

# Intégrale de Riemann

**Cours de mathématiques**  
**1<sup>er</sup> cycle, 1<sup>re</sup> année**

- 1 Sommes de Riemann d'une fonction
  - Définitions
  - Exemples
- 2 Intégrale de Riemann
  - Intégrabilité
  - Exemples
  - Propriétés
  - Formule de la moyenne
- 3 Primitives
  - Théorème fondamental de l'analyse
  - Lien intégrale/primitive
  - Exemple de synthèse
  - Primitives des fonctions usuelles

- 1 Sommes de Riemann d'une fonction
  - Définitions
  - Exemples
- 2 Intégrale de Riemann
- 3 Primitives

### Définition 1.1 (Subdivision)

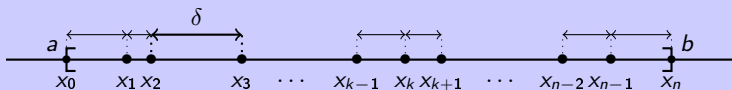
Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

- Une **subdivision** de l'intervalle fermé borné  $[a, b]$  est une famille **finie** de réels  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  telle que :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .

Il s'agit donc d'un « découpage » de l'intervalle  $[a, b]$ .

- Le **pas** d'une telle subdivision est le nombre  $\delta = \max_{1 \leq k \leq n} \{x_k - x_{k-1}\}$ .

C'est la longueur du **plus grand** intervalle dans le découpage de  $[a, b]$ .

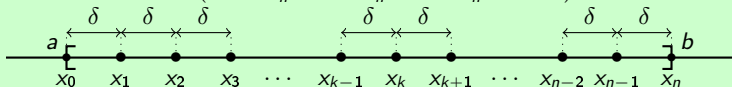


### Exemple 1.2 (Subdivision « équirépartie »)

La subdivision **équirépartie** est issue d'un découpage **équidistant** de  $[a, b]$  en  $n$  intervalles de longueur identique  $\delta = \frac{b-a}{n}$ .

Les points de subdivision sont donnés par  $x_k = a + k \frac{b-a}{n}$ ,  $0 \leq k \leq n$  (ils sont répartis selon une progression arithmétique de raison  $\delta$ ) :

$$\sigma = (a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, a + 3\frac{b-a}{n}, \dots, b).$$



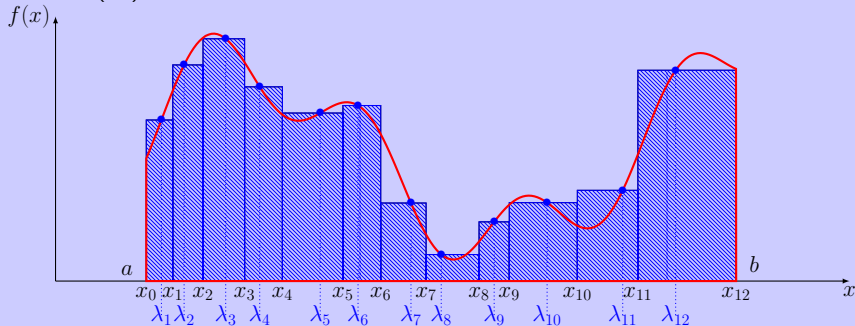
### Définition 1.3 (Somme de Riemann)

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[a, b]$ ,  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  une subdivision de  $[a, b]$ , et  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  une famille de réels tels que :  $\forall k \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\lambda_k \in [x_{k-1}, x_k]$  (on dit alors que la famille  $\Lambda$  est **adaptée** à la subdivision  $\sigma$ ).

On appelle **somme de Riemann** de la fonction  $f$  associée à  $\sigma$  et à  $\Lambda$  le nombre

$$S(f, \sigma, \Lambda) = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})f(\lambda_k).$$

Ce nombre représente l'aire de la réunion des rectangles de base  $[x_{k-1}, x_k]$  et de hauteur  $f(\lambda_k)$ .



