Intégrale de Riemann

L3 Mathématiques

Jean-Christophe Breton

Université de Rennes 1

Septembre–Décembre 2009

version du 21 décembre 2009

Table des matières

Introduction

Le calcul d'intégrales a déjà été rencontré les années précédentes dans des cas bien concrets, pour des intégrales de fonctions usuelles. Depuis le L1, les techniques de calcul de primitives, d'aires, d'intégration par parties ou de changements de variables permettent de mener à bien les calculs effectifs d'intégrales de fonctions usuelles.

On se propose dans ce cours de donner une construction théorique de l'intégration qui recouvre les méthodes de calculs déjà connues.

Il y a plusieurs théories de l'intégration. Son approche est géométrique, il considère $\int_a^b f(x)dx$ comme une aire. Un peu plus tard, Riemann constate que la condition de continuité de l'intégrand f pour le calcul de $\int_a^b f(x)dx$ est inutile : il suffit que les fonctions soient limites de fonctions en escalier. Il donne donc une théorie plus générale pour les fonctions limites de fonctions en escalier (1854). C'est dans le cadre de cette théorie que se font tous les calculs d'intégrale rencontrés jusqu'à maintenant. L'intégrale de Riemann est l'objet de ce cours. On la présentera comme Darboux l'a fait (1875).

Ce type d'intégrales se calcule sur des domaines bornés $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$. Quand ce n'est pas le cas, on peut avoir recours à des intégrales généralisées $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ (dites intégrales impropres) mais elles ne vérifient pas toutes les propriétés des intégrales classiques (sur les intervalles bornés).

Dans la théorie de Riemann, certains calculs posent des problèmes. En particulier, pour les problèmes d'interversion de somme et d'intégration (soulevés par Fourier) :

$$\sum_{n\geq 1}\int f_n(x)dx = \int \sum_{n\geq 1} f_n(x)dx,$$

ou de limite et d'intégrale :

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n(x)dx = \int \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

on ne dispose d'aucun résultat satisfaisant alors qu'en pratique ce type de problème se pose souvent. Des réponses élégantes sont données par Lebesgue dans le cadre de l'intégrale de Lebesgue qui fait l'objet d'un cours spécifique en L3, cf [JCB-Lebesgue] auquel on renvoie.

On pourra consulter pour référence tout ouvrage de niveau L2 d'Analyse, à titre d'exemple on cite [Gos] dont ces notes s'inspirent et [AF, RDO].

Chapitre 1

Intégrales des fonctions en escalier

En Deug, plusieurs techniques de calculs sont étudiées et utilisées pour calculer des intégrales (intégration par parties, changements de variable). Ces calculs relèvent de l'intégrale de Riemann. On va en donner dans cette première partie, une construction plus théorique et rappeller (ou démontrer) les principales propriétés de ce type de calcul.

Pour cela, on commence par s'intéresser à des fonctions étagées (fonctions en escalier) pour lesquelles on va définir l'intégrale et vérifier ses principales propriétés. Puis on généralisera cette construction à une classe de fonctions plus large (dite intégrables) qui contient toutes les fonctions usuelles (en particulier les fonctions continues).

Dans ce chapitre, $[a, b]$ désigne un intervalle fini.

1.1 Fonctions en escalier

Définition 1.1.1 (Subdivision) *Soit $[a, b]$ un intervalle fini, on appelle subdivision S de $[a, b]$ toute suite finie ordonnée $(t_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a, b]$: $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$.*
On appelle pas de la subdivision

$$\rho(S) = \max_{0\leq i\leq n-1} |t_{i+1} - t_i|.$$

Exemples :

- $S_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}, S_2 = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}, S_3 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}, S_4 = \{0, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\}$ sont des subdivisions de $[0, 1]$.
- La subdivision uniforme sur $[a, b]$ est celle de points $t_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $0 \leq i \leq n$, elle est de pas $\frac{b-a}{n}$.
  Précédemment, S_1, S_2, S_3 sont uniformes de pas respectivement $\rho(S_1) = 1/2$, $\rho(S_2) = 1/4$ et $\rho(S_3) = 1/3$. Par contre, S_4 n'est pas uniforme et de pas $\rho(S_4) = 2/5$.

Définition 1.1.2 *Soient S et S' deux subdivisions de $[a, b]$, S' est dite plus fine que S si $S \subset S'$, c'est à dire si la suite $(t_i)_i$ qui définit S est inclue dans celle $(t'_j)_j$ de S'.*

Précédemment, S_2 est plus fine que S_1 ou encore $S' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ est plus fine que $S = \{0, 2, 4\}$, subdivisions de $[0, 4]$.

En particulier, si on a deux subdivisions S_1 et S_2 alors la subdivision $S_3 = S_1 \cup S_2$ raffine à la fois S_1 et S_2.

On rappelle que pour un ensemble A, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{array} \right.$ est celle qui indique si x est dans A ou non.

Définition 1.1.3 *On appelle fonction en escalier sur $[a, b]$ toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une subdivision $S = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ avec f constante sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$. La fonction f s'écrit alors :*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}(x). \tag{1.1}$$

Par exemple $f(x) = 2\mathbf{1}_{[0,2[}(x) - 5\mathbf{1}_{[2,4[}(x) + 3\mathbf{1}_{[4,5]}(x)$, $g(x) = \mathbf{1}_{[0,1/2[}(x) + 2\mathbf{1}_{[1/2,3[}(x) - 3\mathbf{1}_{[3,5]}(x)$.

Le nom ce ces fonctions vient de l'allure de leur représentation graphique. Dessiner par exemple les graphes de f et de g.

Proposition 1.1.1 *L'ensemble $\mathcal{E}([a, b])$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*

En effet c'est stable par multiplication par un scalaire par exemple

$$5f(x) = 10\mathbf{1}_{[0,2[}(x) - 25\mathbf{1}_{[2,4[}(x) + 15\mathbf{1}_{[4,5]}(x), \qquad -2g(x) = -2\mathbf{1}_{[0,1/2[}(x) - 4\mathbf{1}_{[1/2,3[}(x) + 6\mathbf{1}_{[3,5]}(x)$$

sont encore en escalier. Et c'est stable par addition :

$$f(x) + g(x) = 3\mathbf{1}_{[0,1/2[}(x) + 4\mathbf{1}_{[1/2,2[}(x) - 3\mathbf{1}_{[2,3[}(x) - 8\mathbf{1}_{[3,4[}(x) + 0\mathbf{1}_{[4,5]}(x)$$

où il faut bien comprendre d'abord que si f se décompose sur $[0, 2[\cup[2, 4[\cup[4, 5]$ et g sur $[0, 1/2[\cup[1/2, 3[\cup[3, 5]$ alors $f + g$ se décompose sur $[0, 1/2[\cup[1/2, 2[\cup[2, 3[\cup[3, 4[\cup[4, 5]$, partition qui raffine à la fois celles de f et de g. En tout cas $f + g$ est bien en escalier.

Plus généralement, il faudrait voir que pour toutes fonctions en escalier f et g alors $\alpha f + \beta g$ l'est encore pour tous réels α, β (exercice).

1.2 Intégrale des fonctions en escalier

Définition 1.2.1 *On appelle intégrale de f fonction en escalier donnée par (1.1) le nombre réel*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (t_{i+1} - t_i)(x).$$

Remarque 1.2.1 – Une fonction en escalier peut avoir plusieurs écritures du type (1.1) en raffinant la subdivision, par exemple

$$f(x) = 2\mathbf{1}_{[0,2[}(x) - 5\mathbf{1}_{[2,4[}(x) + 3\mathbf{1}_{[4,5]}(x) = \underbrace{2\mathbf{1}_{[0,3/4[}(x) + 2\mathbf{1}_{[3/4,2[}(x)} \underbrace{-5\mathbf{1}_{[2,3[}(x) - 5\mathbf{1}_{[3,4[}(x)} + 3\mathbf{1}_{[4,5]}(x)$$

On montre cependant que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ définie précedemment ne dépend pas de l'écriture particulière de f : deux écritures différentes de la même fonction en escalier donnent la même valeur de l'intégrale. La définition a donc bien un sens.

– Une fonction constante sur $[a, b]$ est une fonction en escalier particulière $f(x) = \alpha \mathbf{1}_{[a,b]}$, avec la subdivision triviale $\{a, b\}$ de $[a, b]$. Son intégrale est alors

$$\int_a^b f(x)dx = \alpha(b - a)$$

si α est la valeur constante de cette fonction.

– Par exemple

$$\begin{aligned} \int_0^5 f(x)dx &= 2 \times 2 - 5 \times 2 + 3 \times 1 = 4 - 10 + 3 = -3, \\ \int_0^5 g(x)dx &= 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times (3 - \frac{1}{2}) - 3 \times 2 = \frac{1}{2} + 5 - 6 = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Propriétés des intégrales de fonctions en escalier

• **(linéarité)** L'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est une application linéaire de $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier dans $\mathbb{R}$. L'intégrale est donc linéaire :

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Pour cela, il faut raffiner les subdivisions S de f et S' de g en $S'' = S \cup S'$, adaptée à la fois à f et à g et donc à $f + g$, puis utiliser la linéarité de la somme.

• **(positivité)** Si f est une fonction en escalier positive alors son intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est positive.
En effet, dans ce cas, son intégrale est une somme de termes positifs donc elle est positive.

• **(ordre)** Si f et g sont des fonctions en escalier avec $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
Il s'agit de la propriété de positivité appliquée à $g - f \geq 0$.

• **(valeurs absolues)** Pour toute fonction en escalier f, on a

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

En effet, d'abord, si f est en escalier, $|f|$ l'est aussi et

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}, \quad |f(x)| = \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_i| \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}.$$

Comme la valeur absolue d'une somme est majorée par la somme des valeurs absolues, le résultat suit facilement.

• **(Relation de Chasles)** Si f est une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

En effet, en rajoutant c à la subdivision S, la somme définissant $\int_a^b f(x)dx$ se scinde en deux, l'une correspondant à la partie de subdivision avant c (égale à $\int_a^c f(x)dx$), l'autre à celle après c (égale à $\int_c^b f(x)dx$).

• Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Alors $u \circ f$ est en escalier et

$$\int_a^b (u \circ f)(x)dx = u\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

En effet, $u \circ f$ est constante sur $[t_i, t_{i+1}]$ et y vaut $u(\alpha_i)$ si f y vaut α_i. Mais alors

$$\int_a^b (u \circ f)(x)dx \ = \ \sum_{i=1}^{n-1} u(\alpha_i)(t_{i+1} - t_i) = u\left(\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(t_{i+1} - t_i)\right) = u\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

• Soit f en escalier sur $[a, b]$ alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq (b - a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Notons $f = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}$.
On a $\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| = \max_{1\leq i\leq n} |\alpha_i| =: A$. On a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \left|\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t_{i+1} - t_i)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_i|(t_{i+1} - t_i) = A\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1} - t_i) = A(b - a).$$

1.3 Sommes de Darboux et de Riemann

On se donne f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ bornée. Pour définir son intégrale, on va approcher f par des fonctions en escalier. Etant donnée une subdivision S, on définit des fonctions en escalier qui minorent f et qui majorent f : soient

$$E^-_{(f,S)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \, \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(x). \tag{1.2}$$

où $m_i = \inf_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x)$ et avec $M_i = \sup_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x)$, on considère

$$E^+_{(f,S)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\, \mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(x). \tag{1.3}$$

Plus généralement, on peut approcher f par

$$\tilde{E}_{(\alpha,f,S)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)\mathbf{1}_{[t_i,t_{i+1}[}(x) \tag{1.4}$$

où $\alpha_i \in [t_i, t_{i+1}[$ est quelconque. S'ils existent, avec α_i qui réalise le minimum de f sur $[t_i, t_{i+1}[$, on obtient la première fonction en escalier (1.2), avec α_i qui réalise le maximum, on obtient la seconde (1.3).

