encore  $\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$

$$T = \left( -\frac{q'''}{3k} \right) \frac{r^2}{2} + C_2 \quad (2)$$

CF2: à  $r=R$ , la chaleur qui arrive à la surface par conduction sort par convection :

$$q_r'' \Big|_{r=R} = -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = h(T_{r=R} - T_E)$$

et on remplace alors T par l'expression (2):

$$q_r'' \Big|_{r=R} = -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = -k \frac{\partial \left[ \left( -\frac{q'''}{3k} \right) \frac{r^2}{2} + C_2 \right]}{\partial r} \Big|_{r=R} = -k \left( -\frac{q'''}{3k} \frac{2r}{2} \right) \Big|_{r=R} = \frac{q'''}{3} R = h \left( \left[ \left( -\frac{q'''}{3k} \right) \frac{r^2}{2} + C_2 \right]_{r=R} - T_E \right)$$

$$\frac{q'''}{3} R = h \left( \left( -\frac{q'''}{3k} \right) \frac{R^2}{2} + C_2 - T_E \right) \Rightarrow \frac{q'''}{3h} R + \left( \frac{q'''}{3k} \right) \frac{R^2}{2} + T_E = C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{q'''R}{3h} + \frac{q'''R^2}{6k} + T_E}$$

En remplaçant  $C_1$  et  $C_2$  dans (1), l'expression de la variation de la température s'écrit alors :

$$T_r = \left( -\frac{q'''}{6k} \right) (r^2 - R^2) + \frac{q'''R}{3h} + T_E \quad (3)$$

**b) Sans utiliser l'expression du profil obtenue en a) et par un raisonnement indépendant retrouver la température à la surface.**

Le bilan de chaleur sur la sphère en entier s'écrit :

$$E_{in} - E_{out} + E_{génééré} = E_{accumulé}$$

$$E_{in} = 0 \quad E_{accumulé} = 0$$

$$E_{out} = 4\pi R^2 h (T_{r=R} - T_E) \quad \text{et} \quad E_{génééré} = \frac{4}{3} \pi R^3 q'''$$

$$\Rightarrow -4\pi R^2 h (T_{r=R} - T_E) + \frac{4}{3} \pi R^3 q''' = 0$$

$$T_{r=R} = T_E + \frac{\left( \frac{4}{3} \pi R^3 q''' \right)}{(4\pi R^2 h)} = T_E + \frac{q'''R}{3h}$$

Cette expression est identique à celle obtenue avec l'équation (3) lorsque  $r=R$ .

**Solutionnaire Ex-3.7 Température de l'anse d'un chaudron**

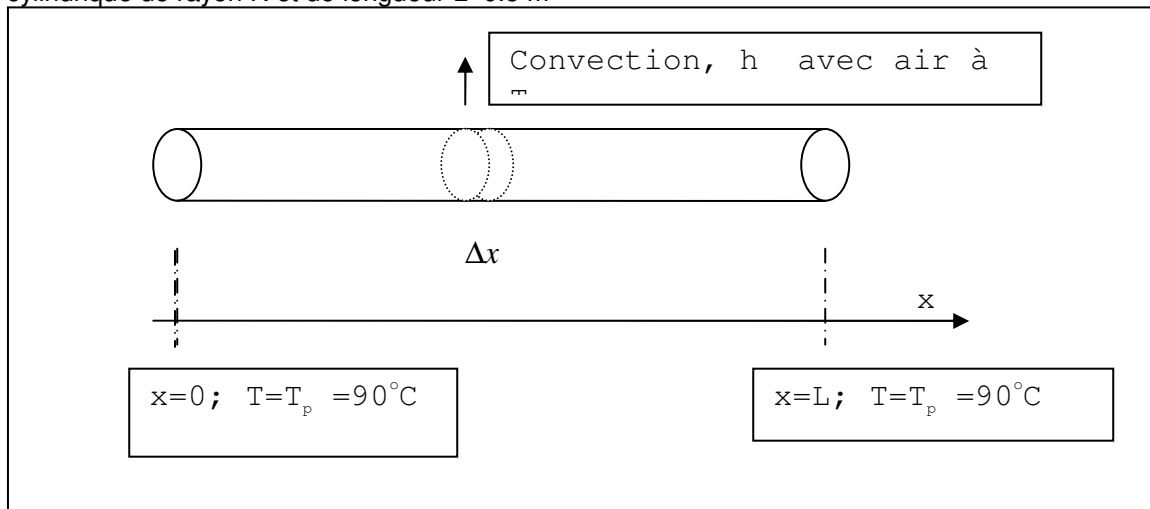
L'anse d'un chaudron est une tige métallique de 10 mm de rayon et de 0.5 m de longueur. Les deux parties inférieures de l'anse sont soudées au chaudron qui est à une température de  $90^{\circ}\text{C}$ . Sachant que le coefficient de transfert de chaleur avec l'air ambiant est de  $35 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$  et que l'air est à  $30^{\circ}\text{C}$ , déterminer la température au milieu de l'anse si la tige est faite:

- a) en cuivre,  $k=385 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$
- b) en acier,  $k=44 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$

(on pourra négliger la courbure de l'anse et le gradient radial de température)

Hypothèses :

On néglige la courbure de l'anse et le problème à résoudre est celui de la variation dans une tige cylindrique de rayon  $R$  et de longueur  $L=0.5 \text{ m}$



$T=T(x)$        $k=\text{Constante}$        $E_g=0$       régime permanent       $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Volume de contrôle

$$\pi R^2 \Delta x$$

Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre (conduction) – Ce qui sort (conduction + convection à la surface de la tige) = 0

$$\pi R^2 q_x'' \Big|_x - \pi R^2 q_x'' \Big|_{x+\Delta x} - 2\pi R \Delta x h (T_x - T_\infty) = 0$$

On divise par  $\pi R^2 \Delta x$  et on fait tendre  $\Delta x$  vers

$$\frac{\pi R^2 q_x''|_x - \pi R^2 q_x''|_{x+\Delta x} - 2\pi R \Delta x h(T_x - T_\infty)}{\pi R^2 \Delta x} = 0$$

$$\frac{q_x''|_x - q_x''|_{x+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{2h}{R}(T_x - T_\infty) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q_x''|_x - q_x''|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{\partial q_x''}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial q_x''}{\partial x} - \frac{2h}{R}(T_x - T_\infty) = 0$$

$$q_x'' = -k \frac{\partial T_x}{\partial x} \Rightarrow -\frac{\partial \left( -k \frac{\partial T_x}{\partial x} \right)}{\partial x} - \frac{2h}{R}(T_x - T_\infty) = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} - \frac{2h}{kR}(T_x - T_\infty) = 0 \quad (1)$$

Faisons le changement de variable suivant

$$\theta = T_x - T_\infty \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial T_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2}$$

et posons  $m^2 = \frac{2h}{kR}$

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} - \frac{2h}{kR}(T_x - T_\infty) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - m^2 \theta = 0 \quad (2)$$

L'équation différentielle (2) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants) dont le polynôme caractéristique  $r^2 - m^2 = 0$  admet deux racines  $+m$  et  $-m$ . La solution de (2) est donc :

$$\theta = (T_x - T_\infty) = C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \quad (S1)$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont obtenues en écrivant les conditions frontières :

$$\text{à } x=0 \quad T_x|_{x=0} = T_p \Rightarrow \theta_{x=0} = (T_p - T_\infty) = \theta_p = C_1 e^{m \cdot 0} + C_2 e^{-m \cdot 0}$$

$$\Rightarrow C_1 + C_2 = \theta_p \quad (a)$$

$$\text{à } x=L \quad T_x|_{x=L} = T_p \Rightarrow \theta_{x=L} = (T_p - T_\infty) = \theta_p = C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL}$$

$$\Rightarrow C_1 e^{mL} + C_2 e^{-mL} = \theta_p \quad (b)$$

**TDEX-3.13**

La résolution du système des deux équations a) et b) donne les expressions des constantes  $C_1$  et  $C_2$  :

$$C_1 + C_2 = \theta_p \Rightarrow \boxed{C_1 = \theta_p - C_2} \quad (S2)$$

on remplace  $C_1$  dans b)

$$(\theta_p - C_2)e^{mL} + C_2e^{-mL} = \theta_p \Rightarrow C_2(e^{-mL} - e^{mL}) = \theta_p(1 - e^{mL})$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{\theta_p(1 - e^{mL})}{(e^{-mL} - e^{mL})}} \quad (S3)$$

Application numérique :

$R=0.01$  m,  $L=.05$  m,  $h= 35$  W/m<sup>2</sup>.K  $T_\infty= 30$  °C;  $T_p= 90$  °C

$k=385$   $C_2= 53.638$   $C_1= 6.361$  au centre à  $z=L/2$   $T=66.9$  °C

$k=44$   $C_2= 58.890$   $C_1= 0.109$  au centre à  $z=L/2$   $T=35.1$  °C

**Solutionnaire Ex-3.8 Ailette circulaire**

Une ailette circulaire d'épaisseur  $W$  et de rayon externe  $R_2$  est installée sur un tube de rayon externe  $R_1$  dont la surface est à la température  $T_1$ . L'air environnant est à la température  $T_\infty$  et le coefficient de convection à la surface de l'ailette est  $h$ .

- Faites un bilan de chaleur sur un élément de volume approprié de l'ailette et obtenez l'équation différentielle que doit satisfaire la température de cette ailette.  
(remarque: on ne demande pas d'intégrer cette équation)
- Quelles sont les différentes conditions frontières possibles ?
- Si on appelle  $q_c$ , les pertes de chaleur (en watts) au travers de cette ailette, donnez alors les expressions du rendement et de l'efficacité de l'ailette.

a) Hypothèses : On néglige la variation de la température dans l'épaisseur ( $W$ ) de l'ailette

$$T=T(r) \quad k=\text{Constante} \quad E_g=0 \quad \text{régime permanent} \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Volume de contrôle  $2\pi r W \Delta r$

Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre (conduction) – Ce qui sort (conduction+convection dessus et dessous)=0

$$2\pi r W q_r'' \Big|_r - 2\pi r W q_r'' \Big|_{r+\Delta r} - 2 [2\pi r \Delta r h (T_r - T_\infty)] = 0$$

On divise par  $2\pi W \Delta r$  et on fait tendre  $\Delta r$  vers

$$\frac{2\pi r W q_r'' \Big|_r - 2\pi r W q_r'' \Big|_{r+\Delta r} - 4\pi r \Delta r h (T_r - T_\infty)}{2\pi W \Delta r} = 0$$

$$\frac{r q_r'' \Big|_r - r q_r'' \Big|_{r+\Delta r}}{\Delta r} - \frac{2hr}{W} (T_r - T_\infty) = 0$$

$$\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r q_r'' \Big|_r - r q_r'' \Big|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = -\frac{\partial r q_r''}{\partial r}$$

$$-\frac{\partial r q_r''}{\partial r} - \frac{2hr}{W} (T_r - T_\infty) = 0$$



**TDEX-3.15**

$$q_r'' = -k \frac{\partial T_r}{\partial r} \Rightarrow -\frac{\partial r q_r''}{\partial r} = -\frac{\partial \left[ (r) \left( -k \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) \right]}{\partial r} = k(r) \left( \frac{\partial^2 T_r}{\partial r^2} \right) + k \left( \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial (r)}{\partial r} \right) = kr \left( \frac{\partial^2 T_r}{\partial r^2} \right) + k \left( \frac{\partial T_r}{\partial r} \right)$$

$$kr \left( \frac{\partial^2 T_r}{\partial r^2} \right) + k \left( \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) - \frac{2hr}{W} (T_r - T_\infty) = 0$$

$$\boxed{\left( \frac{\partial^2 T_r}{\partial r^2} \right) + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial T_r}{\partial r} \right) - \frac{2h}{kW} (T_r - T_\infty) = 0}$$

b) Conditions frontières :

à  $r=R_1$   $T=T_1$

à  $r=R_2$  une condition parmi les suivantes

1) densité de flux nulle  $q_r'' \Big|_{r=R_2} = -k \frac{\partial T_r}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = 0$

2) échange par convection :  $q_r'' \Big|_{r=R_2} = -k \frac{\partial T_r}{\partial r} \Big|_{r=R_2} = h(T_{r=R_2} - T_\infty)$

3) si  $R_2$  très grand  $T_{r=R_2} = T_\infty$

c)

1) rendement = (perte réelle)/(perte si matériau infiniment conducteur)

rendement = (perte réelle)/(perte si ailette à  $T$  uniforme =  $T_1$ )

$$\eta = \frac{q_c}{2\pi(R_2^2 - R_1^2)h(T_1 - T_\infty)}$$

2) efficacité = (perte réelle)/(perte sans ailette)

$$\varepsilon = \frac{q_c}{2\pi R_1 W h (T_1 - T_\infty)}$$

**Solutionnaire Ex-3.9 Profil de température dans une ailette fixée entre deux parois**

Hypothèses :

$$T=T(x) \quad k=\text{Constante} \quad \text{régime permanent} \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

Volume de contrôle

$$W t \Delta x$$

Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre (conduction) – Ce qui sort (conduction+convection dessus et dessous)=0

$$Wt q_x'' \Big|_x - Wt q_x'' \Big|_{x+\Delta x} - W\Delta x h_A (T_x - T_A) - W\Delta x h_B (T_x - T_B) = 0$$

On divise par  $Wt\Delta x$  et on fait tendre  $\Delta x$  vers

$$\frac{Wt q_x'' \Big|_x - Wt q_x'' \Big|_{x+\Delta x} - W\Delta x h_A (T_x - T_A) - W\Delta x h_B (T_x - T_B)}{Wt\Delta x} = 0$$

$$\frac{q_x'' \Big|_x - q_x'' \Big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{h_A}{t} (T_x - T_A) - \frac{h_B}{t} (T_x - T_B) = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q_x'' \Big|_x - q_x'' \Big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{\partial q_x''}{\partial x}$$

$$-\frac{\partial q_x''}{\partial x} - \frac{h_A + h_B}{t} T_x + \frac{(h_A T_A + h_B T_B)}{t} = 0$$

$$q_x'' = -k \frac{\partial T_x}{\partial x} \Rightarrow -\frac{\partial \left( -k \frac{\partial T_x}{\partial x} \right)}{\partial x} - \frac{h_A + h_B}{t} T_x + \frac{(h_A T_A + h_B T_B)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} - \left[ \frac{h_A + h_B}{kt} T_x - \frac{(h_A T_A + h_B T_B)}{kt} \right] = 0 \quad (1)$$

Faisons le changement de variable suivant

$$U = \alpha T_x - \beta \quad \text{avec} \quad \alpha = \left[ \frac{h_A + h_B}{kt} \right] \quad \text{et} \quad \beta = \left[ \frac{h_A T_A + h_B T_B}{kt} \right] \quad (S1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \alpha \frac{\partial T_x}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

L'équation (1) s'écrit donc :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - U = 0 \quad (2) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha U = 0$$

L'équation différentielle (2) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants) dont le polynôme caractéristique  $r^2 - \alpha = 0$  admet deux racines  $\sqrt{\alpha}$  et  $-\sqrt{\alpha}$ . La solution de (2) est donc :

$$U = C_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}x} \quad (S2)$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont obtenues en écrivant les conditions frontières :

$$\begin{aligned} \text{à } x=0 \quad T_x|_{x=0} = T_p &\Rightarrow U_{x=0} = (\alpha T_p - \beta) = C_1 e^{\sqrt{\alpha}0} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}0} \\ \Rightarrow C_1 + C_2 = U_p &\quad (a) \quad \text{avec} \quad \boxed{U_p = (\alpha T_p - \beta)} \quad (S3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{à } x=L \quad T_x|_{x=L} = T_p &\Rightarrow U_{x=L} = (\alpha T_p - \beta) = U_p = C_1 e^{\sqrt{\alpha}L} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}L} \\ \Rightarrow C_1 e^{\sqrt{\alpha}L} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}L} = U_p &\quad (b) \end{aligned}$$

La résolution du système des deux équations a) et b) donne les expressions des constantes  $C_1$  et  $C_2$  :

$$C_1 + C_2 = U_p \Rightarrow \boxed{C_1 = U_p - C_2} \quad (S4)$$

on remplace  $C_1$  dans b)

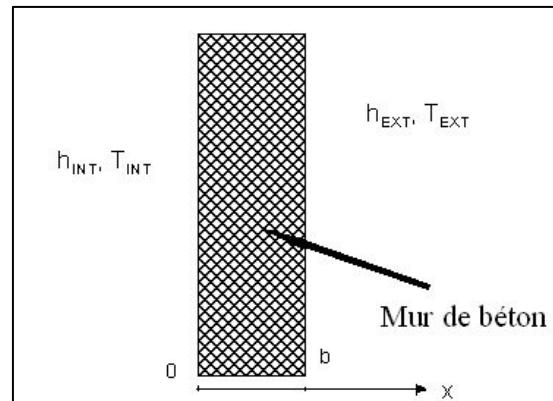
$$(U_p - C_2) e^{\sqrt{\alpha}L} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}L} = U_p \Rightarrow C_2 (e^{-\sqrt{\alpha}L} - e^{\sqrt{\alpha}L}) = U_p (1 - e^{\sqrt{\alpha}L})$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{U_p (1 - e^{\sqrt{\alpha}L})}{(e^{-\sqrt{\alpha}L} - e^{\sqrt{\alpha}L})}} \quad (S5)$$

### Solutionnaire : Travaux dirigés No 3

#### I) Profil dans un mur de béton ( 6 pts)

Un mur de béton (épaisseur  $b$ , largeur  $W$ , hauteur  $L$ , conductivité  $k$ ) sépare une pièce à la température  $T_{INT}$ , de l'extérieur dont la température est  $T_{EXT}$ . Les coefficients de transfert de chaleur sur les faces intérieure et extérieure de ce mur sont respectivement  $h_{INT}$  et  $h_{EXT}$



I.1 Faites un bilan de chaleur sur un volume de contrôle pertinent et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température dans le mur (on négligera les effets de bouts) (2 pts)

#### 1) Hypothèses :

$T=T(x)$        $k=\text{Constante}$       régime permanent       $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

2) Volume de contrôle       $A \Delta x$

3) Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre – Ce qui sort + Ce qui est généré = Ce qui s'accumule  
Ce qui rentre – Ce qui sort = 0

$$A q_x''|_x - A q_x''|_{x+\Delta x} = 0$$

On divise par  $A\Delta x$  et on fait tendre  $\Delta x$  vers 0

$$\frac{A q_x''|_x - A q_x''|_{x+\Delta x}}{A\Delta x} = \frac{q_x''|_x - q_x''|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q_x''|_x - q_x''|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{\partial q_x''}{\partial x} = 0$$

On intègre une première fois :

$$-\frac{\partial q_x''}{\partial x} = 0 \Rightarrow q_x'' = C_1'$$

On utilise la loi de Fourier

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} = C_1'$$

Et on intègre une deuxième fois :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{C_1'}{k} \Rightarrow T_x = \left( -\frac{C_1'}{k} \right) x + C_2 \Rightarrow T_x = C_1 x + C_2$$

Les constantes d'intégration  $C_1'$  et  $C_2$  sont obtenues en écrivant les conditions frontières

$$\text{CF1 : } \text{à } x=0 \Rightarrow q_x''|_{x=0} = h_{INT} (T_{INT} - T_{x=0}) = \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}$$

$$\text{CF2 : } \dot{a} x = b \Rightarrow q_x'' \Big|_{x=b} = \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=b} = h_{EXT} (T_{x=b} - T_{EXT})$$

$$\dot{a} x = 0 = h_{INT} (T_{INT} - T_{x=0}) = h_{INT} (T_{INT} - [C_1 \cdot 0 + C_2]) = h_{INT} (T_{INT} - C_2) = \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = -k C_1$$

$$h_{INT} (T_{INT} - C_2) = -k C_1 \Rightarrow C_2 = T_{INT} + \frac{k}{h_{INT}} C_1$$

$$\dot{a} x = b \Rightarrow h_{EXT} (T_{x=b} - T_{EXT}) = h_{EXT} ([C_1 b + C_2] - T_{EXT}) = -k C_1$$

$$h_{EXT} \left( C_1 b + T_{INT} + \frac{k}{h_{INT}} C_1 - T_{EXT} \right) = -k C_1 \Rightarrow C_1 \left( b + \frac{k}{h_{INT}} + \frac{k}{h_{EXT}} \right) = (T_{INT} - T_{EXT})$$

$$C_1 = \frac{(T_{EXT} - T_{INT})}{\left( b + \frac{k}{h_{INT}} + \frac{k}{h_{EXT}} \right)}$$

## II) Stockage d'air liquide dans un réservoir sphérique (6 pts)

Un réservoir sphérique de rayon  $r_1 = 1.5$  m, contient de l'air liquide. Le réservoir est isolé par une épaisseur de 0.05 m d'un matériau isolant de conductivité  $k = 0.05$  W/(m.K). On peut supposer que la paroi externe du réservoir reste à température constante  $T_1 = 80$  K. A la surface de l'isolant, il y a échange par convection avec l'air ambiant à la température  $T_\infty = 283$  K et le coefficient de convection  $h$  est égal à 18 W/(m<sup>2</sup>.K).

$$R_{conduction \text{ sphère creuse}} = \frac{1}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$R_{convection \text{ sur une sphère}} = \frac{1}{4\pi h r_2^2}$$

$$R_{conduction \text{ sphère creuse}} = 3.42 \times 10^{-2}$$

$$R_{convection \text{ sur une sphère}} = 1.84 \times 10^{-3}$$

$$R_{TOTALE} = 3.606 \times 10^{-2}$$

$$\Delta T_{\infty-1} = R_{TOTALE} q \Rightarrow q = \frac{\Delta T}{R_{TOTALE}} = \frac{(T_\infty - T_1)}{R_{TOTALE}} = \frac{(283 - 80)}{3.606 \times 10^{-2}} = 5629.5 \text{ W}$$

$$\Delta T_{\infty-2} = R_{convection} q \Rightarrow (T_\infty - T_2) = 1.84 \times 10^{-3} \times 5629.5 = 10.35 = (283 - T_2)$$

$$T_2 = 283 - 10.35 = 272.6 \text{ K}$$

À 272.6 K l'eau gèle, il y aura donc condensation de la vapeur d'eau sur la surface du réservoir puis congélation, le réservoir va devenir un gros glaçon : l'épaisseur est insuffisante !

## III) Température d'un fil électrique (3 pts)

Un fil électrique de 1 mm de diamètre est dénudé sur une longueur de 1 m. Calculer la température de ce fil (température qu'on supposera uniforme), sachant que la puissance générée par effet joule est de 1.5 watt/m, que la température de l'air est de 20 °C et que le coefficient de transfert de chaleur à la surface du fil avec l'air environnant vaut 12. W/m<sup>2</sup>.C.

Bilan macroscopique sur le fil :

$$E_{in} - E_{out} + E_{génééré} = E_{accumulé} \quad \text{mais} \quad E_{in} = 0 \quad E_{accumulé} = 0$$

$$E_{out} = \pi DLh(T_{r=R} - T_{air}) \quad \text{et} \quad E_{génééré} = 1.5 W$$

$$\pi DLh(T_{r=R} - T_{air}) = 1.5 \Rightarrow T_{r=R} = T_{air} + \frac{1.5}{\pi \times 0.001 \times 1 \times 12} = 20 + 39.79 = 59.79^\circ C$$

**IV) Quiz (2 pts)**

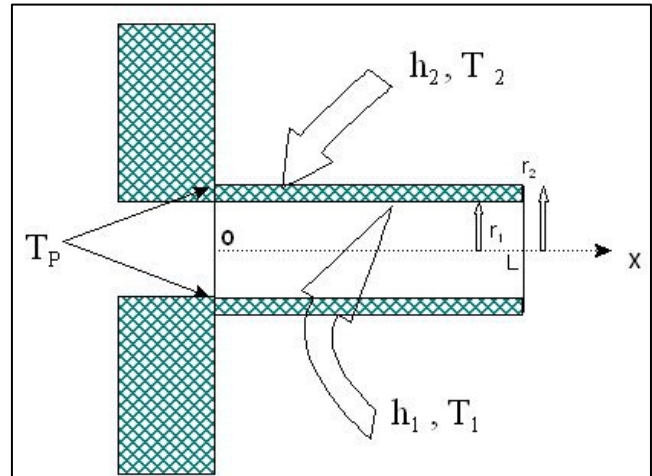
Cocher la bonne réponse:

- Pour la construction d'une ailette, il est préférable d'utiliser un matériau qui à un faible conductivité. VRAI  FAUX
- Dans une ailette, l'augmentation de la conductivité favorise la diminution du gradient de la température. VRAI  FAUX
- Dans un bilan de chaleur associé à un problème de conduction, si il y a un terme de génération de chaleur alors le terme d'accumulation est non nul. VRAI  FAUX
- À l'interface entre deux solides, plus la résistance de contact est faible, plus la différence entre les températures de ces deux surfaces est grande. VRAI  FAUX

**V) Ailette en forme de cylindre creux (8 pts)**

Une ailette, de longueur L, a la forme d'un cylindre creux. Sa base est fixée sur une paroi à la température  $T_p$ . La face intérieure du cylindre est refroidie par de l'air à la température  $T_1$  avec un coefficient de convection  $h_1$  alors que la face extérieure est refroidie avec un air à la température  $T_2$  avec un coefficient de convection  $h_2$ .

On supposera que le flux de chaleur axial à  $x=L$  sur l'extrémité de l'ailette est négligeable.



a) Faites un bilan de chaleur sur un élément de volume approprié de l'ailette et obtenez l'équation différentielle que doit satisfaire la température de cette ailette. (4.5 pts)

b) Quelles sont les conditions frontières ? (1 pt)

c) Obtenez l'expression du profil de température. (2.5 pts)

$T=T(x)$        $k=Constante$        $E_g=0$       régime permanent       $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Volume de contrôle

$$\pi(r_2^2 - r_1^2) \Delta x = s \Delta x$$

Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre (conduction) – Ce qui sort (conduction+convection à la surface de la tige)=0

$$s q_x''|_x - s q_x''|_{x+\Delta x} - 2\pi r_1 \Delta x h_1 (T_x - T_1) - 2\pi r_2 \Delta x h_2 (T_x - T_2) = 0$$

On divise par  $s\Delta x$  et on fait tendre  $\Delta x$  vers

$$\frac{s q_x''|_x - s q_x''|_{x+\Delta x} - 2\pi r_1 \Delta x h_1 (T_x - T_1) - 2\pi r_2 \Delta x h_2 (T_x - T_2)}{s\Delta x} = 0$$

$$\frac{q_x''|_x - q_x''|_{x+\Delta x}}{\Delta x} - \frac{2\pi r_1 h_1 (T_x - T_1) + 2\pi r_2 h_2 (T_x - T_2)}{s} = 0 \quad \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{q_x''|_x - q_x''|_{x+\Delta x}}{\Delta x} = -\frac{\partial q_x''}{\partial x}$$

$$q_x'' = -k \frac{\partial T_x}{\partial x} \Rightarrow -\frac{\partial q_x''}{\partial x} = -\frac{\partial \left( -k \frac{\partial T_x}{\partial x} \right)}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} - \frac{2\pi r_1 h_1 (T_x - T_1) + 2\pi r_2 h_2 (T_x - T_2)}{k s} = 0$$

$$\frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} - T_x \left[ \frac{2\pi r_1 h_1 + 2\pi r_2 h_2}{k s} \right] + \left[ \frac{2\pi r_1 h_1 T_1 + 2\pi r_2 h_2 T_2}{k s} \right] = 0 \quad (1)$$

$$\text{posons } U = T_x \underbrace{\left[ \frac{2\pi r_1 h_1 + 2\pi r_2 h_2}{k s} \right]}_{\alpha^2} - \underbrace{\left[ \frac{2\pi r_1 h_1 T_1 + 2\pi r_2 h_2 T_2}{k s} \right]}_{\beta} = \alpha^2 T_x - \beta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 T_x}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - U = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \alpha^2 U = 0 \quad (2)$$

L'équation différentielle (2) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants) dont le polynôme caractéristique  $r^2 - \alpha^2 = 0$  admet deux racines  $+\alpha$  et  $-\alpha$  La solution de (2) est donc :

$$\boxed{U = \alpha^2 T_x - \beta = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}} \quad (S1)$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont obtenues en écrivant les conditions frontières:

$$\text{à } x=0 \quad T_x|_{x=0} = T_p \Rightarrow U_{x=0} = \alpha^2 T_{x=0} - \beta = \alpha^2 T_p - \beta = U_p = C_1 e^{\alpha \cdot 0} + C_2 e^{-\alpha \cdot 0}$$

$$\Rightarrow C_1 + C_2 = U_p \quad (a)$$

$$\text{à } x=L \text{ le flux est négligeable } q_x'' = -k \frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=L} = \alpha C_1 e^{\alpha L} - \alpha C_2 e^{-\alpha L} = 0 \quad (b)$$

**TDEX-3.22**

On résout le système de 2 équations a) et b) à 2 inconnues  $C_1$  et  $C_2$

$$C_1 + C_2 = U_p \Rightarrow \boxed{C_1 = U_p - C_2}$$

*on remplace  $C_1$  dans b)*

$$\alpha(U_p - C_2)e^{\alpha L} - \alpha C_2 e^{-\alpha L} = 0 \quad \Rightarrow C_2(e^{\alpha L} + e^{-\alpha L}) = U_p e^{\alpha L}$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = \frac{U_p e^{\alpha L}}{(e^{\alpha L} + e^{-\alpha L})}} \quad \text{avec} \quad U_p = \alpha^2 T_p - \beta$$



## Travaux dirigés et exercices du chapitre 4

### Conduction stationnaire en deux dimensions

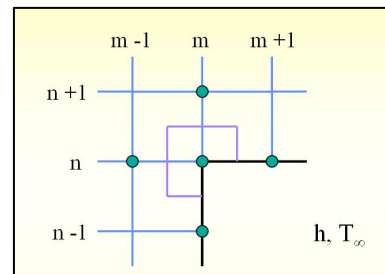
### Exercices

#### Ex-4.1 Convention des flux entrants

En utilisant la convention des flux entrants (page 4.6), retrouver par bilan les équations pour les 3 géométries ci-dessous (on appellera L la profondeur des pièces et on a  $\Delta x = \Delta y$ )

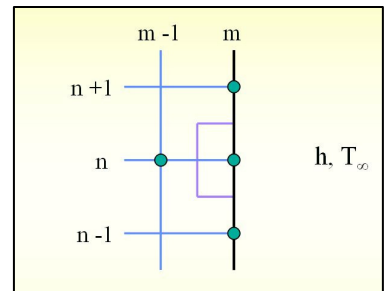
a) Convection dans un coin intérieur:

$$2(T_{m-1,n} + T_{m,n+1}) + (T_{m+1,n} + T_{m,n-1}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty} - 2\left(3 + \frac{h\Delta x}{k}\right)T_{m,n} = 0$$



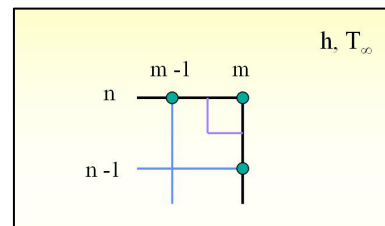
b) Convection sur la surface:

$$(2T_{m-1,n} + T_{m,n+1} + T_{m,n-1}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty} - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 2\right)T_{m,n} = 0$$



c) Convection sur un coin extérieur:

$$(T_{m-1,n} + T_{m,n-1}) + 2\frac{h\Delta x}{k}T_{\infty} - 2\left(\frac{h\Delta x}{k} + 1\right)T_{m,n} = 0$$

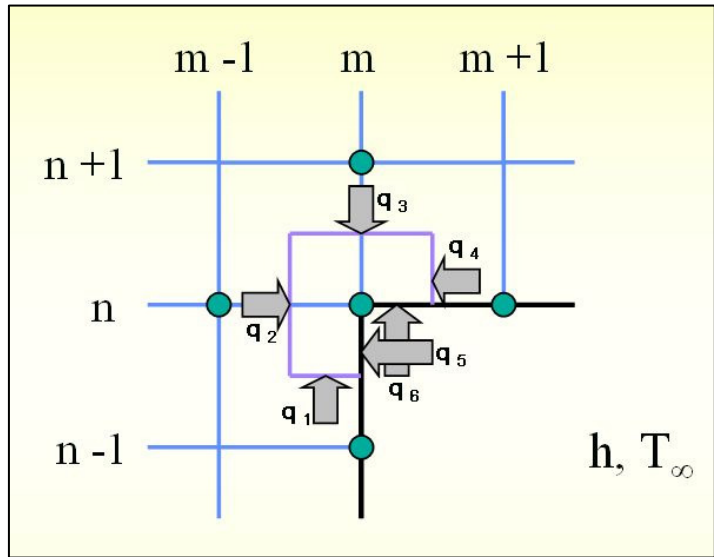


## Solutionnaire 4.1a :

Autour du nœud  $T_{m,n}$ , le volume de contrôle pertinent est :

$$\frac{3}{4} \Delta x \Delta x L$$

On identifie les 6 faces au travers desquelles il y aura un flux entrant dans ce volume et dont les expressions sont les suivantes :



$$q_1 = \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) k \frac{(T_{m,n-1} - T_{m,n})}{\Delta x}$$

$$q_3 = (\Delta x L) k \frac{(T_{m,n+1} - T_{m,n})}{\Delta x}$$

$$q_5 = \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) h (T_\infty - T_{m,n})$$

$$q_2 = (\Delta x L) k \frac{(T_{m-1,n} - T_{m,n})}{\Delta x}$$

$$q_4 = \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) k \frac{(T_{m+1,n} - T_{m,n})}{\Delta x}$$

$$q_6 = \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) h (T_\infty - T_{m,n})$$