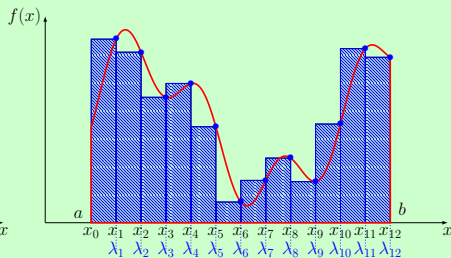
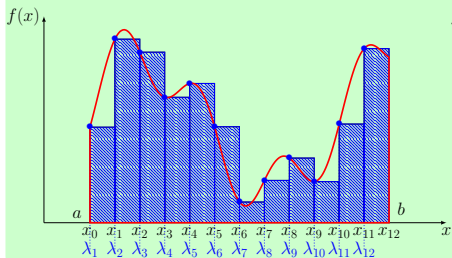
## Exemple 1.4 (Subdivision équirépartie)

Considérons une subdivision « équirépartie » avec comme choix des  $\lambda_k$  une des

bornes de chaque sous-intervalle : 
$$\begin{cases} x_k = a + k \frac{b-a}{n}, & 0 \leq k \leq n \\ \lambda_k = x_k \text{ ou } x_{k-1}, & 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Les sommes de Riemann correspondante s'écrivent :

$$S(f, \sigma, \Lambda) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$



## Exemple 1.5 (Sommes de Darboux (facultatif))

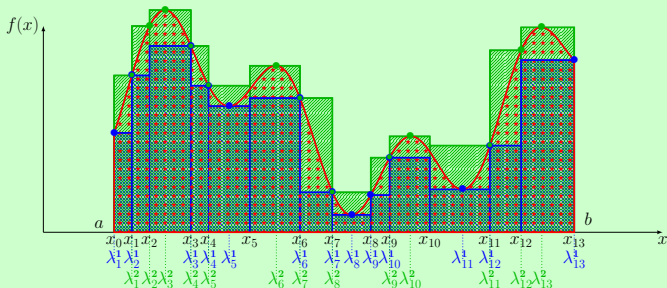
Soit  $f$  une fonction **continue** sur  $[a, b]$ ,  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  une subdivision de  $[a, b]$ .  
Introduisons les valeurs « extrémales » relatives à chacun des sous-intervalles de  $\sigma$  :

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad m_k = \min_{[x_{k-1}, x_k]} f \quad \text{et} \quad M_k = \max_{[x_{k-1}, x_k]} f.$$

Par continuité,  $f$  **atteint** ses bornes : il existe donc des  $\lambda_k^1, \lambda_k^2$  dans  $[x_{k-1}, x_k]$  tels que  $f(\lambda_k^1) = m_k$  et  $f(\lambda_k^2) = M_k$ .

Les sommes de Riemann correspondant aux familles adaptées  $\Lambda_1 = (\lambda_1^1, \dots, \lambda_n^1)$  et  $\Lambda_2 = (\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$  sont appelées **sommes de Darboux** :

$$S_1 = S(f, \sigma, \Lambda_1) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{et} \quad S_2 = S(f, \sigma, \Lambda_2) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}).$$



*Remarque* : toutes les sommes de Riemann sont comprises entre  $S_1$  et  $S_2$ .

- 1 Sommes de Riemann d'une fonction
- 2 Intégrale de Riemann
  - Intégrabilité
  - Exemples
  - Propriétés
  - Formule de la moyenne
- 3 Primitives



## Définition 2.1 (Intégrabilité)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **bornée**. S'il existe un nombre réel  $I$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \sigma \text{ subdivision de pas } < \delta, \forall \Lambda \text{ adaptée à } \sigma, |S(f, \sigma, \Lambda) - I| < \varepsilon$$

on dit que la fonction  $f$  est **intégrable (au sens de Riemann)** sur  $[a, b]$  et le nombre  $I$  est l'**intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$** . Ce nombre est noté  $\int_a^b f(x) dx$  ou  $\int_a^b f$ .

Autrement dit, une fonction est intégrable ssi **toutes** ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont **convergentes de même limite finie**.



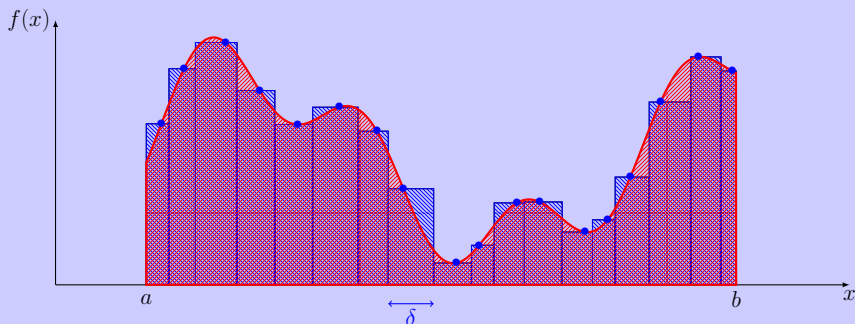
## Définition 2.1 (Intégrabilité)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **bornée**. S'il existe un nombre réel  $I$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \sigma \text{ subdivision de pas } < \delta, \forall \Lambda \text{ adaptée à } \sigma, |S(f, \sigma, \Lambda) - I| < \varepsilon$$

on dit que la fonction  $f$  est **intégrable (au sens de Riemann)** sur  $[a, b]$  et le nombre  $I$  est l'**intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$** . Ce nombre est noté  $\int_a^b f(x) dx$  ou  $\int_a^b f$ .