Souvent, on prend $\alpha_i = t_i$ pour tous les i ou $\alpha_i = t_{i+1}$ (c'est à dire la gauche ou la droite des intervalles). Et quand la subdivision est uniforme, on considère fréquemment les fonctions en escalier suivantes :

$$\tilde{E}_{(f,S_{\mathrm{unif}})}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n})\mathbf{1}_{[a+i\frac{b-a}{n}, a+(i+1)\frac{b-a}{n}[}(x).$$

Exemple : Donner ces fonctions en escalier pour la fonction $f(x) = \sin x$ et la subdivision $\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \pi\}$ de $[0, \pi]$.

Ces fonctions en escalier vérifient les propriétés élémentaires suivantes :

Proposition 1.3.1

1. $E^-_{(f,S)}(x) \leq f(x) \leq E^+_{(f,S)}(x)$.
2. $E^-_{(f,S)}(x) \leq \tilde{E}_{(\alpha,f,S)}(x) \leq E^+_{(f,S)}(x)$.
3. *Si* $S \subset S'$, *on a* $E^-_{(f,S)}(x) \leq E^-_{(f,S')}(x)$ *et* $E^+_{(f,S')}(x) \leq E^+_{(f,S)}(x)$.

Le 3) se comprend de la façon suivante : quand on affine la subdivision, les fonctions en escalier deviennent plus précises et se rapprochent de f.

Définition 1.3.1 *Etant donnée une subdivision S, on appelle somme de Darboux inférieure l'intégrale de la fonction en escalier* (1.2)

$$A^-(f,S) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i\,(t_{i+1} - t_i).$$

On appelle somme de Darboux supérieure l'intégrale de la fonction en escalier (1.3)

$$A^+(f,S) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i\,(t_{i+1} - t_i)$$

toujours avec

$$m_i = \inf_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x), \qquad M_i = \sup_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x).$$

Ce sont en fait les intégrales des fonctions en escalier $E^-_{(f,S)}$ et $E^+_{(f,S)}$.

Définition 1.3.2 *Etant donnée une subdivision S, on appelle somme de Riemann l'intégrale d'une fonction en escalier du type* (1.4)

$$R(f,S,\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)\,(t_{i+1}-t_i)$$

où pour chaque i, $\alpha_i \in [t_i, t_{i+1}[$.

Il s'agit de l'intégrale de $\tilde{E}_{(\alpha,f,S)}$. Pour définir une telle somme, f n'a pas besoin d'être bornée.

S'il existe, avec α_i qui réalise le minimum de f sur $[t_i, t_{i+1}[$, on obtient la somme de Darboux inférieure $A^-(f,S)$.

S'il existe, avec α_i qui réalise le maximum de f sur $[t_i, t_{i+1}[$, on obtient la somme de Darboux supérieure $A^+(f,S)$.

Avec la subdivision uniforme, la somme de Riemann prend la forme classique :

$$R(f,S_{\text{unif}}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n}).$$

De la Proposition 1.3.1 pour les fonctions en escalier, on déduit que ces sommes vérifient les propriétés élémentaires suivantes :

Proposition 1.3.2

1. $A^-(f,S) \le R(f,S,\alpha) \le A^+(f,S)$.
2. *Si $S \subset S'$, on a $A^-(f,S) \le A^-(f,S')$ et $A^+(f,S') \le A^+(f,S)$.*

Plus la subdivision est fine, plus les sommes de Darboux inférieures sont grandes, plus les sommes de Darboux supérieures sont petites (et se rapprochent en fait chacune d'une valeur commune ...).

Chapitre 2

Intégrale de Riemann

2.1 Fonctions Riemann-intégrables

Définition 2.1.1 *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable (sur $[a, b]$) si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision S telle que ses sommes de Darboux vérifient :*

$$A^+(f, S) - A^-(f, S) \leq \varepsilon. \tag{2.1}$$

A fortiori si (2.1) est vraie pour S, c'est vrai pour toute subdivision S' plus fine que S.

En effet d'après la Prop. 1.3.2, pour $S \subset S'$, on a $A^+(f, S') \leq A^+(f, S)$ et $A^-(f, S') \geq A^-(f, S)$ et donc

$$A^+(f, S') - A^-(f, S') \leq A^+(f, S) - A^-(f, S).$$

Les fonctions Riemann-intégrables sont celles pour lesquelles les sommes de Darboux inférieure et supérieure peuvent être rendues arbitrairement proches à condition de choisir des subdivisions suffisament fines (les surfaces contenantes et contenues peuvent serrer d'aussi près que voulu la vraie surface).

Proposition 2.1.1 *Quand $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable, en prenant, les* sup *et* inf *sur l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$, on a alors*

$$\sup_S A^-(f, S) = \inf_S A^+(f, S).$$

Démonstration : En effet comme $A^-(f, S)$ est croissant quand S se raffine et est borné par les sommes de Darboux supérieures, $\sup_S A^-(f, S)$ est bien défini. De même, $\inf_S A^+(f, S)$ est bien défini. Puis d'après (2.1), il est facile de voir que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\inf_S A^+(f, S) - \sup_S A^-(f, S) \leq \varepsilon$. D'où l'égalité. □

Définition 2.1.2 *Par définition, l'intégrale (de Riemann) de f, Riemann-intégrable, est la valeur commune précédente*

$$\int_a^b f(x)dx = \sup_S A^-(f, S) = \inf_S A^+(f, S).$$

De façon équivalente, si f est Riemann-intégrable, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\rho(S)\to 0} A^-(f,S) = \lim_{\rho(S)\to 0} A^+(f,S)\\ &= \lim_{\rho(S)\to 0} R(f,S,\alpha)\end{aligned}$$

pour toute somme de Riemann $R(f,S,\alpha)$ où on rappelle que $\rho(S)$ désigne le pas de la subdivision S.

Théorème 2.1.1 *La convergence des sommes de Darboux est équivalente à celle des sommes de Riemann.*

Démonstration : • D'abord, soit f dont les sommes de Riemann convergent vers L. La fonction f est bornée et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition $S = \{a_0, \dots, a_n\}$ de $[a,b]$ telle que

$$-\varepsilon/2 \leq R(f,S,\alpha) - L \leq \varepsilon/2$$

pour toute somme de Riemann $R(f,S,\alpha)$ de pas $\rho(S)$ assez petit. Soit alors, pour chaque j, $x_j \in]a_j, a_{j+1}[$ tel que $M_j - f(x_j) \leq \varepsilon/(2(b-a))$, on a

$$\begin{aligned}A^+(f,S) - \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)(a_{j+1}-a_j) &= \sum_{j=0}^{n-1}(M_j - f(x_j))(a_{j+1}-a_j)\\ &= \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{j=0}^{n-1}(a_{j+1}-a_j)\\ &\leq \varepsilon/2.\end{aligned}$$

De même, soit ensuite, pour chaque j, $y_j \in]a_j, a_{j+1}[$ tel que $m_j - f(y_j) \leq \varepsilon/(2(b-a))$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} f(y_j)(a_{j+1}-a_j) - A^-(f,S) &= \sum_{j=0}^{n-1}(f(x_j) - m_j)(a_{j+1}-a_j)\\ &= \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{j=0}^{n-1}(a_{j+1}-a_j)\\ &\leq \varepsilon/2.\end{aligned}$$

On en déduit aisément que

$$A^+(f,S) - L \leq \varepsilon, \quad L - A^-(f,S) \leq \varepsilon$$

et donc

$$A^+(f,S) - A^-(f,S) \leq 2\varepsilon.$$

Autrement dit les sommes de Darboux (inférieures et supérieures) sont arbitrairement proches et convergent vers L. La fonction f est donc Riemann intégrable (au sens de la définition de Darboux) et $L = \int_a^b f(x)dx = \sup_S A^-(f,S) = \inf_S A^+(f,S)$.

• Réciproquement, si les sommes de Darboux convergent vers $L = \inf_S A^+(f,S) = \sup_S A^-(f,S)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision S telle que $A^+(f,S) - A^-(f,S) \leq \varepsilon$ et a fortiori, on a

$$L - A^-(f,S) \leq \varepsilon, \quad A^+(f,S) - L \leq \varepsilon.$$

Alors pour toute subdivision $S' \supset S$ et toute somme de Riemann $R(f,S',\alpha)$, on a

$$-\varepsilon \leq A^-(f,S) - L \leq A^-(f,S') - L \leq R(f,S',\alpha) - L \leq A^+(f,S') - L \leq A^+(f,S) - L \leq \varepsilon.$$

On a donc pour toute subdivision $S' \supset S$, $|R(f,S',\alpha) - L| \leq \varepsilon$, autrement dit les sommes de Riemann de f converge vers $L = \int_a^b f(x)dx$ (quand on raffine la subdivision). □

Remarque 2.1.1 La fonction f est donc aussi intégrable si ses sommes de Riemann convergent. L'intégrale de f est alors aussi la limite des sommes de Riemann.

Souvent, on prend la subdivision uniforme et $\int_a^b f(x)dx$ est vue comme limite des sommes de Riemann classiques :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\frac{b-a}{n}) = \int_a^b f(x)dx$$

car le pas de la subdivision uniforme est $(b-a)/n$ qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exemples : Calculer les limites des sommes de Riemann suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k/n)}{n}, \qquad \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(\frac{k\pi}{2}n)}{n}.$$

Indication : prendre $a = 0$ et $b = 1$.

Contre-exemple : une fonction qui n'est pas Riemann-intégrable

Soit sur $[0,1]$, la fonction

$$f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Soit $S = (t_i)_{1\leq i\leq n}$ une subdivision de $[0,1]$. Pour tout $1 \leq i \leq n$, l'intervalle (t_i, t_{i+1}) contient un rationnel α_i et un irrationnel β_i (par densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{Q}^c$ dans $\mathbb{R}$).

On a alors $f(\alpha_i) = 1$ d'où $\sup_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x) = 1$ et $f(\beta_i) = 0$ d'où $\inf_{x\in[t_i,t_{i+1}[} f(x) = 0$.

On en déduit facilement que

$$A^-(f,S) = 0 \text{ et } A^+(f,S) = 1$$

pour toute subdivision S. On ne peut donc pas vérifier la définition de la Riemann-intégrabilité : avec $\varepsilon = 1/2$, comment trouver une subdivision S telle que $1 = 1 - 0 = A^+(f,S) - A^-(f,S) \leq \varepsilon$.