Le bilan s'écrit :

$$\sum_{i=1}^6 q_i = 0$$

$$\frac{L}{2} k (T_{m,n-1} - T_{m,n}) + L k (T_{m-1,n} - T_{m,n}) + L k (T_{m,n+1} - T_{m,n}) + \frac{L}{2} k (T_{m+1,n} - T_{m,n}) + \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) h (T_\infty - T_{m,n}) + \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) h (T_\infty - T_{m,n}) = 0$$

$$k (T_{m,n-1} - T_{m,n}) + 2k (T_{m-1,n} - T_{m,n}) + 2k (T_{m,n+1} - T_{m,n}) + k (T_{m+1,n} - T_{m,n}) + 2\Delta x h (T_\infty - T_{m,n}) = 0$$

$$\Rightarrow 2(T_{m-1,n} + T_{m,n+1}) + (T_{m,n-1} + T_{m+1,n}) + \frac{2\Delta x h}{k} T_\infty - 2 \left( \frac{\Delta x h}{k} + 3 \right) T_{m,n} = 0$$

**Solutionnaire 4.1b :**

Autour du nœud  $T_{m,n}$ , le volume de contrôle pertinent est :

$$\frac{1}{2} \Delta x \Delta x L$$

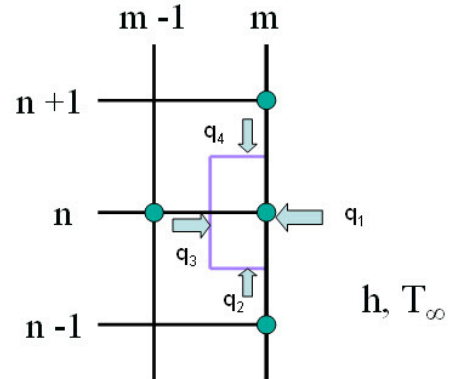
On identifie les 4 faces au travers desquelles il y aura un flux entrant dans ce volume et dont les expressions sont les suivantes :

$$q_1 = (\Delta x L) h (T_\infty - T_{m,n})$$

$$q_2 = \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) k \frac{(T_{m,n-1} - T_{m,n})}{\Delta x}$$

$$q_3 = (\Delta x L) k \frac{(T_{m-1,n} - T_{m,n})}{\Delta x}$$

$$q_4 = \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) k \frac{(T_{m,n+1} - T_{m,n})}{\Delta x}$$



Le bilan s'écrit :

$$\sum_{i=1}^4 q_i = 0$$

$$(\Delta x L) h (T_\infty - T_{m,n}) + \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) k \frac{(T_{m,n-1} - T_{m,n})}{\Delta x} + (\Delta x L) k \frac{(T_{m-1,n} - T_{m,n})}{\Delta x} + \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) k \frac{(T_{m,n+1} - T_{m,n})}{\Delta x} = 0$$

$$\Delta x h (T_\infty - T_{m,n}) + \frac{1}{2} k (T_{m,n-1} - T_{m,n}) + k (T_{m-1,n} - T_{m,n}) + \frac{1}{2} k (T_{m,n+1} - T_{m,n}) = 0$$

$$\frac{2\Delta x h}{k} (T_\infty - T_{m,n}) + (T_{m,n-1} - T_{m,n}) + 2(T_{m-1,n} - T_{m,n}) + (T_{m,n+1} - T_{m,n}) = 0$$

$$(2T_{m-1,n} + T_{m,n-1} + T_{m,n+1}) + \frac{2\Delta x h}{k} T_\infty - 2 \left( \frac{\Delta x h}{k} + 2 \right) T_{m,n} = 0$$

## Solutionnaire 4.1c :

Autour du nœud  $T_{m,n}$ , le volume de contrôle pertinent est :

$$\frac{1}{4} \Delta x \Delta x L$$

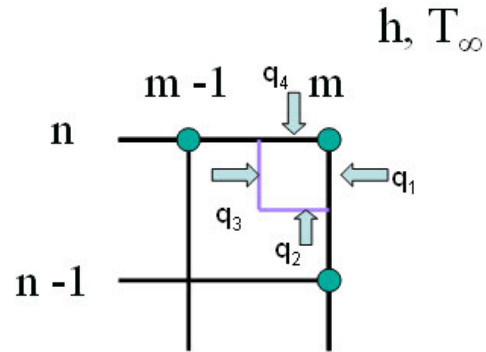
On identifie les 4 faces au travers desquelles il y aura un flux entrant dans ce volume et dont les expressions sont les suivantes :

$$q_1 = \left( \frac{\Delta x L}{2} \right) h (T_\infty - T_{m,n})$$

$$q_2 = \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) k \frac{(T_{m,n-1} - T_{m,n})}{\Delta x}$$

$$q_3 = \left( \frac{\Delta x L}{2} \right) k \frac{(T_{m-1,n} - T_{m,n})}{\Delta x}$$

$$q_4 = \left( \frac{\Delta x L}{2} \right) h (T_\infty - T_{m,n})$$



Le bilan s'écrit :

$$\sum_{i=1}^4 q_i = 0$$

$$\left( \frac{\Delta x L}{2} \right) h (T_\infty - T_{m,n}) + \left( \frac{\Delta x}{2} L \right) k \frac{(T_{m,n-1} - T_{m,n})}{\Delta x} + \left( \frac{\Delta x L}{2} \right) k \frac{(T_{m-1,n} - T_{m,n})}{\Delta x} + \left( \frac{\Delta x L}{2} \right) h (T_\infty - T_{m,n})$$

$$\frac{2\Delta x h}{k} (T_\infty - T_{m,n}) + (T_{m,n-1} - T_{m,n}) + (T_{m-1,n} - T_{m,n}) = 0$$

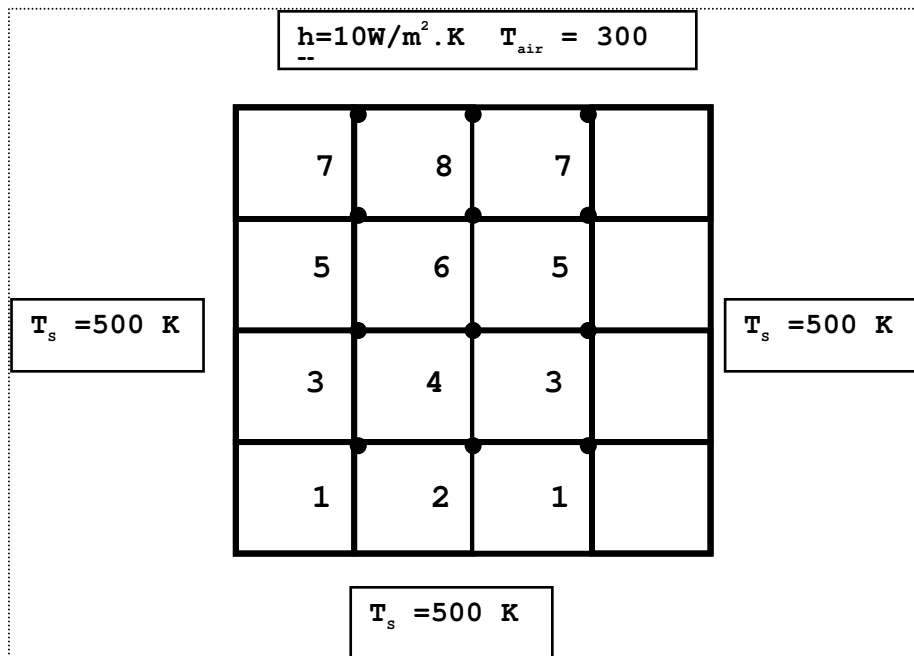
$$(T_{m,n-1} + T_{m-1,n}) + \frac{2\Delta x h}{k} T_\infty - 2 \left( \frac{\Delta x h}{k} + 1 \right) T_{m,n} = 0$$

**Ex-4.2 : Exemple de résolution d'un problème de conduction 2D par différences finies  
(exemple de résolution par la méthode de Gauss-Seidel avec Excel)**

La chambre d'un four industriel comporte une colonne de brique de conductivité  $k=1 \text{ w/m.K}$  et de section carré de 1 m de côté. Trois faces de cette colonne sont soumises à une température de 500 K alors que la dernière est soumise à la convection avec l'air environnant à la température de 300 K et le coefficient  $h$  vaut  $10 \text{ W/m}^2.\text{K}$  (on appellera  $H$  la hauteur de cette colonne)

En utilisant un maillage de 0.25 m, déterminer le profil de température dans la colonne.

- On remarque que le problème présente une symétrie et il suffit de le résoudre sur la moitié de la colonne. Ci-dessous, on définit donc 8 nœuds et le plan qui passe par les points 2-8 correspond au plan de symétrie.
- Les nœuds sur les 3 faces de la colonne sont à la température  $T_s=500 \text{ K}$  (et ne seront pas identifiés par un numéro, on utilisera  $T_s$ ).



**Rappel** : dans un bilan de chaleur, si une face délimitant le volume de contrôle correspond à un plan de symétrie alors le flux au travers de ce plan est nul.

- Bilan sur les nœuds 1 à 8. Pour ce faire, on utilise un autre maillage décalé d'une demi-maille permettant de définir les volumes de contrôle pertinent autour de chaque nœud (voir pointillé ci-dessous)

### TDEX-4.6

- Pour les nœuds 1-3-5, le volume est :

$$\Delta x \Delta x H$$

- Pour les nœuds 2-4-6-7, le volume est :

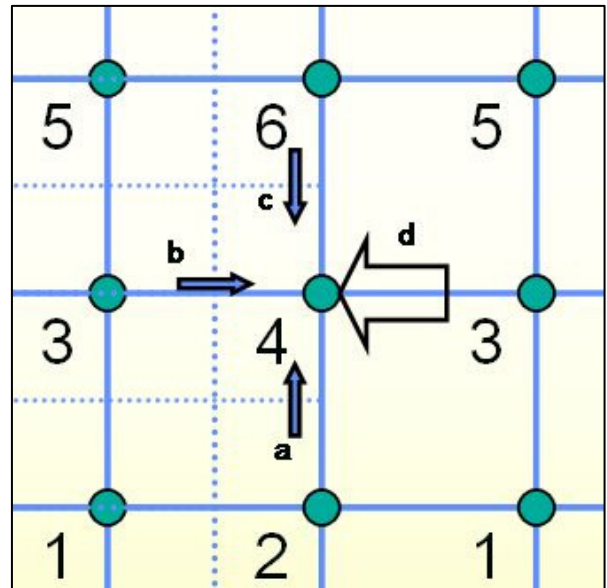
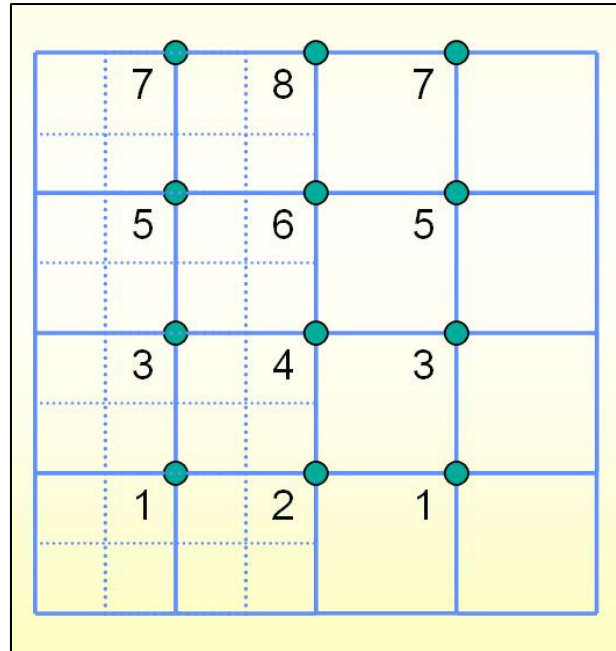
$$\frac{\Delta x}{2} \Delta x H$$

- Pour le nœud 8, le volume est :

$$\frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta x}{2} H$$

Pour chaque nœud, on fait le bilan de chaleur en utilisant la convention des flux entrants.

Nous allons détailler le bilan uniquement pour un nœud, le no 4. Au travers des faces a,b,c il y a apport de chaleur par conduction alors qu'au travers de la face d le flux est nul puisque il s'agit d'un plan de symétrie.



$$q_a = \left( \frac{\Delta x}{2} H \right) k \frac{T_2 - T_4}{\Delta x}$$

$$q_b = (\Delta x H) k \frac{T_3 - T_4}{\Delta x}$$

$$q_c = \left( \frac{\Delta x}{2} H \right) k \frac{T_6 - T_4}{\Delta x}$$

$$q_d = 0$$

$$q_a + q_b + q_c = 0$$

$$\Rightarrow \left( \frac{\Delta x}{2} H \right) k \frac{T_2 - T_4}{\Delta x} + (\Delta x H) k \frac{T_3 - T_4}{\Delta x} + \left( \frac{\Delta x}{2} H \right) k \frac{T_6 - T_4}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{T_2 - T_4}{2} + T_3 - T_4 + \frac{T_6 - T_4}{2} = 0 \Rightarrow T_2 - T_4 + 2T_3 - 2T_4 + T_6 - T_4 = 0$$

pour le nœud 4:  $T_2 + 2T_3 + T_6 - 4T_4 = 0$

(faites par vous-même les bilans sur tous les autres nœuds)

## TDEX-4.7

Les équations pour les 8 nœuds sont donc les suivantes:

pour le nœud 1:  $T_2 + T_3 + 1000 - 4T_1 = 0$   
 pour le nœud 3:  $T_1 + T_4 + T_5 + 500 - 4T_3 = 0$   
 pour le nœud 5:  $T_3 + T_6 + T_7 + 500 - 4T_5 = 0$   
 pour le nœud 2:  $2T_1 + T_4 + 500 - 4T_2 = 0$   
 pour le nœud 4:  $T_2 + 2T_3 + T_6 - 4T_4 = 0$   
 pour le nœud 6:  $T_4 + 2T_5 + T_8 - 4T_6 = 0$   
 pour le nœud 7:  $2T_5 + T_8 + 2000 - 9T_7 = 0$   
 pour le nœud 8:  $2T_6 + 2T_7 + 1500 - 9T_8 = 0$

Ces équations nous permettent d'exprimer les températures en chaque nœud :

$$T_1 = \frac{T_2 + T_3 + 1000}{4} \quad T_2 = \frac{2T_1 + T_4 + 500}{4} \quad T_3 = \frac{T_1 + T_4 + T_5 + 500}{4} \quad T_4 = \frac{T_2 + 2T_3 + T_6}{4}$$

$$T_5 = \frac{T_3 + T_6 + T_7 + 500}{4} \quad T_6 = \frac{T_4 + 2T_5 + T_8}{4} \quad T_7 = \frac{2T_5 + T_8 + 2000}{9} \quad T_8 = \frac{2T_6 + 2T_7 + 1500}{9}$$

- d) Pour résoudre ce système avec la méthode de Gauss-Seidel, nous allons utiliser **Excel** et son outil **Solveur** (voir ci-dessous et récupérer la feuille Excel sur le site du cours).

La procédure est la suivante :

- dans la colonne B, écrire le nom de chacun des nœuds (TC1, TC2 ...TC8)

- dans la colonne C, nous rentrons un estimé des températures des 8 nœuds (par exemple 450 K)

- pour chaque cellule de C, nous définissons un **nom de variable** (TC1, TC2 ...TC8) commandes Excel : se placer sur une cellule puis *Insertion-Nom-Definir*.

ps par défaut le nom apparaissant dans la cellule à gauche est retenu.

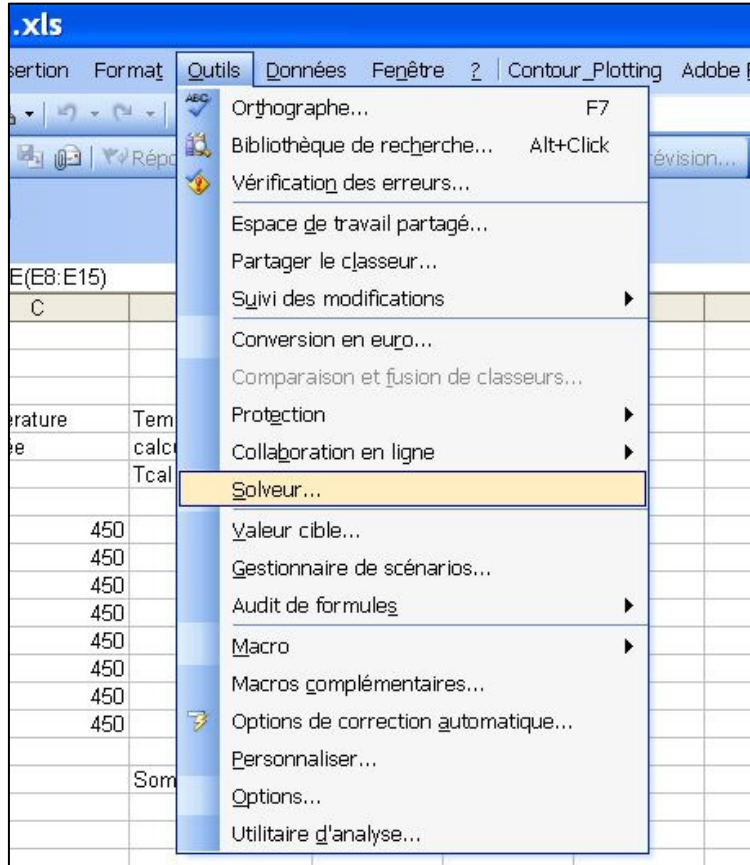
-dans la colonne C, pour chaque nœud écrire (sous forme littérale) l'équation correspondante.

dans la colonne E nous calculons le carré de la différence entre la valeur estimée (colonne C) et la valeur calculée (colonne D). La somme de ces carrés est faite dans la cellule E17.

	A	B	C	D	E
2					
3					
4			Temperature	Température	(Tcal-Tes)**2
5			estimée	calculée	
6			Tes	Tcal	
7					
8	1	tc1	450	475	625
9	2	tc2	450	462.5	156.25
10	3	tc3	450	462.5	156.25
11	4	tc4	450	450	0
12	5	tc5	450	462.5	156.25
13	6	tc6	450	450	0
14	7	tc7	450	372.2222222	6049.38272
15	8	tc8	450	366.6666667	6944.44444
16					
17				Somme D1-D8 =	14087.5772
18					

## TDEX-4.8

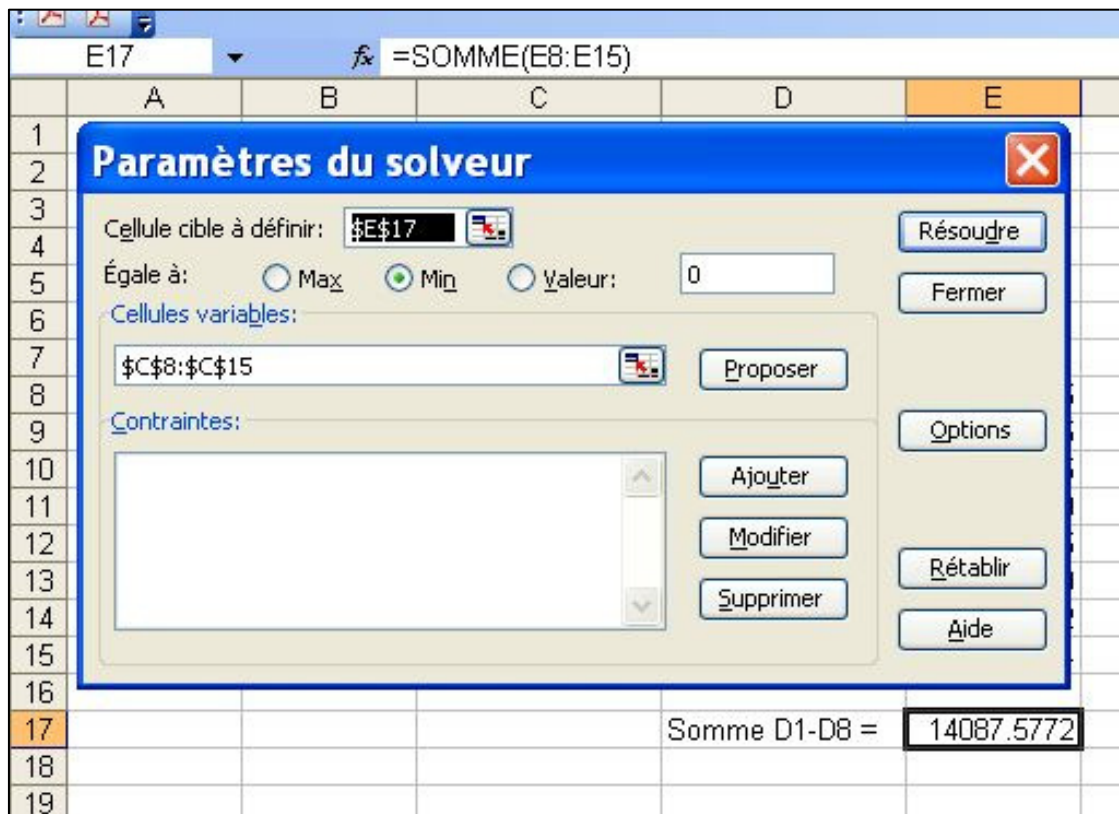
Se placer sur la cellule E17 et choisir le *Solveur* dans la rubrique *Outils*.



Si cette fonctionnalité n'apparaît pas choisir alors l'onglet *Macros complémentaires* et installer le *Solveur*

Se placer sur la cellule E17, choisir le *Solveur* et dans la fenêtre *Paramètres du solveur* indiquer au *Solveur* que les valeurs estimées des températures (C8-C15) sont les cellules à faire varier afin de minimiser la somme de la cellule E17. Le *Solveur* va faire des itérations sur les valeurs des températures estimées jusqu'à avoir T estimée= Tcalculée.

Cliquer *Résoudre*





**Résultat du solveur**

Le solveur a convergé vers la solution en cours.  
Toutes les contraintes sont satisfaites.

Rapports  
Réponses  
Sensibilité  
Limites

Garder la solution du solveur  
 Rétablir les valeurs d'origine

OK Annuler Enregistrer le scénario... Aide

		Temperature estimée	Température calculée	(Tcal-Tes)**2
		Tes	Tcal	
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8	1 tc1	489.3031504	489.3034627	9.7542E-08
9	2 tc2	485.1512507	485.1520266	6.0198E-07
10	3 tc3	472.0626002	472.0631778	3.3366E-07
11	4 tc4	462.0018055	462.0030304	1.5004E-06
12	5 tc5	436.9477555	436.9481439	1.5092E-07
13	6 tc6	418.7356704	418.7369008	1.5138E-06
14	7 tc7	356.9943051	356.9939775	1.0733E-07
15	8 tc8	339.0502868	339.0511057	6.7055E-07
16				
17			Somme D1-D8 =	4.9762E-06
18				
19				

### TDEX-4.9

Après optimisation, on trouve:

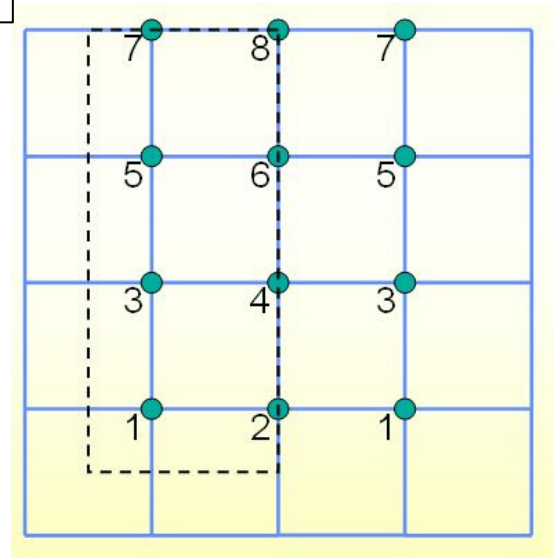
d) Sur le volume en pointillé faites un bilan macroscopique (pour 1 m de hauteur de colonne) et vérifiez que la chaleur entrant par conduction est égale à celle sortant par convection:

- échange par convection avec l'air:

$$q_{convection}^{out} = 1 \Delta x h (T_7 - T_{air}) + 1 \frac{\Delta x}{2} h (T_8 - T_{air})$$

(réponse 191.3 W pour 1m)

-apport d'énergie par conduction



$$q_{conduction}^{in} = k \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{T_s - T_2}{\Delta x} \right) + k \Delta x \frac{(T_s - T_1)}{\Delta x} + k \Delta x \frac{(T_s - T_1)}{\Delta x} + k \Delta x \frac{(T_s - T_3)}{\Delta x} + k \Delta x \frac{(T_s - T_5)}{\Delta x} + k \frac{\Delta x}{2} \left( \frac{T_s - T_7}{\Delta x} \right)$$

$$= k [5T_s - 2T_1 - T_3 - T_5 - 0.5T_2 - 0.5T_7] \quad (\text{réponse : } 191.31 \text{ W / m})$$



## Travaux dirigés et exercices du chapitre 5

**Ex-5.1 (S)** Conduction en transitoire

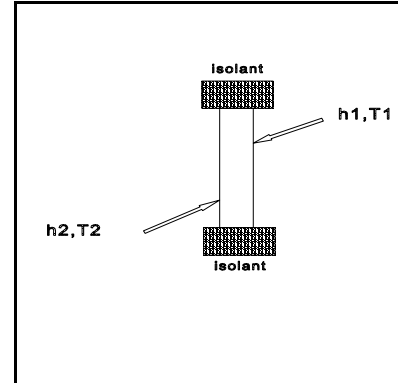
Une plaque métallique rectangulaire (largeur  $W$ , longueur  $L$ , épaisseur  $b$ ) de conductivité  $k$ , est initialement à une température uniforme  $T_0$ . Soudain ses deux faces sont mises en contact avec deux fluides ayant des températures  $T_1$  et  $T_2$  et les coefficients de transfert de chaleur sur les faces sont respectivement  $h_1$  et  $h_2$ .

Quelle est l'expression de la température au centre de la plaque en fonction du temps?

On supposera:  $(h_1 b/k) \ll 1$ ;  $(h_2 b/k) \ll 1$

Réponse :

$$\frac{(h_1 T_1 + h_2 T_2) - (h_1 + h_2) T}{(h_1 T_1 + h_2 T_2) - (h_1 + h_2) T_0} = e^{-\frac{(h_1 + h_2)t}{b\rho C_p}}$$

**Ex-5.2 (S)** Régime transitoire en cylindrique (abaque de Heissler)

Un cylindre de 2 m de long et de 0.20 m de diamètre, initialement à une température uniforme de  $400^\circ\text{C}$ , est plongé dans un bain d'eau à  $50^\circ\text{C}$ . Sachant que la diffusivité thermique du cylindre,  $\alpha$ , vaut  $10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$  la conductivité thermique  $k$  vaut  $40\text{ W/m.K}$  et que le coefficient de transfert de chaleur à la surface du cylindre  $h$  vaut  $200\text{ W/m}^2.\text{K}$ , on demande de calculer après 20 minutes d'immersion:

- la température au centre du cylindre
- la température à la surface du cylindre
- la fraction de la chaleur potentiellement échangeable ( $Q/Q_0$ ) ainsi que la chaleur échangée avec le bain (exprimée en  $\text{kW.hr}$ )

On négligera les effets de bouts

(Réponses:  $184.8^\circ\text{C}$ ,  $156.6^\circ\text{C}$ , 0.656, 16.03  $\text{kW.hr}$ )

**Travaux dirigés No 4****Ex-5.3 (S)** Chauffage par induction, régime transitoire avec résistance interne négligeable

Une bille métallique de rayon  $R$  initialement à une température  $T_0$  est introduite dans un dispositif de chauffage par induction (comme un four micro-onde). La bille est le siège d'une génération de chaleur  $\dot{q}'''$  ( $\text{W}/\text{m}^3$ ) et on suppose qu'à la surface de la bille, il y a échange par convection (coefficient  $h$ ) avec l'air environnant qui reste à une température constante,  $T_A$ . On souhaite étudier la variation dans le temps de la température de la bille.

- A quelle condition peut-on négliger le gradient radial de température dans la bille ?
  - On suppose que le gradient radial de température est négligeable, faites un bilan de chaleur et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température de la bille ?
  - Obtenez l'expression de la variation dans le temps de la température ?
- Réponse:  $\dot{q}''' - (3h/R)(T - T_A) = C \exp(-3ht/R\rho c_p)$  avec  $C = \dot{q}''' - (3h/R)(T_0 - T_A)$
- Si on attend suffisamment longtemps, quelle sera la température d'équilibre de la bille ? On peut répondre à la question sans utiliser la réponse c)

Réponse:  $T_{\text{EQUILIBRE}} - T_A = \dot{q}''' R / (3h)$

**Ex-5.4 (S)** Régime transitoire géométrie semi-infinie

Une pièce de bronze très épaisse (diffusivité thermique  $\alpha = 0.86 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$  et conductivité  $k = 26 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$ ) est initialement à une température de  $250 \text{ }^\circ\text{C}$ . Soudainement sa surface est exposée à un fluide à  $25 \text{ }^\circ\text{C}$  et le coefficient d'échange est de  $150 \text{ W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$ . Déterminer la température dans le bronze à  $5 \text{ cm}$  sous la surface après  $10 \text{ min}$  d'exposition. (utiliser une résolution graphique) (Réponse:  $214 \text{ }^\circ\text{C}$ )

**Ex-5.5 (S)** Profondeur pour enterrer les conduites d'eau (géométrie semi-infinie)

Les conduites d'eau potable enterrées dans le sol doivent être à l'abri du gel. Déterminer la profondeur d'enfouissement sécuritaire correspondant aux conditions extrêmes suivantes:

- le 31 octobre la température du sol est uniforme et égale à  $10 \text{ }^\circ\text{C}$
- le 1<sup>er</sup> novembre, il y a refroidissement à  $-15 \text{ }^\circ\text{C}$ , et cette température se maintient pendant 120 jours avec un fort vent qui impose un coefficient de transfert de chaleur à la surface du sol de  $35 \text{ W}/\text{m}^2\cdot\text{K}$
- et le 1<sup>er</sup> mars, il fait beau !

Propriétés du sol:  $k = 0.52 \text{ W}/\text{m}\cdot\text{K}$ ;  $\rho = 2050 \text{ kg}/\text{m}^3$ ;  $C_p = 1840 \text{ J}/\text{kg}\cdot\text{K}$  (réponse :  $1.36\text{m}$ )

## TDEX- 5.3

*Exercices pour pratiquer les abaques de Heisler. Faites les résolutions graphiques et comparez les solutions obtenues en utilisant les logiciels disponibles sur le site du cours*

### Ex-5.6 (S) Géométrie plane:

Dans un four, une des parois ayant une épaisseur de 50 cm, est initialement à une température uniforme de  $60^{\circ}\text{C}$ . La face extérieure de cette paroi est parfaitement isolée alors que la face intérieure est soudainement exposée à une température de  $900^{\circ}\text{C}$  et le coefficient de transfert de chaleur à la surface vaut  $h=25\text{ W/m}^2\text{K}$ . Les propriétés de la paroi étant les suivantes:  $c_p=837\text{ J/kg/K}$ ;  $\rho=500\text{ kg/m}^3$ ;  $k=1.25\text{ W/m/K}$ , déterminer le temps requis pour que la température de la face externe de la paroi atteigne  $600^{\circ}\text{C}$ . A cet instant, quelles sont : a) la température 10 cm en dessous de la face interne b) l'énergie totale reçue par la paroi depuis le début du chauffage (pour  $1\text{ m}^2$  de surface de mur) [réponses :  $51750-775 -Q/Q_0=0.75$  et  $Q=1.32\ 10^8$ ]

### Ex-5.7 (S) Géométrie sphérique:

Une bille métallique de 5 mm de rayon est initialement à une température uniforme de  $400^{\circ}\text{C}$ . Cette bille est soumise à un traitement thermique en deux étapes.

a) Dans la première, on la refroidit dans l'air à  $20^{\circ}\text{C}$  pendant un temps  $t_{\text{air}}$  nécessaire pour avoir une température au centre de la sphère égale à  $335^{\circ}\text{C}$ . Pendant cette étape, le coefficient à la surface vaut  $h_{\text{air}}=10\text{ W/m}^2\text{K}$ . L'hypothèse d'une résistance thermique interne négligeable est-elle applicable à cette étape ? Calculer le temps  $t_{\text{air}}$  ? [94 s]

b) Dans une deuxième étape, la bille est alors introduite dans un bain d'eau à la température de  $20^{\circ}\text{C}$ . Ce bain est fortement mélangé et le coefficient  $h_{\text{eau}}$  vaut alors  $6000\text{ W/m}^2\text{K}$ . Quel est le temps requis pour avoir une température au centre de  $50^{\circ}\text{C}$  ? [3 s]

Données:  $k=20\text{ W/m/K}$ ,  $c_p=1000\text{ J/kg/K}$ ;  $\rho=3000\text{ kg/m}^3$

### Ex-5.8 (S) Géométrie mixte:

Un cylindre de 10 cm de diamètre et 8 cm d'épaisseur est initialement à une température de 700 K. Pour le refroidir, on le plonge dans un bain d'huile à 300 K et le coefficient de transfert de chaleur à la surface vaut  $400\text{ W/m}^2\text{K}$

Après 10 minutes d'immersion, quelles sont les températures minimale et maximale dans le cylindre ?