Autrement dit, une fonction est intégrable ssi **toutes** ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont **convergentes de même limite finie**.



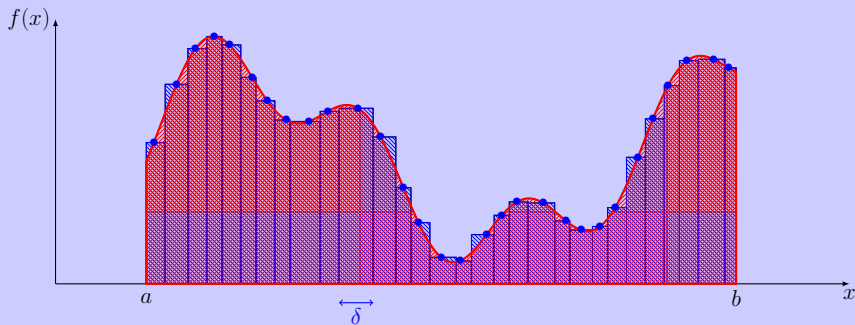
## Définition 2.1 (Intégrabilité)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **bornée**. S'il existe un nombre réel  $I$  tel que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \sigma \text{ subdivision de pas } < \delta, \forall \Lambda \text{ adaptée à } \sigma, |S(f, \sigma, \Lambda) - I| < \varepsilon$$

on dit que la fonction  $f$  est **intégrable (au sens de Riemann)** sur  $[a, b]$  et le nombre  $I$  est l'**intégrale de  $f$  sur  $[a, b]$** . Ce nombre est noté  $\int_a^b f(x) dx$  ou  $\int_a^b f$ .

Autrement dit, une fonction est intégrable ssi **toutes** ses suites de sommes de Riemann dont le pas des subdivisions associées tend vers 0, sont **convergentes de même limite finie**.

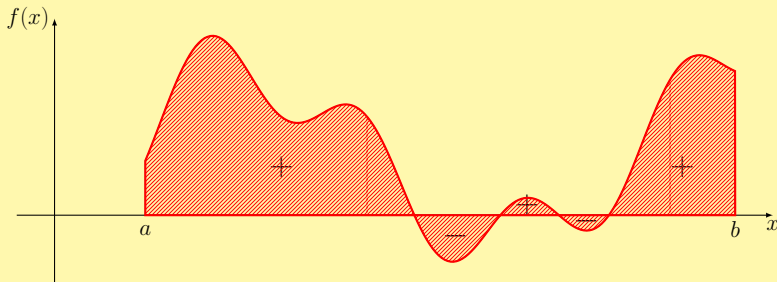


## Remarque 2.2 (Notations/conventions)

- La variable utilisée dans la notation de l'intégrale est dite **muette** :

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(\odot) d\odot = \dots$$

- Le nombre  $\int_a^b f$  représente l'« **aire algébrique** » entre la courbe de  $f$  dans un repère orthonormal et l'axe des abscisses, en comptant **négativement** les parties **au-dessous** de l'axe et **positivement** les parties **au-dessus**.



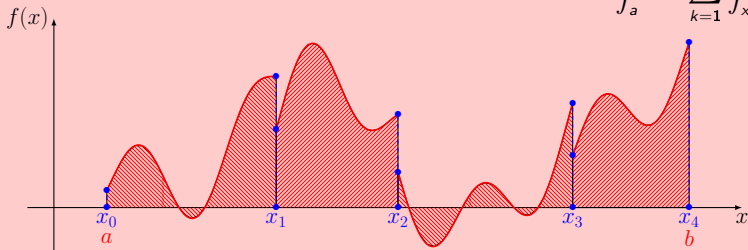
- Conventions : on convient que  $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$  et  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .

### Théorème 2.3 (Exemples de fonction intégrable (admis))

- Toute fonction **continue** sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .
- Plus généralement, toute fonction **continue par morceaux** sur  $[a, b]$  (i.e. admettant un nombre **fini** de discontinuités, celles-ci étant de 1<sup>re</sup> espèce) est intégrable sur  $[a, b]$ .