La fonction f n'est pas Riemann-intégrable. On verra qu'elle est Lebesgue-intégrable, on pourra alors donner un sens à une expression du type :

$$\text{« } \int_{[0,1]} \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)dx \text{ ».}$$

Définition 2.1.3 (Autre définition de la Riemann-intégrabilité) *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ_ε et ϕ_ε telles que

$$|f - \varphi_\varepsilon| \leq \phi_\varepsilon, \quad \int_a^b \phi_\varepsilon(x)dx \leq \varepsilon.$$

ii) Il existe une suite de fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et une suite $(\phi_n)_n$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f - \varphi_n| \leq \phi_n, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \phi_n(x)dx = 0.$$

Toute application $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ vérifiant ces deux assertions est Riemann-intégrable et l'intégrale de Riemann de f est donnée par

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

Remarque 2.1.1 • La définition précédente de $\int_a^b f(x)dx$ a bien un sens : on vérifie qu'elle ne dépend pas du choix des suites $(\varphi_n)_n$ et $(\phi_n)_n$.

• Bien sûr, les deux formulations de cette nouvelle définition sont équivalentes : prendre $\varepsilon = 1/n$ pour déduire la 2ème formulation de la 1ère, ou prendre n assez grand, pour déduire la 1ère formulation de la 2ème.

• Dans cette définition, f n'a pas besoin (a priori) d'être bornée contrairement à la définition via les sommes de Darboux.

Théorème 2.1.2 *Lorsque f est bornée, les deux définitions de Riemann-intégrabilité coïncident.*

Démonstration : • Si f, bornée, est Riemann-intégrable alors pour S de pas assez petit, on a

$$E^-(f,S) \leq f \leq E^+(f,S), \quad \text{et} \quad A^+(f,S) - A^-(f,S) \leq \varepsilon. \tag{2.2}$$

Notons alors

$$\varphi_\varepsilon = \frac{E^+(f,S) + E^-(f,S)}{2}, \quad \phi_\varepsilon = \frac{E^+(f,S) - E^-(f,S)}{2}.$$

Ce sont bien des fonctions en escalier car combinaisons linéires de telles fonctions. De plus, on réécrit alors (2.2) sous la forme

$$\varphi_\varepsilon - \phi_\varepsilon \leq f \leq \varphi_\varepsilon + \phi_\varepsilon, \quad \text{et} \quad \int_a^b \phi_\varepsilon(x)dx \leq \varepsilon/2.$$

La définition 2.1.3 précédente est donc vérifiée avec $\varepsilon/2$. Cela jusifie le sens direct.

• Soit f vérifiant la définition précédente. Notons $(\varphi_n)_n$ et $(\phi_n)_n$ les suites en escalier données par la définition. On a

$$\varphi_n - \phi_n \leq f \leq \varphi_n + \phi_n$$

Soit S_n une subdivision adaptée à la fois à φ_n et à ϕ_n. En étudiant $\varphi_n - \phi_n, f, \varphi_n + \phi_n$, sur un intervalle $[a_i^n, a_{i+1}^n]$ de la subdivision S_n, on constate que

$$\varphi_n - \phi_n \leq E^-(f,S_n) \leq f \leq E^+(f,S_n) \leq \varphi_n + \phi_n.$$

Puis

$$A^+(f,S_n) - A^-(f,S_n) = \int_a^b E^+(f,S_n)(x) - E^-(f,S_n)(x)dx \leq 2\int_a^b \phi_n(x)dx.$$

On déduit $\lim\limits_{\rho(S)\to 0} A^+(f,S) - A^-(f,S) = 0$, et donc f est Riemann-intégrable.

Montrons enfin que les deux définitions de $\int_a^b f(x)dx$ coïncident. D'après la première partie de la preuve, on peut choisir dans la deuxième définition les suites de fonctions en escalier

$$\varphi_n = \frac{E^+(f,S_n) + E^-(f,S_n)}{2}, \quad \phi_n = \frac{E^+(f,S_n) - E^-(f,S_n)}{2}$$

et donc $\int_a^b \varphi_n(x)dx = \frac{1}{2}(A^+(f,S_n) + A^-(f,S_n))$. Le membre de gauche converge vers $\int_a^b f(x)dx$ au sens de la deuxième définition tandis que le membre de droite converge vers $\frac{1}{2}(\int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx)$ au sens de la première définition. D'où l'égalité. □

2.2 Propriétés de l'intégrale de Riemann

On donne ici les propriétés principales de l'intégrale de Riemann. On se contente d'esquisser les preuves. On renvoie si nécessaire à tout manuel de Deug ou de L2.

Proposition 2.2.1 *Toute fonction Riemann-intégrable sur un intervalle* $[a, b]$ *est bornée.*

Démonstration : Soit, on passe par les sommes de Darboux, et alors implicitement la fonction est supposée bornée.

Soit on passe par la définition 2.1.3 alternative et alors avec $\varepsilon = 1$, il existe φ_1 et ϕ_1 telle que

$$|f - \varphi_1| \leq \phi_1, \qquad \int_a^b \phi_1(x)dx \leq 1.$$

On a donc $|f| \leq |\varphi_1| + \phi_1$. Mais comme les fonctions en escalier φ_1 et ϕ_1 sont (par nature) bornées, f l'est aussi. □

La proposition suivante garantit que la notion d'intégrale de Riemann a bien un intérêt : les fonctions usuelles le sont !

Proposition 2.2.2 (Exemples de fonctions Riemann-intégrables)

1. *Les fonctions continues sont Riemann-intégrables.*
2. *Les fonctions monotones (croissantes ou décroissantes) sont Riemann-intégrables.*

Démonstration :

1) Si f est continue sur $[a, b]$ alors elle est uniformément continue (théorème de Heine, cf. Topologie). Soit pour $\varepsilon > 0$ donné $\alpha > 0$ donné par l'uniforme continuité de f. On prend une subdivision S de pas $\rho(S) \leq \alpha$. Pour tout $x, y \in [a_i, a_{i+1}]$, on a $|x - y| \leq \alpha$ et donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$.

On déduit alors facilement que

$$\begin{aligned} A^+(f, S) - A^-(f, S) &= \sum_{i=0}^{n-1} M_i(t_{i+1} - t_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)(t_{i+1} - t_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(f(b_i) - f(a_i))(t_{i+1} - t_i) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \varepsilon(t_{i+1} - t_i) = (b - a)\varepsilon \end{aligned}$$

où $a_i, b_i \in [t_i, t_{i+1}]$ réalisent le sup et l'inf de f sur $[t_i, t_{i+1}]$, puis on a utilisé $|b_i - a_i| \leq t_{i+1} - t_i \leq \rho(S) \leq \alpha$.

Les sommes de Darboux peuvent donc être rendues arbitrairement proches.

2) Soit f croissante alors avec les notations des sommes de Darboux, on a $m_i = f(a_i)$ et $M_i = f(a_{i+1})$. En utilisant les subdivisions uniformes de pas $1/n$, on a $a_i = a + i(b-a)/n$, si bien que

$$A^+(f,S) - A^-(f,S) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \leq \varepsilon$$

dés que n est assez grand. □

Systématiquement, pour prouver les propriétés suivantes des fonctions Riemann-intégrables, on se ramène par approximation aux sommes de Darboux, intégrales de fonction en escalier pour lesquelles ces propriétés ont déja été vues.

Proposition 2.2.3 (Linéarité) *Si f et g sont Riemann-intégrables alors les combinaisons linéaires le sont aussi et pour tout α, β réels*

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

Autrement dit, l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables est un espace vectoriel sur lequel l'intégrale définit une application linéaire.

Démonstration : Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\phi_n)_n$ les suites de fonctions en escalier données par la définition 2.1.3 de la Riemann-intégrabilité de f. Puis soient $(\tilde{\varphi}_n)_n$ et $(\tilde{\phi}_n)_n$ celles associées à g. Alors

$$\begin{aligned} |(\alpha f + \beta g) - (\alpha\varphi + \beta\tilde{\varphi})| &\leq |\alpha||f - \varphi| + |\beta||g - \tilde{\varphi}| \\ &\leq |\alpha|\phi_n + |\beta|\tilde{\phi}_n \end{aligned}$$

puis

$$\int_a^b (|\alpha|\phi_n(x) + |\beta|\tilde{\phi}_n(x))dx = |\alpha| \int_a^b \phi_n(x)dx + |\beta| \int_a^b \tilde{\phi}_n(x)dx \to 0,\ n \to +\infty$$

La fonction $\alpha f + \beta g$ vérifie donc la définition 2.1.3 de la Riemann-intégrabilité avec les suites de fonctions en escalier $(\alpha\varphi_n + \beta\tilde{\varphi}_n)_n$ et $(|\alpha|\phi_n + |\beta|\tilde{\phi}_n)_n$, cette dernière étant positive.

Puis

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx &= \lim_{n\to+\infty} \int_a^b (\alpha\varphi_n(x) + \beta_n\tilde{\varphi}_n(x))dx \\ &= \alpha \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx + \beta \lim_{n\to+\infty} \int_a^b \tilde{\varphi}_n(x)dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.4 (Relation de Chasles) *Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et $c \in]a, b[$ alors f l'est encore sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$ et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration : D'abord si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$, elle l'est sur $[a, c]$ et $[c, b]$. En effet soit pour $\varepsilon > 0$, S la subdivision donnée par la définition de l'intégrabilité sur $[a, b]$. Quitte à raffiner encore S, on peut supposer que $c \in S$. Mais alors en notant S_1 la partie de la subdivision correspondant à $[a, c]$ et S_2 celle à $[c, b]$, on déduit que S_1 et S_2 vérifient la définition de l'intégrabilité de f sur $[a, c]$ et $[c, b]$ car il est facile de voir que

$$A^{\pm}(f, S) = A^{\pm}(f, S_1) + A^{\pm}(f, S_2).$$

On a donc

$$A^+(f, S_1) - A^-(f, S_1) + A^+(f, S_2) - A^-(f, S_2) \leq A^+(f, S) - A^-(f, S)$$

et donc $A^+(f, S_1) - A^-(f, S_1)$ et $A^+(f, S_2) - A^-(f, S_2)$ peuvent être rendus arbitrairement proche. Puis, on a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\rho(S)\to 0} A^+(f, S) = \lim_{\rho(S)\to 0} A^+(f, S_1) + A^+(f, S_2) \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \end{aligned}$$

□

Proposition 2.2.5 (Positivité) *Si f est positive et Riemann-intégrable sur $[a, b]$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Démonstration : En effet, si f est positive alors ses sommes de Darboux le sont aussi. Mais alors comme $\int_a^b f(x)dx$ est limite de ses sommes (quand le pas des subdivisions tend vers 0), l'intégrale est positive. □

Corollaire 2.2.1 *Si f et g sont Riemann-intégrables et $f \leq g$ alors*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

C'est la propriété précédente appliquée à $g - f$, fonction positive.