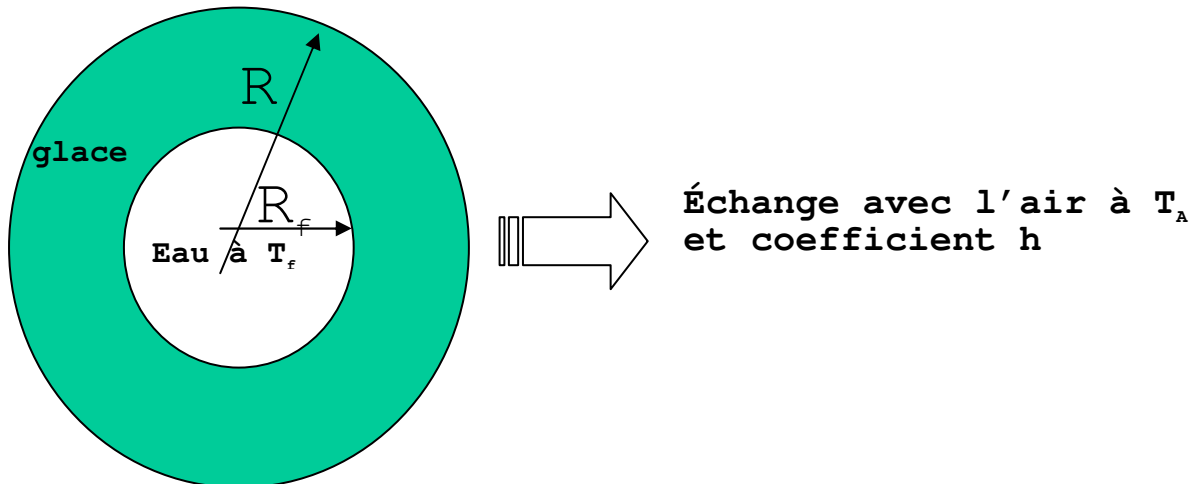
Données:  $\rho=8050\text{ kg/m}^3$ ,  $k=18.6\text{ W/m.K}$ ,  $C_p=536\text{ J/kg.K}$ , [Réponses: 316 et 346 K]

**Travaux dirigés No 5****Ex-5.9 (S)** Résolution d'un régime transitoire avec l'hypothèse du régime quasi-permanent :  
détermination du temps de solidification d'une goutte d'eau

On souhaite prédire le temps de solidification,  $t_f$ , d'une gouttelette sphérique de rayon  $R$  de conductivité  $k$ , à la surface de laquelle la chaleur est échangée avec de l'air froid à une température  $T_A$ , le coefficient d'échange à la surface de la goutte est constant et vaut  $h$ . On supposera que:

- la goutte est initialement à sa température de fusion  $T_f$
- la chaleur sensible de la partie solidifiée est négligeable devant la chaleur de fusion
- les densités des phases liquide et solide sont égales

Initialement, tout est liquide et à la fin du processus tout est solide. La solidification commence à se faire à la périphérie puis le front de solidification pénètre à l'intérieur de la goutte. Considérez le schéma de la goutte à un instant quelconque du processus de refroidissement. Dans ce problème, on va considérer que la variation du rayon de solidification,  $R_f$ , est lente. Pendant un bref intervalle de temps, on va donc résoudre en stationnaire, le profil de température dans la couche déjà solidifiée.



- a) Par bilan d'énergie en régime stationnaire sur la partie solidifiée, obtenez le profil de température:

$$T(r) = \frac{C_1}{r} + C_2$$

- b) En utilisant les conditions frontières pertinentes, trouvez les constantes  $C_1$  et  $C_2$

$$C_1 = \frac{T_f - T_A}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R} + \frac{k}{hR^2}} \quad \text{et} \quad C_2 = T_f - \frac{C_1}{R_f}$$

## TDEX- 5.5

b) Démontrez que les pertes de chaleur avec l'air qui arrivent par conduction à  $r=R$  s'exprime par:

$$Q_f = \frac{4 \pi k (T_f - T_A)}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R} + \frac{k}{hR^2}}$$

c) En remarquant que durant un instant  $dt$ , ces pertes sont associées à l'énergie dégagée lors de la solidification d'une petite couche d'eau d'épaisseur  $dR_f$ , trouver l'équation différentielle reliant les pertes de chaleur à la variation dans le temps de l'interface liquide-solide ( $R_f$ ). On appellera  $\Delta H_f$  la chaleur latente de solidification. (attention  $dR_f$  est négatif)

d) Combinez b et c et après intégration, obtenez le temps de solidification de la goutte:

$$t_f = \frac{\rho \Delta H_f}{k(T_f - T_A)} \left( \frac{R^2}{6} + \frac{kR}{3h} \right)$$

### Application numérique

$R=0.01$  m,  $h=300$  W/m<sup>2</sup>C,  $k=2.2$  W/m/C,  $\Delta H_f=333$  KJ/kg,  $\rho=1000$  kg/m<sup>3</sup>,  $(T_f-T_A)=10$  °C  
(622s)

**Solutionnaire Ex-5.1***Conduction en transitoire*

Une plaque métallique rectangulaire (largeur  $W$ , longueur  $L$ , épaisseur  $b$ ) de conductivité  $k$ , est initialement à une température uniforme  $T_0$ . Soudain ses deux faces sont mises en contact avec deux fluides ayant des températures  $T_1$  et  $T_2$  et les coefficients de transfert de chaleur sur les faces sont respectivement  $h_1$  et  $h_2$ .

Quelle est l'expression de la température au centre de la plaque en fonction du temps?

On supposera:  $(h_1 b/k) \ll 1$ ;  $(h_2 b/k) \ll 1$

1) Hypothèses :

puisque  $(h_1 b/k) \ll 1$  et  $(h_2 b/k) \ll 1$  alors on peut supposer que  $T=T(t)$   
 $k=\text{Constante}$

2) Volume de contrôle  $WLb$

3) Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre – Ce qui sort + Ce qui est généré = Ce qui s'accumule

– Ce qui sort = Ce qui s'accumule

$$-WLh_1(T - T_1) - WLh_2(T - T_2) = WLb\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

On divise par  $WL$

$$-(h_1 + h_2)T + (h_1T_1 + h_2T_2) = b\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad [1]$$

$$\text{posons : } u = -(h_1 + h_2)T + (h_1T_1 + h_2T_2)$$

$$\Rightarrow T = \frac{(h_1T_1 + h_2T_2) - u}{(h_1 + h_2)} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{(h_1 + h_2)} \frac{-\partial u}{\partial t}$$

$$[1] \Rightarrow u = b\rho C_p \frac{1}{(h_1 + h_2)} \frac{-\partial u}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{(h_1 + h_2)}{b\rho C_p} u \Rightarrow \frac{\partial u}{u} = -\frac{(h_1 + h_2)}{b\rho C_p} \partial t$$

$$\int_{u_0}^u \frac{\partial u}{u} = \int_{t=0}^t -\frac{(h_1 + h_2)}{b\rho C_p} \partial t \Rightarrow \ln \frac{u}{u_0} = -\frac{(h_1 + h_2)}{b\rho C_p} (t - 0)$$

$$\frac{u}{u_0} = \frac{-(h_1 + h_2)T + (h_1T_1 + h_2T_2)}{-(h_1 + h_2)T_0 + (h_1T_1 + h_2T_2)} = e^{-\frac{(h_1 + h_2)t}{b\rho C_p}}$$



**Solutionnaire Ex-5.2****Régime transitoire en cylindrique (abaque de Heissler)**

$$t = 20 \times 60 = 1200 \text{ s} \quad Fo = \frac{\alpha t}{r_o^2} = \frac{10^{-5} \times 1200}{0.10^2} = 1.2$$

$$Biot = \frac{h r_o}{k} = \frac{200 \times 0.10}{40} = 0.5 \Rightarrow Biot^{-1} = 2.$$

Sur la figure page 5.13

$$\text{pour } Fo = 1.2 \text{ et } Biot^{-1} = 2. \Rightarrow \theta_o^* = \frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} \approx 0.38 = \frac{T_o - 50}{400 - 50} \Rightarrow T_o = 0.38 \times 350 + 50 = 183^\circ \text{C}$$

Sur la figure 5.12 page 5.14 :

$$\text{pour } \frac{r}{r_o} = 1 \text{ et } Biot^{-1} = 2 \Rightarrow \frac{\theta}{\theta_o} = \frac{T_{r=r_o} - T_\infty}{T_o - T_\infty} \approx 0.78 \Rightarrow T_{r=r_o} \approx 0.78 \times (183 - 50) + 50 = 153.7^\circ \text{C}$$

(avec le logiciel, les valeurs exactes sont :  $T_o = 184.8$  et  $T_s = 156.6$ )

Sur la figure 5.13 page 5.14 :

$$\text{pour } Bi^2 Fo = 0.5^2 \times 1.2 = 0.30 \text{ et } Bi = 0.5 \text{ on lit } \frac{Q}{Q_o} \approx 0.6$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \Rightarrow \rho c_p = \frac{k}{\alpha} = \frac{40}{10^{-5}} = 4.10^6$$

$$\Rightarrow Q = 0.60 \times Q_o = 0.60 \times \rho c_p \times (\pi r_o^2 L) \times (T_i - T_\infty)$$

$$Q = 0.60 \times 4.10^6 \times (\pi \times 0.1^2 \times 2) \times (400 - 50) = 52778756.6 \text{ joules}$$

$$1 \text{ kWh} = 1000 \times 3600 = 3.6 \cdot 10^6 \text{ joules}$$

$$Q = \frac{52778756.6}{3.6 \cdot 10^6} = 14.7 \text{ kWh}$$

p.s. : Les réponses exactes avec le logiciel sont :  $T_o = 184.8^\circ \text{C}$ ,  $T_s = 156.6^\circ \text{C}$ ,  $\frac{Q}{Q_o} = 0.656$ ,  $Q = 16.03 \text{ kWh}$

**Solutionnaire Ex-5.3 Chauffage par induction, régime transitoire**

- a) le gradient radial de température dans la bille est négligeable si Biot < 0.1  
 b) Hypothèse : Biot < 0.1  $\Rightarrow T = T(t)$  uniquement

Volume contrôle: tout l'objet =  $\frac{4}{3}\pi R^3$

Bilan :

$$E_{in} - E_{out} + E_{généralé} = E_{accumulé}$$

$$0 - 4\pi R^2 h(T(t) - T_\infty) + \frac{4\pi R^3}{3} q''' = \frac{4\pi R^3}{3} \rho C_p \frac{\partial T(t)}{\partial t}$$

$$0 - \frac{3h}{R}(T(t) - T_\infty) + q''' = \rho C_p \frac{\partial T(t)}{\partial t}$$

$$\frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\frac{3h}{\rho C_p R}(T(t) - T_\infty) + \frac{q'''}{\rho C_p} = -\frac{3h}{\rho C_p R}T(t) + \left[ \frac{q'''}{\rho C_p} + \frac{3h}{\rho C_p R}T_\infty \right]$$

c)

$$\text{posons : } u = -\frac{3h}{\rho C_p R}T(t) + \left[ \frac{q'''}{\rho C_p} + \frac{3h}{\rho C_p R}T_\infty \right] \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{3h}{\rho C_p R} \frac{\partial T(t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\frac{\rho C_p R}{3h} \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial T(t)}{\partial t} = -\frac{\rho C_p R}{3h} \frac{\partial u}{\partial t} = u \Rightarrow \frac{\partial u}{u} = -\frac{3h}{\rho C_p R} \partial t$$

$$\int_{u_{t=0}}^{u_t} \frac{\partial u}{u} = -\frac{3h}{\rho C_p R} \int_0^t \partial t \Rightarrow \text{Ln} \left[ \frac{u}{u_{t=0}} \right] = -\frac{3h}{\rho C_p R} t$$

$$\Rightarrow \frac{u}{u_{t=0}} = \frac{-\frac{3h}{\rho C_p R}T(t) + \left[ \frac{q'''}{\rho C_p} + \frac{3h}{\rho C_p R}T_\infty \right]}{-\frac{3h}{\rho C_p R}T_0 + \left[ \frac{q'''}{\rho C_p} + \frac{3h}{\rho C_p R}T_\infty \right]} = e^{-\frac{3h}{\rho C_p R}t} = \frac{-\frac{3h}{R}T(t) + \left[ q''' + \frac{3h}{R}T_\infty \right]}{-\frac{3h}{R}T_0 + \left[ q''' + \frac{3h}{R}T_\infty \right]}$$

d)

Méthode 1 : la température d'équilibre s'obtient à  $t=\infty$

$$u_{t=\infty} = 0 \Rightarrow -\frac{3h}{\rho C_p R}T_{t=\infty} + \left[ \frac{q'''}{\rho C_p} + \frac{3h}{\rho C_p R}T_\infty \right] = 0 \Rightarrow T_{t=\infty} = \frac{\frac{q'''}{\rho C_p} + \frac{3h}{\rho C_p R}T_\infty}{\frac{3h}{\rho C_p R}} = \frac{q'''R}{3h} + T_\infty$$

Méthode 2 : à l'équilibre le bilan de chaleur donne :  $-E_{out} + E_{généralé} = 0 \Rightarrow E_{généralé} = E_{out}$

$$\frac{4\pi R^3}{3} q''' = 4\pi R^2 h(T_{t=\infty} - T_\infty) \Rightarrow T_{t=\infty} = T_\infty + \frac{Rq'''}{3h}$$

**Solutionnaire Ex-5.4 Régime transitoire géométrie semi-infinie**

La pièce de bronze est très épaisse et on suppose que loin de la surface c'est l'infini et on utilise le graphique p 5.22.

$$x = 0.05 \text{ m} \quad t = 10 \times 60 = 600 \text{ s} \quad \eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} = \frac{0.05}{2\sqrt{0.86 \cdot 10^{-5} \times 600}} = 0.348$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{150\sqrt{0.86 \cdot 10^{-5} \times 600}}{26} = 0.414$$

sur le graphique, on trouve:  $\frac{(T - T_i)}{(T_\infty - T_i)} \approx 0.18 \Rightarrow T \approx 0.18(T_\infty - T_i) + T_i = 0.18 \times (25 - 250) + 250 = 209.5^\circ \text{C}$

Le calcul exact avec l'équation [14] p. 5.20 donne:

$$\frac{(T - T_i)}{(T_\infty - T_i)} = 0.1774 \Rightarrow T = 0.1774 \times (25 - 250) + 250 = 210.1^\circ \text{C}$$

**Solutionnaire Ex-5.5 Profondeur pour enterrer les conduites d'eau**

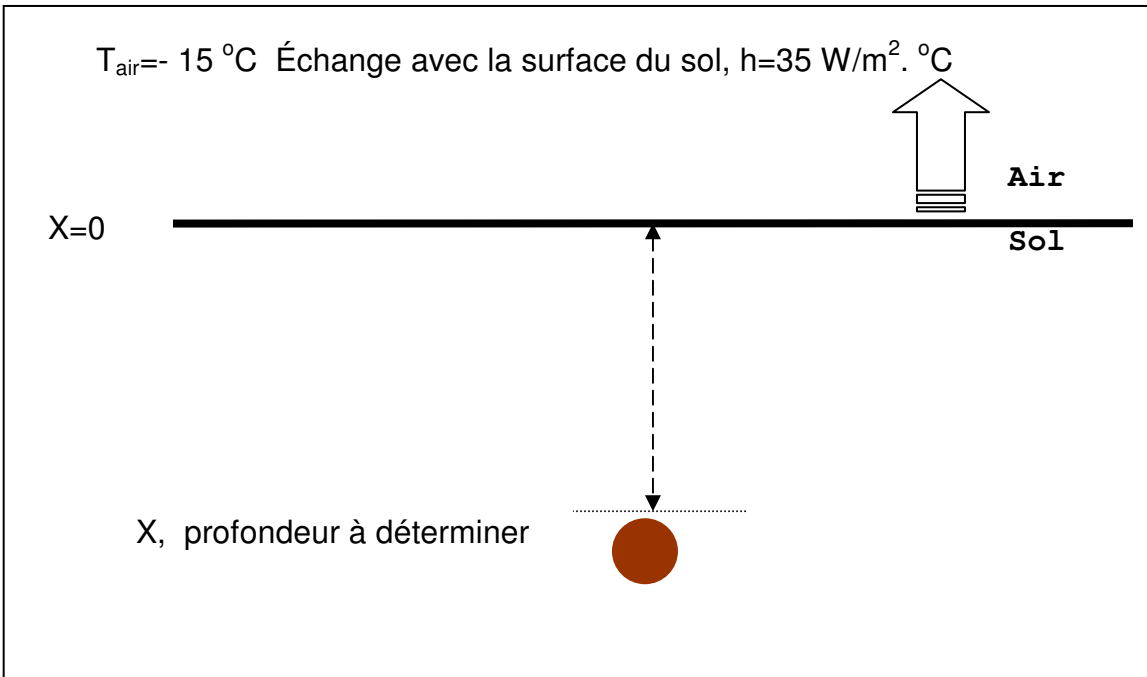
Les conduites d'eau potable enterrées dans le sol doivent être à l'abri du gel. Déterminer la profondeur d'enfouissement sécuritaire correspondant aux conditions extrêmes suivantes:

- le 31 octobre la température du sol est uniforme et égale à  $10^\circ \text{C}$
- le 1<sup>er</sup> novembre, il y a refroidissement à  $-15^\circ \text{C}$ , et cette température se maintient pendant 120 jours avec un fort vent qui impose un coefficient de transfert de chaleur à la surface du sol de  $35 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$
- et le 1<sup>er</sup> mars, il fait beau !

Propriétés du sol:  $k=0.52 \text{ W/m/K}$ ;  $\rho=2050 \text{ kg/m}^3$ ;  $C_p=1840 \text{ J/kg/K}$

Réponse :

Il s'agit là d'un cas d'échange à la surface d'un solide semi infini (figure p 5.22). On supposera que la température initiale du sol est uniforme et égale à  $10^\circ \text{C}$ . Au temps  $t=0$  (le 1<sup>er</sup> novembre), il y a échange à la surface avec un coefficient  $h=35 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$  avec de l'air à  $-15^\circ \text{C}$  et ces conditions durent pendant 120 jours. Pour éviter que l'eau de la conduite gèle, il faut qu'après 120 jours la température à la surface de la conduite (enterrée à une profondeur  $X$  que l'on cherche) soit supérieure ou égale à  $0^\circ \text{C}$



Pour ce problème, on a donc:

$$T_i = 10^{\circ}C \quad T_{\infty} = -15^{\circ}C \quad T(x, t = 120j) = 0^{\circ}C$$

$$\frac{T(x, t) - T_i}{T_{\infty} - T_i} = \frac{(0) - 10}{(-15) - 10} = \frac{10}{25} = 0.40$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho C_p} = \frac{0.52}{2050 \cdot 1840} = 1.38 \cdot 10^{-7} \quad t = 120 \cdot 24 \cdot 3600 = 1.037 \cdot 10^7$$

$$\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \frac{35 \sqrt{(1.38 \cdot 10^{-7})(1.037 \cdot 10^7)}}{0.52} = 80.47$$

Sur le graphique, la courbe correspondant à une valeur de  $\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = 80.47$  est la même que celle

pour  $\frac{h\sqrt{\alpha t}}{k} = \infty$ . Pour une valeur de l'ordonnée de 0.4, l'intersection avec la courbe  $\infty$  se fait à une valeur de l'abscisse

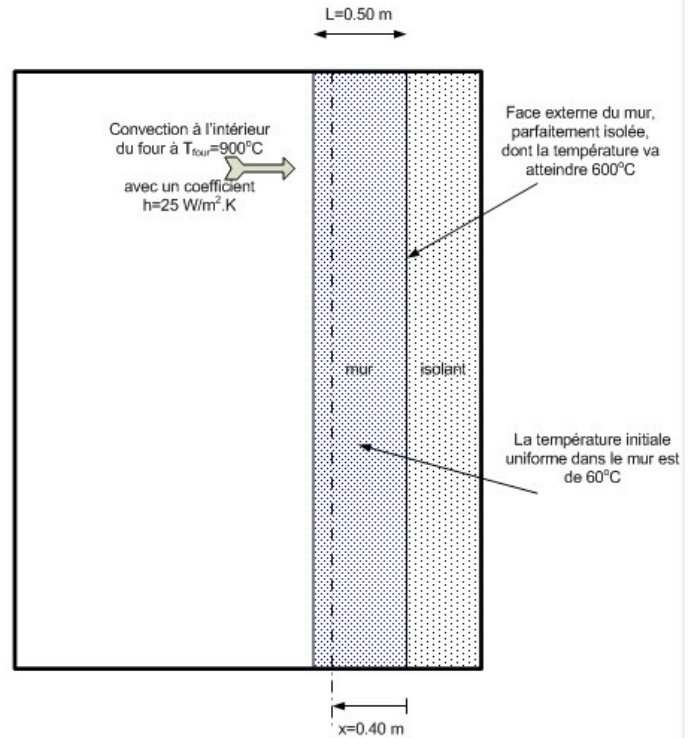
$$\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \approx 0.58$$

On trouve donc la valeur de

$$x = 0.58 \cdot 2\sqrt{\alpha t} = 1.14 \sqrt{1.38 \cdot 10^{-7} \cdot 1.037 \cdot 10^7} = 1.38 \text{ m}$$

## Solutionnaire Ex-5.6 Géométrie plane

Pour résoudre ce problème, il faut remarquer que la paroi externe du four est parfaitement isolée alors que la paroi interne est soumise à de la convection. La résolution en transitoire dans ce mur d'épaisseur  $L$  est équivalente à la résolution faite au paragraphe 5.2.1 pour un mur d'épaisseur  $2L$  dont les deux faces sont soumises à de la convection; au centre il y a une ligne de symétrie au travers de laquelle le flux est nul et nous retrouvons ainsi la géométrie de notre problème du four.



$$Biot = \frac{h L}{k} = \frac{25 \times 0.50}{1.25} = 10 \Rightarrow Bi^{-1} = 0.1$$

$$\frac{T_o - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \frac{600 - 900}{60 - 900} = \frac{300}{840} = 0.357$$

Sur la graphique 5.8 page 5.9, on trouve la valeur du nombre de Fourier :

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \approx 0.62 \Rightarrow t = \frac{Fo L^2}{\alpha} \quad \alpha = \frac{k}{\rho C_p} = \frac{1.25}{500 \times 837} = 2.98 \cdot 10^{-6}$$

$$t = \frac{0.62 \times 0.50^2}{2.98 \cdot 10^{-6}} = 51894 \text{ (14h 24min.54s)}$$

a) 10 cm sous la surface correspond à  $x=0.40$  et on utilise le graphique 5.19 page 5.10

$$\frac{x}{L} = \frac{0.40}{0.50} = 0.80 \Rightarrow \text{pour } Bi^{-1} = 0.1 \text{ on trouve } \frac{T_{x=0.40} - T_\infty}{T_o - T_\infty} \approx 0.415$$

$$\Rightarrow T_{x=0.40} = 0.415 \times (600 - 900) + 900 = 775^\circ C$$

b) Pour trouver l'énergie reçue par la paroi, on utilise le graphique 5.10 page 5.10

$$Bi^2 Fo = 10^2 \times 0.62 = 62 \Rightarrow \frac{Q}{Q_o} \approx 0.75$$

$$Q_o = Q_{\max} = L S \rho C_p (T_\infty - T_i) = 0.50 \times 1 \times 500 \times 837 \times (900 - 60) = 1.758 \cdot 10^8$$

$$Q = 1.318 \cdot 10^8 \text{ joules}$$

**Solutionnaire Ex-5.7** Géométrie sphérique:

Une bille métallique de 5 mm de rayon est initialement à une température uniforme de 400°C. Cette bille est soumise à un traitement thermique en deux étapes.

a) Dans la première, on la refroidit dans l'air à 20°C pendant un temps  $t_{\text{air}}$  nécessaire pour avoir une température au centre de la sphère égale à 335 °C. Pendant cette étape, le coefficient à la surface vaut  $h_{\text{air}}=10 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$ . L'hypothèse d'une résistance thermique interne négligeable est-elle applicable à cette étape ? Calculer le temps  $t_{\text{air}}$  ?]

b) Dans une deuxième étape, la bille est alors introduite dans un bain d'eau à la température de 20°C. Ce bain est fortement mélangé et le coefficient  $h_{\text{eau}}$  vaut alors 6000 W/m<sup>2</sup>.K. Quel est le temps requis pour avoir une température au centre de 50°C ?

Données:  $k=20 \text{ W/m}\cdot\text{K}$ ,  $c_p=1000 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ ;  $\rho=3000 \text{ kg/m}^3$

Réponses :

$$Bi = \frac{h R}{k} = \frac{10 \cdot 0.005}{20} = 0.0025$$

a) Le nombre de Biot vaut :

Biot étant inférieur à 0.1 la résistance thermique interne est donc négligeable  $\Rightarrow T = T(t)$

Bilan :

$$\cancel{E_{IN}} - E_{OUT} + \cancel{E_g} = E_{\text{accumulé}}$$

$$-4\pi R^2 h (T - T_{\text{air}}) = \rho C_p \left( \frac{4\pi R^3}{3} \right) \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$\left[ -\frac{\rho C_p R}{3h} \right] \frac{\partial T}{(T - T_{\text{air}})} = \partial t \Rightarrow \left[ -\frac{\rho C_p R}{3h} \right] \int_{T=0}^{T_t} \frac{\partial T}{(T - T_{\text{air}})} = \int_0^t \partial t$$

$$t = \left[ -\frac{\rho C_p R}{3h} \right] \text{Ln} \frac{T_t - T_{\text{air}}}{T_{t=0} - T_{\text{air}}}$$

application numérique :

$$t = \left[ -\frac{3000 \cdot 1000 \cdot 0.005}{3 \cdot 10} \right] \text{Ln} \frac{335 - 20}{400 - 20} = 500 \cdot 0.1876 = 93.80 \text{ s}$$

b) Le nombre de Biot vaut

$$Bi = \frac{h R}{k} = \frac{6000 \cdot 0.005}{20} = 1.5$$

## TDEX- 5.13

Biot étant supérieur à 0.1 la résistance thermique interne n'est plus négligeable,  $\Rightarrow T = T(r, t)$  et il faut donc utiliser les abaques de Heisler.

$$\theta_0 = \frac{T_{\text{centre à } t} - T_{\text{air}}}{T_{\text{initiale}} - T_{\text{air}}} = \frac{50 - 20}{335 - 20} = 0.095 \quad Bi = 1.5 \Rightarrow Bi^{-1} = \frac{1}{1.5} = 0.67$$

Sur la figure p 5.15 pour les valeurs ci-dessus on lit la valeur de  $t^*$ :

$$t^* = \frac{\alpha t}{R^2} \approx 0.84 \Rightarrow t = \frac{t^* R^2}{\alpha} = \frac{0.84 \cdot 0.005^2}{\left(\frac{k}{\rho C_p}\right)} = \frac{0.84 \cdot 0.005^2}{\left(\frac{20}{3000 \cdot 1000}\right)}$$

$$t = \frac{0.84 \cdot 0.005^2}{(6.66 \cdot 10^{-6})} = 3.15 \text{ s}$$

### **Solutionnaire Ex-5.8 Géométrie mixte**

La géométrie du problème est celle d'un cylindre court correspondant au cas (i) de la page 5.24. La solution sera le produit de la solution d'un cylindre infini par un plan.

- La température maximale est celle au centre de l'objet :  $r=0$  et  $x=0$
- La température minimale est celle à la périphérie :  $r=r_0=5 \text{ cm}$  et  $x=L=4 \text{ cm}$

On cherche les températures au centre d'un cylindre infini et d'un plan infini après 10 minutes. On utilisera la feuille Excel plutôt que les graphiques

Au centre du plan :

*pour le plan*  $T_{x=0} = 451.84 \text{ K}$   $T_{x=0.04} = 404.27 \text{ K}$

*pour le cylindre*  $T_{r=0} = 386.59 \text{ K}$   $T_{r=0.05} = 354.02 \text{ K}$

à  $r = 0$  et  $x = 0$

$$\frac{T_{r=0, x=0} - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{T_{x=0} - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \times \frac{T_{r=0} - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{451.84 - 300}{700 - 300} \times \frac{386.59 - 300}{700 - 300} = 0.082$$

$$T_{r=0, x=0} = 400 \times 0.082 + 300 = 332.9 \text{ K}$$

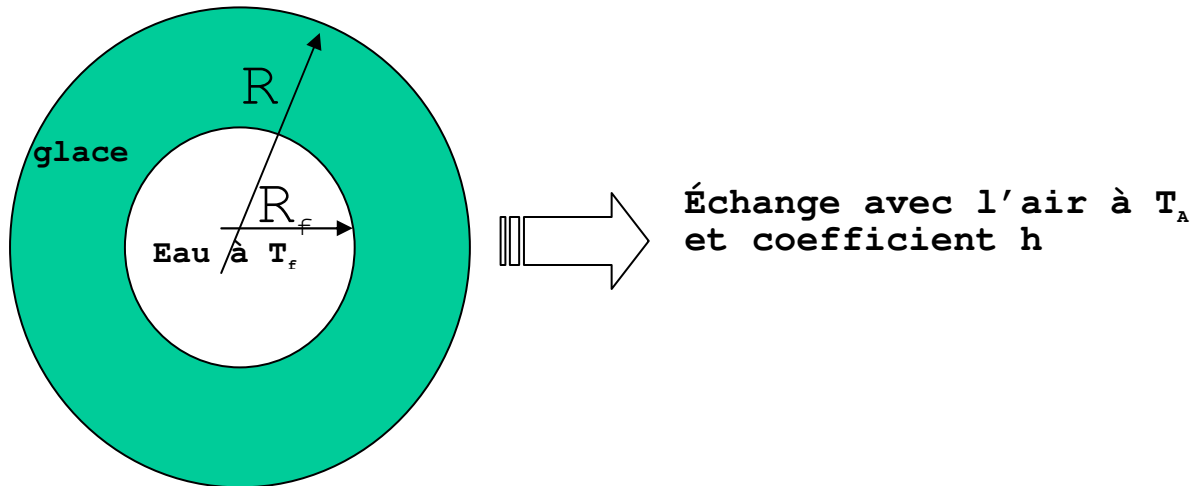
à  $r = 0.05$  et  $x = 0.04$

$$\frac{T_{r=0.05, x=0.04} - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{T_{x=0.04} - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \times \frac{T_{r=0.05} - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = \frac{404.27 - 300}{700 - 300} \times \frac{354.02 - 300}{700 - 300} = 0.035$$

$$T_{r=0, x=0} = 400 \times 0.035 + 300 = 314 \text{ K}$$

**Solutionnaire Ex-5.9**

Résolution d'un régime transitoire avec l'hypothèse du régime quasi-permanent : détermination du temps de solidification d'une goutte d'eau



a) Hypothèses

pas de génération de chaleur :  $E_G=0$ , régime quasi permanent;  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$   $k$ =constante

conduction unidirectionnelle :  $T = T(r)$

Volume de contrôle  $4\pi r^2 \Delta r$   
 Bilan de chaleur  $E_{IN} - E_{OUT} + \mathcal{E}_G = \mathcal{E}_{ACC} \Rightarrow E_{IN} - E_{OUT} = 0$

$$4\pi r^2 q''|_r - 4\pi r^2 q''|_{r+\Delta r} = 0 \quad \text{on divise par } 4\pi \Delta r \text{ (attention ne pas simplifier par } r^2)$$

$$\frac{r^2 q''|_r - r^2 q''|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = 0 \quad \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r^2 q''|_r - r^2 q''|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = -\frac{\partial(r^2 q'')}{\partial r} = 0$$

$$\Rightarrow r^2 q'' = C'_1 = r^2 \left( -k \frac{dT}{dr} \right) \Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{C'_1}{k r^2}$$

$$\Rightarrow T = \frac{-C'_1}{k} \frac{1}{r} + C_2 = C_1 \frac{1}{r} + C_2$$

b)

$$CF1: \quad r = R_f, \quad T = T_f = C_1 \frac{1}{R_f} + C_2$$

$$CF2: \quad r = R, \quad \left( -k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = h(T_{r=R} - T_A)$$



$$CF1 \Rightarrow C_2 = T_f - \frac{C_1}{R_f}$$

$$CF2 \Rightarrow \left( -k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -k \left( \frac{-C_1}{R^2} \right) = h(T_{r=R} - T_A) = h \left( \frac{C_1}{R} + C_2 - T_A \right) = h \left( \frac{C_1}{R} + T_f - \frac{C_1}{R_f} - T_A \right)$$

$$C_1 \left( \frac{k}{R^2} - \frac{h}{R} + \frac{h}{R_f} \right) = h(T_f - T_A) \Rightarrow C_1 = \frac{h(T_f - T_A)}{\left( \frac{k}{R^2} - \frac{h}{R} + \frac{h}{R_f} \right)} = \frac{(T_f - T_A)}{\left( \frac{k}{hR^2} - \frac{1}{R} + \frac{1}{R_f} \right)}$$

c)

$$Q_f = 4\pi R^2 q'' \Big|_{r=R} = 4\pi R^2 \left( -k \frac{\partial T}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = 4\pi R^2 \left( \frac{kC_1}{R^2} \right) = 4\pi R^2 \left( \frac{k}{R^2} \right) \frac{(T_f - T_A)}{\left( \frac{k}{hR^2} - \frac{1}{R} + \frac{1}{R_f} \right)}$$

$$Q_f = \frac{4\pi k (T_f - T_A)}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R} + \frac{k}{hR^2}}$$

d)

$$-4\pi R_f^2 \partial R_f \rho \Delta H_f = Q_f \partial t \Rightarrow -4\pi R_f^2 \partial R_f \rho \Delta H_f = \left( \frac{4\pi k (T_f - T_A)}{\frac{1}{R_f} - \frac{1}{R} + \frac{k}{hR^2}} \right) \partial t$$

$$R_f^2 \left( \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R} + \frac{k}{hR^2} \right) \partial R_f = -\frac{k}{\rho \Delta H_f} (T_f - T_A) \partial t$$

$$\left( R_f - \frac{R_f^2}{R} + \frac{kR_f^2}{hR^2} \right) \partial R_f = \left( R_f - R_f^2 \left[ \frac{1}{R} + \frac{k}{hR^2} \right] \right) \partial R_f = -\frac{k}{\rho \Delta H_f} (T_f - T_A) \partial t$$

$$\int_{R_f=R}^{R_f=0} \left( R_f + R_f^2 \left[ -\frac{1}{R} + \frac{k}{hR^2} \right] \right) \partial R_f = -\frac{k}{\rho \Delta H_f} (T_f - T_A) \int_{t=0}^{t=t_f} \partial t$$

$$\left( \frac{R_f^2}{2} + \frac{R_f^3}{3} \left[ \frac{k}{hR^2} - \frac{1}{R} \right] \right) \Big|_{R_f=R}^{R_f=0} = -\frac{k}{\rho \Delta H_f} (T_f - T_A) [t]_0^{t_f}$$

$$-\left( \frac{R^2}{2} + \frac{R^3}{3} \left[ \frac{k}{hR^2} - \frac{1}{R} \right] \right) = -\left( \frac{R^2}{2} + \frac{kR}{3h} - \frac{R^2}{3} \right) = -\frac{k}{\rho \Delta H_f} (T_f - T_A) t_f$$

$$t_f = \frac{\rho \Delta H_f}{k(T_f - T_A)} \left( \frac{R^2}{6} + \frac{kR}{3h} \right)$$



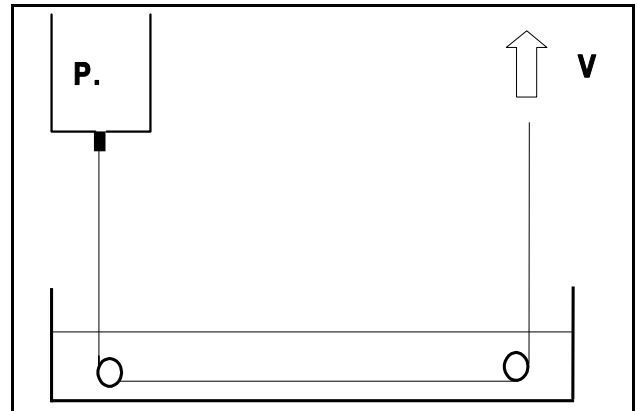
## Travaux dirigés et exercices du chapitre 6

### Travaux dirigés No 6

**Objectifs:** Bien comprendre les contributions d'advection (ou convection) dans les bilans de chaleur quand il y a un mouvement de matière au travers des surfaces délimitant le volume de contrôle.