Plus précisément, en notant  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  ses discontinuités et en posant  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ , on peut prolonger  $f$  par continuité sur chaque intervalle

$[x_{k-1}, x_k]$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Notons  $\tilde{f}_k$  ce prolongement. Alors 
$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \tilde{f}_k.$$



Remarquons que si l'on modifie la valeur d'une fonction continue par morceaux en un nombre fini de points, alors la valeur de son intégrale reste la même.

- Toute fonction **monotone** sur  $[a, b]$  est intégrable sur  $[a, b]$ .

## Exemple 2.4 (Fonctions constante, identité, exponentielle...)

À l'aide de la somme de Riemann associée à une subdivision **équirépartie**, on trouve pour une fonction intégrable

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(x) dx.$$

- Dans le cas d'une fonction **constante**, cela donne

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \int_a^b \lambda dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \lambda = \lambda(b-a) \quad (\text{aire d'un rectangle !})$$

- Dans le cas de la fonction **exponentielle**, cela donne

$$\int_a^b e^x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n e^{a+k \frac{b-a}{n}} = e^b - e^a.$$

- Dans le cas de la fonction **identité**, cela donne

$$\int_a^b x dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \quad (\text{aire d'un trapèze !})$$

- Dans le cas de la fonction **carré**, cela donne

$$\int_a^b x^2 dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left(a + k \frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Exemple 2.5 (Fonction indicatrice de  $\mathbb{Q}$ )

Considérons la fonction « indicatrice » (ou « caractéristique ») de  $\mathbb{Q}$ . Il s'agit de la fonction

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Soit une subdivision  $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$  d'un intervalle  $[a, b]$  de pas arbitrairement petit,  $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $\Lambda' = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$  deux familles adaptées à la subdivision  $\sigma$  telles que

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \lambda_k \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \lambda'_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Les sommes de Riemann correspondantes valent

$$S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma, \Lambda) = 0 \quad \text{et} \quad S(\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}, \sigma, \Lambda') = b - a.$$

Elles ne peuvent pas tendre vers une limite commune.

Ainsi, la fonction indicatrice de  $\mathbb{Q}$  n'est intégrable sur **aucun** intervalle  $[a, b]$ .

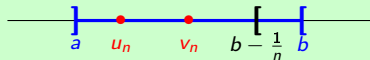
*Annexe (facultatif)*

Entre deux réels distincts quelconques, il existe un rationnel et un irrationnel (en fait une infinité de chaque). On dit que les ensembles  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont **denses** dans  $\mathbb{R}$ .

En effet : soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $a < b$ . Alors il existe un entier  $n$  tel que  $a < b - \frac{1}{n}$ .

Posons  $u_n = \frac{E(na)+1}{n}$  et  $v_n = \frac{E(na\sqrt{2})+1}{n\sqrt{2}}$ . Les nombres  $u_n$  et  $v_n$  sont compris entre  $a$  et  $b$ ,

$u_n$  est rationnel et  $v_n$  est irrationnel.



### Proposition 2.6 (Opérations)

#### 1 Linéarité

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables sur  $[a, b]$  ( $a \leq b$ ) et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .  
La fonction  $\lambda f + \mu g$  est intégrable sur  $[a, b]$  et

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

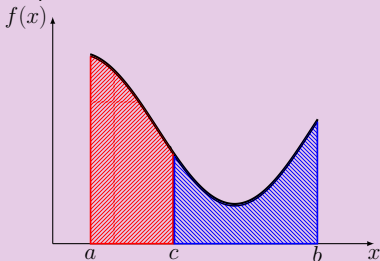
#### 2 Relation de Chasles

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$  ( $a \leq b$ )  
Pour tout  $c \in [a, b]$ ,  $f$  est intégrable sur  $[a, c]$  et  $[c, b]$  et

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

ou encore

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_c^b f(x) dx$$



Ces propriétés restent valables lorsque  $b < a$ .



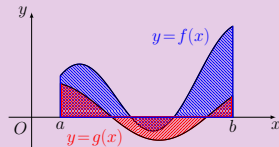
## Proposition 2.7 (Ordre)

## 1 Croissance/Positivité

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions intégrables sur  $[a, b]$  ( $a \leq b$ ).

Si  $f \geq g$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .

En particulier : si  $f \geq 0$  sur  $[a, b]$  alors  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .



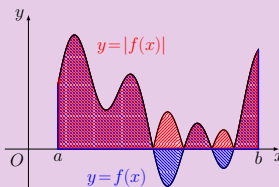
## 2 Inégalité triangulaire

Soit  $f$  une fonction intégrable sur  $[a, b]$  ( $a \leq b$ ).