Proposition 2.2.6 (Intégrale et valeurs absolues) *Si f est Riemann-intégrable*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

En effet la Riemann-intégrabilité de $|f|$ est facile à justifier (exercice), puis :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\lim_{\rho(S)\to 0} A^+(f,S)\right| = \lim_{\rho(S)\to 0} |A^+(f,S)| \\ &\leq \lim_{\rho(S)\to 0} A^+(|f|,S) = \int_a^b |f(x)|dx.\end{aligned}$$

Proposition 2.2.7 *Soit f une fonction Riemann-intégrable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linéaire. Alors $u \circ f$ est Riemann-intégrable et*

$$\int_a^b u \circ f(x)dx = u\left(\int_a^b f(x)dx\right).$$

Démonstration : Notons M la borne de l'application linéaire u. Soient $(\varphi_n)_n$ et $(\phi_n)_n$ les suites d'applications en escalier données par la définition 2.1.3 de la Riemann-intégrabilité de f. Alors $u \circ \varphi_n$ et $M\phi_n$ sont aussi en escalier. Puis $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b M\phi_n(x)dx = 0$ et

$$|u \circ f(t) - u \circ \varphi_n(t)| = |u \circ (f - \varphi_n)(t)| \leq M|(f - \varphi_n)(t)| \leq M\phi_n(t)$$

et donc $|u \circ f - u \circ \varphi_n| \leq M\phi_n$, si bien que la définition (alternative) de la Riemann-intégrabilité est vérifiée pour $u \circ f$ avec les fonctions en escalier $(u \circ \varphi_n)_n$ et $(M\phi_n)_n$. □

Proposition 2.2.8 *Soit f Riemann-intégrable sur $[a,b]$ positive et telle que $\int_a^b f(x)dx = 0$. Alors f prend la valeur 0 en tout point où elle est continue.*

Démonstration : Soit t_0 un point de continuité de f. Si $f(t_0) \neq 0$ alors par continuité de f en t_0, on peut trouver un intervalle I de longueur $l(I) > 0$ où $f(t) \geq f(t_0)/2 > 0$. Soit alors g la fonction en escalier égale à $f(t_0)/2$ sur I et 0 ailleurs. Alors $f \geq g$ et donc

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx = l(I)f(t_0)/2 > 0$$

ce qui est absurde. On a donc bien $f(t_0) = 0$. □

Corollaire 2.2.2 *Si f et g sont Riemann-intégrables et continues avec $f \leq g$ alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ entraÃőne $f = g$.*

Proposition 2.2.9 (Première formule de la moyenne) *Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, g étant une fonction positive. On désigne par m (resp. M) la borne inférieure (resp. supérieure) de f sur $[a,b]$. Alors il existe $m \le k \le M$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = k \int_a^b g(x)dx.$$

De plus, si f est continue alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration : Comme $g \ge 0$, on a $mg \le fg \le Mg$ et donc

$$m \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le M \int_a^b g(x)dx.$$

Si $\int_a^b g(x)dx = 0$, alors l'encadrement précédent assure que $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ et $k = \frac{m+M}{2}$ convient par exemple.

Sinon, $\int_a^b f(x)g(x)dx / \int_a^b g(x)dx$ est un élément de $[m,M]$. Si en plus f est continue, on conclut par le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver c. $\square$

Définition 2.2.1 *Le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est dit valeur moyenne de la fonction Riemann-intégrable f sur $[a,b]$.*

(C'est l'espérance (probabiliste) de f pour la loi uniforme sur $[a,b]$.)

Proposition 2.2.10 (Deuxième formule de la moyenne) *Soit f une fonction positive décroissante de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et g une application Riemann-intégrable sur $[a,b]$. Alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a) \int_a^c g(x)dx.$$

(exercice difficile)

2.3 Intégrale et primitive

Proposition 2.3.1 *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-intégrable, alors l'application intégrale $t \mapsto \int_a^t f(x)dx$ est continue.*

Démonstration : Soit $t_0 \in [a, b]$ et $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ un voisinage de t_0.

La fonction f est intégrable et bornée par M sur $[\alpha, \beta]$. Par la relation de Chasles, on a pour tout $t \in [\alpha, \beta]$

$$\left| \int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx \right| = \left| \int_t^{t_0} f(x)dx \right| \leq M|t - t_0|.$$

La restriction de $t \mapsto \int_a^t f(x)dx$ à $[\alpha, \beta]$ est donc lipschitzienne et en particulier elle est continue en t_0. □

Proposition 2.3.2 *Si f admet une limite (resp. à droite, à gauche) en $t_0 \in [a, b]$ alors l'application intégrale $t \mapsto \int_a^t f(x)dx$ est dérivable (resp. à droite, à gauche) en t_0 de dérivée $l = \lim_{t \to t_0} f(t)$ (resp. $f(t_0^+), f(t_0^-)$).*

Démonstration : D'après l'existence de la limite l en t_0, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe α tel que si $t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha$, alors $|f(t) - l| \leq \varepsilon$. Mais alors pour tout $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, on a (pour $t \geq t_0$) :

$$\left| \int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx - (t - t_0)l \right| \left| \int_{t_0}^t f(x)dx - \int_{t_0}^t l dx \right| \leq \left| \int_{t_0}^t |f(x) - l| dx \right| \leq \varepsilon |t - t_0|.$$

Il suit

$$\left| \frac{\int_a^t f(x)dx - \int_a^{t_0} f(x)dx}{t - t_0} - l \right| \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut d'après la définition de la dérivée comme limite des taux d'accroissement. □

Corollaire 2.3.1 *L'application intégrale $t \mapsto \displaystyle\int_a^t f(x)dx$ est dérivable en tout point $t_0 \in [a, b]$ en lequel f est continue, de dérivée $F'(t_0) = f(t_0)$.*

Définition 2.3.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute application $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est dérivable sur $[a, b]$ et de dérivée $F' = f$.*

Proposition 2.3.3 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admettant F pour primitive sur $[a, b]$. Alors f admet une infinité de primitives sur $[a, b]$ qui sont les applications de la forme $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante. Par contre, étant donné $c \in [a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, f admet une unique primitive $F_{c,\alpha}$ qui vaut α en c, il s'agit de $F_c(x) = F(x) - F(c) + \alpha$.*

En effet, $G(x) = F(x) + k$ est de dérivée $G' = F' = f$ donc il s'agit bien d'une primitive de f.

Puis si G est une primitive de f alors $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$. La fonction $F - G$ est donc constante. On a donc $G(x) = F(x) + k$ pour une certaine constante k.

Proposition 2.3.4 *Soit f une application continue sur $[a, b]$. Alors pour tout point $c \in [a, b]$, l'application intégrale $t \mapsto \int_c^t f(x)dx$ est une primitive de f sur $[a, b]$. Il s'agit de l'unique primitive de f qui s'annule en c.*

L'ensemble des primitives d'une fonction f continue sur $[a, b]$ est donc de la forme $t \mapsto \int_c^t f(x)dx + k$ pour tout $c \in [a, b]$ et toute constante $k \in \mathbb{R}$.

Remarque 2.3.1 Si f est intégrable, l'application intégrale est seulement continue. A priori, elle n'est pas dérivable et il ne s'agit pas alors d'une primitive de f.

On a vu que les applications intégrales sont exactement les primitives des fonctions continues. Si f n'est pas continue, a priori, les applications intégrales ne sont pas des primitives. Cependant si f admet des primitives elles sont forcément données par les applications intégrales. En effet, on a :

Théorème 2.3.1 (Théorème fondamental du calcul différentiel) *Soit f une fonction Riemann-intégrable sur $[a, b]$. Si F est une primitive de f alors*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Autrement dit, $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f nulle en a. On a donc

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

Ce résultat relie deux types d'opération a priori sans rapport : l'intégrale qui via le calcul d'aire est une notion d'origine géométrique et la dérivation qui est une notion analytique.

Le théorème indique donc que ces deux opérations sont inverses.

Démonstration : Si f est continue, le résultat est vraie d'après la Prop. 2.3.4. De façon générale, si f est seulement Riemann-intégrable, montrons pour $\varepsilon > 0$ fixé que

$$\left|F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \varepsilon.$$

D'après la définition de la Riemann-intégrabilité de f, il existe une subdivision S telle que pour les sommes de Darboux correspondantes, on a

$$A^+(f, S) - A^-(f, S) \leq \varepsilon$$

Soit

$$g_1 = \frac{E^+(f, S) + E^-(f, S)}{2}, \quad g_2 = \frac{E^+(f, S) - E^-(f, S)}{2}.$$

On a

$$\int_a^b g_2(x)dx \le \varepsilon/2 \quad \text{puis} \quad |f - g_1| \le g_2$$

car $E^-(f,S) \le f \le E^+(f,S)$. Par ailleurs, g_1, g_2 sont en escalier et valent respectivement $\frac{m_i+M_i}{2}$ et $\frac{M_i-m_i}{2}$ sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$. Considérons alors la fonction G qui vaut $F(t) - \frac{m_i+M_i}{2}t$ sur chaque intervalle $[a_i, a_{i+1}]$. La dérivée $G' = f - \frac{m_i+M_i}{2}$ est majorée en valeurs absolues sur $[a_i, a_{i+1}]$ par $\frac{M_i-m_i}{2}$. Par le théorème des accroissements finis, on a

$$\left| F(a_{i+1}) - F(a_i) - \frac{M_i + m_i}{2}(a_{i+1} - a_i) \right| = |G(a_{i+1}) - G(a_i)| \le \frac{M_i - m_i}{2}(a_{i+1} - a_i)$$

et donc en sommant sur chaque intervalle de la subdivision S

$$|F(b) - F(a) - \int_a^b g_1(x)dx| \le \sum_{i=0}^{n-1} \frac{M_i - m_i}{2}(a_{i+1} - a_i) = \int_a^b g_2(x)dx \le \varepsilon/2.$$

Par ailleurs, on a

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g_1(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x) - g_1(x)|dx \le \int_a^b g_2(x)dx \le \varepsilon/2.$$

Si bien qu'il vient

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)dx \right| \le \varepsilon,$$

ce qui conclut en faisant tendre ε vers 0. □

Remarque 2.3.2
- Quand f est positive, l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ s'interprète comme l'aire de la portion de plan $\{(x,y) \mid 0 \le y \le f(x),\ a \le x \le b\}$.
- Si f est de signe quelconque, $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire algébrique où les parties sous l'axe des abscisses sont d'aires négatives et celles au dessus de l'axe des abscisses sont positives.
- Parfois un calcul d'aire est une méthode efficace de calcul d'intégrale.
- Méthodes de calcul : IPP, changements de variable.

2.4 Critère de Riemann-intégrabilité

En notant $Osc_x f$ l'oscillation de f en x,

$$Osc_x(f) = \inf_{\substack{I \text{ voisinnage} \\ \text{ouvert de } x}} \Big(\sup \big(|f(u) - f(v)| : u, v \in I \cap [a,b] \big) \Big),$$

Le résultat suivant est un critère de Riemmann-intégrabilité pour une fonction f bornée sur $[a,b]$ borné.

Théorème 2.4.1 (Darboux) *Soit f bornée sur $[a, b]$. Elle est Riemann-intégrable ssi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ et une famille d'intervalles ouverts $]c_i, d_i[$, $1 \leq i \leq N$, tels que $\sum_{i=1}^{N}(d_i - c_i) \leq \varepsilon$ et*

$$D_\alpha = \Big\{x \in [a, b] : Osc_x(f) \geq \alpha\Big\} \subset \bigcup_{i=1}^{N}]c_i, d_i[.$$

Ituitivement, on englobe les oscillations trop grandes de f dans des intervalles dont la somme des longueurs est aussi petite qu'on veut. Ce critère a la saveur d'un résultat d'intégrale de Lebesgue, cf. [JCB-Lebesgue].