#### Ex-6.1 (S) Refroidissement d'un fil de polymère (examen de 1996)

Un fil de polymère (P.), de rayon R, produit par extrusion, sort de la filière avec une vitesse V. Ce fil doit alors être refroidi, de  $T_1$  à  $T_2$ , dans un bain d'eau à la température  $T_a$ . Le coefficient de transfert de chaleur à la surface du fil est constant et vaut  $h_a$ .



Négligeant la conduction axiale, le gradient radial de température à l'intérieur du fil, et l'échange avec l'air avant l'entrée dans l'eau:

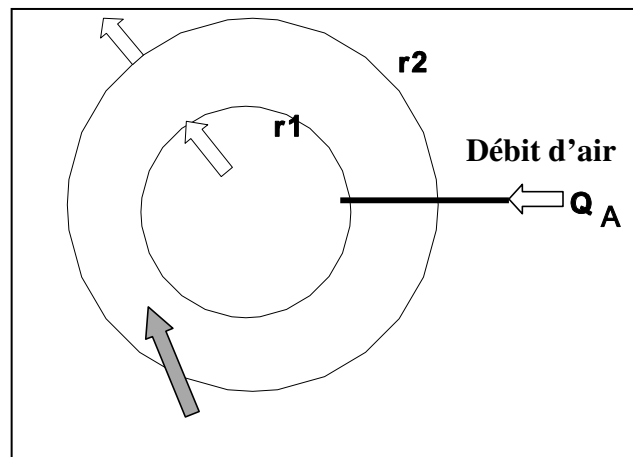
- déterminer l'expression du profil de température  $T(z)$ , avec  $z$  distance parcourue dans l'eau.
- déterminer la distance,  $L$ , que le fil doit parcourir pour atteindre la température  $T_2$ .

Réponse :

$$\frac{T(z) - T_a}{T_1 - T_a} = e^{-\frac{2h_a z}{\rho C_p V R}} \quad L = \frac{\rho C_p V R}{2h_a} \ln \frac{T_1 - T_a}{T_2 - T_a}$$

#### Ex-6.2 (S) Sphère poreuse (examen 1996)

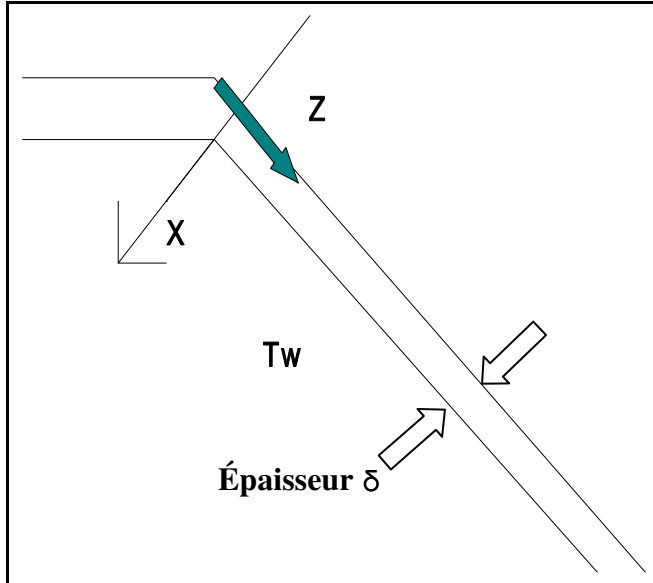
Une sphère creuse (rayon intérieur  $r_1$ , rayon extérieur  $r_2$ ) est faite d'un matériau poreux. Les températures des faces intérieure et extérieure sont  $T_1$  et  $T_2$ . Un débit d'air  $Q_A$  ( $m^3/s$ ) s'écoule au travers du matériau poreux de l'intérieur vers l'extérieur. On appelle  $k$ , la conductivité apparente de la paroi (air+matériau poreux). On souhaite déterminer le profil de température dans la paroi.



- Faites un bilan de chaleur sur un élément de volume approprié et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température.
- Trouvez l'expression du profil de température

Réponse :

$$\frac{T(r) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{e^{-\frac{\beta}{r}} - e^{-\frac{\beta}{r_{sub}}}}{e^{-\frac{\beta}{r_2}} - e^{-\frac{\beta}{r_1}}} \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{Q_A \rho C_p}{4\pi k}$$

**Travaux dirigés No 6 (suite)****Ex-6.3 (S) Écoulement et chauffage sur un plan incliné (examen 91)**

Un liquide (conductivité  $k$ , masse volumique  $\rho$ , capacité calorifique  $C_p$ ) s'écoule sur un plan incliné (longueur  $L$  et largeur  $W$ ) dont la surface est maintenue à une température constante  $T_w$  (voir figure ci-dessous). A l'entrée du plan le fluide, d'épaisseur  $\delta$ , est à une température uniforme  $T_0$  ( $< T_w$ ) et on suppose que le transfert de chaleur avec l'air environnant à la surface du liquide est négligeable. En régime laminaire, le profil de vitesse sur le plan est donné par:

$$v_z = V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right]$$

La température dans le liquide est donc fonction de la profondeur et de la distance parcourue depuis l'entrée sur le plan.

a) Faites un bilan de chaleur (le plus général possible) sur un élément de volume approprié dans le fluide et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température du liquide (ne pas résoudre cette équation)

réponse :

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

b) Simplifier l'équation précédente dans le cas où, suivant la direction  $z$ , la convection ou advection est beaucoup plus importante que la conduction.

réponse :

$$+k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \rho C_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

c) Quelles sont les conditions frontières nécessaires à la résolution des équations obtenues en a et b

réponses :

*pour b) CF1 :  $z = 0$   $T = T_0$ ; CF2 :  $x = \delta$   $T = T_w$ ; CF3 :  $x = 0$   $-k \partial T / \partial x = 0$ ;*

*pour a) CF4  $z$  : bilan d'énergie sur le film entre  $z = 0$  et  $z$*

## TDEX- 6.3

### Ex-6.4 (S) Couche limite sur une plaque

Une solution approximative au problème de la couche limite thermique sur une plaque est donnée par:

$$\frac{(T - T_s)}{(T_\infty - T_s)} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3$$

avec  $\delta = 5 x Re^{-1/2} Pr^{-1/3}$

et  $Re = (\rho V_\infty x) / \mu$

a)

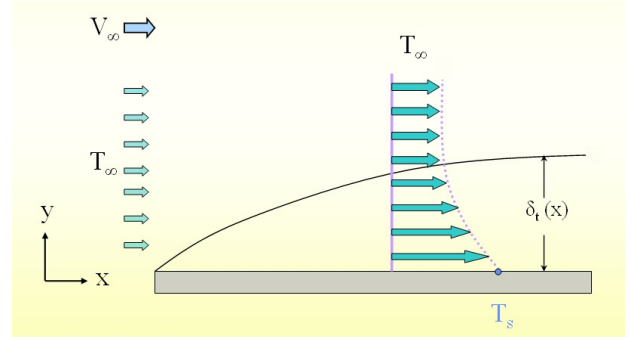
Donner l'expression du nombre de Nusselt local à une position x donnée ( $Nu_x = h_x x / k$ ) en fonction des nombres de Reynolds et Prandtl.

$$h_x = \frac{3k}{2\delta} \quad Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.3 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

Réponse :

b) Donner l'expression du coefficient moyen de transfert de chaleur, h, entre l'entrée de la plaque et cette position x. Comparez les nombres de Nusselt local et moyen ( $Nu = hx/k$ )

Réponse :  $\overline{Nu} = 2Nu_x$



### Ex-6.5 (S) Paroi poreuse

Une paroi poreuse d'épaisseur b, de largeur W et de hauteur L, sépare une chambre froide d'une pièce tempérée. Cette paroi poreuse est traversée par un débit d'air  $D_A$  ( $m^3/s$ ) qui s'écoule de la chambre froide vers l'extérieur. La face froide de la paroi est à une température  $T_1$  alors que la face extérieure est à la température  $T_2$ . La conductivité apparente dans la paroi poreuse (air+ matériau poreux) est k .

On souhaite déterminer le profil de température dans le matériau poreux ainsi que la quantité de chaleur qui rentre dans la chambre froide.

a) Faites un bilan de chaleur sur un élément de volume approprié dans la paroi

b) Obtenez l'expression du profil de température

$$\frac{T(z) - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{e^{Az} - 1}{e^{Ab} - 1} \quad \text{avec } A = \frac{D_A \rho C_p}{WLk}$$

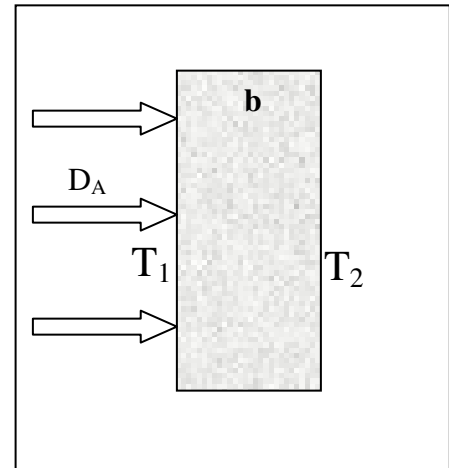
Réponse :

c) Déterminer l'expression de la quantité de chaleur, Q, qui rentre dans la chambre froide par la face intérieure.

$$Q = WLk (T_2 - T_1) \frac{A}{e^{Ab} - 1}$$

Réponse :

d) Sachant que la quantité,  $Q_0$ , qui rentrerait si il n'y avait pas d'écoulement d'air vaut, en valeur absolue:



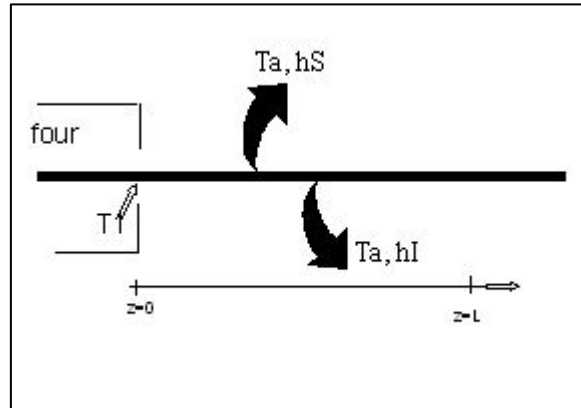
$Q_0 = W L k_{APP} (T_2 - T_1) / b$ , commentez l'effet du débit d'air, sur la variation du rapport  $Q/Q_0$

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{Ab}{e^{Ab} - 1}$$

Réponse :  $\frac{Q}{Q_0}$  vaut respectivement 0.77, 0.58, 0.31, 0.03 quand  $Ab$  vaut respectivement 0.5, 1, 2, 5 : donc la chaleur qui entre dans la chambre froide décroît quand  $D_A$  augmente.

**Ex-6.6 (S) Refroidissement d'une feuille métallique** (examen 2003)

Une feuille métallique de largeur  $W$  et d'épaisseur  $b$ , à la température uniforme  $T_1$  sort d'un four avec une vitesse  $V$ . La feuille échange avec l'air ambiant à la température  $T_A$  et les coefficients de transfert de chaleur sur les faces supérieure et inférieure de la feuille valent respectivement  $h_S$  et  $h_I$ . On suppose que le gradient de température dans l'épaisseur de la feuille est négligeable.



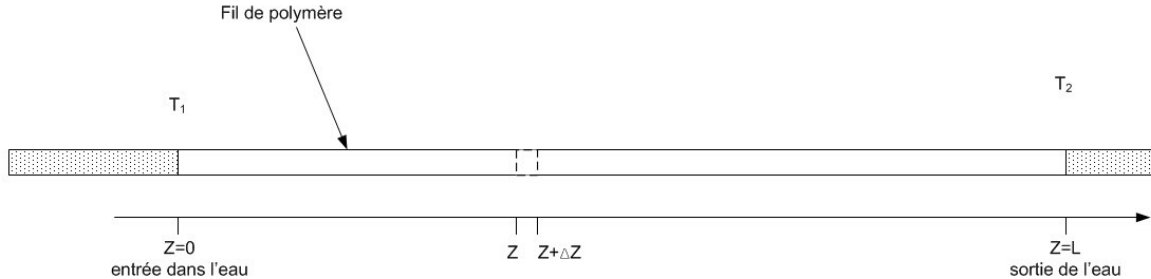
On supposera que  $h_S b / k \ll 1$  et  $h_I b / k \ll 1$

- a) Faites le bilan de chaleur sur un élément de volume approprié et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température dans la feuille.

Dans le cas où la vitesse  $V$  est élevée, on peut supposer que la conduction axiale est négligeable devant l'advection axiale. Simplifier l'équation obtenue en a) et obtenez l'expression de la variation de la température de la plaque avec la position  $z$ ?

**Solutionnaire: 6.1** Refroidissement d'un fil de polymère

a) On peut représenter le problème comme ci-dessous :



Hypothèses : Gradient radial négligeable  $\Rightarrow T=T(z)$  ;  $E_g=0$  régime permanent  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Volume de contrôle  $\pi R^2 \Delta z$

Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre (conduction+ advection) – Ce qui sort (conduction+advection+convection)=0

$$\underbrace{\pi R^2 q_z \Big|_z - \pi R^2 q_z \Big|_{z+\Delta z}}_{\text{terme de conduction axiale négligeable}} + \pi R^2 V \rho C_p (T_z - T_{ref}) \Big|_z - \pi R^2 V \rho C_p (T_z - T_{ref}) \Big|_{z+\Delta z} - 2\pi R \Delta z h (T_z - T_a) = 0$$

Comme on suppose que le terme de conduction axiale est négligeable devant les autres termes, le bilan se réduit à :

$$\pi R^2 V \rho C_p (T_z - T_{ref}) \Big|_z - \pi R^2 V \rho C_p (T_z - T_{ref}) \Big|_{z+\Delta z} - 2\pi R \Delta z h (T_z - T_a) = 0$$

$$RV \rho C_p (T_z - T_{ref}) \Big|_z - RV \rho C_p (T_z - T_{ref}) \Big|_{z+\Delta z} - 2\Delta z h (T_z - T_a) = 0$$

$$RV \rho C_p \frac{T_z - T_{z+\Delta z}}{\Delta z} - 2h(T_z - T_a) = 0 \quad \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{T_z - T_{z+\Delta z}}{\Delta z} = -\frac{\partial T_z}{\partial z}$$

$$-\frac{\partial T_z}{\partial z} - \frac{2h}{RV \rho C_p} (T_z - T_a) = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_z}{\partial z} = -\left[ \frac{2h}{RV \rho C_p} \right] (T_z - T_a) = 0$$

$$\text{posons } \theta = (T_z - T_a) \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial T_z}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\left[ \frac{2h}{RV \rho C_p} \right] \theta \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\theta} = -\left[ \frac{2h}{RV \rho C_p} \right] dz$$

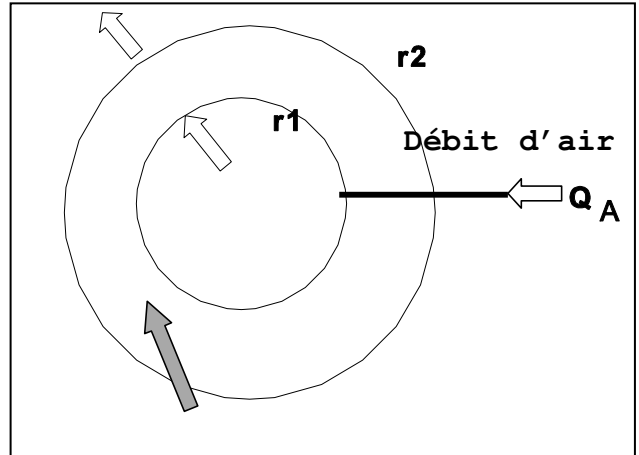
$$\text{Ln} \frac{T_z - T_a}{T_{z=0} - T_a} = -\left[ \frac{2h}{RV \rho C_p} \right] z \Rightarrow \text{Ln} \frac{T_z - T_a}{T_1 - T_a} = -\left[ \frac{2h}{RV \rho C_p} \right] z \Rightarrow \frac{T_z - T_a}{T_1 - T_a} = e^{-\left[ \frac{2h}{RV \rho C_p} \right] z}$$

b) à  $z=L$ ,  $T=T_2$  :

$$\text{Ln} \frac{T_2 - T_a}{T_1 - T_a} = -\left[ \frac{2h}{RV \rho C_p} \right] L \Rightarrow L = \left[ \frac{RV \rho C_p}{2h} \right] \text{Ln} \frac{T_1 - T_a}{T_2 - T_a}$$

**Solutionnaire 6.2: Sphère poreuse** (examen 1996)

Une sphère creuse (rayon intérieur  $r_1$ , rayon extérieur  $r_2$ ) est faite d'un matériau poreux. Les températures des faces intérieure et extérieure sont  $T_1$  et  $T_2$ . Un débit d'air  $Q_A$  ( $m^3/s$ ) s'écoule au travers du matériau poreux de l'intérieur vers l'extérieur. On appelle  $k$ , la conductivité apparente de la paroi (air+matériau poreux). On souhaite déterminer le profil de température dans la paroi.



Faites un bilan de chaleur sur un élément de volume approprié et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température.

- a) Faites un bilan de chaleur sur un élément de volume approprié et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température.
- b) Trouvez l'expression du profil de température

a)

Hypothèses :

$T=T(r)$   $k$ =conductivité apparente = Constante

$E_g=0$  régime permanent  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Volume de contrôle  $4\pi r^2 \Delta r$

Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre (conduction + advection) – Ce qui sort (conduction + advection) = 0

$$4\pi r^2 q_r''|_r - 4\pi r^2 q_r''|_{r+\Delta r} + Q_A \rho C_p (T - T_{ref})|_r - Q_A \rho C_p (T - T_{ref})|_{r+\Delta r} = 0$$

on divise par  $4\pi\Delta r$  et on fait tendre  $\Delta r$  vers 0

$$\frac{4\pi r^2 q_r''|_r - 4\pi r^2 q_r''|_{r+\Delta r}}{4\pi\Delta r} + \frac{Q_A \rho C_p (T - T_{ref})|_r - Q_A \rho C_p (T - T_{ref})|_{r+\Delta r}}{4\pi\Delta r} = 0$$

$$-\frac{\partial(r^2 q_r'')}{\partial r} - \frac{Q_A \rho C_p}{4\pi} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{mais} \quad q_r'' = -k \frac{\partial T}{\partial r}$$



$$k \frac{\partial \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} = \frac{Q_A \rho C_P}{4\pi} \frac{\partial T}{\partial r} \Leftrightarrow \frac{\partial \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)}{\partial r} = \left( \frac{Q_A \rho C_P}{4\pi k} \right) \frac{\partial T}{\partial r} = \beta \frac{\partial T}{\partial r}$$

on intègre une première fois, puis une deuxième fois :

$$\begin{aligned} \left( r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) &= \beta T + C_1 & \Rightarrow \frac{\partial T}{\beta T + C_1} &= \frac{\partial r}{r^2} \\ \frac{1}{\beta} \text{Ln}(\beta T + C_1) &= -\frac{1}{r} + C_2 & \Rightarrow \text{Ln}(\beta T + C_1) &= -\frac{\beta}{r} + C_2 \\ \beta T + C_1 &= e^{-\frac{\beta}{r} + C_2} & \Rightarrow T &= \left( \frac{1}{\beta} \right) \left( e^{-\frac{\beta}{r} + C_2} - C_1 \right) \end{aligned}$$

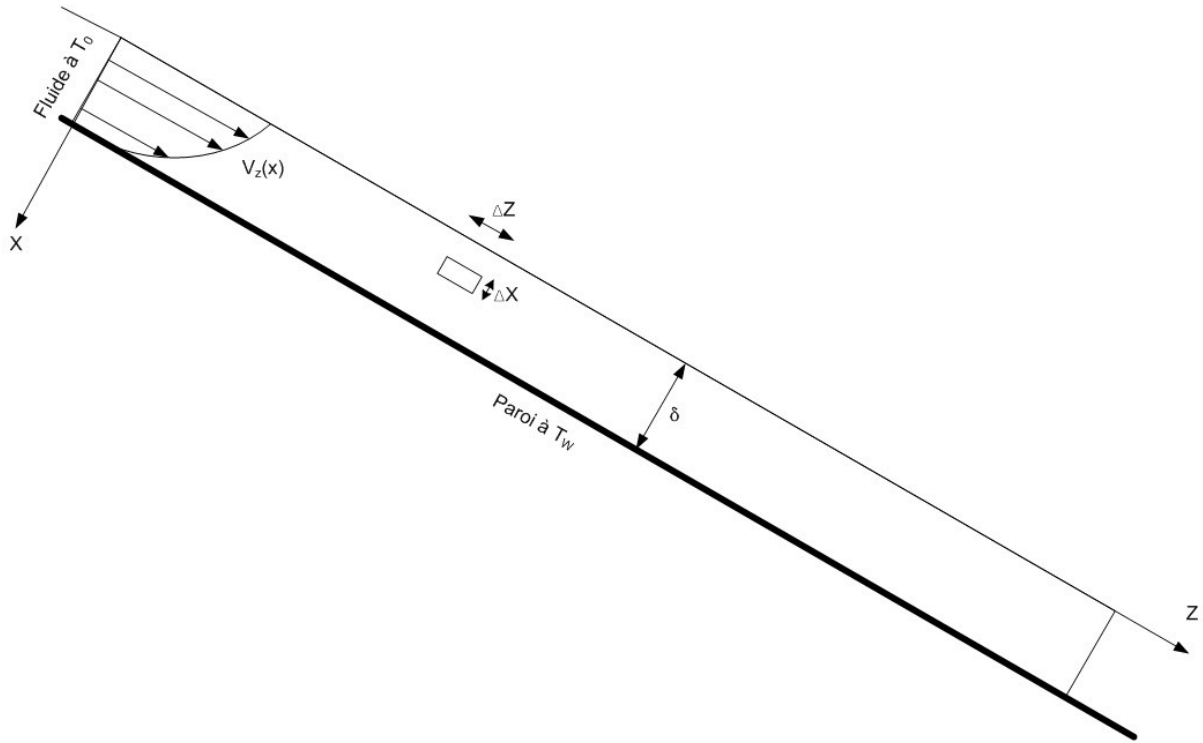
Pour trouver  $C_1$  et  $C_2$ , on utilise les deux conditions frontières :

$$\text{à } r=r_1 \text{ } T=T_1 \text{ et à } r=r_2 \text{ } T=T_2$$

Pour éviter de calculer  $C_1$  puis  $C_2$ , on calcule directement l'expression  $(T-T_1)/(T_2-T_1)$  :

$$\begin{aligned} \frac{T-T_1}{T_2-T_1} &= \frac{\left( \frac{1}{\beta} \right) \left( e^{-\frac{\beta}{r} + C_2} - C_1 \right) - \left( \frac{1}{\beta} \right) \left( e^{-\frac{\beta}{r_1} + C_2} - C_1 \right)}{\left( \frac{1}{\beta} \right) \left( e^{-\frac{\beta}{r_2} + C_2} - C_1 \right) - \left( \frac{1}{\beta} \right) \left( e^{-\frac{\beta}{r_1} + C_2} - C_1 \right)} = \frac{\cancel{e^{C_2}} \left( e^{-\frac{\beta}{r}} - e^{-\frac{\beta}{r_1}} \right)}{\cancel{e^{C_2}} \left( e^{-\frac{\beta}{r_2}} - e^{-\frac{\beta}{r_1}} \right)} \\ \frac{T-T_1}{T_2-T_1} &= \frac{\left( e^{-\frac{\beta}{r}} - e^{-\frac{\beta}{r_1}} \right)}{\left( e^{-\frac{\beta}{r_2}} - e^{-\frac{\beta}{r_1}} \right)} \end{aligned}$$

Solutionnaire Ex-6.3 Écoulement sur un plan incliné



a) Hypothèses :  $T=T(x,z)$  ;  $E_g=0$  régime permanent  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Volume de contrôle  $\Delta x \Delta z W$

Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre (conduction+ advection) – Ce qui sort (conduction+advection)=0

$$W \Delta x q_z'' \Big|_z - W \Delta x q_z'' \Big|_{z+\Delta z} + W \Delta z q_x'' \Big|_x - W \Delta z q_x'' \Big|_{x+\Delta x} + W \Delta x V_z \rho C_P (T_{x,z} - T_{ref}) \Big|_z - W \Delta x V_z \rho C_P (T_{x,z} - T_{ref}) \Big|_{z+\Delta z} = 0$$

$$\frac{W \Delta x q_z'' \Big|_z - W \Delta x q_z'' \Big|_{z+\Delta z}}{W \Delta x \Delta z} + \frac{W \Delta z q_x'' \Big|_x - W \Delta z q_x'' \Big|_{x+\Delta x}}{W \Delta x \Delta z} + \frac{W \Delta x V_z \rho C_P (T_{x,z} - T_{x,z+\Delta z})}{W \Delta x \Delta z} = 0$$

$$\frac{q_z'' \Big|_z - q_z'' \Big|_{z+\Delta z}}{\Delta z} + \frac{q_x'' \Big|_x - q_x'' \Big|_{x+\Delta x}}{\Delta x} + V_z \rho C_P \frac{(T_{x,z} - T_{x,z+\Delta z})}{\Delta z} = 0 \quad \text{on fait tendre } \Delta x \Delta z \text{ vers } 0$$

$$-\frac{\partial q_z''}{\partial z} - \frac{\partial q_x''}{\partial x} - V_z \rho C_P \frac{\partial T_{x,z}}{\partial z} = 0 \quad q_z'' = -k \frac{\partial T_{x,z}}{\partial z} \quad q_x'' = -k \frac{\partial T_{x,z}}{\partial x}$$

$$k \frac{\partial^2 T_{x,z}}{\partial z^2} + k \frac{\partial^2 T_{x,z}}{\partial x^2} - V_z \rho C_P \frac{\partial T_{x,z}}{\partial z} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k \frac{\partial^2 T_{x,z}}{\partial z^2} + k \frac{\partial^2 T_{x,z}}{\partial x^2} - V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \rho C_P \frac{\partial T_{x,z}}{\partial z} = 0$$

b)

$$\underbrace{k \frac{\partial^2 T_{x,z}}{\partial z^2}}_{\substack{\text{conduction suivant } z \\ \text{négligeable} \\ \text{devant l'advection}}} + \underbrace{k \frac{\partial^2 T_{x,z}}{\partial x^2}}_{\substack{\text{conduction} \\ \text{suivant } x}} - \underbrace{V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right]}_{\substack{\text{advection} \\ \text{suivant } z}} \rho C_P \frac{\partial T_{x,z}}{\partial z} = 0$$

$$k \frac{\partial^2 T_{x,z}}{\partial x^2} - V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \rho C_P \frac{\partial T_{x,z}}{\partial z} = 0$$

c) L'équation différentielle obtenue en b) est du 2<sup>e</sup> ordre par rapport à x et du 1<sup>er</sup> ordre par rapport à z, il faut donc 3 conditions frontières :

$$CF1 : \text{à } z = 0 \quad T_{x,0} = T_0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \delta$$

$$CF2 : \text{à } x = \delta \quad T_{\delta,z} = T_w \quad \text{pour } 0 \leq z \leq L$$

CF3 : échange de chaleur négligeable à la surface libre du liquide

$$\text{à } x = 0 \quad -k \left. \frac{\partial T_{x,z}}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq z \leq L$$

L'équation différentielle obtenue en a) est du 2<sup>e</sup> ordre par rapport à x et du 2<sup>e</sup> ordre par rapport à z, il faut donc 4 conditions frontières. On utilisera les 3 conditions ci-dessus. Pour obtenir une 4<sup>e</sup> condition, plusieurs possibilités:

a) on fait un bilan de chaleur macroscopique sur toute l'épaisseur du film entre l'entrée z=0 et z=L :

$$\int_{x=0}^{x=\delta} V_{\max} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right] \rho C_P (T_{x,0} - T_{x,L}) W dx = \int_{z=0}^L -k \left( \frac{\partial T_{x,z}}{\partial x} \right) \Big|_{x=\delta} W dz$$

b) Le plan est suffisamment long pour que le profil de température suivant z soit établi :

$$\text{à } x = L \quad -k \left. \frac{\partial T_{x,z}}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \delta$$

c) Le plan est suffisamment long pour que la température du film soit égale à T<sub>w</sub>

$$\text{à } x = L \quad T_{x,z=L} = T_w \quad \text{pour } 0 \leq x \leq \delta$$

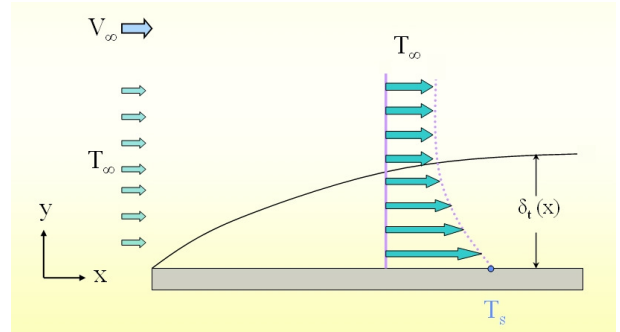
**Solutionnaire : Ex-6.4**

Une solution approximative au problème de la couche limite thermique sur une plaque est donnée par :

$$\frac{(T - T_s)}{(T_\infty - T_s)} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3$$

$$\text{avec } \delta = 5 x Re^{-1/2} Pr^{-1/3}$$

a) et  $Re = (\rho V_\infty x) / \mu$



Donner l'expression du nombre de Nusselt local à une position x donnée ( $Nu_x = h_x x / k$ ) en fonction des nombres de Reynolds et Prandtl.

b) Donner l'expression du coefficient moyen de transfert de chaleur, h, entre l'entrée de la plaque et cette position x. Comparez les nombres de Nusselt local et moyen ( $Nu = hx/k$ )

Réponse:

a) à la paroi

$$q'' = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = h_x (T_{y=0} - T_\infty)$$

connaissant  $\frac{(T - T_s)}{(T_\infty - T_s)} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3$  on peut calculer  $\frac{\partial T}{\partial y}$  et  $T_{y=0}$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = (T_\infty - T_s) \left[ \frac{3}{2} \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2} \frac{3y^2}{\delta^3} \right]_{y=0} = (T_\infty - T_s) \frac{3}{2\delta}$$

$$\frac{(T_{y=0} - T_s)}{(T_\infty - T_s)} = 0 \Rightarrow T_{y=0} = T_s$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = h_x (T_{y=0} - T_\infty) \Leftrightarrow -k (T_\infty - T_s) \frac{3}{2\delta} = h_x (T_s - T_\infty)$$

$$\Rightarrow h_x = \frac{3k}{2\delta}$$

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = \frac{\frac{3k}{2\delta} x}{k} = \frac{3x}{2\delta} \quad \text{sachant que } \delta = 5 x Re^{-1/2} Pr^{-1/3}$$

$$Nu_x = \frac{3x}{2(5 x Re^{-1/2} Pr^{-1/3})} = \frac{3k}{10 \cancel{x} Re^{-1/2} Pr^{-1/3}} = 0.3 Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

b)