Démonstration : Soit f Riemann-intégrable sur $[a, b]$. On se donne $\varepsilon > 0$ et α. D'après la Riemann-intgrabilité, il existe une subdivision $d : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que pour les sommes de Darboux associées, on ait :

$$0 \leq A_f^+(d) - A_f^-(d) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(M_i(f) - m_i(f)) \leq \frac{\varepsilon\alpha}{2}$$

ici $M_i(f) = \sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$ et $m_i(f) = \inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]} f(x)$. Notons que $(M_i(f) - m_i(f))$ est l'oscillation de f sur $[x_i, x_{i+1}]$. On pose $I_\alpha = \Big\{i \in \{0, \dots, n-1\} : Osc_f([x_i, x_{i+1}]) \geq \alpha\Big\}$. Pour $i \notin I_\alpha$, on a $Osc_f([x_i, x_{i+1}]) < \alpha$ et pour $x \in]x_i, x_{i+1}[$, on a $Osc_x(f) \leq Osc_f(]x_i, x_{i+1}[) < \alpha$. Il vient $]x_i, x_{i+1}[\cap D_\alpha = \emptyset$ et donc

$$D_\alpha \subset \Big(\bigcup_{i\in I_\alpha}]x_i, x_{i+1}[\Big) \cup \{x_i : 0 \leq i \leq n\}.$$

Pour $i \in I_\alpha$, on a $\alpha \leq Osc_f([x_i, x_{i+1}]) = M_i(f) - m_i(f)$ et donc

$$\sum_{i\in I_\alpha} \alpha(x_{i+1} - x_i) \leq \sum_{i\in I_\alpha}(x_{i+1} - x_i)\big(M_i(f) - m_i(f)\big) \leq A_f^+(d) - A_f^-(d) \leq \frac{\varepsilon\alpha}{2}$$

et $\sum_{i\in I_\alpha}(x_{i+1} - x_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on pose $u_i = x_i - \varepsilon/(4(n + 1))$ et $v_i = x_i + \varepsilon/(4(N + 1))$. On a alors $\sum_{i=0}^{n}(v_i - u_i) = (N + 1)\frac{2\varepsilon}{4(n+1)} = \frac{\varepsilon}{2}$ et donc

$$D_\alpha \subset \Big(\bigcup_{i\in I_\alpha}]x_i, x_{i+1}[\Big) \cup \Big(\bigcup_{i=0}^{n}]u_i, v_i[\Big).$$

avec

$$\sum_{i\in I_\alpha}(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=0}^{n}(v_i - u_i) \leq \varepsilon$$

ce qui prouve le sens direct du Th. 2.4.1.

Pour la réciproque : soit f bornée sur $[a,b]$ vérifiant la condition du Th. 2.4.1. Soit $\alpha > 0$ et $\varepsilon' > 0$, il existe une famille finie de q intervalles $]c_i, d_i[$, $1 \leq i \leq q$, tels que

$$D_\alpha \subset \Big(\bigcup_{i \in I_\alpha}]c_i, d_i[\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{q} (d_i - c_i) \leq \varepsilon'.$$

On peut supposer les intervalles $]c_i, d_i[$ disjoints (sinon on redécoupe les intervalles) et on peut supposer l'indexation telle que $c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \cdots < c_q < d_q$. Si $a < c_1$, on pose $I_0 = [a, c_1]$ puis $I_1 = [d_1, c_2], \ldots, I_{q-1} = [d_{q-1}, c_q]$ et $I_q = [d_q, b]$ si $d_q < b$ (si $c_1 \leq a$ alors I_0 n'existe pas ; si $d_q \geq b$ alors I_q n'existe pas).

Comme $D_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{q}]c_i, d_i[$, on a $D_\alpha \cap I_k = \emptyset$ et donc pour tout $x \in I_k$, on a $Osc_x(f) < \alpha$. La borne supérieure des $Osc_x(f)$ sur I_k est donc inférieure à α et il existe alors une subdivision δ_k de I_k ($y_0^k < y_1^k \cdots < y_{n_k}^n$) telle que $Osc_f([y_j^k, y_{j+1}^k]) \leq 2\alpha$ pour tout $0 \leq j \leq n_k - 1$.

Soit alors d la subdivision de $[a,b]$ formée de a, b et des point y_j^k des subdivisions δ_k, $1 \leq k \leq q$, qu'on reordonne en $z_0 = a < z_1 < \cdots < z_p = b$. Un segment $[z_s, z_{s+1}]$ de la subdivision d est du type $[y_j^k, y_{j+1}^k]$ ou $[c_i, d_i]$ et on peut regrouper les termes $A_f^+(d) - A_f^-(d)$ en les $(d_i - c_i) Osc_f([c_i, d_i])$ et les

$$\sum_{j=0}^{n_k - 1} \left(y_{j+1}^k - y_j^k \right) Osc_f([y_j^k, y_{j+1}^k]) \leq 2\alpha \sum_{j=0}^{n_k - 1} \left(y_{j+1}^k - y_j^k \right) \leq 2\alpha \lambda(I_k).$$

On a donc

$$A_f^+(d) - A_f^-(d) \leq \sum_{k=0}^{q-1} (2\alpha) \lambda(I_k) + \sum_{i=1}^{q} (d_i - c_i) Osc_f([c_i, d_i]).$$

Comme les I_k sont des intervalles disjoints et l'oscillation de f sur $[c_i, d_i]$ est majorée par celle de f sur $[a,b]$, on a

$$\begin{aligned} A_f^+(d) - A_f^-(d) &\leq (2\alpha)(b-a) + Osc_f([a,b]) \sum_{i=1}^{q} (d_i - c_i) \\ &\leq (2\alpha)(b-a) + \varepsilon' Osc_f([a,b]). \end{aligned}$$

Finalement, étant donné $\eta > 0$, les choix $\alpha \leq \eta/(4(b-a))$ et $\varepsilon' \leq \eta/(2 Osc_f([a,b]))$ assurent l'existence d'une subdivision d de $[a,b]$ telle que $A_f^+(d) - A_f^-(d) \leq \eta$ ce qui signifie la Riemann-intégrabilité de f. $\square$

Chapitre 3

Fonctions réglées

3.1 Définition

Soit I un intervalle, notons $B(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$ (on pourrait remplacer $\mathbb{R}$ par E un espace vectoriel normé quelconque). L'ensemble $B(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel, on le norme en définissant $\| \cdot \|_\infty$ sur $B(I, \mathbb{R})$:

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in I\}.$$

On montre que :

Proposition 3.1.1 *L'espace $B(I, \mathbb{R})$ est complet pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.*

Notons que l'ensemble $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ des fonctions en escalier sont dans $B(I, \mathbb{R})$. On peut alors définir :

Définition 3.1.1 *On appelle fonction réglée tout élément g dans l'adhérence de $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$, les fonctions en escalier sur I dans $B(I, \mathbb{R})$ pour $\| \cdot \|_\infty$. On note $R(I, \mathbb{R})$ cet ensemble :*

$$R(I, \mathbb{R}) = \overline{\mathcal{E}(I, \mathbb{R})}.$$

Par continuité pour $\| \cdot \|_\infty$ de $+$ et de la multiplication par un scalaire il est facile de voir que l'ensemble des fonctions réglées est un espace vectoriel.

En pratique : une fonction f est réglée sur I, ssi il existe une suite $(g_n)_n$ de fonctions en escalier qui convergent uniformément sur I vers f, ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists g \text{ en escalier, telle que } \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Proposition 3.1.2 *Une limite uniforme de fonctions réglées est réglée.*

Démonstration : Soit f limite uniforme de $(f_n)_n$, suite de fonctions réglées. Comme $f_n \in R(I, \mathbb{R})$, f est dans l'adhrénce de $R(I, \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Mais par définition, cet espace est fermé, il est donc égale à son adhérence :

$$f \in \overline{R(I, \mathbb{R})} = R(I, \mathbb{R}).$$

La fonction f est donc réglée. □

3.2 Propriétés des fonctions réglées

Proposition 3.2.1 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. Alors l'ensemble de ses points de discontinuité est au plus dénombrable.*

Pour être Riemann-intégrable, il faut (et il suffit) que cet ensemble soit négligeable, c'est à dire pour n'importe quel $\varepsilon > 0$, qu'il soit inclu dans un ensemble de longueur total inférieure à ε, ce qui est forcément le cas pour les ensembles dénombrables (exercice).

Proposition 3.2.2 *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. Alors en tout point ses limites à gauche et à droite existent :*

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ existe pour } x_0 \in [a, b[, \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x) \text{ existe pour } x_0 \in]a, b].$$

La réciproque est vraie (car $\mathbb{R}$ est complet).

Conséquences :

– Soit
$$f(x) = \cos(1/x) \text{ si } x \in]0, 1] \text{ et } f(0) = 0. \tag{3.1}$$
D'après la Prop. 3.2.2, cette fonction n'est pas réglée (elle n'a pas de limite à droite en 0) mais elle est Riemann-intégrable (car l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable).

– Les fonctions continues sont réglées.

– Les fonction monotones sont réglées.

3.3 Intégrale des fonctions réglées

Pour une fonction en escalier $f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1}[}$, on définit son intégrale en tant que fonction réglée par

$$\theta_{a,b}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i (t_{i+1} - t_i). \tag{3.2}$$

On a

$$|\theta_{a,b}(f)| \leq \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i) = (b-a)\|f\|_\infty.$$

L'application $\theta_{a,b}$ est donc linéaire et lipschitzienne sur $\mathcal{E}(I,\mathbb{R})$:

$$|\theta_{a,b}(f)| \leq (b-a)\|f\|_\infty. \tag{3.3}$$

On va pouvoir étendre cette intégrale $\theta_{a,b}$ à toutes les fonctions réglées grÃćce au résultat suivant d'extension (cf cours de Topologie) :

Théorème 3.3.1 (Extension des applications uniformément continues) *Soient E et F deux espaces métriques, F complet et X une partie dense de E ($\bar{X} = E$).*

On considère $f : X \to F$ une application uniformément continue sur X. Alors **il existe une unique extension** *g uniformément continue définie sur E qui prolonge f (i.e. $g(x) = f(x)$ si $x \in X$).*

On applique ce résultat à

$$\theta_{a,b} : \begin{cases} \mathcal{E}(I,\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \displaystyle\int_a^b f(x)dx. \end{cases}$$

C'est une application uniformément continue (car lipschitzienne d'après (3.3)). Elle est définie sur $\mathcal{E}(I,\mathbb{R})$ qui est dense dans $R(I,\mathbb{R})$ pour $\|\cdot\|_\infty$ d'après la définition de l'ensemble des fonctions réglées. On étend alors $\theta_{a,b}$ en une application (toujours notée) $\theta_{a,b}$ sur $R(I,\mathbb{R})$.

C'est l'intégrale d'une fonction réglée.