**TDEX- 6.11**

$$Nu_x = \frac{h_x x}{k} = 0.3 Re^{1/2} Pr^{1/3} \Rightarrow h_x = 0.3 \frac{k}{x} Re^{1/2} Pr^{1/3}$$

$$\bar{h}_x = \frac{1}{x} \int_0^x h_x dx = \frac{1}{x} \int_0^x 0.3 \frac{k}{x} Re^{1/2} Pr^{1/3} dx = \frac{1}{x} \int_0^x 0.3 \frac{k}{x} \left( \frac{\rho V_\infty x}{\mu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} dx$$

$$\bar{h}_x = \frac{0.3 k}{x} \left( \frac{\rho V_\infty}{\mu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} \int_0^x \frac{x^{1/2}}{x} dx$$

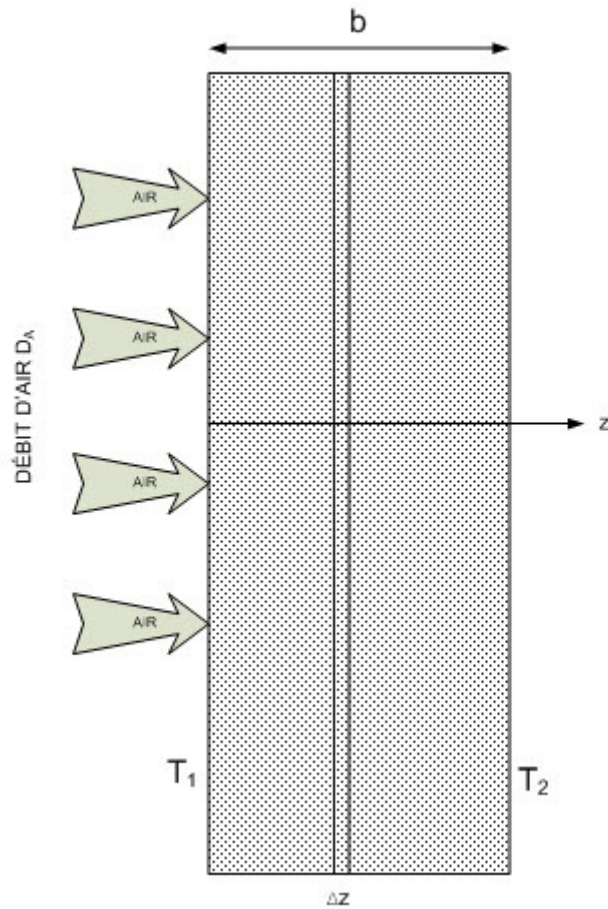
$$\int_0^x \frac{x^{1/2}}{x} dx = \int_0^x x^{-1/2} dx = \left[ 2 x^{1/2} \right]_0^x = 2 x^{1/2}$$

$$\Rightarrow \bar{h}_x = \frac{0.3 k}{x} \left( \frac{\rho V_\infty}{\mu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} 2 x^{1/2} = 2 \left[ 0.3 \frac{k}{x} \left( \frac{\rho V_\infty x}{\mu} \right)^{1/2} Pr^{1/3} \right] = 2 \left[ 0.3 \frac{k}{x} Re^{1/2} Pr^{1/3} \right] = 2 h_x$$

$$\bar{Nu}_x = \frac{\bar{h}_x x}{k} = \frac{2 h_x x}{k} = 2 \frac{h_x x}{k} = 2 Nu_x$$

$$\bar{Nu}_x = 2 Nu_x$$

## Solutionnaire 6.5 : Paroi poreuse



Hypothèses :  $T=T(z)$  ;  $E_g=0$  régime permanent  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Volume de contrôle  $W L \Delta z$

Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre (conduction+ advection) – Ce qui sort (conduction+advection)=0

$$WLq_z|_z - WLq_z''|_{z+\Delta z} + D_A\rho C_P(T_z - T_{ref})|_z - D_A\rho C_P(T_z - T_{ref})|_{z+\Delta z} = 0$$

$$\frac{WLq_z''|_z - WLq_z''|_{z+\Delta z}}{WL\Delta z} + \frac{D_A\rho C_P(T_z - T_{z+\Delta z})}{WL\Delta z} = \frac{q_z''|_z - q_z''|_{z+\Delta z}}{\Delta z} + \frac{D_A\rho C_P(T_z - T_{z+\Delta z})}{WL\Delta z} = 0$$

on fait tendre  $\Delta z$  vers 0

$$-\frac{\partial q_z''}{\partial z} - \left( \frac{D_A \rho C_P}{WL} \right) \frac{\partial T_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial q_z''}{\partial z} = - \left( \frac{D_A \rho C_P}{WL} \right) \frac{\partial T_z}{\partial z} \Rightarrow q_z'' = - \left( \frac{D_A \rho C_P}{WL} \right) T_z + C_1$$

$$q_z'' = -k \frac{\partial T_z}{\partial z} = - \left( \frac{D_A \rho C_P}{WL} \right) T_z + C_1 \Rightarrow \frac{\partial T_z}{\partial z} = \left( \frac{D_A \rho C_P}{kWL} \right) T_z - \frac{C_1}{k} = \left( \frac{D_A \rho C_P}{kWL} \right) T_z + C_1' = \alpha T_z + C_1'$$

$$\frac{\partial T_z}{\alpha T_z + C_1'} = \partial z \Rightarrow \int \frac{\partial T_z}{\alpha T_z + C_1'} = \int \partial z \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \ln \alpha T_z + C_1' = z + C_2$$

$$\Rightarrow \alpha T_z + C_1' = e^{\alpha(z+C_2)} = e^{\alpha z + \alpha C_2} = e^{\alpha C_2} e^{\alpha z} = C_2' e^{\alpha z} \Rightarrow T_z = \frac{C_2' e^{\alpha z} - C_1'}{\alpha}$$

Pour trouver les constantes d'intégration, on utilise les conditions frontières à  $z=0$   $T=T_1$  et à  $z=b$   $T=T_2$ .

Plus simplement on va calculer directement l'expression :  $\frac{T_z - T_{z=0}}{T_{z=b} - T_{z=0}}$

$$\frac{T_z - T_{z=0}}{T_{z=b} - T_{z=0}} = \frac{T_z - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\frac{C_2' e^{\alpha z} - C_1'}{\alpha} - \frac{C_2' e^{\alpha 0} - C_1'}{\alpha}}{\frac{C_2' e^{\alpha b} - C_1'}{\alpha} - \frac{C_2' e^{\alpha 0} - C_1'}{\alpha}} = \frac{e^{\alpha z} - 1}{e^{\alpha b} - 1}$$

$$\frac{T_z - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{e^{\alpha z} - 1}{e^{\alpha b} - 1} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{D_A \rho C_P}{WL}$$

La quantité de chaleur, Q, entre dans la chambre froide à  $z=0$ . En ce point, c'est la conduction qui apporte la chaleur de l'extérieur :

$$Q = WLq_z'' = WL \left( -k \frac{\partial T_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} \quad T_z = (T_2 - T_1) \frac{e^{\alpha z} - 1}{e^{\alpha b} - 1} + T_1 \quad -k \frac{\partial T_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = -k \frac{(T_2 - T_1) \alpha e^{\alpha z}}{e^{\alpha b} - 1} \Big|_{z=0}$$

$$Q = -WLk (T_2 - T_1) \frac{\alpha}{e^{\alpha b} - 1} \quad \text{signe négatif car le flux est dans le sens contraire de l'axe}$$

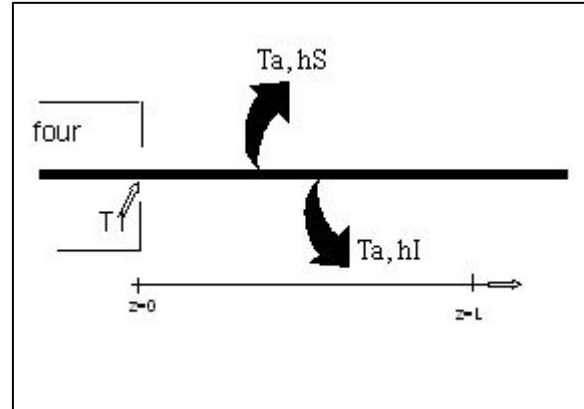
Si on compare avec le flux  $Q_0$  entrant sans écoulement: (voir Notes de cours paragraphe 3.2)

$$\left| \frac{Q}{Q_0} \right| = \frac{WLk (T_2 - T_1) \frac{\alpha}{e^{\alpha b} - 1}}{\frac{WLk (T_2 - T_1)}{b}} = \frac{\alpha b}{e^{\alpha b} - 1}$$

$(Q/Q_0)$  vaut respectivement 0.77, 0.58, 0.31, 0.03 quand  $\alpha b$  vaut respectivement 0.5, 1, 2, 5 : donc la quantité de chaleur qui entre dans la chambre froide décroît quand  $D_A$  augmente: le flux d'air sortant de la paroi s'oppose à l'entrée de la chaleur (cet effet est appelé en anglais « transpiration cooling » (voir le livre Transport Phenomena).

**Solutionnaire : Ex-6.6** Refroidissement d'une feuille métallique (examen 2003)

Une feuille métallique de largeur  $W$  et d'épaisseur  $b$ , à la température uniforme  $T_1$  sort d'un four avec une vitesse  $V$ . La feuille échange avec l'air ambiant à la température  $T_A$  et les coefficients de transfert de chaleur sur les faces supérieure et inférieure de la feuille valent respectivement  $h_S$  et  $h_I$ . On suppose que le gradient de température dans l'épaisseur de la feuille est négligeable.



On supposera que  $h_S b/k \ll 1$  et  $h_I b/k \ll 1$

- Faites le bilan de chaleur sur un élément de volume approprié et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température dans la feuille.
- Dans le cas où la vitesse  $V$  est élevée, on peut supposer que la conduction axiale est négligeable devant l'advection axiale. Simplifier l'équation obtenue en a) et obtenez l'expression de la variation de la température de la plaque avec la position  $z$ ?

Réponses :

a) Hypothèses:

Comme Biot est très inférieur à 1, on supposera que la température ne varie pas dans l'épaisseur de la plaque et varie uniquement avec la position axiale  $z$  :  $T=T(z)$

$$k=\text{constante, régime permanent} \quad \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

Volume de contrôle:  $W b \Delta z$

Bilan d'énergie thermique:

	<i>IN</i>	<i>OUT</i>	
<i>conduction</i>	$Wbq'' _z$	$- Wbq'' _{z+\Delta z}$	
<i>advection</i>	$Wb\rho C_p V (T - T_{ref}) _z$	$- Wb\rho C_p V (T - T_{ref}) _{z+\Delta z}$	
<i>convection dessous</i>		$-W\Delta z h_I (T - T_a)$	
<i>convection dessus</i>		$-W\Delta z h_S (T - T_a)$	$= 0$

On divise par  $W b \Delta z$  et on fait tendre  $\Delta z$  vers 0



$$\frac{q''|_z - q''|_{z+\Delta z}}{\Delta z} + \rho C_p V \left[ \frac{T_z - T_{z+\Delta z}}{\Delta z} \right] - \frac{(h_l + h_s)}{b} (T - T_a) = 0$$

$$-\frac{\partial q''}{\partial z} - \rho C_p V \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{(h_l + h_s)}{b} (T - T_a) = 0$$

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \rho C_p V \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{(h_l + h_s)}{b} (T - T_a) = 0$$

b) Si la conduction axiale est négligeable devant l'advection alors :

$$\approx 0$$

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \rho C_p V \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{(h_l + h_s)}{b} (T - T_a) = 0$$

$$-\rho C_p V \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{(h_l + h_s)}{b} (T - T_a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho C_p V \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{(h_l + h_s)}{b} (T - T_a)$$

$$\frac{\partial T}{(T - T_a)} = -\frac{(h_l + h_s)}{b \rho C_p V} \partial z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial(T - T_a)}{(T - T_a)} = -\frac{(h_l + h_s)}{b \rho C_p V} \partial z$$

$$\int_{T_1}^T \frac{\partial(T - T_a)}{(T - T_a)} = -\frac{(h_l + h_s)}{b \rho C_p V} \int_{z=0}^z \partial z$$

$$Ln \frac{(T - T_a)}{(T_1 - T_a)} = -\frac{(h_l + h_s)}{b \rho C_p V} z$$

**Travaux dirigés No 7****Exemple d'examen No 2**

GCH-18243, Examen No 2

Notation sur 25 pts

Notes de cours autorisées:

Date: 24 octobre 2003

Durée 110 min.

si vous utilisez des solutions graphiques, mentionnez les numéros et pages de ces graphiques.

**1) Refroidissement d'une plaque de cuivre (4. pts)**

Une plaque de cuivre (longueur  $L=8$  cm, largeur  $W=5$  cm, épaisseur  $b=1$  mm) sort d'un four à une température uniforme de  $150$  °C. On la plonge immédiatement dans un fluide de refroidissement qui est à une température de  $15$  °C et le coefficient de transfert de chaleur à la surface de la plaque vaut  $250$  W/m<sup>2</sup>.K. Quel est le temps nécessaire pour refroidir la plaque à  $25$  °C ? Justifier toutes vos hypothèses et faites la démonstration du bilan thermique.

Données: Pour le cuivre:  $k=398.0$  W/m/K;  $\rho=8933$  kg/m<sup>3</sup>;  $C_p=389$  J/kg/K

(réponse : 17.5 s)

**2) Refroidissement d'une bille de plastique (4. pts)**

Une bille de plastique de 35 mm de rayon est initialement à une température uniforme de  $85$ °C. On la place dans un courant d'air frais à  $10$ °C. Sachant que la température au centre de la bille est de  $41$ °C après 184 minutes de refroidissement, trouver la valeur du coefficient de transfert de chaleur à la surface de la bille durant ce refroidissement.

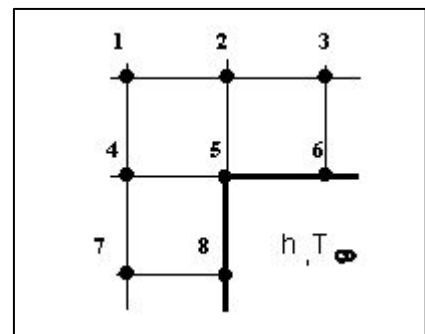
Données: Pour le plastique:  $k=0.5$  W/m/K;  $\rho=1170$  kg/m<sup>3</sup>;  $C_p=1930$  J/kg/K

(réponse : 2.38)

**3) Méthode explicite de différences finies en transitoire (4.5 pts)**

Pour le maillage ci-contre d'une pièce métallique d'épaisseur  $L$  et dans le cas d'un régime transitoire écrivez le bilan thermique autour du noeud 5 et en utilisant la méthode explicite, obtenez la relation permettant de relier  $T_5(t+\Delta t)$  en fonction des températures des noeuds au temps  $t$ .

(On a  $\Delta x=\Delta y$  et on pourra utiliser l'hypothèse des flux entrants)



**4) Profondeur pour enterrer les conduites d'eau (4.5 pts)**

Les conduites d'eau potable enterrées dans le sol doivent être à l'abri du gel. Déterminer la profondeur d'enfouissement sécuritaire correspondant aux conditions extrêmes suivantes:

- le 31 octobre la température du sol est uniforme et égale à 10 °C
- le 1<sup>er</sup> novembre, il y a refroidissement à -15 °C, et cette température se maintient pendant 120 jours avec un fort vent qui impose un coefficient de transfert de chaleur à la surface du sol de 35 W/m<sup>2</sup>.K
- et le 1<sup>er</sup> mars, il fait beau !

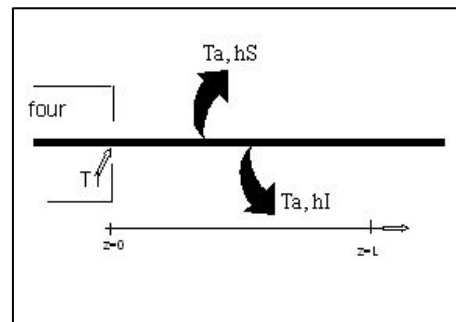
Propriétés du sol:  $k=0.52 \text{ W/m/K}$ ;  $\rho=2050 \text{ kg/m}^3$ ;  $C_p=1840 \text{ J/kg/K}$   
 (réponse 1.38 m , voir Ex-5.5)

**5) Quiz (2 pts): Cochez la case appropriée**

PROPOSITIONS	OUI VRAI	NON FAUX
le coefficient h sur un objet dépend de la conductivité thermique de l'objet		
lors d'un processus transitoire de refroidissement dans un objet, plus la résistance thermique interne est élevée, plus le gradient de température dans l'objet est faible		
pour calculer le nombre de Biot associé à un objet, on utilise uniquement les propriétés du matériau de l'objet		
pour une géométrie donnée, le nombre de Nusselt est uniquement fonction du nombre de Reynolds		

**6) Refroidissement d'une feuille métallique (6 pts)**

Une feuille métallique de largeur  $W$  et d'épaisseur  $b$ , à la température uniforme  $T_1$  sort d'un four avec une vitesse  $V$ . La feuille échange avec l'air ambiant à la température  $T_A$  et les coefficients de transfert de chaleur sur les faces supérieure et inférieure de la feuille valent respectivement  $h_S$  et  $h_I$ . On suppose que le gradient de température dans l'épaisseur de la feuille est négligeable.



On supposera que  $h_S b/k \ll 1$  et  $h_I b/k \ll 1$

- a) Faites le bilan de chaleur sur un élément de volume approprié et obtenez l'équation différentielle que doit vérifier la température dans la feuille.
- b) Dans le cas où la vitesse  $V$  est élevée, on peut supposer que la conduction axiale est négligeable devant l'advection axiale. Simplifier l'équation obtenue en a) et obtenez l'expression de la variation de la température de la plaque avec la position  $z$ ?  
 (réponses voir Ex-6.6)



## Travaux dirigés et exercices du chapitre 7 : Convection externe

### Travaux dirigés No 8

#### **Ex-7.1 (S)** Calcul du coefficient h sur une sphère à l'aide d'une corrélation

On laisse tomber dans un réservoir profond rempli d'une huile à une température constante  $T_H$ , une bille sphérique de rayon  $R$ . On néglige la phase d'accélération de la bille et on suppose que la vitesse terminale de chute  $V_T$  est atteinte immédiatement.

Supposant que les propriétés de l'huile sont constantes, quelle est la valeur du coefficient  $h$  de transfert de chaleur à la surface de la sphère ? [réponse : 651.1]

Données: la bille:  $R = 0.003$  m,  $V_T = 0.23$  m/s,  $C_{PS} = 1000$  J/kg/K,  $\rho_S = 2600$  kg/m<sup>3</sup>  
 l'huile :  $\mu_L = 0.055$  Pa.s,  $C_{PL} = 1885$  J/kg/K  
 $\rho_L = 900$  kg/m<sup>3</sup>,  $k_L = 0.145$  W/m/K

$$Nu = (h D/k_L) = 2 + 0.6 Re^{0.5} Pr^{0.33}, \text{ avec } Re = \rho_L V D / \mu_L, Pr = C_{PL} \mu_L / k_L$$

#### **Ex-7.2 (S)** Calcul d'un coefficient h à partir d'une solution analytique

- Faire l'exercice 6.4
- Cas limite pour l'écoulement autour d'une sphère

Démontrer que pour la conduction dans un fluide autour d'une sphère, on peut écrire  $Nu=2$ .

On suppose qu'une sphère de rayon  $R$  est plongée dans un fluide stagnant dont la température loin de la sphère est  $T_\infty$ . La température à la surface de la sphère est  $T_S$ . Déterminer l'expression du profil de température pour  $r \geq R$ . Calculer le flux à la surface et trouver la valeur du nombre de Nusselt en utilisant la définition du coefficient  $h$ .

#### **Ex-7.3(S)** Calcul du coefficient h autour d'un cylindre à l'aide d'une corrélation

Une huile, dont les propriétés sont données à l'exercice 1, s'écoule avec une vitesse de 0.55 m/s perpendiculairement à un cylindre de 0.05 m de rayon.

Quelle est la valeur du coefficient  $h$  à la surface du cylindre en utilisant la relation 7.45 p 7.4.1 ?

[réponse : 210.8]

Comparer avec la valeur obtenue en utilisant l'équation 7.47

[réponse : 246.5]

**Solutionnaire 7.1 Calcul d'un coefficient h**

$$Nu = \frac{hD}{k_L} = 2 + 0.6 Re^{0.5} Pr^{0.33} \quad Re = \frac{\rho_L V_T D}{\mu_L} = \frac{900 \times 0.23 \times 0.006}{0.055} = 22.58$$

$$Pr = \frac{C_{PL} \mu_L}{k_L} = \frac{1885 \times 0.055}{0.145} = 715 \quad Nu = 2 + 0.6 \times 22.58^{0.5} \times 715^{0.33} = 26.94$$

$$h = \frac{26.94 \times 0.145}{0.006} = 651.1$$

**Solutionnaire Ex-7.2b** :

Démontrer que pour la conduction autour d'une sphère, on peut écrire  $Nu=2$ .

On suppose qu'une sphère de rayon R est plongée dans un fluide stagnant dont la température loin de la sphère est  $T_\infty$ . La température à la surface de la sphère est  $T_s$ . Déterminer l'expression du profil de température pour  $r \geq R$ . Calculer le flux à la surface et trouver la valeur du nombre de Nusselt en utilisant la définition du coefficient h.

1) Hypothèses :

$$T=T(r) \quad k=\text{Constante} \quad E_G=0 \quad \text{régime permanent} \quad \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

2) Volume de contrôle  $4\pi r^2 \Delta r$

3) Bilan sur le volume de contrôle

Ce qui rentre – Ce qui sort = 0  
(terme uniquement de conduction si fluide stagnant)

$$4\pi r^2 q_r''|_r - 4\pi r^2 q_r''|_{r+\Delta r} = 0$$

On divise par  $4\pi \Delta r$  et on fait tendre  $\Delta r$  vers 0

$$\frac{4\pi r^2 q_r''|_r - 4\pi r^2 q_r''|_{r+\Delta r}}{4\pi \Delta r} = 0$$

Par définition :  $\lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{r^2 q_r''|_r - r^2 q_r''|_{r+\Delta r}}{\Delta r} = -\frac{\partial}{\partial r}(r^2 q_r'')$  on obtient donc :

$$-\frac{\partial}{\partial r}(r^2 q_r'') = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r}(r^2 q_r'') = 0$$

On intègre une première fois:  $(r^2 q_r'') = C_1$

## TDEX- 7.3

On exprime alors la densité de flux par la loi de Fourier:  $q_r'' = -k \frac{\partial T}{\partial r}$

$$r^2 \left( -k \frac{\partial T}{\partial r} \right) = C_1 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{C_1}{k r^2}$$

et on intègre une deuxième fois pour obtenir la variation T(r):

$$T_r = -\frac{C_1}{k} \left( -\frac{1}{r} \right) + C_2 \quad [1]$$

On utilise les conditions frontières pour déterminer les constantes d'intégration C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub>

CF1: à r=R, T<sub>R</sub> = T<sub>S</sub>

CF2: à r=∞, T<sub>R=∞</sub> = T<sub>∞</sub>

Calculons directement :

$$\frac{T_r - T_\infty}{T_S - T_\infty} = \frac{\left( -\frac{C_1}{k} \left( -\frac{1}{r} \right) + C_2 \right) - \left( -\frac{C_1}{k} \left( -\frac{1}{\infty} \right) + C_2 \right)}{\left( -\frac{C_1}{k} \left( -\frac{1}{R} \right) + C_2 \right) - \left( -\frac{C_1}{k} \left( -\frac{1}{\infty} \right) + C_2 \right)} = \frac{R}{r}$$

2) Calculons le flux à la surface :

$$q_r'' = -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = (-k) (T_S - T_\infty) R \left( -\frac{1}{r^2} \right) \Big|_{r=R} = \frac{k}{R} (T_S - T_\infty)$$

Ce flux sortant peut s'exprimer par la loi de refroidissement de Newton:

$$q_r'' = h (T_S - T_\infty) = \frac{k}{R} (T_S - T_\infty) \Rightarrow h = \frac{k}{R}$$

$$Nu = \frac{h D}{k} = \frac{\frac{k}{R} 2R}{k} = 2$$

Commentaire : Dans la section 7.5 des notes de cours, on a mentionné que la plupart des corrélations pour l'écoulement autour d'une sphère sont de la forme:

$$Nu = 2 + f ( Re , Pr )$$

On vient ainsi d'expliquer la valeur limite de 2 dans ces corrélations.

**Solutionnaire 7.3**

On utilise les expressions de la page 7.6 :

$$\text{Equation 7.45: } Nu = \frac{hD}{k_L} = C Re^m Pr^{1/3} \quad Re = \frac{\rho_L V D}{\mu_L} = \frac{900 \times 0.55 \times 0.10}{0.055} = 900 \quad Pr = 715$$

$$\Rightarrow C = 0.683 \quad m = 0.466 \Rightarrow Nu = \frac{hD}{k_L} = 0.683 \times 900^{0.466} \times 715^{1/3} = 145.4$$

$$h = \frac{145.4 \times 0.145}{0.1} = 210.8$$

$$\text{Equation 7.47: } Nu = \frac{hD}{k_L} = 0.3 + \left\{ 0.62 Re^{0.5} Pr^{1/3} \times \left[ 1 + \left( \frac{0.4}{Pr} \right)^{2/3} \right]^{-1/4} \right\} \times \left[ 1 + \left( \frac{Re}{282000} \right)^{5/8} \right]^{4/5}$$

$$Nu = 0.3 + \left\{ 0.62 \times 900^{0.5} \times 715^{1/3} \times \left[ 1 + \left( \frac{0.4}{715} \right)^{2/3} \right]^{-1/4} \right\} \times \left[ 1 + \left( \frac{900}{282000} \right)^{5/8} \right]^{4/5} = 169.98$$

$$h = \frac{169.98 \times 0.145}{0.1} = 246.48$$



## Travaux dirigés et exercices du chapitre 8 : Convection interne

**Travaux dirigés No 9**

**Ex-8.1 (S)** Un tube, de 0.05 m de diamètre interne et de 1 m de longueur, est enveloppé d'une résistance électrique chauffante dont la surface externe est parfaitement isolée. Cette résistance délivre une certaine énergie à la paroi interne du tube dont la température  $T_s$  est supposée uniforme. Un débit d'air de 0.001 kg/s entre dans le tube à une température de 20°C et en ressort à 50°C.

- quelle est la densité moyenne de flux de chaleur à la surface interne du tube ?
- quel est le coefficient moyen de transfert de chaleur dans le tube (attention choisir la bonne corrélation, table p 8.5.1)?
- en utilisant la différence moyenne logarithmique de température, déterminer la température de la surface.

Propriétés de l'air (unités SI)  $c_p=1007$ ,  $\mu=188 \cdot 10^{-7}$ ,  $k=0.0269$ ,  $Pr=.71$

[réponses : 192.3 W/m<sup>2</sup>-3.64W/m<sup>2</sup>.K-89.3°C]

**Ex-8.2 (S)** Une huile s'écoule avec un débit de 0.5 kg/s dans un tube de 25 mm de diamètre et de 10 m de longueur. La température de l'huile à l'entrée est de 25°C et on suppose que la température de la paroi interne du tube reste constante à 100°C.

- Quelle corrélation de la page 8.5.1 s'applique au calcul du coefficient h dans ce problème?
- Calculer le coefficient de transfert de chaleur par convection à la surface du tube.
- Calculer la température de l'huile en sortie ainsi que la chaleur totale échangée

Propriétés de l'huile (unités SI)  $c_p=2076$ ,  $\mu=5.31 \cdot 10^{-2}$ ,  $k=0.139$ ,  $\rho=860$

[réponses : 8.56-92.5W/m<sup>2</sup>.K-30.1°C-5293.8W]

**Ex-8.3** Refaire le problème 2 en supposant qu'il s'agit d'écoulement complètement établi

[réponses : 8.55-20.3-26.1-1141.8]

**Ex-8.4 (S)** Un débit d'air de 3.10<sup>-4</sup> kg/s s'écoule dans un canal rectangulaire de dimensions 4 mm x 16 mm x 1 m de longueur. Une densité de flux uniforme de 600 W/m<sup>2</sup> est imposée sur la paroi interne du canal.

- Quelle est la quantité totale de chaleur reçue par l'air?
- Quelle est la température de l'air en sortie sachant qu'il entre à 27°C?
- Déterminer le coefficient moyen de transfert de chaleur dans le canal
- Déterminer la température de la paroi interne du canal à la sortie.

Propriétés de l'air (unités SI)  $c_p=1007$ ,  $\mu=184.6 \cdot 10^{-7}$ ,  $k=0.0263$ ,  $Pr=.707$

Pour cette géométrie, en utilisant le diamètre hydraulique  $D_H$ , on a  $Nu=hD_H/k=5.33$

[réponses : 24W-106°C-22W/m<sup>2</sup>.K-133°C]

**Ex-8.5(S)** Un fluide froid à une température  $T_{m,i}$  entre avec un débit massique  $\dot{m}$ , dans un tube de longueur  $L$ , dont la surface interne est à une température constante  $T_s$  (chaude). Le diamètre du tube décroît linéairement de  $D=a$  à l'entrée à  $D=b$  à la sortie [  $D$  est une fonction de  $x$ , distance depuis l'entrée:

$$D(x)=a+(b-a)(x/L).$$

Pour cette géométrie, le coefficient de transfert de chaleur local à une distance  $x$  est donné par:

$$h(x)/h_0=[b/D(x)]^{1.8}$$

- déterminer l'équation différentielle reliant la variation de la température avec la distance  $x$
- montrer qu'en sortie, la température du fluide  $T_{m,o}$  vérifie la relation:  
 $(T_s-T_{m,o})/(T_s-T_{m,i})=\exp\{-\pi h_0 b^{1.8} L [b^{0.2}-a^{0.2}] / [0.2 m c_p(b-a)]\}$

**Remarque:** La résolution des problèmes 1-4 est grandement facilitée par le fait que les valeurs des propriétés physiques sont données dans l'énoncé. En pratique, il faudrait utiliser une méthode itérative pour déterminer la température pertinente à laquelle on calcule ces propriétés.

**Solutionnaire Ex-8.1**

Un tube, de 0.05 m de diamètre interne et de 1 m de longueur, est enveloppé d'une résistance électrique chauffante dont la surface externe est parfaitement isolée. Cette résistance délivre une certaine énergie à la paroi interne du tube dont la température  $T_s$  est supposée uniforme. Un débit d'air de 0.001 kg/s entre dans le tube à une température de 20°C et en ressort à 50°C.

- quelle est la densité moyenne de flux de chaleur à la surface interne du tube ?
- quel est le coefficient moyen de transfert de chaleur dans le tube (attention choisir la bonne corrélation, table p 8.5.1)?
- en utilisant la différence moyenne logarithmique de température, déterminer la température de la surface.

Propriétés de l'air (unités SI)  $c_p=1007$ ,  $\mu=188 \cdot 10^{-7}$ ,  $k=0.0269$ ,  $Pr=.71$

Solution :

a)

$$q_{\text{échangée}} = m C_p \Delta T = 0.001 \cdot 1007 \cdot (50 - 20) = 30.21 \quad [W]$$

$$\text{Surface d'échange} = S = \pi D L = \pi \cdot 0.05 \cdot 1 = 0.1571 \quad [m^2]$$

$$q'' = \frac{q_{\text{échangée}}}{S} = \frac{30.21}{0.1571} = 192.3 \quad [W/m^2]$$

b)

$$Re = \frac{\rho V d}{\mu} \quad m = \frac{\pi d^2}{4} \rho V \Rightarrow \rho V = \frac{4m}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0.001}{\pi \times 0.05^2} = 0.5093$$

$$Re = \frac{0.5093 \times 0.05}{188 \cdot 10^{-7}} = 1354.1$$

Pour  $Re < 2300$ , on est donc en régime laminaire. Calculons les longueurs d'entrée hydrodynamique et thermique (pages 8.1 et 8.2):

$$\frac{X_{\text{hydrodynamique}}^{\text{entrée}}}{D} = 0.05 Re = 0.05 \times 1354.5 = 67.72$$

$$\Rightarrow X_{\text{hydrodynamique}}^{\text{entrée}} = 67.72 \cdot 0.05 = 3.38 \text{ m}$$

$$\frac{X_{\text{thermique}}^{\text{entrée}}}{D} = 0.05 Re Pr \quad Pr = \frac{C_p \mu}{k} = \frac{1007 \times 188 \cdot 10^{-7}}{0.0269} = 0.704$$

$$\frac{X_{\text{thermique}}^{\text{entrée}}}{D} = 0.05 \times 1354.5 \times 0.704 = 47.66$$

$$\Rightarrow X_{\text{thermique}}^{\text{entrée}} = 47.66 \times 0.05 = 2.38 \text{ m}$$

Ces deux longueurs d'entrée sont plus grandes que la longueur de 1 m du tube; on est donc dans une région combinée d'entrée (hydrodynamique+ thermique), et c'est l'équation 8.57 qui s'applique.

$$Nu = \frac{hD}{k} = 1.86 \left( \frac{\text{Re Pr}}{L/D} \right)^{1/3} \left( \frac{\mu}{\mu_s} \right)^{0.14} \approx 1.86 \left( \frac{1354 \times 0.704}{1/0.05} \right)^{1/3} = 6.74$$

$$h = \frac{6.74 \times 0.0269}{0.05} = 3.63 \quad [W/(m^2 \cdot ^\circ C)] \text{ ou } [W/(m^2 \cdot K)]$$

$$q_{\text{échangée}} = A_S h \Delta T_{LM} \Rightarrow \Delta T_{LM} = \frac{q_{\text{échangée}}}{A_S h} = \frac{q''}{h} = \frac{192.3}{3.63} = 52.97$$

$$\Delta T_{LM} = \frac{(\mathcal{T}'_s - T_{in}) - (\mathcal{T}'_s - T_{out})}{Ln \frac{(T_s - T_{in})}{(T_s - T_{out})}} = \frac{(T_{out} - T_{in})}{Ln \frac{(T_s - T_{in})}{(T_s - T_{out})}} = \frac{(50 - 20)}{Ln \frac{(T_s - T_{in})}{(T_s - T_{out})}}$$

$$Ln \frac{(T_s - T_{in})}{(T_s - T_{out})} = \frac{30}{52.97} = 0.566 \Rightarrow \frac{(T_s - T_{in})}{(T_s - T_{out})} = e^{0.566} = 1.762$$

$$(T_s - T_{in}) = (T_s - T_{out}) 1.762 \Rightarrow T_s (1.762 - 1) = 1.762 T_{out} - T_{in}$$

$$T_s = \frac{1.762 T_{out} - T_{in}}{(1.762 - 1)} = \frac{1.762 \times 50 - 20}{0.762} = 89.4 \text{ } ^\circ C$$

**Solutionnaire 8.2**

a)

$$\text{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} \quad m = \frac{\pi d^2}{4} \rho V \Rightarrow \rho V = \frac{4m}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 0.5}{\pi \cdot 0.025^2} = 1018$$

$$\text{Re} = \frac{1018 \times 0.025}{5.31 \cdot 10^{-2}} = 479.56 \Rightarrow \text{régime laminaire}$$

$$\text{longueur d'entrée hydrodynamique: } \frac{x_{E,hydro}}{D} = 0.05 \text{ Re} = 23.97 \Rightarrow x_E = 23.97 \times 0.025 = 0.599 \text{ m}$$

$$\text{Prandtl} = \text{Pr} = \frac{C_p \mu}{k} = \frac{2076 \times 5.31 \cdot 10^{-2}}{0.139} = 793.$$

$$\text{longueur d'entrée thermique: } \frac{x_{E,ther}}{D} = 0.05 \text{ Re Pr} \Rightarrow x_{E,ther} = 0.05 \times 479.56 \times 793 \times 0.025 = 475 \text{ m}$$

Avec un tube de 10m de longueur, l'hydrodynamique est dans une zone développée ( $0.599 \ll 10\text{m}$ ) alors que seule la thermique est en zone d'entrée ( $10 \ll 475$ ). On utilisera la corrélation 8.56 page 8.7 (*laminar thermal entry length*).

b)

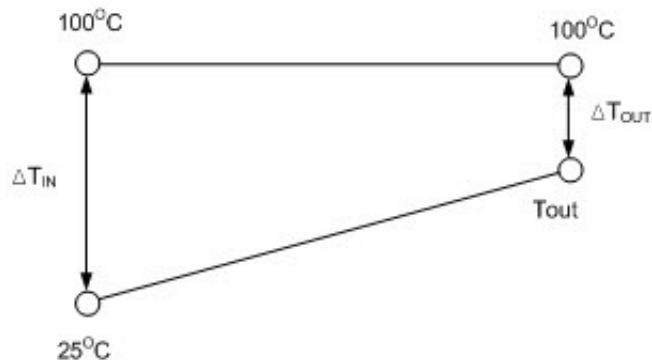
$$\text{Nu} = \frac{hD}{k} = 3.66 + \frac{0.0668 \left(\frac{D}{L}\right) \text{Re Pr}}{1 + 0.04 \left[\left(\frac{D}{L}\right) \text{Re Pr}\right]^{2/3}} = 16.71 \quad \Rightarrow h = 92.9 \text{ W / m}^2 \cdot \text{K}$$

c) Page 8.5, on a la relation (13)

$$m_d C_p = - \frac{A_s \bar{h}}{\text{Ln} \left( \frac{\Delta T_{out}}{\Delta T_{in}} \right)}$$

$$\Rightarrow \text{Ln} \left( \frac{\Delta T_{out}}{\Delta T_{in}} \right) = - \frac{A_s \bar{h}}{m_d C_p}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta T_{out}}{\Delta T_{in}} = e^{-\frac{A_s \bar{h}}{m_d C_p}}$$



**TDEX- 8.5**

$$\frac{\Delta T_{out}}{\Delta T_{in}} = \frac{100 - T_{out}}{100 - 25} \quad A_s = \pi DL = \pi \times 0.025 \times 10 = 0.785 \text{ m}^2 \quad \frac{A_s \bar{h}}{m_d C_p} = \frac{0.785 \times 92.9}{0.5 \times 2076} = 0.0702$$

$$\frac{100 - T_{out}}{100 - 25} = e^{-0.0702} = 0.932 \Rightarrow T_{out} = 100 - 75 \times 0.932 = 30.1^\circ \text{C}$$

chaleur échangée :  $Q = m_d C_p (T_{huile,out} - T_{huile,in}) = 0.5 \times 2076 \times (30.1 - 25) = 5293.8 \text{ watts}$

**Solutionnaire 8.4**

a) La surface d'échange vaut :

$$A_s = \text{Périmètre} \times \text{Longueur} = 2(0.004 + 0.016) \times 1 = 0.04 \text{ m}^2$$

$$Q = A_s q'' = 0.04 \times 600 = 24 \text{ W}$$

b)

chaleur échangée :  $Q = m_{air} C_{p,air} (T_{air,out} - T_{air,in})$

$$\Rightarrow T_{air,out} = \frac{Q}{m_{air} C_{p,air}} + T_{air,in} = \frac{24}{3. \cdot 10^{-4} \times 1007} + 27 = 106.4^\circ \text{C}$$

c) Page 8.8, on trouve la corrélation pour un tube de section rectangulaire :

$$\frac{b}{a} = \frac{16}{4} = 4 \Rightarrow Nu = \frac{hD_H}{k} = 5.33 \Rightarrow D_H = 4R_H = 4 \frac{\text{section d'écoulement}}{\text{périmètre mouillé}}$$

$$D_H = 4 \frac{16 \times 4 \times 10^{-6}}{2 \times (16 + 4) \times 10^{-3}} = 6.4 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad h = \frac{5.33 \times 0.0263}{6.4 \cdot 10^{-3}} = 21.9 \text{ W / m}^2 \cdot \text{K}$$

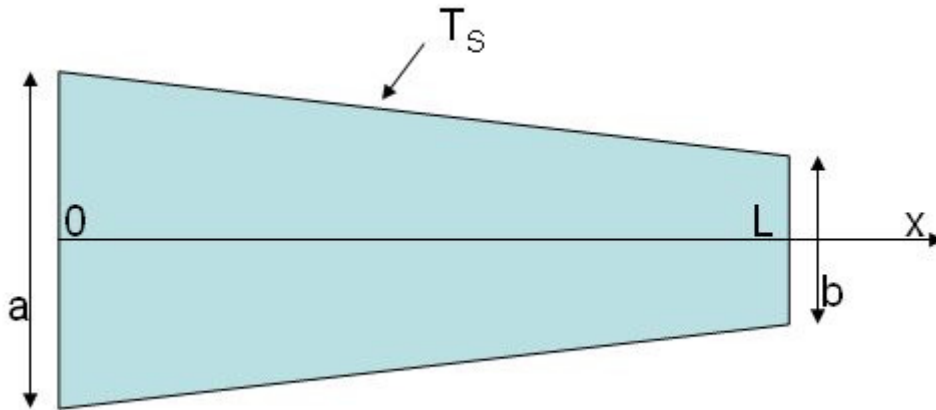
d) On applique la loi de refroidissement de Newton à la paroi du tube en sortie :

$$q'' = h(T_s - T_{air}) \Rightarrow T_s = \frac{q''}{h} + T_{air} \Rightarrow T_s = \frac{600}{21.9} + 106.4 = 133.8^\circ \text{C}$$

**Solutionnaire Ex-8.5**

Un fluide froid à une température  $T_{m,i}$  entre avec un débit massique  $m$ , dans un tube de longueur  $L$ , dont la surface interne est à une température constante  $T_S$  (chaude). Le diamètre du tube décroît linéairement de  $D=a$  à l'entrée à  $D=b$  à la sortie [  $D$  est une fonction de  $x$ , distance depuis l'entrée:  $D(x)=a+(b-a)(x/L)$ ]. Pour cette géométrie, le coefficient de transfert de chaleur local à une distance  $x$  est donné par:  $h(x)/h_0=[b/D(x)]^{1.8}$

- déterminer l'équation différentielle reliant la variation de la température avec la distance  $x$
- montrer qu'en sortie, la température du fluide  $T_{m,o}$  vérifie la relation:  
 $(T_S-T_{m,o})/(T_S-T_{m,i})=\exp\{-\cdot h_0 b^{1.8} L [b^{0.2}-a^{0.2}] / [0.2 m c_p(b-a)]\}$



Solution :

- En négligeant la conduction axiale, le bilan d'énergie s'écrit :

$$m C_P (T_{m,x} - T_{ref}) \Big|_x - m C_P (T_{m,x} - T_{ref}) \Big|_{x+\Delta x} + \pi D_x \Delta x h_x (T_S - T_{m,x}) = 0$$

$$m C_P \left[ \frac{T_{m,x} - T_{m,x+\Delta x}}{\Delta x} \right] + \pi D_x h_x (T_S - T_{m,x}) = 0$$

$$-m C_P \frac{\partial T_{m,x}}{\partial x} + \pi D_x h_x (T_S - T_{m,x}) = 0$$

$$m C_P \frac{\partial T_{m,x}}{(T_S - T_{m,x})} = \pi D_x h_x \partial x$$

-

$$D_x = a + (b-a) \frac{x}{L} \quad h_x = h_0 \left[ \frac{b}{D_x} \right]^{1.8}$$

$$m C_P \frac{dT_{m,x}}{(T_S - T_{m,x})} = -m C_P \frac{d(T_S - T_{m,x})}{(T_S - T_{m,x})} = \pi D_x h_0 \left[ \frac{b}{D_x} \right]^{1.8} dx = \pi h_0 b^{1.8} D_x^{-0.8} dx$$

$$\left( \frac{-m C_P}{\pi h_0 b^{1.8}} \right) \frac{d(T_S - T_{m,x})}{(T_S - T_{m,x})} = D_x^{-0.8} dx$$

$$D_x = a + (b-a) \frac{x}{L} \Rightarrow dD_x = \frac{(b-a)}{L} dx \Rightarrow dx = \frac{L}{(b-a)} dD_x$$

$$\left( -\frac{m C_P}{\pi h_0 b^{1.8}} \right) \frac{d(T_S - T_{m,x})}{(T_S - T_{m,x})} = \frac{L}{(b-a)} D_x^{-0.8} dD_x$$

$$\left( -\frac{(b-a)m C_P}{L \pi h_0 b^{1.8}} \right) \frac{d(T_S - T_{m,x})}{(T_S - T_{m,x})} = D_x^{-0.8} dD_x$$

$$\left( -\frac{(b-a)m C_P}{L \pi h_0 b^{1.8}} \right) \int_{x=0}^{x=L} \frac{d(T_S - T_{m,x})}{(T_S - T_{m,x})} = \int_a^b D_x^{-0.8} dD_x = \frac{1}{0.2} [D_x^{0.2}]_a^b = \frac{1}{0.2} (b^{0.2} - a^{0.2})$$

$$Ln \frac{(T_S - T_{m,x=L})}{(T_S - T_{m,x=0})} = \left( -\frac{L \pi h_0 b^{1.8}}{0.2(b-a)m C_P} \right) (b^{0.2} - a^{0.2})$$

$$\frac{(T_S - T_{m,out})}{(T_S - T_{m,in})} = e^{\left( -\frac{L \pi h_0 b^{1.8}}{0.2(b-a)m C_P} \right) (b^{0.2} - a^{0.2})}$$





## Travaux dirigés et exercices du chapitre 9 : Échangeurs de chaleur

### Ex-9.1 (S) Introduction au dimensionnement d'un échangeur

On souhaite refroidir 0.1 kg/s d'une huile de 100°C à 60°C. Pour cela, on utilise 0.2 kg/s d'une eau à 30°C. On envisage d'utiliser un échangeur composé de deux tubes concentriques: le diamètre du tube interne,  $D_i$ , est de 25 mm alors que celui du tube externe,  $D_o$  est de 45 mm (on pourra négliger l'épaisseur du tube interne ainsi que l'encrassement). Quelle est la longueur de tubes nécessaire pour refroidir l'huile sachant qu'elle s'écoule dans l'espace annulaire et que l'on fonctionne à contre-courant ? Quelle serait cette longueur pour un échangeur à co-courant

Données:

EAU  $C_{PE} = 4178 \text{ J/kg/K}$ ,  $\mu_E = 725 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s}$ ,  $k_E = 0.625 \text{ W/m.K}$ ,  $Pr = 4.85$   
 HUILE :  $C_{PH} = 2131 \text{ J/kg/K}$ ,  $\mu_H = 0.0325 \text{ Pa.s}$ ,  $k_H = 0.138 \text{ W/m.K}$

corrélation dans le tube intérieur:

$$Nu = (h D/k) = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4}, \text{ avec } Re = \rho V D / \mu, Pr = c_p \mu / k$$

corrélation dans l'espace annulaire:

$$Nu = (h D/k) = 5.56 \text{ avec } D = \text{diamètre hydraulique}$$

#### **Méthodologie:**

- 1) faire un schéma avec les températures
- 2) calculer la température de l'eau en sortie [réponse : 40.2]
- 3) calculer la LMTD [réponse : 43.2]
- 4) calculer les coefficients de transfert de chaleur sur les surfaces interne et externe du tube interne. [réponse : 2249.5 - 38.4]
- 5) calculer le coefficient global d'échange U, la surface d'échange nécessaire et la longueur requise. [réponse : 37.75-5.23-66.5]
- 6) calculer la longueur pour un co-courant [réponse 72.3]

### Ex-9.2 (S) Méthode des NTU

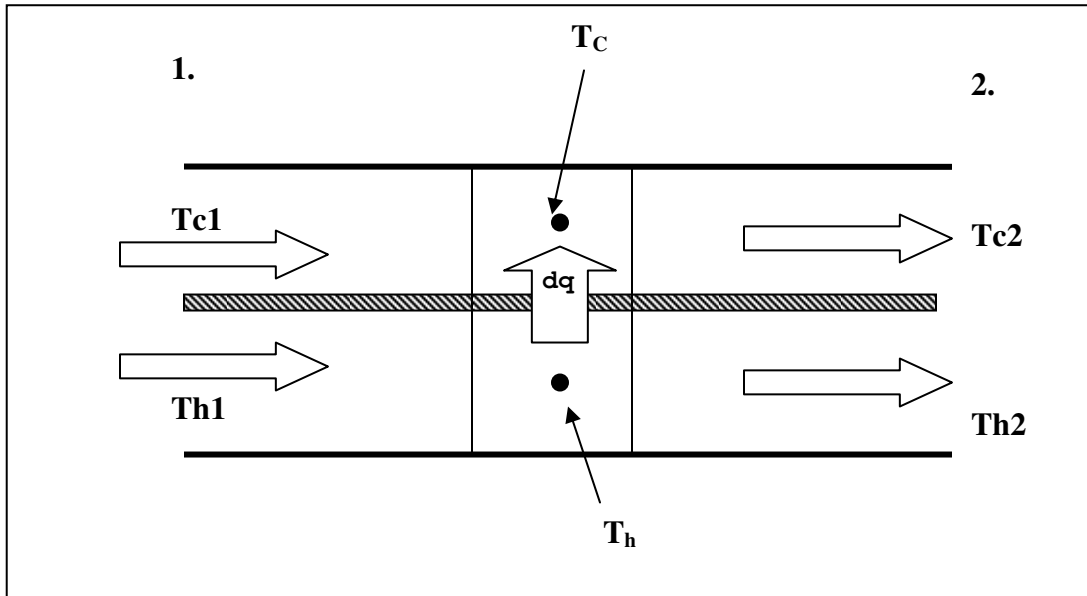
1) Un échangeur à contre courant a une surface de 12.5 m<sup>2</sup> et un coefficient global  $U = 400 \text{ W/m}^2/\text{C}$ . On l'utilise pour refroidir un débit de 2 kg/s d'une huile à 100°C ( $C_{P,H} = 2000 \text{ J/kg/K}$ ) avec un débit de 0.48 kg/s d'une eau à  $T_E = 20^\circ\text{C}$  ( $C_{P,E} = 4170 \text{ J/kg/K}$ ). Calculer les températures de sortie des deux fluides. [réponse 86.6-66.7]

2) Résolution de 1) en utilisant une méthode itérative avec la LMTD et le Solveur d'Excel.

## TDEX- 9.2

**Ex-9.3 (S):** Coefficient moyen d'échange dans un échangeur. [réf: A.P. Colburn Ind. Eng. Chem. 25 873 (1933)]

Considérons l'échangeur co-courant ci-dessous



Si on suppose que le coefficient global d'échange,  $U$ , varie linéairement avec la différence de température :

$$\frac{U - U_1}{U_2 - U_1} = \frac{\Delta T - \Delta T_1}{\Delta T_2 - \Delta T_1} \quad \text{avec} \quad \Delta T = T_h - T_c \quad [1]$$

Démontrer alors que :

$$q = U_{MOYEN} A \Delta T_{LM}$$

$$\text{avec} \quad U_{MOYEN} = \frac{1}{\Delta T_{LM}} \frac{U_1 \Delta T_2 - U_2 \Delta T_1}{\text{Log} \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1}} \quad \text{et} \quad \Delta T_{LM} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\text{Log} \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}}$$

Début de la démonstration :

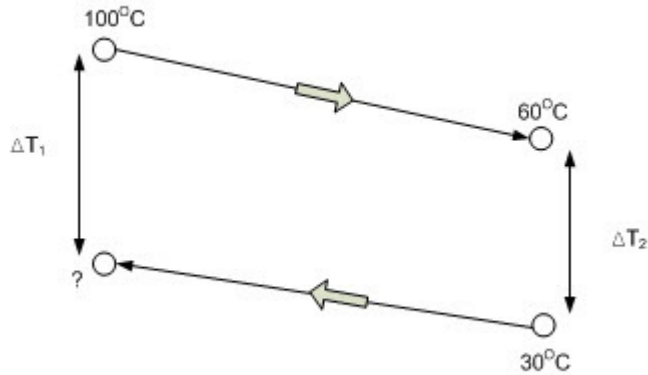
$$\begin{aligned} dd \, dq &= -m_h C_{Ph} dT_h = U dA (T_h - T_c) & dq &= m_c C_{Pc} dT_c = U dA (T_h - T_c) \\ -dT_h &= \frac{U}{m_h C_{Ph}} (T_h - T_c) dA & dT_c &= \frac{U}{m_c C_{Pc}} (T_h - T_c) dA \\ d(T_h - T_c) &= -\left(\frac{1}{m_c C_{Pc}} + \frac{1}{m_h C_{Ph}}\right) U (T_h - T_c) dA & d(\Delta T) &= -\left(\frac{1}{m_c C_{Pc}} + \frac{1}{m_h C_{Ph}}\right) U (\Delta T) dA \end{aligned}$$

On remplace  $U$  par l'expression linéaire (1), on regroupe les  $\Delta T$  dans le membre de droite et on intègre par rapport à  $\Delta T$ . On rappelle que :

$$\frac{1}{x(a+x)} = \frac{1}{ax} - \frac{1}{a(x+a)}$$

## Solutionnaire 9.1 Introduction au dimensionnement d'un échangeur

1)



2) la quantité de chaleur, Q, perdue par l'huile est reçue par l'eau:

$$Q = m_{\text{huile}} C_{P,\text{huile}} (T_{\text{huile}}^{\text{in}} - T_{\text{huile}}^{\text{out}}) = 0.1 \times 2131 \times (100 - 60) = 8524 \text{ W}$$

$$Q = m_{\text{eau}} C_{P,\text{eau}} (T_{\text{eau}}^{\text{out}} - T_{\text{eau}}^{\text{in}}) \Rightarrow T_{\text{eau}}^{\text{out}} = \frac{Q}{m_{\text{eau}} C_{P,\text{eau}}} + T_{\text{eau}}^{\text{in}} = \frac{8524}{0.2 \times 4178} + 30 = 40.2^\circ \text{C}$$

$$3) \quad \Delta T_{LN} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} = \frac{(100 - 40.2) - (60 - 30)}{\ln \frac{(100 - 40.2)}{(60 - 30)}} = \frac{29.8}{\ln \frac{59.8}{30}} = 43.2^\circ \text{C}$$

4) pour l'eau à l'intérieur du tube :

$$Nu = 0.023 Re^{0.8} Pr^{0.4} \quad Re = \frac{\rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}} D}{\mu_{\text{eau}}} \quad m_{\text{eau}} = \rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}} \frac{\pi D^2}{4} \Rightarrow \rho_{\text{eau}} V_{\text{eau}} = \frac{4m_{\text{eau}}}{\pi D^2}$$

$$Re = \frac{4m_{\text{eau}}}{\pi D^2} \frac{D}{\mu_{\text{eau}}} = \frac{4m_{\text{eau}}}{\pi D \mu_{\text{eau}}} = \frac{4 \times 0.2}{\pi \times 0.025 \times 725 \cdot 10^{-6}} = 14049.5$$

$$Nu = \frac{h_{\text{eau}} D}{k_{\text{eau}}} = 0.023 (14049.5)^{0.8} (4.85)^{0.4} = 89.98 \Rightarrow h_{\text{eau}} = \frac{Nu k_{\text{eau}}}{D} = \frac{89.98 \times 0.625}{0.025} = 2249.5 \text{ W} / \text{m}^2 \cdot \text{K}$$

pour l'huile dans l'espace annulaire (conduite non circulaire), on va utiliser le rayon hydraulique  $R_H$

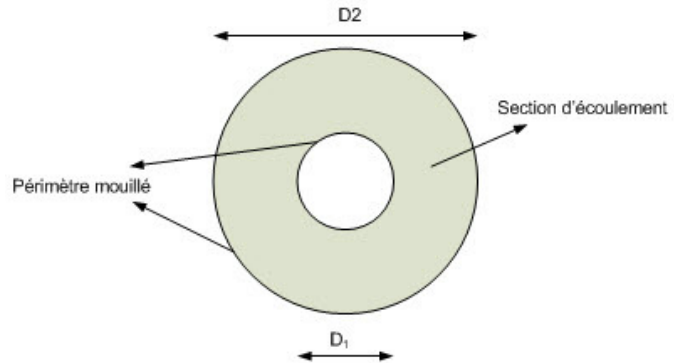
## TDEX- 9.4

$$R_H = \frac{\text{section d'écoulement}}{\text{périmètre mouillé}}$$

$$R_H = \frac{\pi \frac{(D_2^2 - D_1^2)}{4}}{\pi (D_2 + D_1)} = \frac{(D_2 - D_1)(D_2 + D_1)}{4(D_2 + D_1)}$$

$$R_H = \frac{(D_2 - D_1)}{4}$$

$$D_H = 4R_H = D_2 - D_1 = 45 - 25 = 20 \text{ mm}$$



$$Nu = 5.56 = \frac{h_{\text{huile}} D_H}{k_{\text{huile}}} \Rightarrow h_{\text{huile}} = \frac{Nu k_{\text{huile}}}{D_H} = \frac{5.56 \times 0.138}{0.020} = 38.4 \text{ W / m}^2 \cdot \text{K}$$

5) Comme on néglige la conduction dans l'épaisseur du tube interne et l'encrassement sur les deux faces du tube interne, la résistance totale au transfert la somme des résistances de convection :

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_{\text{eau}}} + \frac{1}{h_{\text{huile}}} = \frac{1}{2249.5} + \frac{1}{38.4} = 0.02648 \Rightarrow U = 37.75$$

$$Q = UA\Delta T_{LN} \Rightarrow A = \frac{Q}{U\Delta T_{LN}} = \frac{8524}{37.75 \times 43.2} = 5.226 \text{ m}^2$$

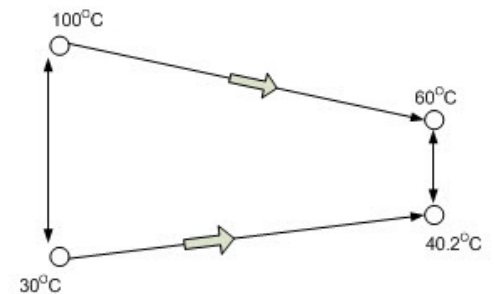
$$A = \pi D_1 L \Rightarrow L = \frac{A}{\pi D_1} = \frac{5.226}{\pi \times 0.025} = 66.54 \text{ m}$$

6) dans le cas d'un co-courant,  $\Delta T_{LN}$  est alors donné par :

$$\Delta T_{LN} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{Ln \frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}} = \frac{(100 - 30) - (60 - 40.2)}{Ln \frac{(100 - 30)}{(60 - 40.2)}} = \frac{50.2}{Ln \frac{70}{19.8}} = 39.7$$

$$A = \frac{Q}{U\Delta T_{LN}} = \frac{8524}{37.75 \times 39.75} = 5.68 \text{ m}^2$$

$$A = \pi D_1 L \Rightarrow L = \frac{A}{\pi D_1} = \frac{5.68}{\pi \times 0.025} = 72.3 \text{ m}$$



Rappel : le contre-courant est plus efficace que le co-courant

**Solutionnaire 9.2 Méthode des NTU**

$$C_{eau} = m_{eau} C_{p,eau} = 0.48 \times 4170 = 2001.6 \quad C_{huile} = m_{huile} C_{p,huille} = 2 \times 2000 = 4000$$

$$C_{\min} = \min(C_{eau}, C_{huile}) = C_{eau} = 2001.6 \quad \frac{C_{\min}}{C_{\max}} = \frac{2001.6}{4000} = 0.5$$

$$NTU = \frac{UA}{C_{\min}} = \frac{400 \times 12.5}{2001.6} = 2.5$$

Sur la figure 11.15 page 9.30, on trouve,  $\varepsilon \approx 0.83$

$$\varepsilon = \frac{C_{fr} (T_{fr}^o - T_{fr}^i)}{C_{\min} (T_{ch}^i - T_{fr}^i)} = \frac{C_{eau} (T_{eau}^o - T_{eau}^i)}{C_{\min} (T_{huile}^i - T_{eau}^i)} \Rightarrow T_{eau}^o = \frac{\varepsilon C_{\min}}{C_{eau}} (T_{huile}^i - T_{eau}^i) + T_{eau}^i$$

$$T_{eau}^o = \frac{0.83 \times 2001.6}{2001.6} (100 - 20) + 20 = 86.4 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\varepsilon = \frac{C_{ch} (T_{ch}^i - T_{ch}^o)}{C_{\min} (T_{ch}^i - T_{fr}^i)} \Rightarrow T_{huile}^o = T_{huile}^i - \frac{\varepsilon C_{\min}}{C_{huile}} (T_{huile}^i - T_{eau}^i)$$

$$T_{huile}^o = 100 - \frac{0.83 \times 2001.6}{4000} (100 - 20) = 66.7 \text{ } ^\circ\text{C}$$

**Solutionnaire 9.3 Coefficient U moyen**

$$dq = -m_h C_{ph} dT_h = U dA (T_h - T_c)$$

$$-dT_h = \frac{U}{m_h C_{ph}} (T_h - T_c) dA$$

$$d(T_h - T_c) = -\left(\frac{1}{m_c C_{pc}} + \frac{1}{m_h C_{ph}}\right) U (T_h - T_c) dA$$

$$\frac{U - U_1}{U_2 - U_1} = \frac{\Delta T - \Delta T_1}{\Delta T_2 - \Delta T_1} \quad \text{avec } \Delta T = T_h - T_c$$

$$U = U_1 + (U_2 - U_1) \frac{\Delta T - \Delta T_1}{\Delta T_2 - \Delta T_1}$$

$$d(\Delta T) = -\left(\frac{1}{m_c C_{pc}} + \frac{1}{m_h C_{ph}}\right) U (\Delta T) dA = -\left(\frac{1}{m_c C_{pc}} + \frac{1}{m_h C_{ph}}\right) \left[ U_1 + (U_2 - U_1) \frac{\Delta T - \Delta T_1}{\Delta T_2 - \Delta T_1} \right] \Delta T dA$$

$$\text{posons } \alpha = -\left(\frac{1}{m_c C_{pc}} + \frac{1}{m_h C_{ph}}\right) \quad \beta = \frac{(U_2 - U_1)}{\Delta T_2 - \Delta T_1}$$

$$d(\Delta T) = \alpha \left[ U_1 + (U_2 - U_1) \frac{\Delta T - \Delta T_1}{\Delta T_2 - \Delta T_1} \right] \Delta T dA = \alpha \left[ U_1 + \frac{(U_2 - U_1)}{\Delta T_2 - \Delta T_1} (\Delta T - \Delta T_1) \right] \Delta T dA$$

$$d(\Delta T) = \alpha [U_1 + \beta(\Delta T - \Delta T_1)] \Delta T dA = \alpha [U_1 - \beta\Delta T_1 + \beta\Delta T] \Delta T dA$$

$$\frac{d(\Delta T)}{[U_1 - \beta\Delta T_1 + \beta\Delta T] \Delta T} = \alpha dA \quad \text{posons : } a = \left( \frac{U_1}{\beta} - \Delta T_1 \right)$$

$$\frac{1}{[U_1 - \beta\Delta T_1 + \beta\Delta T] \Delta T} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\left[ \left( \frac{U_1}{\beta} - \Delta T_1 \right) + \Delta T \right] \Delta T} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{[a + \Delta T] \Delta T}$$

$$\text{mais } \frac{1}{[a + \Delta T] \Delta T} = \frac{1}{a\Delta T} - \frac{1}{a[a + \Delta T]}$$

$$\frac{d(\Delta T)}{[U_1 - \beta\Delta T_1 + \beta\Delta T] \Delta T} = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{d(\Delta T)}{a\Delta T} - \frac{d(\Delta T)}{a[a + \Delta T]} \right] = \alpha dA$$

$$\int_{\Delta T_1}^{\Delta T_2} \frac{d(\Delta T)}{a\Delta T} - \int_{\Delta T_1}^{\Delta T_2} \frac{d(\Delta T)}{a[a + \Delta T]} = \int_{A_s} \alpha \beta dA \Rightarrow \frac{1}{a} \text{Ln} \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} - \frac{1}{a} \text{Ln} \frac{a + \Delta T_2}{a + \Delta T_1} = \alpha \beta A_s$$

$$\text{Ln} \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} - \text{Ln} \frac{a + \Delta T_2}{a + \Delta T_1} = \alpha \beta A_s$$

$$a + \Delta T_2 = \left( \frac{U_1}{\beta} - \Delta T_1 \right) + \Delta T_2 = \frac{U_1}{(U_2 - U_1)} - \Delta T_1 + \Delta T_2 = \frac{U_1(\Delta T_2 - \Delta T_1) - (U_2 - U_1)\Delta T_1 + (U_2 - U_1)\Delta T_2}{(U_2 - U_1)}$$

$$a + \Delta T_2 = \frac{U_2(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{(U_2 - U_1)}$$

$$a + \Delta T_1 = \left( \frac{U_1}{\beta} - \Delta T_1 \right) + \Delta T_1 = \frac{U_1}{(U_2 - U_1)} - \Delta T_1 + \Delta T_1 = \frac{U_1(\Delta T_2 - \Delta T_1) - (U_2 - U_1)\Delta T_1 + (U_2 - U_1)\Delta T_1}{(U_2 - U_1)}$$

$$a + \Delta T_1 = \frac{U_1(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{(U_2 - U_1)}$$

$$\text{Ln} \frac{a + \Delta T_2}{a + \Delta T_1} = \text{Ln} \frac{\frac{U_2(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{(U_2 - U_1)}}{\frac{U_1(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{(U_2 - U_1)}} = \text{Ln} \frac{U_2}{U_1}$$

$$\text{Ln} \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} - \text{Ln} \frac{a + \Delta T_2}{a + \Delta T_1} = \text{Ln} \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} - \text{Ln} \frac{U_2}{U_1} = \text{Ln} \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1} = a\alpha\beta A_S$$

$$\alpha = - \left( \frac{1}{m_c C_{Pc}} + \frac{1}{m_h C_{Ph}} \right)$$

$$q = m_c C_{Pc} (T_{c2} - T_{c1}) \Rightarrow (T_{c2} - T_{c1}) = \frac{q}{m_c C_{Pc}} \quad q = m_h C_{Ph} (T_{h1} - T_{h2}) \Rightarrow (T_{h1} - T_{h2}) = \frac{q}{h C_{Ph}}$$

$$(T_{c2} - T_{c1}) + (T_{h1} - T_{h2}) = \frac{q}{m_c C_{Pc}} + \frac{q}{m_h C_{Ph}} = -\alpha q \quad (T_{c2} - T_{c1}) + (T_{h1} - T_{h2}) = (T_{h1} - T_{c1}) - (T_{h2} - T_{c2}) = \Delta T_1 - \Delta T_2$$

$$\Delta T_1 - \Delta T_2 = -\alpha q \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{q}$$

$$\text{Ln} \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1} = a\alpha\beta A_S = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{q} a\beta A_S \Rightarrow q = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{\text{Ln} \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1}} \left( \frac{U_1}{\beta} - \Delta T_1 \right) \frac{(U_2 - U_1)}{\Delta T_2 - \Delta T_1} A_S$$

$$q = \frac{1}{\text{Ln} \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1}} \left( \frac{U_1}{\frac{(U_2 - U_1)}{\Delta T_2 - \Delta T_1}} - \Delta T_1 \right) (U_2 - U_1) A_S = \frac{1}{\text{Ln} \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1}} \left( \frac{U_1 (\Delta T_2 - \Delta T_1)}{U_2 - U_1} - \frac{\Delta T_1 (U_2 - U_1)}{U_2 - U_1} \right) (U_2 - U_1) A_S$$

$$q = \frac{1}{\text{Ln} \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1}} \left[ \frac{U_1 (\Delta T_2 - \Delta T_1) - \Delta T_1 (U_2 - U_1)}{U_2 - U_1} \right] (U_2 - U_1) A_S = \frac{1}{\text{Ln} \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1}} (U_1 \Delta T_2 - \Delta T_1 U_2) A_S$$

$$q = \left[ \frac{(U_1 \Delta T_2 - U_2 \Delta T_1)}{\text{Ln} \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1}} \right] A_S = U_{moyen} A_S \Delta T_{LN}$$

$$q = U_{moyen} A_S \Delta T_{LN} \quad \text{avec} \quad U_{moyen} = \frac{(U_1 \Delta T_2 - U_2 \Delta T_1)}{\Delta T_{LN} \text{Ln} \frac{U_1 \Delta T_2}{U_2 \Delta T_1}} \quad \text{et} \quad \Delta T_{LN} = \frac{(\Delta T_2 - \Delta T_1)}{\text{Ln} \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1}}$$