Pour une fonction f réglée, il existe g_n une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f et par définition l'intégrale de f (en tant que fonction réglée) est

$$\theta_{a,b}(f) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n(x)dx.$$

où le membre de droite est bien définie par (3.2) car g_n est en escalier. De plus cette définition de $\theta_{a,b}(f)$ ne dépend pas de la suite g_n en escalier qui converge vers f, si bien que la définition a bien un sens.

Cette nouvelle notion d'intégrabilité coïncide en fait avec l'intégrabilité de Riemann, en effet

Théorème 3.3.2 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction réglée alors f est Riemann-intégrable. De plus, son intégrale de Riemann et son intégrale en tant que fonction réglée coïncident :*

$$\theta_{a,b}(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration : Si f est en escalier, il est clair que $\theta_{a,b}(f) = \int_a^b f(t)dt$.
Si f est réglée, il existe f_n en escalier telle que $f_n \to f$ uniformément. Mais comme $\theta_{a,b}(f_n) = \int_a^b f_n(t)dt$, l'égalité est conservée en passant à la limite. □

Attention : la réciproque est fausse : il existe des fonctions Riemann-intégrables qui ne sont pas réglées. Par exemple, la fonction donnée en (3.1) n'est pas réglée mais est Riemann-intégrable.

Chapitre 4

Intégrales impropres

Dans ce chapitre, $[a,b[$ désigne un intervalle ouvert en b, éventuellement infini ($[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$, $\mathbb{R}$). On s'intéresse aux intégrales de fonctions définies sur $[a,b[$ mais pas en b. Il se pose alors un problème de convergence pour l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ en b.

4.1 Définition et propriétés

Définition 4.1.1 *Une fonction de $[a,b[\to\mathbb{R}$ est dite localement intégrable si elle est Riemann-intégrable sur tout sous-intervalle compact $[c,d]$ de $[a,b]$.*

En pratique, la locale intégrabilité sera donnée par

Proposition 4.1.1 *Une fonction $f:[a,b[\to\mathbb{R}$ continue est localement intégrable.*

Démonstration : Soit $[c,d]\subset(a,b[$. La fonction f est continue sur le compact $[c,d]$ donc Riemann-intégrable sur $[c,d]$. Comme c'est vrai pour tout $[c,d]\subset[a,b[$, elle est localement intégrable. □

Nous notons alors $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ l'application intégrale de f sur $[a,b[$. Elle est bien définie car f est Riemann-intégrable sur $[a,x]$.

Souvent dans ce genre de situation, la fonction f n'est pas définie en b. C'est pourquoi, on ne peut pas étudier directement l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$. Cependant, on peut donner un sens généralisé à l'intégrale sur $[a,b[$:

Définition 4.1.2
- *Si la fonction intégrale F admet une limite I en b, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente. On attribue alors à cette intégrale dite impropre la valeur I.*
- *Si F n'a pas de limite en b, on dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente.*

On parle parfois d'intégrales généralisées plutôt que d'intégrales impropres.

Exemples.

• La fonction $f(x) = e^{-x}$ est localement intégrable sur $[0, +\infty[$. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

• La fonction $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ est localement intégrable sur $[0, 1[$. L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\pi/2$.

• La fonction $f(x) = \cos x$ est localement intégrable sur $[0, +\infty[$. Mais l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ diverge. De même pour $\int_0^{+\infty} \sin t\, dt$.

• Toute fonction P polynôme est localement intégrable sur $[0, +\infty[$, mais d'intégrale impropre divergente sur $[0, +\infty[$.

• La fonction $f(x) = 1/x^2$ est localement intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$. Son intégrale impropre est convergente sur $[1, +\infty[$, elle est divergente sur $]0, 1]$.

• La fonction $f(x) = 1/\sqrt{x}$ est localement intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$. Son intégrale impropre est convergente sur $]0, 1]$, elle est divergente sur $[1, +\infty[$.

Proposition 4.1.2 *L'ensemble des fonctions de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale impropre sur $[a, b[$ converge est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b[, \mathbb{R})$. L'intégration $f \mapsto \int_a^b f(t)dt$ est une application linéaire sur ce sous-espace vectoriel.*

Proposition 4.1.3 *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ d'intégrale impropre convergente et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue. Alors $u \circ f : [a, b[\to \mathbb{R}$ a une intégrale impropre convergente avec*

$$\int_a^b (u \circ f)(t)dt = u\left(\int_a^b f(t)dt\right).$$

Dans les deux cas, il s'agit juste d'un simple passage à la limite des propriétés analogues déjà vues pour les intégrales classiques. C'est donc la linéarité du passage à la limite qui prouve ces résultats.

Proposition 4.1.4 (Critère de Cauchy) *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une application localement intégrable. L'intégrale impropre de f sur $[a, b[$ converge ssi f vérifie la condition suivante (dite critère de Cauchy) : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c \in [a, b[$ tel que*

$$\forall x', x'' \in [c, b[, \qquad \left|\int_{x'}^{x''} f(t)dt\right| \leq \varepsilon.$$

Il s'agit du critère général d'existence d'une limite pour les fonctions à valeurs dans un espace complet appliquée à l'application intégrale F à valeurs dans $\mathbb{R}$, espace complet (cf cours de Topologie ou de Compléments d'Analyse).

Définition 4.1.3 *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une application localement intégrable. L'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ de f est dite absolument convergente si l'intégrale impropre de $|f|$ converge.*

Par exemple, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos t\, e^{-t} dt$ converge absolument car $|\cos t\, e^{-t}| \leq e^{-t}$ est d'intégrale convergente sur $[0, +\infty[$.

Proposition 4.1.5 *Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une application localement intégrable. Une condition suffisante pour que l'intégrale impropre de f sur $[a, b[$ converge est qu'elle converge absolument sur $[a, b[$.*

C'est immédiat par le critère de Cauchy : celui de $|f|$ donne celui de f.

Par un passage à la limite, on a aussi pour les intégrales impropres absolument convergentes l'inégalité :

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Définition 4.1.4 *Une intégrale impropre convergente mais non absolument convergente est dite semi-convergente.*

Exemple : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente. En effet, d'abord il n'y a pas convergence absolue car

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\frac{\pi}{6}+2k\pi}^{\frac{5\pi}{6}+2k\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4\pi}{6} \frac{1}{\frac{\pi}{6} + 2k\pi} = +\infty$$

car $\cup_{k=0}^{+\infty} [\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi] \subset \mathbb{R}$ et sur $[\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{5\pi}{6}+2k\pi]$, on a $|\sin t| \geq \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{t} \geq 1/(\frac{\pi}{6}+2k\pi)$. On montre qu'il y a quand même convergence simple et que la valeur de cette intégrale est $\frac{\pi}{2}$.

Il se peut qu'une intégrale soit plusieurs fois impropre. Donnons nous par exemple un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ et une application localement intégrable f sur $]a, b[$. Le problème de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ se pose à la fois en a et en b.

On vérifie que s'il existe $c \in [a, b[$ tel que les intégrales impropres de f sur $]a, c]$ et $[c, b[$ convergent alors pour tout $d \in]a, b[$, les intégrales impropres de f sur $]a, d]$ et $[d, b[$ convergent et

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^d f(t)dt + \int_d^b f(t)dt.$$

Pour $c \in]a, b[$ fixé, notons

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad G(y) = \int_y^c f(t)dt, \quad \Phi(y, x) = \int_y^x f(t)dt.$$

Théorème 4.1.1 *Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Les intégrales impropres de f sur $]a, c]$ et $[c, b[$ convergent.

ii) L'application Φ admet une limite au point (a,b) de $\overline{\mathbb{R}}^2$.
Lorsque ces assertions sont vraies, la limite de Φ est égale à la somme des deux intégrales impropres. On dit alors que l'intégrale doublement impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge et on lui attribue la valeur (indépendante de c) :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Démonstration : Si i) est vraie Alors $\lim_{x\to b} F(x) = \int_c^b f(t)dt$ et $\lim_{y\to a} G(y) = \int_a^c f(t)dt$. Mais comme $\Phi(y,x) = G(y) + F(x)$, il existe donc

$$\lim_{(y,x)\to(a,b)} \Phi(y,x) = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Inversement si ii) est vraie, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe (c,c') avec $a < c < c' < b$ tels que pour tout (y,x) avec $a < y \leq c \leq c' \leq x < b$, on a $|\Phi(y,x) - l| \leq \varepsilon/2$. On en déduit que pour tout (u,v) avec $c' \leq u < v < b$, on a

$$|\Phi(c,u) - \Phi(c,v)| \leq |\Phi(c,u) - l| + |\Phi(c,v) - l| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Mais comme $\Phi(c,v) - \Phi(c,u) = \int_u^v f(t)dt$, le critère de Cauchy est vérifié pour l'intégrale $\int^b f(t)dt$. Elle converge donc en b.

De même pour l'intégrale en a : $\int_a f(t)dt$. □

Exemple : • L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}dt$ est impropre en $-\infty$ et en $+\infty$. Mais elle converge à la fois en $-\infty$ et en $+\infty$.

• L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$ est impropre en 0 et en $+\infty$.

Elle converge en 0 car $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \simeq_0 1/\sqrt{t}$ intégrable en 0.

Elle converge en $+\infty$ car (en anticipant sur le critère de Riemann) $\lim_{t\to+\infty} t^2\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = 0$.

L'intégrale est donc convergente.

4.2 Intégrales impropres des fonctions positives

Proposition 4.2.1 *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}^+$ une application localement intégrable à valeurs positives. L'intégrale impropre de f converge ssi l'application intégrale $F(x)$ est majorée sur $[a,b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est alors la borne sup de F sur $[a,b[$ (atteinte en b)*

Démonstration : Ici $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est croissante en effet pour $a \leq x' \leq x'' < b$, on a

$$F(x'') - F(x') = \int_{x'}^{x''} f(t)dt \geq 0.$$

Puis F, croissante, bornée est convergente. □

Proposition 4.2.2 (Critère de comparaison) *Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ des applications localement intégrables à valeurs positives vérifiant $f \leq g$. Alors*

i) Si l'intégrale impropre de g converge sur $[a, b[$, celle de f aussi et

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

ii) Si l'intégrale impropre de f diverge, celle de g aussi.

Plus généralement, on a aussi

Proposition 4.2.3 *Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ des applications localement intégrables à valeurs positives vérifiant $f = O(g)$ au voisinage de b. Alors*

i) Si l'intégrale impropre de g converge sur $[a, b[$, celle de f aussi et

ii) Si l'intégrale impropre de f diverge, celle de g aussi.

Il y a de multiples versions de ces critères de comparaison. En particulier, on peut intégrer les relations de comparaison. La version la plus importante de ces critères est celle liée à l'équivalence :

Proposition 4.2.4 *Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}^+$ deux applications localement intégrables positives. Si f et g sont équivalentes en b alors leurs intégrales impropres sont de même natures.*

Remarque 4.2.1 Par contre, en cas de convergence des intégrales, on ne peut pas comparer les valeurs de ces intégrales impropres.