## Travaux dirigés et exercices du chapitre 10 : Convection naturelle

### Travaux dirigés No 10

#### Ex-10.1 (S) Convection naturelle à la surface d'un mur

Déterminer les coefficients de convection moyen à la surface d'un mur (vertical !) de 2.5 m de haut à l'intérieur d'une maison pour les conditions suivantes:

- a) Température de la surface=10<sup>0</sup>C température de l'air ambiant=20<sup>0</sup>C  
données pour l'air en SI:  $\beta=1/T_f(K)$ ,  $\nu=14.82 \cdot 10^{-6}$ ,  $k=0.0253$ ,  $\alpha=20.9 \cdot 10^{-6}$ ,  $Pr=0.71$
- b) Température de la surface=37<sup>0</sup>C température de l'air ambiant=27<sup>0</sup>C  
données pour l'air en SI:  $\beta=1/T_f(K)$ ,  $\nu=16.39 \cdot 10^{-6}$ ,  $k=0.0267$ ,  $\alpha=23.2 \cdot 10^{-6}$ ,  $Pr=0.706$

(réponses: a:  $h=3.03 \text{ W/m}^2/\text{K}$  b:  $h=2.94 \text{ W/m}^2/\text{K}$ )

#### Ex-10.2 (S) Convection naturelle à la surface d'un cylindre

Un cylindre horizontal de 5 mm de diamètre est immergé dans de l'eau à 18<sup>0</sup>C. Si la température de la surface du cylindre est de 56<sup>0</sup>C, déterminer les pertes de chaleur due à la convection naturelle par mètre de longueur de cylindre

données pour l'eau en SI:  $\rho=993.$ ,  $\beta=361.2 \cdot 10^{-6}$ ,  $\nu=6.999 \cdot 10^{-7}$ ,  $k=0.628$ ,  $\alpha=1.514 \cdot 10^{-7}$ ,  $Pr=4.62$ ,  
 (réponses :  $h=1312 \text{ W/m}^2/\text{K}$  et  $q=783 \text{ W/m}$ )

#### Ex-10.3 (S) Convection naturelle à la surface d'une sphère

Une sphère de 25 mm de diamètre contient une résistance électrique. Déterminer la puissance nécessaire pour maintenir la température à la surface de la sphère à 94<sup>0</sup>C si cette sphère est immergée dans les fluides suivants:

- a) air à 20<sup>0</sup>C:  $\nu=18.91 \cdot 10^{-6}$ ,  $k=0.0285$ ,  $\alpha=26.9 \cdot 10^{-6}$ ,  $Pr=0.711$ ,  $\beta=3.03 \cdot 10^{-3}$
- b) eau à 20<sup>0</sup>C:  $\nu=0.497 \cdot 10^{-6}$ ,  $k=0.650$ ,  $\alpha=0.158 \cdot 10^{-6}$ ,  $Pr=3.15$ ,  $\beta=0.504 \cdot 10^{-3}$
- c) glycol à 20<sup>0</sup>C:  $\nu=5.15 \cdot 10^{-6}$ ,  $k=0.260$ ,  $\alpha=0.936 \cdot 10^{-6}$ ,  $Pr=55.$ ,  $\beta=0.65 \cdot 10^{-3}$

(réponses: a:  $h=10.6$   $q=1.55 \text{ W}$  b:  $h=1297$   $q=188 \text{ W}$  c:  $h=230$   $q=33.4 \text{ w}$ )

#### Ex-10.4 (S) Perte de chaleur par convection naturelle à la surface d'un cylindre

De la vapeur circule dans un tuyau horizontal de 0.3048 m de diamètre. La température de la surface du tuyau est de 250<sup>0</sup>C alors que la température du milieu environnant est de 15<sup>0</sup>C. Calculer les pertes de chaleur (par mètre de tuyau) due à la convection naturelle.

#### Propriétés de l'air

(à  $T_f=[250+15]/2=132.5 \text{ } ^\circ\text{C}$ )  $k=0.034 \text{ W/(m.K)}$   $\beta=2.47 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$   $\nu=26.26 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$   $Pr=0.687$

réponses :  $h=7.27 \text{ W/m}^2.\text{K}$   $q=1.6 \text{ kW /m}$

**Solutionnaire 10.1 :**

a)

$$\beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{273 + \frac{(10+20)}{2}} = \frac{1}{288} = 3.47 \times 10^{-3}$$

$$Ra = Gr Pr = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) L^3}{\nu \alpha} = \frac{9.81 \times 3.47 \times 10^{-3} \times (293 - 283) \times 2.5^3}{14.82 \times 10^{-6} \times 20.9 \times 10^{-6}} = 1.717 \times 10^{10}$$

$$\overline{Nu}_L = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 = 299.4 = \frac{hL}{k} \Rightarrow h = \frac{299.4 \times 0.0253}{2.5} = 3.03 \text{ W/m}^2 \cdot K$$

b)

$$\beta = \frac{1}{T_f} = \frac{1}{273 + \frac{(27+37)}{2}} = \frac{1}{305} = 3.28 \times 10^{-3}$$

$$Ra = Gr Pr = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) L^3}{\nu \alpha} = \frac{9.81 \times 3.28 \times 10^{-3} \times 10 \times 2.5^3}{16.39 \times 10^{-6} \times 23.2 \times 10^{-6}} = 1.322 \times 10^{10}$$

$$\overline{Nu}_L = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 = 275.4 = \frac{hL}{k} \Rightarrow h = \frac{275.4 \times 0.0267}{2.5} = 2.94 \text{ W/m}^2 \cdot K$$

## Solutionnaire 10.2 :

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\beta (T_s - T_\infty) D^3}{\nu \alpha} = \frac{9.81 \times 361.2 \times 10^{-6} \times (56 - 18) \times 0.005^3}{6.999 \times 10^{-7} \times 1.514 \times 10^{-7}} = 1.588 \times 10^5$$

$$\overline{Nu}_D = \left\{ 0.60 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[ 1 + \left( \frac{0.559}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{8/27}} \right\}^2 = 10.45 = \frac{hD}{k}$$

$$\Rightarrow h = \frac{10.45 \times 0.628}{0.005} = 1312 \text{ W.m}^2.\text{K} \quad q = \pi DLh(T_s - T_f) = \pi \times 0.005 \times 1312 \times 1 \times (56 - 18) = 783 \text{ W / m}$$

## Solutionnaire 10.3 :

a)

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\beta (T_s - T_\infty) D^3}{\nu \alpha} = \frac{9.81 \times 3.03 \times 10^{-3} \times (94 - 20) \times 0.025^3}{18.91 \times 10^{-6} \times 26.9 \times 10^{-6}} = 67564$$

$$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0.589 Ra^{1/4}}{\left[ 1 + \left( \frac{0.469}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{4/9}} = 9.33 \Rightarrow h = \frac{9.33 \times 0.0285}{0.025} = 10.64 \text{ W/m}^2.\text{K}$$

$$q = 4\pi R^2 h (T_s - T_\infty) = 4\pi \times \left( \frac{0.025}{2} \right)^2 \times 10.64 \times (94 - 20) = 1.546 \text{ W}$$

b)

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\beta (T_s - T_\infty) D^3}{\nu \alpha} = \frac{9.81 \times 0.504 \times 10^{-3} \times (94 - 20) \times 0.025^3}{0.497 \times 10^{-6} \times 0.156 \times 10^{-6}} = 7.373 \times 10^7$$

$$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0.589 Ra^{1/4}}{\left[ 1 + \left( \frac{0.469}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{4/9}} = 49.9 \Rightarrow h = \frac{49.9 \times 0.650}{0.025} = 1297.4 \text{ W/m}^2.\text{K}$$

$$q = 4\pi R^2 h (T_s - T_\infty) = 4\pi \times \left( \frac{0.025}{2} \right)^2 \times 1297.4 \times (94 - 20) = 188.5 \text{ W}$$

c)

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\beta (T_s - T_\infty)D^3}{\nu\alpha} = \frac{9.81 \times 0.650 \times 10^{-3} \times (94 - 20) \times 0.025^3}{5.15 \times 10^{-6} \times 0.936 \times 10^{-6}} = 1.529 \times 10^6$$

$$\overline{Nu}_D = 2 + \frac{0.589 Ra^{1/4}}{\left[1 + \left(\frac{0.469}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}} = 22.11 \Rightarrow h = \frac{22.11 \times 0.260}{0.025} = 229.98 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}$$

$$q = 4\pi R^2 h (T_s - T_\infty) = 4\pi \times \left(\frac{0.025}{2}\right)^2 \times 188.5 \times (94 - 20) = 33.4 \text{ W}$$

**Solutionnaire 10.4**

$$Gr = \frac{g\beta (T_s - T_\infty)D^3}{\nu^2} = \frac{9.81 \times 2.47 \times 10^{-3} \times (250 - 15) \times 0.3048^3}{(26.26 \times 10^{-6})^2} = 2.338 \times 10^8$$

$$Ra = Gr Pr = 2.338 \times 10^8 \times 0.687 = 1.606 \times 10^8$$

$$\overline{Nu}_D = \left\{ 0.60 + \frac{0.387 Ra^{1/6}}{\left[1 + \left(\frac{0.559}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{8/27}} \right\} = 65.15 \Rightarrow h = \frac{65.15 \times 0.034}{0.3048} = 7.27 \text{ W/m}^2 \cdot \text{K} =$$

$$q = \pi DLh (T_s - T_\infty) = \pi \times 0.3048 \times 1 \times 7.27 \times (250 - 15) = 1635 = 1.635 \text{ kW/m}$$

## Travaux dirigés et exercices du chapitre 11: Ébullition et condensation

Travaux dirigés No 11**Ébullition nucléée en piscine****Ex-11.1 (S) Casserole**

Une casserole en cuivre, de 150 mm de diamètre, est utilisée pour faire bouillir de l'eau. Le fond de la casserole est maintenu à une température de  $T_W=115^\circ\text{C}$ .

- Déterminer la densité de flux à la paroi (comparer votre résultat avec la figure p 10.2.1) et la puissance disponible pour faire bouillir l'eau. [réponses :  $4.6 \cdot 10^5 \text{W/m}^2$ , 8.16 kW]
- Quelle est la quantité d'eau évaporée chaque minute ? [réponse : 216g/min.]
- Quelle est la valeur du rapport du flux réel au flux critique? [réponse : 0.367]

Données:  $\rho_L=957.9 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_V=0.5955 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu_L=2.79 \cdot 10^{-4} \text{ Pa.s}$ ,  $g=9.81 \text{ m/s}^2$   
 $\Delta h_{LV}=2.257 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ = chaleur latente de vaporisation.  
 $\sigma=58.9 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ ;  $Pr_L=1.76$ ;  $C_{PL}=4217 \text{ J/kg}$   
 $C_{Sf}=0.013$  et  $n=1$  (équations p 11.4)

**Ex-11.2 (S): Tubes**

Des tubes de cuivre de 25 mm de diamètre et de 0.75 m de longueur sont utilisés pour l'ébullition en piscine sous 1 atm. Sachant que les tubes opèrent à 75% du flux critique (utilisée la valeur de  $1.26 \text{ MW/m}^2$  trouvée à l'exercice 1), combien de tubes sont nécessaires pour permettre une vitesse d'évaporation de 750 kg/h ? Quelle est la température à la surface des tubes ? [réponses : 8.45,  $117.6^\circ\text{C}$ ]

Données:  $\rho_L=957.9 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_V=0.5955 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu_L=2.79 \cdot 10^{-4} \text{ Pa.s}$ ,  $g=9.81 \text{ m/s}^2$   
 $\Delta h_{LV}=2.257 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ = chaleur latente de vaporisation.  
 $\sigma=58.9 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ ;  $Pr_L=1.76$ ;  $C_{PL}=4217 \text{ J/kg}$   
 $C_{Sf}=0.013$  et  $n=1$  (équations p 11.4)

**Condensation:****Ex-11.3 (S): Condensation en film laminaire sur un cylindre vertical**

La paroi extérieure d'un cylindre vertical de 80 mm de diamètre et de 1 m de longueur est maintenue à  $50^\circ\text{C}$  grâce un fluide circulant à l'intérieur du cylindre. Ce cylindre est environné d'une vapeur d'eau saturée sous une pression de 1 atm. Déterminer le coefficient moyen de transfert de chaleur sur la surface, la quantité totale de chaleur transférée ainsi que la masse de vapeur se condensant sur le cylindre.

Données:  $\rho_V=0.596 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_L=975 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu_L=375 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s}$ ,  $g=9.81 \text{ m/s}^2$   
 $k_L=0.668 \text{ w/m}$ ;  $T_{SAT}=100^\circ\text{C}$ ;  $\Delta h_{LV}=2.257 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ = chaleur latente  
 $C_{PL}=4193 \text{ J/kg}$  (utiliser l'équation p 11.7 pour une plaque verticale)  
[réponses :  $4094 \text{W/m}^2/\text{K}$ ; 51446 W; 21.4 g/s]

**Ex-11.4 (S) Condensation en film laminaire sur un cylindre horizontal**

Un cylindre horizontal de 50 mm de diamètre dont la température de la surface est de  $34^\circ\text{C}$ , est exposé à une vapeur sous 0.2 bar. Calculer la masse de vapeur, MV, qui se condense sur le tube et la chaleur échangée, Q, par m de longueur de tube.

[réponses :  $h=6927 \text{ W/m}^2.\text{K}$ , 11.6 g/s.m, 28300 W/m]

Données:  $\rho_V=0.129 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_L=989 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu_L=577 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s}$ ,  $g=9.81 \text{ m/s}^2$   
 $k_L=0.640 \text{ w/m}$ ;  $T_{SAT}=333\text{K}$ ,  $\Delta h_{LV}=2358 \text{ KJ/kg}$ = chaleur latente  
 $C_{PL}=4180 \text{ J/kg}$  (utiliser l'équation p 11.7 pour le cylindre)

Travaux dirigés No 12**Ex-11.5: Démonstration pour l'obtention d'un coefficient de condensation en film sur une plaque**

En 1916, Nusselt a proposé une analyse du phénomène de condensation en film sur une paroi froide verticale. En utilisant les suggestions ci-dessous retrouvez l'analyse de Nusselt et obtenez une expression du coefficient de transfert de chaleur pour la condensation film.

- Faites un schéma d'une plaque verticale, de largeur  $W$ , à la température  $T_w$ , sur laquelle se condense une vapeur qui est à sa température de saturation  $T_{SAT}$ . Au fur et à mesure que la vapeur se condense un film de liquide se développe et s'écoule le long de la plaque. (on appellera  $x$  l'axe vertical et  $y$  l'axe horizontal)
- On suppose que l'épaisseur du film,  $\delta(x)$ , varie lentement le long de la plaque et que le profil de vitesse  $V_x(y)$  dans le film est donné par la relation:

$$V_x(y) = \frac{(\rho_L - \rho_V) g \delta^2 y}{\mu_L} \left[ 1 - \frac{y}{2\delta} \right]$$

- Déterminez l'expression du débit massique de condensat,  $M_c$ , à la cote  $x$   
[réponse:  $M_c = W \rho_L (\rho_L - \rho_V) g \delta^3 / (3 \mu_L)$ ]
- Quelle est la variation de ce débit entre les cotes  $x$  et  $x+dx$  en fonction de la variation de l'épaisseur du film ?
- On suppose que le transfert de chaleur dans le film liquide est purement conductif et accepte l'hypothèse du régime quasi-permanent. Trouver l'expression du profil de température et du flux de chaleur en paroi (à  $x$  donné).  
[réponse  $(T - T_w) / (T_{SAT} - T_w) = y / \delta$ ]
- Trouvez l'expression du flux à la paroi  
[réponse :  $q'' = (T_{SAT} - T_w) (k_L / \delta)$ ]
- En considérant que le flux de chaleur à la paroi correspond à la chaleur nécessaire pour condenser la vapeur (on négligera la chaleur sensible), trouver l'équation différentielle reliant la variation de l'épaisseur du film avec la cote  $x$  et obtenez l'expression de la variation  $\delta(x)$

$$\text{Réponse: } \delta^4 = \frac{4x k_L (T_{sat} - T_w) \mu_L}{\Delta h_{LV} g \rho_L (\rho_L - \rho_V)}$$

- Trouver les relations pour le coefficient de transfert de chaleur local  $h(x)$  et pour le coefficient  $h$  moyen (pour  $0 < x < L$ )

Réponse:

$$h_x = \left[ \frac{\Delta h_{LV} g \rho_L (\rho_L - \rho_V) k_L^3}{4x (T_{sat} - T_w) \mu_L} \right]^{1/4} \text{ et } h_{Moyen} = 0.943 \left[ \frac{\Delta h_{LV} g \rho_L (\rho_L - \rho_V) k_L^3}{L (T_{sat} - T_w) \mu_L} \right]^{1/4}$$

**Solutionnaire Ex-11.1 Casserole**

Une casserole en cuivre, de 150 mm de diamètre, est utilisée pour faire bouillir de l'eau. Le fond de la casserole est maintenu à une température de  $T_w=115^\circ\text{C}$ .

- Déterminer la densité de flux à la paroi (comparer votre résultat avec la figure p 10.2.1) et la puissance disponible pour faire bouillir l'eau.
- Quelle est la quantité d'eau évaporée chaque minute ?
- Quelle est la valeur du rapport du flux réel au flux critique?

Données:  $\rho_L=957.9 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_V=0.5955 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu_L=2.79 \cdot 10^{-4} \text{ Pa.s}$ ,  $g=9.81 \text{ m/s}^2$   
 $\Delta h_{LV}=2.257 \cdot 10^6 \text{ J/kg}$ = chaleur latente de vaporisation.  
 $\sigma=58.9 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ ;  $Pr_L=1.76$ ;  $C_{PL}=4217 \text{ J/kg}$   
 $C_{Sf}=0.013$  et  $n=1$  (équations p 11.4)

Solution :

- La corrélation de Rohsenow donne la valeur du flux transféré :

$$q_s'' = \mu_L \Delta h_{LV} \left[ \frac{g(\rho_L - \rho_V)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[ \frac{C_{PL}(T_s - T_{SAT})}{C_{Sf} \Delta h_{LV} Pr_L^n} \right] J^3$$

$$q_s'' = 2.79 \cdot 10^{-4} \cdot 2.257 \cdot 10^6 \left[ \frac{9.81(957.9 - 0.5955)}{0.0589} \right]^{1/2} \left[ \frac{4217(115 - 100)}{0.013 \cdot 2.257 \cdot 10^6 \cdot 1.76^1} \right] J^3$$

$$q_s'' = 462254 \text{ W/m}^2 \approx 4.622 \cdot 10^5 \text{ W/m}^2$$

La puissance disponible est donc  $q = q_s'' A_s = 4.622 \cdot 10^5 \left( \pi \frac{0.15^2}{4} \right) = 8168.7 \text{ W} = 8.169 \text{ kW}$

- à chaque minute, l'énergie fournie permet l'évaporation d'une masse d'eau  $m$  telle que :

$$q \Delta t = m \Delta h_{LV} \Rightarrow m = \frac{q \Delta t}{\Delta h_{LV}}$$

$$m = \frac{8.169 \cdot 60}{2.257 \cdot 10^6} = 0.217 \text{ kg/min}$$

- Le flux critique est donné par :

$$q_C'' = 0.149 \Delta h_{LV} \rho_V \left[ \frac{\sigma g (\rho_L - \rho_V)}{\rho_V^2} \right]^{1/4}$$

$$q_C'' = 0.149 \cdot 2.257 \cdot 10^6 \cdot 0.5955 \left[ \frac{0.0589 \cdot 9.81 (957.9 - 0.5955)}{0.5955^2} \right]^{1/4}$$

$$q_C'' = 1258540.8$$

$$\frac{q_s''}{q_C''} = \frac{462254}{1258540} = 0.3673$$

**Solutionnaire Ex-11.2**

a)

$$q_s'' = 0.75 \times q_C'' = 0.75 \times 1.26 \times 10^6 = 9.45 \times 10^5 \text{ W/m}^2$$

$$q_{\text{totale}} = n_t \times \pi DL \times q_s'' = m_{\text{évaporée}} \times \Delta h_{LV} \Rightarrow n_t = \frac{m_{\text{évaporée}} \times \Delta h_{LV}}{\pi DL \times q_s''}$$

$$n_t = \frac{\frac{750}{3600} \times 2.257 \times 10^6}{\pi \times 0.025 \times 0.75 \times 9.45 \times 10^5} = 8.45$$

b)

$$q_s'' = \mu_L \Delta h_{LV} \left[ \frac{g (\rho_L - \rho_V)}{\sigma} \right]^{1/2} \left[ \frac{C_{P,L} (T_S - T_{SAT})}{C_{sf} \Delta h_{LV} Pr_L^n} \right]^3$$

$$\Rightarrow T_S = T_{SAT} + \frac{C_{sf} \Delta h_{LV} Pr_L^n}{C_{P,L}} \left[ \frac{q_s''}{\mu_L \Delta h_{LV} \left[ \frac{g (\rho_L - \rho_V)}{\sigma} \right]^{1/2}} \right]^{1/3}$$

$$T_S = 100 + \frac{0.013 \times 2.257 \times 10^6 \times 1.76^1}{4217} \times \left[ \frac{9.45 \times 10^5}{2.79 \times 10^{-4} \times 2.257 \times 10^6 \left[ \frac{9.81 \times (957.9 - 0.5955)}{58.9 \times 10^{-3}} \right]^{1/2}} \right]^{1/3}$$

$$T_S = 100 + 11.304 \times \left[ \frac{9.45 \times 10^5}{251442} \right]^{1/3} = 117.57^\circ \text{C}$$

**Solutionnaire Ex-11.3** Condensation en film laminaire sur un cylindre vertical

La paroi extérieure d'un cylindre vertical de 80 mm de diamètre et de 1 m de longueur est maintenue à 50°C grâce un fluide circulant à l'intérieur du cylindre. Ce cylindre est environné d'une vapeur d'eau saturée sous une pression de 1 atm. Déterminer le coefficient moyen de transfert de chaleur sur la surface, la quantité totale de chaleur transférée ainsi que la masse de vapeur se condensant sur le cylindre.

Données:  $\rho_V = 0.596 \text{ kg/m}^3$ ;  $\rho_L = 975 \text{ kg/m}^3$ ;  $\mu_L = 375 \cdot 10^{-6} \text{ Pa.s}$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$   
 $k_L = 0.668 \text{ w/m}$ ;  $T_{SAT} = 100^\circ \text{C}$ ;  $\Delta h_{LV} = 2.257 \cdot 10^6 \text{ J/kg} = \text{chaleur latente}$   
 $C_{PL} = 4193 \text{ J/kg}$  (utiliser l'équation p 11.7 pour une plaque verticale)



Solution :

a) Le cylindre étant vertical, on néglige la courbure et on utilise la corrélation pour un plan vertical :

$$Nu = \frac{\bar{h}_L L}{k_L} = 0.943 \left[ \frac{\rho_L g (\rho_L - \rho_V) \Delta h'_{LV} L^3}{\mu_L k_L (T_{SAT} - T_S)} \right]^{1/4}$$

$$\Delta h'_{LV} = \Delta h_{LV} + 0.68 C_p (T_{SAT} - T_S) = 2.257 \cdot 10^6 + 0.68 \cdot 4193 (100 - 50) = 2399562$$

$$\Delta h'_{LV} = 2399562 = 2.399 \cdot 10^6$$

$$Nu = 0.943 \left[ \frac{975 \cdot 9.81 (975 - 0.596) \cdot 2.399 \cdot 10^6 \cdot 1^3}{375 \cdot 10^{-6} \cdot 0.668 (100 - 50)} \right]^{1/4} = 6128$$

$$\bar{h}_L = \frac{Nu k_L}{L} = \frac{6128 \cdot 0.668}{1} = 4094 \text{ W/m}^2\text{C}$$

b) la quantité totale de chaleur échangée s'exprime par :

$$q = \bar{h}_L A (T_{SAT} - T_S) = 4094 (\pi \cdot 0.080 \cdot 1) (100 - 50) = 51446 \text{ W}$$

c)

$$q = m \Delta h'_{LV}$$

$$m = \frac{q}{\Delta h'_{LV}} = \frac{51446}{2.399 \cdot 10^6} = 0.0214 \text{ kg/s} = 21.4 \text{ g/s}$$

### Solutionnaire Ex-11.4

$$\bar{h}_D = 0.729 \left[ \frac{\rho_L g (\rho_L - \rho_V) \Delta h'_{LV} k_L^3}{\mu_L D (T_{SAT} - T_S)} \right]^{1/4}$$

$$\Delta h'_{LV} = \Delta h_{LV} + 0.68 C_{PL} (T_{SAT} - T_S) = 2358 \times 10^3 + 0.68 \times 4180 \times [333 - (273 + 34)] = 2.4319 \times 10^6$$

$$\bar{h}_D = 0.729 \left[ \frac{989 \times 9.81 \times (989 - 0.129) \times 2.4319 \times 10^3 \times 0.64^3}{577 \times 10^{-6} \times 0.05 \times [333 - (273 + 34)]} \right]^{1/4} = 6927.4 \text{ W/m}^2\text{C}$$

$$M_V = \frac{q}{\Delta h'_{LV}} = \frac{\pi D L \bar{h}_D (T_{SAT} - T_S)}{\Delta h'_{LV}} = \frac{\pi \times 0.05 \times 1 \times 6927.4 \times [333 - (273 + 34)]}{2.4319 \times 10^3}$$

$$M_V = 0.0116 \text{ kg/s.m} = 11.6 \text{ g/s.m}$$

$$q = \pi D L \bar{h}_D (T_{SAT} - T_S) = M_V \times \Delta h'_{LV} = 0.0116 \times 2.4319 \times 10^3 = 28291 \approx 28.3 \text{ kW/m de tube}$$

## Solutionnaire Ex-11.5

## Démonstration pour l'obtention d'un coefficient de condensation en film sur une plaque

En 1916, Nusselt a proposé une analyse du phénomène de condensation en film sur une paroi froide verticale. En utilisant les suggestions ci-dessous retrouvez l'analyse de Nusselt et obtenez une expression du coefficient de transfert de chaleur pour la condensation film.

a) Faites un schéma d'une plaque verticale, de largeur  $W$ , à la température  $T_W$ , sur laquelle se condense une vapeur qui est à sa température de saturation  $T_{SAT}$ . Au fur et à mesure que la vapeur se condense un film de liquide se développe et s'écoule le long de la plaque. (on appellera  $x$  l'axe vertical et  $y$  l'axe horizontal

Réponse ci-contre

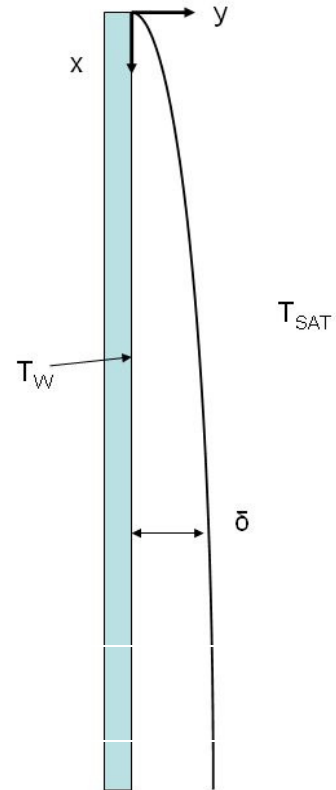
b) On suppose que l'épaisseur du film,  $\delta(x)$ , varie lentement le long de la plaque et que le profil de vitesse  $V_x(y)$  dans le film est donné par la relation:

$$V_x(y) = \frac{(\rho_L - \rho_V)g\delta y}{\mu_L} \left[1 - \frac{y}{2\delta}\right]$$

Déterminez l'expression du débit massique de condensat,  $M_c$ , à la cote  $x$

Réponse :

Le débit s'obtient par intégration du profil de vitesse à une position  $x$  donnée :



$$M_C = \int_0^{\delta} \rho_L V_x(y) W dy = \int_0^{\delta} \rho_L \frac{(\rho_L - \rho_V) g \delta y}{\mu_L} \left(1 - \frac{y}{2\delta}\right) W dy =$$

$$M_C = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \delta W}{\mu_L} \int_0^{\delta} y \left(1 - \frac{y}{2\delta}\right) dy = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \delta W}{\mu_L} \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2\delta} \frac{y^3}{3} \right]_0^{\delta}$$

$$M_C = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \delta W}{\mu_L} \left[ \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{6\delta} \right] = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \delta W}{\mu_L} \left[ \frac{3\delta^2}{6} - \frac{\delta^2}{6} \right]$$

$$M_C = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g \delta W}{\mu_L} \left[ \frac{2\delta^2}{6} \right] = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g W \delta^3}{3\mu_L}$$

c) Quelle est la variation de ce débit entre les cotes  $x$  et  $x+dx$  en fonction de la variation de l'épaisseur du film ?

Réponse :

$$\frac{d M_C}{dx} = \frac{d \left( \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g W \delta^3}{3\mu_L} \right)}{dx} = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g W}{3\mu_L} \frac{d(\delta^3)}{dx}$$

$$\frac{d M_C}{dx} = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g W}{3\mu_L} 3\delta^2 \frac{d\delta}{dx} = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g W}{\mu_L} \delta^2 \frac{d\delta}{dx}$$

$$d M_C = \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g W}{\mu_L} \delta^2 d\delta$$

d) On suppose que le transfert de chaleur dans le film liquide est purement conductif et accepte l'hypothèse du régime quasi-permanent. Trouver l'expression du profil de température et du flux de chaleur en paroi (à  $x$  donné).