Démonstration : Si $f(x) \simeq_b g(x)$ alors par exemple avec $\varepsilon = 1/2$, il existe un voisinage $[b', b'']$ de b tel que pour $x \in [b', b'']$, on a $(1/2)g(x) \leq f(x) \leq (3/2)g(x)$. D'où pour $b' \leq x' \leq x'' < b$, on a

$$1/2 \int_{x'}^{x''} g(t)dt \leq \int_{x'}^{x''} f(t)dt \leq 3/2 \int_{x'}^{x''} g(t)dt.$$

Le critère de Cauchy de f donne celui de g et vice versa. Les intégrales impropres de f et de g en b sont donc de même nature. □

En pratique pour déterminer la nature d'une intégrale impropre de fonctions positives, on commence par simplifier au maximum l'intégrant en cherchant l'équivalent le plus simple. Attention, l'équivalent est à prendre en le point b qui est critique pour la convergence de l'intégrale.

Exemples : l'échelle de Riemann

• En $+\infty$, les fonctions $1/x^\alpha$ sont intégrables en $+\infty$ ssi $\alpha > 1$.
Par exemple, $1/\sqrt{x}$ ne l'est pas, pas plus que $1/x$ tandis que $1/x^2$ l'est.

• En 0, les fonctions $1/x^\alpha$ sont intégrables en 0 ssi $\alpha < 1$.
Par exemple, $1/\sqrt{x}$ l'est mais pas $1/x$ ni $1/x^2$.

• En un point fini b, c'est l'analogue de 0 : $1/(b-x)^\alpha$ est intégrable en b si $\alpha < 1$. Sinon, l'intégrale diverge en b.

En particulier, noter qu'aucune fonction $1/x^\alpha$ n'est intégrable à la fois en 0 et en $+\infty$.

Une conséquence du critère de comparaison et de l'échelle de Riemann sont les critères suivants :

Proposition 4.2.5 (Critère de Riemann en 0) *Soit $f :]0,b] \to \mathbb{R}$ localement intégrable.*

- *S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim_{t\to 0} t^\alpha f(t) = 0$ alors f est intégrable en 0.*
- *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t\to 0} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors f n'est pas intégrable en 0.*

Démonstration : En effet dans le premier cas, il existe $x_1 > 0$ tel que pour $t \le x_1$, on a $t^\alpha f(t) \le 1$ donc $f(t) \le 1/t^\alpha$ qui est intégrable en 0 car $\alpha < 1$.

Puis dans le deuxième cas, il existe $x_2 > 0$ tel que pour $t \le x_2$, on a $t^\alpha f(t) \ge 1$ donc $f(t) \ge 1/t^\alpha$ qui n'est pas intégrable en 0 car $\alpha > 1$. □

Puis on a un critère semblable en $+\infty$, mais attention les conditions sont les exactes opposées.

Proposition 4.2.6 (Critère de Riemann en $+\infty$) *Soit $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ localement intégrable.*

- *S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ alors f est intégrable en $+\infty$.*
- *S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ alors f n'est pas intégrable en $+\infty$.*

Démonstration : En effet dans le premier cas, il existe $x_3 > 0$ tel que pour $t \ge x_3$, on a $t^\alpha f(t) \le 1$ donc $f(t) \le 1/t^\alpha$ qui est intégrable en $+\infty$ car $\alpha > 1$.

Puis dans le deuxième cas, il existe $x_4 > 0$ tel que pour $t \ge x_4$, on a $t^\alpha f(t) \ge 1$ donc $f(t) \ge 1/t^\alpha$ qui n'est pas intégrable en $+\infty$ car $\alpha > 1$. □

En général, on ne se complique pas la vie : on essaye d'appliquer ces critères avec $\alpha = 2$ lorsqu'on cherche un $\alpha > 1$ et avec $\alpha = 1/2$ lorsqu'on cherche un $\alpha < 1$.

Par exemple, e^{-x} est intégrable en $+\infty$ car $\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t} = 0$. Puis $\ln t$ l'est en 0 car $\lim_{t\to 0} \sqrt{t}\ln t = 0$.

Autres fonctions de référence : les intégrales de Bertrand

- L'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$ converge en $+\infty$ ssi $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{1/e} \frac{1}{t^\alpha |\ln^\beta t|} dt$ converge en 0 ssi $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

En effet pour le problème de convergence en $+\infty$, si $\alpha > 1$, alors il existe $\frac{\alpha+1}{2} > 1$ avec

$$t^{\frac{\alpha+1}{2}} \times \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln t)^\beta} \to 0, \quad t \to +\infty.$$

car $\frac{\alpha-1}{2} > 0$. Alors que si $\alpha < 1$, alors il existe $\frac{\alpha+1}{2} < 1$ avec

$$t^{\frac{\alpha+1}{2}} \times \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{t^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln t)^\beta} \to +\infty, \quad t \to +\infty.$$

car $\frac{1-\alpha}{2} > 0$. Puis si $\alpha = 1$, alors le changement de variable $u = \ln t$ donne

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^\beta} dt = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^\beta}$$

qui converge si $\beta > 1$.

On fait de même pour le problème de convergence en 0 : si $\alpha > 1$, alors il existe $\frac{\alpha+1}{2} > 1$ avec

$$t^{\frac{\alpha+1}{2}} \times \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} = \frac{1}{t^{\frac{\alpha-1}{2}} |\ln t|^\beta} \to +\infty, \quad t \to 0.$$

car $\frac{\alpha-1}{2} > 0$. Alors que si $\alpha < 1$, alors il existe $\frac{\alpha+1}{2} < 1$ avec

$$t^{\frac{\alpha+1}{2}} \times \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta} = \frac{t^{\frac{1-\alpha}{2}}}{|\ln t|^\beta} \to 0, \quad t \to 0.$$

car $\frac{1-\alpha}{2} > 0$. Puis si $\alpha = 1$, alors le changement de variable $u = \ln t$ donne

$$\int_0^{1/e} \frac{1}{t|\ln t|^\beta} dt = \int_{-\infty}^{-1} \frac{du}{|u|^\beta}$$

qui converge si $\beta > 1$.

Chapitre 5

Suites et séries de fonctions Riemann-intégrables

On considére dans ce chapitre une suite de fonctions $(f_n)_n$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Elle pourrait être á valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans un espace de Banach E.

5.1 Différentes convergences de fonctions

Définition 5.1.1 (Convergence simple) *Une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers f si pour chaque $x \in [a, b]$ fixé,*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Exemples :
- Soit la suite de fonctions f_n données sur $[0, +\infty[$ par $f_n(0) = 0$, $f_n(t) = 1$ pour $t \geq 1/n$ et linéaire entre 0 et $1/n$. La suite f_n converge simplement vers f nulle en 0 et égale á 1 ailleurs.
- Soit la suite de fonctions f_n données sur $]0, 1]$ par $f_n(t) = 1/t$ sur $[1/(n + 1), 1]$ et $f_n(t) = n + 1$ sur $[0, 1/(n + 1)]$. La suite f_n converge simplement sur $]0, 1]$ vers $f(t) = 1/t$.

La convergence s'écrit avec le formalisme des quantificateurs « ∀ ∃ »,

$$\forall x \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \text{ tel que pour } n \geq n_0, \text{ on a } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Notons que dans cette assertion, $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$ dépend de ε mais aussi du x fixé.

Définition 5.1.2 (Convergence uniforme) *Une suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction f si*

$$\|f_n - f\|_\infty := \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Exemples :
- Dans l'exemple 1 précédent, $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| = 1$. Il n'y a donc pas convergence uniforme.
- Dans l'exemple 2, il n'y a pas convergence uniforme non plus car $\sup_{x\in]0,1]} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$.

La convergence uniforme s'écrit avec le formalisme « $\forall$ $\exists$ »,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \forall x \in [a,b] \text{ on a } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Dans cette assertion, $n_0 = n_0(\varepsilon)$ dépend de ε mais plus de $x \in [a,b]$: la convergence est uniforme en x.

Pour avoir la convergence uniforme, on a juste déplacé la quantification « $\forall x \in [a,b]$ » d'avant á aprés « $\exists n_0$ ».

Remarque 5.1.1 – La convergence uniforme entraÃőne la convergence simple.
- La convergence uniforme d'une suite de fonctions peut se montrer par le **critére de Cauchy uniforme** : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n, m \geq n_0$, on a
$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$
- Pour montrer la convergence uniforme de $(f_n)_n$, on commence par chercher la limite simple (ponctuelle) de f_n :$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$. Puis on étudie $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|$ pour déterminer s'il y a ou non convergence uniforme.

De nombreuses propriétés peuvent être transférées par convergence uniforme d'une suite de fonctions $(f_n)_n$ á une fonction limite f : la continuité, la continuité uniforme, le caractére lipschitzien, être bornée, la dérivabilité (sous certaines conditions : convergence uniforme des dérivées et convergence en un point). On verra dans la section suivante ce qu'il en est de l'intégrabilité.

La convergence des séries de fonctions est un cas particulier de celle des suites de fonctions car une série se voit comme la limite de la suite des sommes partielles. Mais comme pour les séries numériques, pour les séries de fonctions, il y a d'autres notions de convergence : la convergence absolue et la convergence normale.

Définition 5.1.3 (Convergence absolue) *La série de fonction $\sum_n f_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum_n |f_n|$ converge simplement.*

La convergence absolue de la série $\sum_n f_n$ entraÃőne la convergence simple de la série $\sum_n f_n$. Mais, elle n'a aucun lien avec la convergence uniforme : par exemple, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$ converge uniformément car

$$|\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq \frac{1}{n+1+x} \leq \frac{1}{n+1}$$

mais pas absolument car $|f_n(x)| \simeq 1/n$ et $\sum_n 1/n$ diverge.

Définition 5.1.4 (Convergence normale) *Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions. S'il existe une série numérique positive $\sum_n a_n$ (avec $a_n \geq 0$) telle que*

i) la série $\sum_n a_n$ est convergente

ii) pour tout n, $\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| \leq a_n$

alors la série $\sum_n f_n$ est dite normalement convergente.

Proposition 5.1.1 *Il y a convergence normale de la série de fonctions $\sum_n f_n$ ssi la série numériques des $\|f_n\|_\infty$ est convergente.*

La convergence normale de la série $\sum_n f_n$ entraÃőne la convergence uniforme de la série $\sum_n f_n$: en effet il suffit d'appliquer le critére de Cauchy uniforme á partir du critére de Cauchy pour la convergence de $\sum_n a_n$.

Souvent pour montrer la convergence uniforme d'une série de fonction $\sum_n f_n$, on cherche á voir sa convergence normale.

La convergence normale de la série $\sum_n f_n$ entraÃőne aussi la convergence absolue de la série $\sum_n f_n$.

Attention, les implications réciproques entre les différents modes de convergence sont fausses. En particulier, la convergence absolue et uniforme d'une série de fonctions n'entraÃőne pas sa convergence normale. En effet, considérons par exemple la fonction f_n affine par morceaux pour $n \geq 2$, nulle sur

$$[0, \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})] \cup [\frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}), 1]$$

et valant $1/n$ en $1/n$. On compléte la suite $(f_n)_n$ avec $f_0(x) = f_1(x) = 0$.

On définit F sur $[0, 1]$ par $F(0) = 0$ et par $F(t) = f_n(t)$ pour

$$t \in [\frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}), \frac{1}{2}(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1})].$$

Notons $F_N = \sum_{n=0}^N f_n$. La fonction $F - F_N$ est nulle sur $[\frac{1}{2}(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}) + 1]$ et égale á F sur $[0, \frac{1}{2}(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1})]$. On a donc $\sup_{t\in[0,1]} |F(t) - F_N(t)| \leq 1/(N + 1)$.