Réponse :

On résout le problème de la conduction suivant la direction  $y$  dans un film liquide stagnant d'épaisseur  $\delta$  avec comme conditions frontières  
à  $y=0$   $T=T_W$  et à  $y=\delta$   $T=T_{sat}$

Le profil est donc linéaire (voir chapitre 3) et s'exprime par :

$$\frac{T_y - T_W}{T_{sat} - T_W} = \frac{y}{\delta}$$

$$q_y''|_{y=0} = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = -k (T_{sat} - T_W) \frac{1}{\delta}$$

## TDEX- 11.8

Commentaire : ce flux est négatif, la chaleur de condensation entre dans la paroi.

e) En considérant que le flux de chaleur à la paroi correspond à la chaleur nécessaire pour condenser la vapeur (on négligera la chaleur sensible), trouver l'équation différentielle reliant la variation de l'épaisseur du film avec la cote  $x$  et obtenez l'expression de la variation  $\delta(x)$

Réponse:

Entre les cotes  $x$  et  $x+dx$ , l'apport d'une quantité de condensat  $dM_C$  a nécessité l'échange à la surface  $Wdx$  de la paroi de la chaleur latente correspondante soit:

$$\begin{aligned} \Delta H_{LV} dM_C &= \left| q_y \right|_{y=0} W dx \\ \Delta H_{LV} \frac{\rho_L (\rho_L - \rho_V) g W}{\mu_L} \delta^2 d\delta &= k_L (T_{sat} - T_W) \frac{1}{\delta} W dx \\ \frac{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g}{k_L (T_{sat} - T_W) \mu_L} \delta^3 d\delta &= dx \\ \frac{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g}{k_L (T_{sat} - T_W) \mu_L} \int_0^\delta \delta^3 d\delta &= \int_0^x dx \\ \frac{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g}{k_L (T_{sat} - T_W) \mu_L} \frac{\delta^4}{4} &= x \\ \delta^4 &= \frac{4 x k_L (T_{sat} - T_W) \mu_L}{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g} \\ \delta &= \left( \frac{4 x k_L (T_{sat} - T_W) \mu_L}{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g} \right)^{1/4} \end{aligned}$$

f) Trouver les relations pour le coefficient de transfert de chaleur local  $h(x)$  et pour le coefficient  $h$  moyen (pour  $0 < x < L$ )

Réponse : Le flux à la paroi obtenu en d) s'exprime aussi par la loi de refroidissement de Newton :

$$\left| \dot{q}_y \right|_x = h_x (T_{sat} - T_W) = (T_{sat} - T_W) \frac{k_L}{\delta}$$

$$h_x = \frac{k_L}{\delta} = \frac{k_L}{\left( \frac{4 x k_L (T_{sat} - T_W) \mu_L}{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g} \right)^{1/4}} = \frac{(k_L^4)^{1/4}}{\left( \frac{4 x k_L (T_{sat} - T_W) \mu_L}{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g} \right)^{1/4}}$$

$$h_x = \left[ \frac{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g k_L^4}{4 x k_L (T_{sat} - T_W) \mu_L} \right]^{1/4} = \left[ \frac{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g k_L^3}{4 x (T_{sat} - T_W) \mu_L} \right]^{1/4}$$

Pour la valeur moyenne du coefficient h, on intègre en 0 et L :

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx = \frac{1}{L} \int_0^L \left[ \frac{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g k_L^3}{4 x (T_{sat} - T_W) \mu_L} \right]^{1/4} dx$$

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left[ \frac{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g k_L^3}{4 (T_{sat} - T_W) \mu_L} \right]^{1/4} \int_0^L x^{-1/4} dx$$

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left[ \frac{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g k_L^3}{4 (T_{sat} - T_W) \mu_L} \right]^{1/4} \left[ \frac{1}{\left( -\frac{1}{4} + 1 \right)} x^{\left( -\frac{1}{4} + 1 \right)} \right]_0^L$$

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \left[ \frac{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g k_L^3}{4 (T_{sat} - T_W) \mu_L} \right]^{1/4} \left[ \frac{4}{3} L^{\frac{3}{4}} \right]$$

$$\bar{h}_L = \left[ \frac{4}{3} \frac{1}{4^{1/4}} \right] \left[ \frac{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g k_L^3}{(T_{sat} - T_W) \mu_L} \right]^{1/4} \frac{1}{L} \left[ L^{\frac{3}{4}} \right]$$

$$\bar{h}_L = 0.943 \left[ \frac{\Delta H_{LV} \rho_L (\rho_L - \rho_V) g k_L^3}{L (T_{sat} - T_W) \mu_L} \right]^{1/4}$$



## Travaux dirigés et exercices du chapitre 12: Rayonnement

## Ex-12.1 (S) Soleil

Le flux solaire qui atteint l'atmosphère terrestre a une valeur moyenne de  $q''_s = 1353 \text{ W/m}^2$ . Les diamètres du soleil et de la terre sont respectivement de  $D_s = 1.39 \cdot 10^9 \text{ m}$  et de  $D_T = 1.27 \cdot 10^7 \text{ m}$  et la distance des centres de la terre et du soleil est  $L_{TS} = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

- quelle est l'émittance totale du soleil ?
- en supposant la surface du soleil comme un corps noir, quelle est sa température ?
- à quelle longueur d'onde l'émittance spectrale du soleil est-elle maximale ?
- en supposant que la surface de la terre est un corps noir dont la seule source d'énergie est celle du soleil, estimer la température moyenne de la surface de la terre.
- En fait, approximativement 30% du rayonnement solaire est réfléchi par la terre (albedo); recalculer dans ces conditions la température moyenne de la surface de la terre et commenter.

## Solutionnaire

- a) L'atmosphère terrestre se trouve à une distance du soleil

$$L_{TS} = 1.5 \cdot 10^{11}$$

Considérons une calotte sphérique de rayon  $L_{TS}$  centrée sur le soleil. La surface de cette calotte sphérique est  $S = 4\pi l^2$  l'énergie totale  $Q_{SOLEIL}$  émise par le soleil passe au travers de cette surface et elle vaut donc:

$$Q_{SOLEIL} = 4\pi L_{TS}^2 q''_s = 4\pi (1.5 \cdot 10^{11})^2 (1353) = 3.8255 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Toute cette énergie est émise par la surface du soleil dont l'émittance totale  $E_b$  est donnée par :

$$E_{b,soleil} = \frac{Q_{Soleil}}{4\pi \left(\frac{D_s}{2}\right)^2} = \frac{3.8255 \cdot 10^{26}}{6.0699 \cdot 10^{18}} = 6.3025 \cdot 10^7 \text{ (W / m}^2\text{)}$$

- b) En utilisant la loi de Stefan-Boltzman :

$$E_B = \sigma T^4 \Rightarrow T_{SOLEIL} = \left(\frac{E_{B,SOLEIL}}{\sigma}\right)^{1/4} = \left(\frac{6.3025 \cdot 10^7}{5.67 \cdot 10^{-8}}\right)^{1/4} = 5774 \text{ K}$$

- c) Avec la loi de Wien  $\lambda_{\max} T = 2898 (\mu\text{m.K})$ , on trouve donc :

$$\lambda_{\max} = \frac{2898}{5774} = 0.5 \mu\text{m}$$

## TDEX- 12.2

- d) Le flux solaire  $q''_s = 1353 \text{ W/m}^2$  est celui qui traverse la calotte sphérique de rayon  $L_{TS}$  défini en a. La projection de la terre sur cette calotte sphérique est égale à la section de la terre

$$S_p = \frac{\pi D_T^2}{4}$$

alors que la surface de la terre vaut :

$$S_{terre} = 4\pi \left( \frac{D_T}{2} \right)^2 = \pi D_T^2.$$

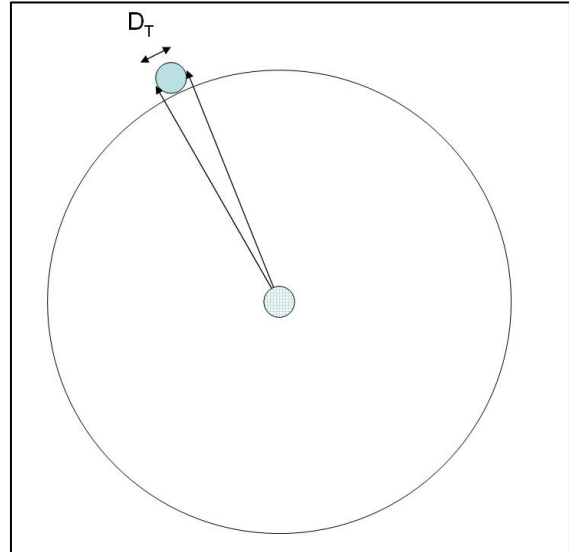
Le bilan d'énergie s'écrit donc :

$$q''_T S_{terre} = q''_S S_p$$

$$q''_T \pi D_T^2 = \frac{\pi D_T^2}{4} q''_S$$

$$\Rightarrow q''_T = \frac{q''_S}{4} = 338.25 \text{ W/m}^2 = \sigma T_{terre}^4$$

$$\Rightarrow T_{terre} = \left( \frac{338.25}{5.67 \cdot 10^{-8}} \right)^{1/4} = 277.9 \text{ K} \quad (\approx 5^\circ \text{C})$$



- e) uniquement 70% de l'énergie solaire est disponible

$$T_{terre} = \left( \frac{0.7 \cdot 338.25}{5.67 \cdot 10^{-8}} \right)^{1/4} = 254 \text{ K} \quad (\approx -19^\circ \text{C})$$

Commentaire : La température moyenne de la terre est en fait de  $15^\circ \text{C}$  à cause des gaz à effets de serre ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{N}_2\text{O}$ ,  $\text{CH}_4$ ,  $\text{O}_3$ ) qui absorbent en partie le rayonnement émis par la terre.

### Ex-12.2 (S) Efficacité d'une ampoule

Calculer l'efficacité d'une ampoule de 100 W en supposant que son filament assimilé à une fine plaque de 5 mm de long par 2 mm de large est à une température de 2900 K et qu'il émet comme un corps noir. On définit l'efficacité comme le rapport la puissance émise dans le visible sur la puissance totale de l'ampoule.

#### Solutionnaire :

- a) On calcule la fraction de l'énergie émise dans le visible :  $F_{0.4-0.7} = F_{0.7} - F_{0.4}$ .

$$\text{pour } \lambda = 0.4 \mu\text{m} : \lambda T = 0.4 \cdot 2900 = 1160$$

$$\text{pour } \lambda = 0.7 \mu\text{m} : \lambda T = 0.7 \cdot 2900 = 2030$$

Par interpolation linéaire des valeurs du tableau p. 12.4, on trouve :



## TDEX- 12.3

$$\frac{F_{0.4} - 0.00101}{0.00252 - 0.00101} = \frac{1160 - 1111}{1222 - 1111} \Rightarrow F_{0.4} = 0.00168$$

$$\frac{F_{0.7} - 0.06672}{0.08496 - 0.06672} = \frac{2030 - 2000}{2111 - 2000} \Rightarrow F_{0.7} = 0.0716$$

$$F_{0.4-0.7} = 0.0716 - 0.00168 = 0.07$$

La surface du filament qui émet est égale à :

$$A_s = 2 \cdot \text{largeur} \cdot \text{longueur} = 2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ (m}^2\text{)}$$

On suppose la surface comme un corps noir et la puissance totale pour l'émission dans le visible vaut :

$$q_{\text{visible}} = A_s \sigma T_s^4 F_{0.4-0.7} = 2 \cdot 10^{-5} \cdot 5.68 \cdot 10^{-8} \cdot (2900)^4 \cdot 0.07 = 5.62 \text{ watts}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{5.62}{100} = 5.6\%$$

### Ex-12.3 (S)

a) Déterminez les longueurs d'onde correspondant au maximum d'émission spectrale pour les surfaces suivantes : soleil à 5800 K ; filament de tungsten à 2500 K ; surface métallique à 1500 K ; la peau à 305 surface métallique à 60 K refroidie par de l'azote liquide.

b) Calculer les fractions du rayonnement solaire émises dans les trois domaines : ultraviolet, visible et infrarouge

### Solutionnaire :

a) Avec la loi de Wien  $\lambda_{\text{max}} T = 2898 \text{ (}\mu\text{m.K)}$ , on obtient donc :

surface	soleil	tungsten	metal	peau	métal
Température K	5800	2500	1500	305	60
$\lambda_{\text{max}} \text{ (}\mu\text{m)}$	0.50	1.16	1.93	9.50	48.30

b) Pour T=5800K, on s'intéresse aux fractions émises respectivement dans les gammes suivantes : (voir figure p. 12.2)

	UV	Visible	IR
a-b	0.01-0.4	0.4-0.7	0.7-100
$\lambda_a T - \lambda_b T$	58 - 2320	2320 - 4060	4060 - 5.8 10 <sup>5</sup>
$F_{0-\lambda_a} \quad F_{0-\lambda_b} \quad -$ (tableau p 12.4)	0 \quad - \quad 0.125	0.125 \quad -0.491	0.491 \quad - \quad 1
$F_{\lambda_b-\lambda_a}$	0.125	0.366	0.509

On retient donc que 12.5% du rayonnement solaire est dans l'UV, 36.6% dans le visible et 51% dans l'IR.

Commentaire : Les UV sont absorbés par l'ozone de la stratosphère, les IR sont absorbés par la vapeur d'eau et le gaz carbonique de la troposphère puis réémis vers le sol et vers l'espace. Le Visible et le proche Infra-Rouge (0.78-1.4  $\mu\text{m}$ ) atteignent la surface.

**Ex-12.4 (S) Thermocouple**

Un gaz s'écoule dans une conduite dont les parois sont à la température de 250 °C. Un thermocouple placé dans l'écoulement au centre de la conduite indique une valeur de 150 °C. Sachant que le coefficient de transfert de chaleur à la surface du thermocouple avec le gaz vaut  $h=100 \text{ W/m}^2 \cdot ^\circ\text{C}$  et que l'émissivité de sa surface est  $\epsilon=0.45$ , calculer la température du gaz.

(on supposera le thermocouple parfaitement isolé et le régime permanent).

**Solutionnaire**

Le bilan donne sur le thermocouple s'écrit :  $E_{in}-E_{out}=0$

Il y a apport d'énergie par radiation et perte par convection :

$$E_{in} = \epsilon\sigma(T_{par}^4 - T_{tc}^4) \quad E_{out} = h(T_{tc} - T_{gaz})$$

$$E_{in} - E_{out} = 0$$

$$\Rightarrow \epsilon\sigma(T_{par}^4 - T_{tc}^4) = h(T_{tc} - T_{gaz})$$

$$T_{gaz} = T_{tc} - \frac{\epsilon\sigma(T_{par}^4 - T_{tc}^4)}{h}$$

Il faut convertir les °C en K :

$$T_{par} = 523 \text{ K} \quad T_{tc} = 423 \text{ K}$$

$$T_{gaz} = T_{tc} - \frac{\epsilon\sigma(T_{par}^4 - T_{tc}^4)}{h} = 423 - \frac{0.45 \cdot 5.68 \cdot 10^{-8} (523^4 - 423^4)}{100} = 412.08 \text{ K}$$

$$T_{gaz} = 139.09 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Commentaire : Le rayonnement perturbe significativement la mesure de la température du gaz. L'installation d'un écran (pour éviter les échanges avec la paroi) serait appropriée.

**Ex-12.5 (S) Capteur solaire thermique**

La surface  $A_S$  d'un panneau solaire, non encore protégée par une vitre, a une émissivité de 0.1 et une absorptivité du rayonnement solaire de  $\alpha = 0.95$ . Avec un ensoleillement  $G_{soleil} = 750 \text{ W/m}^2$ , la température  $T_S$  à la surface du panneau atteint 120 °C. La température de l'air ambiant est de 30 °C et on peut supposer que la température du ciel dégagé est de -10 °C. La surface  $A_S$  du panneau échange aussi par convection avec l'air environnant avec un coefficient  $h$  alors que la face arrière échange sa chaleur  $Q_C$  avec le fluide caloporteur.

Calculer l'efficacité du panneau pour les deux valeurs du coefficient  $h=1$  et  $h=5 \text{ W/m}^2\text{C}$

**Solutionnaire :**

En régime permanent : :  $E_{in}-E_{out}=0$

- Le flux entrant est celui apporté par le soleil:  $E_{in} = A_S \alpha G_{soleil}$
- Il y a trois contributions sortantes :
- les pertes par convection avec l'air  $E_{convection} = hA_S (T_S - T_{air})$
- les pertes par rayonnement avec le ciel froid  $E_{rayonnement} = A_S \varepsilon \sigma (T_S^4 - T_{ciel}^4)$
- le transfert au fluide caloporteur  $Q_C$

$$A_S \alpha G_{soleil} = A_S \varepsilon \sigma (T_S^4 - T_{ciel}^4) + hA_S (T_S - T_{air}) + Q_C$$

$$\alpha G_{soleil} = \varepsilon \sigma (T_S^4 - T_{ciel}^4) + h(T_S - T_{air}) + \frac{Q_C}{A_S}$$

$$\left( \frac{Q_C}{A_S} \right) = q_C = \alpha G_{soleil} - \varepsilon \sigma (T_S^4 - T_{ciel}^4) - h(T_S - T_{air})$$

Par  $m^2$ , on récupère donc :

$$\text{Si } h=1 \text{ W/m}^2\text{C} \quad q_C = 514 \text{ W/m}^2$$

$$\text{Si } h=5 \text{ W/m}^2\text{C} \quad q_C = 154 \text{ W/m}^2$$

On définit l'efficacité comme le rapport de l'énergie récupéré sur l'énergie solaire disponible :

$$\eta_{h=1} = \frac{514}{750} = 69\% \quad \eta_{h=5} = \frac{154}{750} = 20\%$$

Commentaire : Afin d'éviter les pertes, on installe une vitre qui évite le refroidissement par convection et retient le rayonnement IR émis par la surface du panneau.

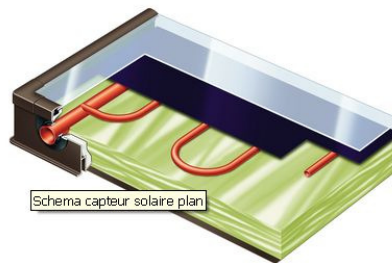
**Les capteurs plans**

Schéma de capteur solaire plan. Source : Viessmann

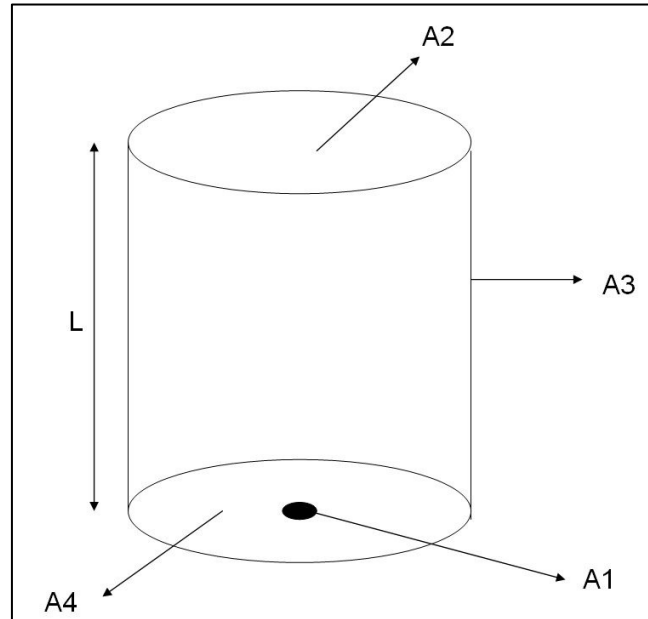
Les capteurs sont confinés dans un coffrage entre une vitre et une surface noire. Ils sont performants et offrent un très bon rapport performance prix. C'est actuellement le système le plus répandu. Un fluide antigel est chauffé dans les panneaux et transmet ensuite sa chaleur à l'eau contenue dans un ballon de stockage tampon.

**Ex-12.6 (S) Facteur de forme A**

a) Pour la géométrie ci-contre, calculer le facteur de forme  $F_{1-3}$  sachant que les rayons des disques 1 et 2 sont de 10 cm et 120 cm respectivement et que  $L=2m$

b) Si les températures des surfaces A1 et A3 (supposées corps noir) sont de  $600^{\circ}C$  et  $100^{\circ}C$ , quel est l'échange net de chaleur de A1 vers A3 ?

c) Refaire les calculs  $L=1 m$



**Solutionnaire :**

a) Pour cette enceinte fermée, tous les rayons quittant la surface A1 tombent sur les surfaces de l'enceinte :

$$\sum_{k=1}^4 F_{1-k} = 1$$

$$\Rightarrow F_{1-1} + F_{1-2} + F_{1-3} + F_{1-4}$$

La surface A1 est plane donc  $F_{11}=0$ . Les surfaces A1 et A4 sont dans le même plan donc  $F_{1-4}=0$ .

$$\Rightarrow F_{1-2} + F_{1-3} = 1 \Rightarrow F_{1-3} = 1 - F_{1-2}$$

Tous les rayons quittant A1 vont tomber sur A2 et A3.

On utilise le graphique de la page 12.8 pour déterminer  $F_{1-2}$ .

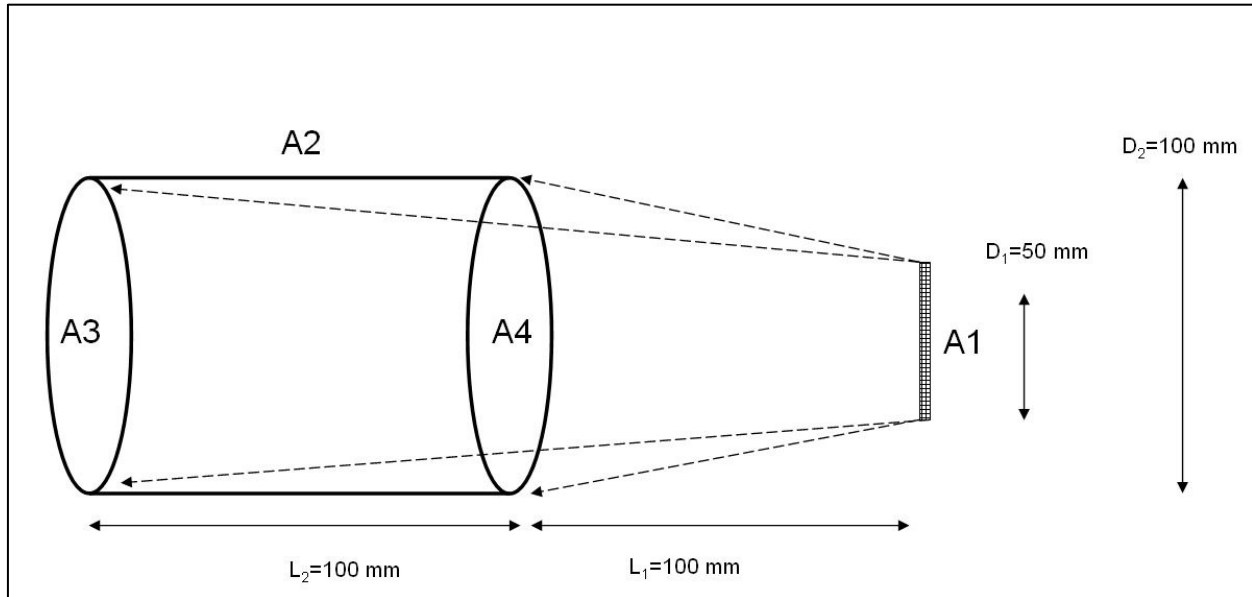
$$L/r_1 = 2/0.1 = 20 \quad r_2/L = 1.2/2 = 0.6 \quad F_{1-2} \approx 0.26 \quad \Rightarrow \quad F_{1-3} = 0.74$$

b)  $q_{1-3} = A_1 F_{1-3} \sigma (T_1^4 - T_3^4) = \pi 0.1^2 \cdot 0.74 \cdot 5.68 \cdot 10^{-8} [(273+600)^4 - (273+100)^4] = 736 W$

c) Pour  $L=1$ ,  $F_{1-2} \approx 0.6 \Rightarrow F_{1-3} = 0.4 \quad q_{1-3} = 400 W$

Ex-12.7 (S) Facteur de forme B

Un disque de diamètre  $D_1$  est placé à une distance  $L_1$  d'un four tubulaire de diamètre  $D_2$  et de longueur  $L_2$ . La paroi interne de ce four est à une température de 1000 K. On souhaite calculer la puissance radiative émise par la paroi interne du four qui sera récupérée par le disque.



**Solutionnaire :**

Il faut estimer le facteur de forme  $F_{2-1}$ . On a la relation de réciprocité

$$A_1 F_{1-2} = A_2 F_{2-1} \Rightarrow F_{2-1} = \frac{A_1}{A_2} F_{1-2}$$

On définit les surfaces fictives A3 et A4 aux deux extrémités du four. Les rayons qui quittent A1 et qui entrent dans le four passent par A4 puis, ils tombent sur A2 ou ils sortent par A3 : on en déduit la relation des facteurs de formes :

$$F_{1-4} = F_{1-2} + F_{1-3} \Rightarrow F_{1-2} = F_{1-4} - F_{1-3}$$

Les facteurs  $F_{1-4}$  et  $F_{1-3}$  peuvent s'obtenir avec la figure p 12.8

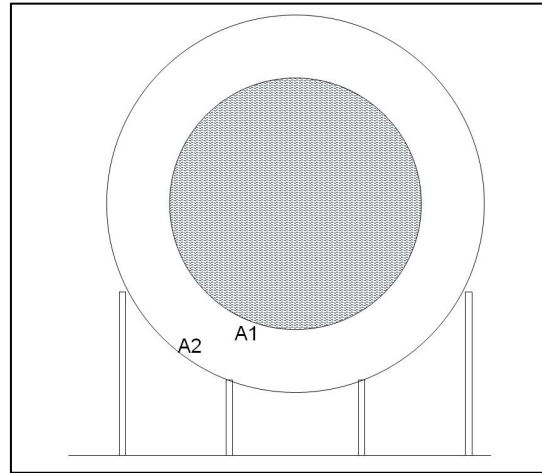
$F_{1-4} : L/r_1 = 0.1/0.025 = 4$	$r_2/L = 0.05/0.1 = 0.5$	$F_{1-4} \approx 0.20$	
$F_{1-3} : L/r_1 = 0.2/0.025 = 8$	$r_2/L = 0.05/0.2 = 0.25$	$F_{1-3} \approx 0.06$	$F_{1-2} \approx 0.14$

$$q_{2 \rightarrow 1} = F_{2-1} A_2 E_{b,2} = \left( \frac{A_1}{A_2} F_{1-2} \right) A_2 E_{b,2} = F_{1-2} A_1 E_{b,2} = 0.14 \left( \frac{\pi 0.05^2}{4} \right) (5.67 \cdot 10^{-8} \cdot 1000^4)$$

$$q_{2 \rightarrow 1} = 15.6 \text{ W}$$

**Ex-12.8 (S)** Perte thermique d'un réservoir de stockage d'azote liquide

Un réservoir d'azote liquide est constitué de deux sphères concentriques de diamètres de 1m et 1.5 m. Dans l'espace entre les deux sphères, on fait le vide afin d'isoler la sphère intérieure qui contient l'azote liquide. Les surfaces des sphères en aluminium sont polies et l'émissivité,  $\varepsilon$ , vaut 0.03 Sachant que les températures des surfaces des deux sphères sont respectivement de 77 K et 273 K, calculer la quantité nette de chaleur reçue par la sphère intérieure. Calculer la quantité d'azote vaporisé par heure. Commenter



Données : pour deux sphères concentriques de surfaces  $A_1$  et  $A_2$  (avec rayons  $r_1 < r_2$ ), les facteurs de formes sont :

$$F_{1-2} = 1 \quad F_{1-1} = 0 \quad F_{2-1} = \frac{A_1}{A_2} \quad F_{2-2} = 1 - \frac{A_1}{A_2}$$

Pour l'azote :  $\Delta H_{LV} = 198 \text{ kJ/kg}$   $\rho = 808 \text{ kg/m}^3$

**Solutionnaire** : L'espace entre les deux sphères est fermée et la relation (28) p. 12.15 s'applique :

$$q_i = \frac{E_{b,i} - E_{b,j}}{(R_i + R_{i-j} + R_j)} \quad \text{avec} \quad R_i + R_{i-j} + R_j = \frac{1 - \varepsilon_i}{A_i \varepsilon_i} + \frac{1}{A_i F_{i-j}} + \frac{1 - \varepsilon_j}{A_j \varepsilon_j}$$

On choisit  $i=2$  et  $j=1$

$$R_{\text{totale}} = R_2 + R_{2-1} + R_1 = \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2} + \frac{1}{A_2 F_{2-1}} + \frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} \quad \text{mais} \quad F_{2-1} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$R_{\text{totale}} = \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2} + \frac{1}{A_2 \frac{A_1}{A_2}} + \frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} = \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2} + \frac{1}{A_1} + \frac{1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} = \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_1 + 1 - \varepsilon_1}{A_1 \varepsilon_1} = \frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2} + \frac{1}{A_1 \varepsilon_1}$$

$$q_{i \rightarrow j} = q_2 = \frac{E_{b,2} - E_{b,1}}{\frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2} + \frac{1}{A_1 \varepsilon_1}} = \frac{\sigma(T_2^4 - T_1^4)}{\frac{1 - \varepsilon_2}{A_2 \varepsilon_2} + \frac{1}{A_1 \varepsilon_1}} = 20.6 \text{ W} = \Delta H_{LV} m_{\text{azote vaporisé}}$$

$$\Rightarrow m = \frac{20.6}{198 \cdot 10^3} = 1.04 \cdot 10^{-4} \text{ kg/s} = 0.104 \text{ g/s} = 347 \text{ g/heure} \approx 9 \text{ kg/jour}$$

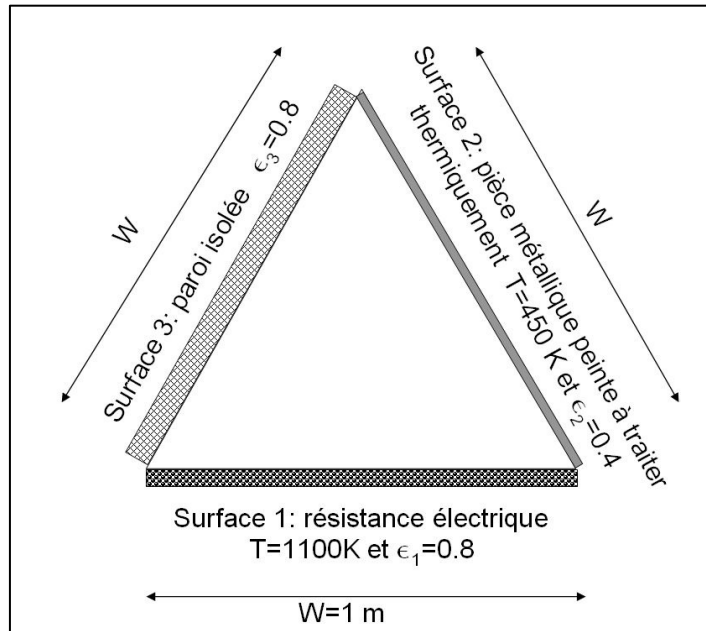
$$\text{volume du réservoir} = \frac{4}{3} \pi R_1^3 = 0.523 \text{ m}^3 = 523 \text{ litres} \Rightarrow \text{capacité de 423 kg d'azote}$$

**Ex-12.9 (S)** Cuisson d'une pièce peinte

La surface peinte d'une pièce métallique doit subir un traitement thermique à 450K. On utilise le four ci-contre composé de 3 parois de surface identique (largeur W, hauteur H):

- la surface 1 est la résistance électrique à une température de 1100 K
- la surface 2 est la pièce métallique à traiter à une température de 450 K
- la surface trois est une paroi isolée.

Calculer la puissance nécessaire du four (par m de hauteur) ainsi que la température de la surface isolée.



**Solutionnaire :**

Pour cette enceinte fermée, l'équation (31) p. 12.16 s'applique

$$q_i = \sum_{j=1}^N \frac{J_i - J_j}{(A_i F_{i-j})^{-1}} = \frac{E_{ib} - J_i}{A_i \epsilon_i}$$

et on va écrire le système de trois équations à 3 inconnues :les radiosités des 3 surfaces  $J_1, J_2$  et  $J_3$ . On a donc :

pour la surface 1 :

$$q_1 = \sum_{j=1}^3 \frac{J_1 - J_j}{(A_1 F_{1-j})^{-1}} = \frac{E_{1,b} - J_1}{A_1 \epsilon_1} = \frac{J_1 - J_2}{(A_1 F_{1-2})^{-1}} + \frac{J_1 - J_3}{(A_1 F_{1-3})^{-1}} \quad [1]$$

pour la surface 2 :

$$q_2 = \sum_{j=1}^3 \frac{J_2 - J_j}{(A_2 F_{2-j})^{-1}} = \frac{E_{2,b} - J_2}{A_2 \epsilon_2} = \frac{J_2 - J_1}{(A_2 F_{2-1})^{-1}} + \frac{J_2 - J_3}{(A_2 F_{2-3})^{-1}} \quad [2]$$

pour la surface 3 qui est isolée:

$$q_3 = \sum_{j=1}^3 \frac{J_3 - J_j}{(A_3 F_{3-j})^{-1}} = 0 = \frac{J_3 - J_1}{(A_2 F_{3-1})^{-1}} + \frac{J_3 - J_2}{(A_2 F_{3-2})^{-1}} = 0 \quad [3]$$

Considérant la géométrie et la symétrie du four, le rayonnement émis par une surface est reçu pour moitié par chacune des deux autres surfaces:

$$F_{1-2} + F_{1-3} = 1 \quad F_{2-1} + F_{2-3} = 1 \quad F_{3-1} + F_{3-2} = 1$$

$$F_{1-2} = F_{1-3} = F_{2-1} = F_{2-3} = F_{3-1} = F_{3-2} = 0.5$$

Si on définit  $\beta_1 = \frac{1 - \epsilon_1}{\epsilon_1}$  et  $\beta_2 = \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2}$  le système d'équations linéaires (1-3) à résoudre s'écrit

donc :

$$J_1 \left( 1 + \frac{1}{\beta_1} \right) = \frac{E_{1,b}}{\beta_1} + \frac{1}{2} (J_2 + J_3) \quad \text{avec } E_{1,b} = \sigma T_1^4$$

$$J_2 \left( 1 + \frac{1}{\beta_2} \right) = \frac{E_{2,b}}{\beta_2} + \frac{1}{2} (J_1 + J_3) \quad \text{avec } E_{2,b} = \sigma T_2^4$$

$$J_3 = \frac{1}{2} (J_1 + J_2)$$

Ce système peut être résolu numériquement par itération (méthode de Gauss-Siedel) avec Excel et son Solveur (méthode déjà utilisée pour le projet no 1) :

$$J_1 = \frac{\frac{E_{1,b}}{\beta_1} + \frac{1}{2} (J_2 + J_3)}{\left( 1 + \frac{1}{\beta_1} \right)}$$

$$J_2 = \frac{\frac{E_{2,b}}{\beta_2} + \frac{1}{2} (J_1 + J_3)}{\left( 1 + \frac{1}{\beta_2} \right)}$$

$$J_3 = \frac{1}{2} (J_1 + J_2)$$

On pourra initialiser les valeurs  $J_1, J_2, J_3$  respectivement à  $E_{1,b}, E_{2,b}, \frac{E_{1,b} + E_{2,b}}{2}$

On obtient :

$$J_1 = 76\,472 \quad J_2 = 41\,579 \quad J_3 = 59\,025$$

$$q_1 = \frac{E_{1,b} - J_1}{\frac{1 - \epsilon_1}{A_1 \epsilon_1}} = 26.17 \text{ kW} \quad (A_1 = 1 \text{ m}^2)$$

$$J_3 = E_{3,b} = \sigma T_3^4 \Rightarrow T_3 = \left( \frac{E_{3,b}}{\sigma} \right)^{1/4} = 1010 \text{ K}$$