Il y a donc convergence uniforme de F_N vers F. La convergence est absolue car tout est positif. Elle n'est pas normale car $\sup_{t\in[0,1]} |f_n(t)| = 1/n$ et $\sum_n 1/n$ diverge.

5.2 Intégrabilité des suites et séries de fonctions

D'abord, pour les intégrales sur les intervalles finis, on a :

Théorème 5.2.1 *Si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions intégrables sur un intervalle fini $[a,b]$ compact qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors f est intégrable sur $[a,b]$ et la suite des intégrales converge :*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration : • Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Puisque f_{n_0} est intégrable, il existe deux applications en escalier φ et $\phi \geq 0$ telles que

$$|f_{n_0} - \varphi| \leq \phi, \qquad \int_a^b \phi(x)dx \leq \varepsilon/2.$$

Il existe donc deux applications en escalier $\varphi_1 = \varphi$ et $\phi_1 = \phi + \varepsilon/(2(b-a))$ telles que

$$|f - \varphi_1| \leq |f - f_{n_0}| + |f_{n_0} - \varphi| \leq \phi + \varepsilon/(2(b-a)) = \phi_1, \qquad \int_a^b \phi_1(x)dx \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que f est Riemann-intégrable.

• On peut aussi montrer la Riemann-intégrabilité de f par la premiére définition de la Riemann-intégrabilité :
D'abord, les f_k sont intégrables donc bornées. Comme les f_k convergent uniformément vers f, la limite f l'est aussi. Puis pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$, on a pour tout x,

$$|f_k(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

On en déduit que

$$\left|\sup_{x\in[a,b]} f_k(x) - \sup_{x\in[a,b]} f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad \left|\inf_{x\in[a,b]} f_k(x) - \inf_{x\in[a,b]} f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Mais alors pour une subdivision $S = \{a_0, \dots, a_n\}$ de $[a,b]$ et les sommes de Darboux associées, on a

$$\begin{aligned} |A^+(f,S) - A^+(f_k,S)| &\leq \sum_{i=0}^{n-1} |M_i^k - M_i|(a_{i+1} - a_i) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i) \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

en notant M_i et M_i^k les sup de f et de f_k sur $[a_i, a_{i+1}[$. On ferait de même pour les sommes de Darboux inférieures. On en déduit pour $k \geq k_0$,

$$A^+(f_k, S) - A^-(f_k, S) - 2\varepsilon \leq A^+(f, S) - A^-(f, S) \leq A^+(f_k, S) - A^-(f_k, S) + 2\varepsilon.$$

Pour k_0, comme f_{k_0} est Riemann-intégrable, il existe une subdivision S_{k_0} telle que

$$A^+(f, S_{k_0}) - A^-(f, S_{k_0}) \leq \varepsilon.$$

On a alors $0 \leq A^+(f, S) - A^-(f, S) \leq 3\varepsilon$ pour toute subdivision $S \supset S_{k_0}$.
La fonction f est donc Riemann-intégrable.

• Pour la convergence des intégrales : En effet, si f_k converge uniformément vers f, alors

$$\sup_{x \in [a,b]} |f_k(x) - f(x)| \to 0, \qquad k \to +\infty.$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ et tout $x \in [a, b]$, on a $|f_k(x) - f(x)| \leq \varepsilon/(b - a)$. D'où

$$\left| \int_a^b f_k(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f_k(x) - f(x)|dx \leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} dx = \varepsilon.$$

On a donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0$, tel que pour $k \geq k_0$, $\left| \int_a^b f_k(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \varepsilon$, ce qui prouve la convergence cherchée. □

• Sans convergence uniforme, la convergence de la suite des intégrales est fausse :

Considérons sur l'intervalle $[0, 1]$, $f(x) = 0$ et f_n la fonction nulle sur $[2/n, 1]$ et linéaire entre 0 où $f(0) = 0$ et $1/n$ où $f(1/n) = n$ et linéaire encore entre $1/n$ et $2/n$.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n \\ -n^2(x - 2/n) & \text{si } 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{si } 2/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Les fonctions f_n et f sont continues et intégrables. La convergence n'est pas uniforme car

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| = n \not\to 0$$

et puis

$$\int_0^1 f(x)dx = 0, \qquad \int_0^1 f_n(x) = \frac{2}{n} \times n \times 1/2 = 1.$$

• Si l'intervalle est infini, la convergence des intégrales est encore en défaut, même avec la convergence uniforme :

Considérons sur l'intervalle $[0, +\infty[$, la fonction $f(x) = 0$ et

$$f_n(x) = \begin{cases} 1/n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 1/n + 1/n - x/n & \text{si } n \leq x \leq n+1 \\ 0 & \text{si } x \geq n+1. \end{cases}$$

On a la convergence uniforme car $\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = 1/n \to 0$, $n \to +\infty$ mais pas la convergence de la suite des intégrales puisque

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 0, \qquad \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = n \times 1/n + 1/2 + 0 = 3/2 \not\to 0.$$

Le seul résultat positif pour des intégrales impropres est lorsque l'intervalle est fini :

Théorème 5.2.2 *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies et localement intégrables sur $[a, b[$ (intervalle borné) qui converge uniformément sur $[a, b[$ vers f. Alors f est localement intégrable. Puis si les f_n ont des intégrales impropres convergentes sur $[a, b[$ alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)dx$ converge et*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Démonstration : Sur un intervalle fini $[a, c] \subset [a, b[$, f est Riemmann-intégrable sur $[a, c]$ d'aprés le théoréme 5.2.1 car limite uniforme des f_n qui sont Riemann intégrables sur $[a, c]$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$, on a pour tout $x \in [a, b[$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon/(2(b-a))$. On a alors pour $a \leq c \leq d < b$,

$$\begin{aligned} \left| \int_c^d f(t)dt \right| &\leq \left| \int_c^d f(t) - f_{n_0}(t)dt \right| + \left| \int_c^d f_{n_0}(t)dt \right| \\ &\leq (d-c)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \left| \int_c^d f_{n_0}(t)dt \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \int_c^d f_{n_0}(t)dt \right|. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Comme l'intégrale impropre $\int_a^b f_{n_0}(t)dt$ est convergente, il existe x_0 tel que pour $x, x' \in [x_0, b[$, on ait $\left| \int_x^{x'} f_{n_0}(t)dt \right| \leq \varepsilon/2$. On a donc avec (5.1) pour $c, d \in [x_0, b[$, $\left| \int_c^d f(t)dt \right| \leq \varepsilon$, ce qui d'aprés le critére de Cauchy justifie que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Puis pour $n \geq n_0$, et $x \in [a, b[$, on a

$$\left| \int_a^x f(t)dt - \int_a^x f_n(t)dt \right| \leq \int_a^x |f(t) - f_n(t)|dt \leq (x-a)\frac{\varepsilon}{b-a} \leq \varepsilon.$$

Pour $n \geq n_0$ fixé, le passage á la limite $x \to b^-$ donne

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \right| \leq \varepsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. □

Les résultats précédents (Théorémes 5.2.1 et 5.2.2) admettent des versions pour les séries de fonctions $\sum_n f_n$. Leur preuve est immédiate en interprétant une série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ comme la limite de la suite des sommes partielles $\sum_{n=0}^{k} f_n$.

Corollaire 5.2.1 *Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions toutes intégrables sur un intervalle fini $[a, b]$ compact. Si la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$ alors $F = \sum_n f_n$ est intégrable sur $[a, b]$ et on a*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Corollaire 5.2.2 *Soit $\sum_n f_n$ une série de fonctions toutes localement intégrables sur un intervalle fini $[a, b[$ compact. Si les intégrales impropres $\int_a^b f_n(t)dt$ convergent toutes et si la série $\sum_n f_n$ converge uniformément sur $[a, b[$ alors $F = \sum_n f_n$ est localement intégrable sur $[a, b[$ et d'intégrale impropre convergente, avec*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Les résultats de cette section seront á comparer avec les résultats d'interversion limite / intégrale pour l'intégrale de Lebesgue où les hypothéses de convergence seront beaucoup plus faibles.

5.3 Quelques inconvénients de l'intégrale de Riemann

En général l'intégrale de Riemann passe mal á la limite sans convergence uniforme ou si l'intervalle n'est pas borné : si on considére une suite $(f_n)_n$ de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ qui converge vers f alors il n'est pas vrai en général que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \tag{5.2}$$

Autrement dit, l'intégrale (de Riemann) et la limite s'intervertissent mal.

Trois problémes peuvent survenir en fait :
- La limite á gauche de (5.2) peut ne pas exister.

– Même si la limite existe, la fonction f peut ne pas être Riemann-intégrable.
– Même si les deux membres existent, ils peuvent ne pas être égaux.

Illustrons ces problémes par des exemples.

Exemple. Soit $(r_n)_n$ la suite des rationnels de $[0,1]$. Notons alors

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = r_k, k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est facile de voir que f_n est Riemann-intégrable (elle est même réglée car elle a un nombre fini de point de discontinuité) et que $\int_0^1 f_n(x)dx = 0$.

Puis pour tout x, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Or f n'est pas Riemann intégrable (ses sommes de Darboux inférieures valent 0, ses supérieures valent 1).

Exemple. Soit f_n donnée par

$$f_n(t) = \begin{cases} 1/t & \text{sur } [1,n] \\ 0 & \text{sur } [1+1/n, +\infty[\\ \text{affine} & \text{entre.} \end{cases}$$

La limite est $f(t) = 1/t$ sur $[1,+\infty[$ et $\sup\limits_{t\in[1,+\infty[} |f(t) - f_n(t)| \leq 1/n$. Il y a donc convergence uniforme.
Cependant $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ existent mais pas $\int_1^{+\infty} f(t)dt$

Exemple. Etudier la convergence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n}{t+n} e^{-t} dt$.

Exemple. Soit

$$f_n(x) = -2n^2 x e^{-n^2x^2} + 2(n+1)^2 x e^{-(n+1)^2x^2}.$$

La suite de fonction $(f_n)_n$ est télescopique et comme $\lim_{n\to+\infty} 2n^2 x e^{-n^2x^2} = 0$, on a

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = -2xe^{-x^2}.$$

Puis

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (-2xe^{-x^2})dx = e^{-1} - 1,$$

tandis que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (e^{-n^2} - e^{-(n+1)^2}) = e^{-1}.$$

L'égalité (5.2) n'est pas valide pour cet exemple.

Bibliographie

[AF] Jean-Marie Arnaudiès, Henri Fraysse. *Cours de Mathématiques, tome 2, Analyse*. Dunod, 1991.

[JCB-Lebesgue] Jean-Christophe Breton. *Intégrale de Lebesgue*. Notes de cours de L3 Mathématiques, Université de Rennes 1, 2014.

[Gos] Bernard Gostiaux. *Cours de Mathématiques spèciales, tome 2 : topologie, analyse*. PUF, 1993.

[RDO] Edmond Ramis, Claude Deschamps, Jacques Odoux. *Cours de Mathématiques spéciales, tome 3 : topologie et éléments d'analyse*. Dunod, 1998.