On a  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

Plus généralement, quel que soit l'ordre de  $a$  et  $b$ ,

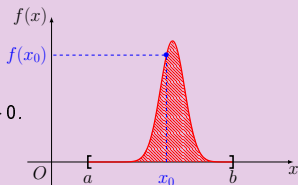
$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)| dx \right| \leq |b - a| \times \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$ .



## 3 Stricte positivité

Supposons  $f$  continue et positive.

- S'il existe  $x_0 \in [a, b]$  tel que  $f(x_0) > 0$ , alors  $\int_a^b f(x) dx > 0$ .
- Si  $\int_a^b f(x) dx = 0$  alors, pour tout  $x \in [a, b]$ ,  $f(x) = 0$ .



### Définition 2.8 (Valeur moyenne)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable.

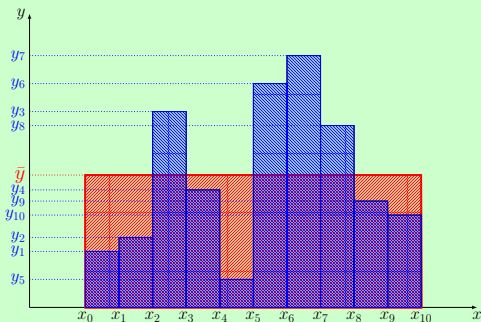
On appelle **valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$**  le réel  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

### Exemple 2.9

Soit  $y_1, y_2, \dots, y_n$  des nombres réels et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction **constante par morceaux** définie par  $f(x) = y_k$  pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  et tout  $x \in [x_{k-1}, x_k]$  où l'on a posé  $x_k = a + (b-a) \frac{k}{n}$ .

Alors la **valeur moyenne de  $f$  sur  $[a, b]$**  coïncide avec la **moyenne arithmétique** des nombres  $y_1, \dots, y_n$  :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \bar{y}.$$



## Théorème 2.10 (Formule de la moyenne)

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et soit  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable de signe constant.

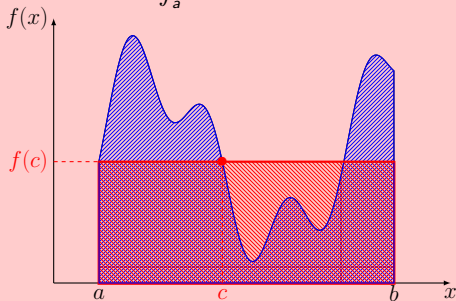
Alors

$$\exists c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

En particulier, pour  $g = 1$  :

$$\exists c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Autrement dit, il existe un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c)$  coïncide avec la **valeur moyenne** de  $f$  sur  $[a, b]$ .



## Exemple 2.11

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \int_a^b f(x) e^{-nx} dx$ .

La fonction  $x \mapsto e^{-nx}$  étant intégrable positive sur  $[a, b]$ ,

$$\exists c_n \in [a, b], \quad u_n = f(c_n) \int_a^b e^{-nx} dx = \frac{1}{n} f(c_n) (e^{-na} - e^{-nb}).$$

La fonction  $f$  étant continue sur  $[a, b]$ , donc bornée, on en déduit que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

- 1 Sommes de Riemann d'une fonction
- 2 Intégrale de Riemann
- 3 Primitives
  - Théorème fondamental de l'analyse
  - Lien intégrale/primitive
  - Exemple de synthèse
  - Primitives des fonctions usuelles

Le théorème de la moyenne permet d'obtenir une relation de **réciprocité** entre les opérations d'**intégration** et de **dérivation** décrite dans le résultat suivant :

### Théorème-définition 3.1 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$  fixé.

On définit la fonction suivante  $F$  sur  $I$  par  $\forall x \in I, F(x) = \int_a^x f(t) dt$ .

Alors  $F$  est de **classe  $C^1$**  sur  $I$  et  $F' = f$ .

On dit que  $F$  est une **primitive** de  $f$  sur  $I$ .

$F$  est en fait l'**unique** primitive de  $f$  sur  $I$  qui s'annule en  $a$ .

### Remarque 3.2 (Raffinement de la formule de la moyenne (facultatif))

La formule de la moyenne précédemment énoncée stipule l'existence d'un  $c$  appartenant à l'intervalle **fermé**  $[a, b]$  tel que  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ .

En fait, le théorème des accroissements finis appliqués à une primitive de  $f$  permet d'assurer plus précisément l'existence d'un tel  $c$  dans l'intervalle **ouvert**  $]a, b[$ .

## Corollaire 3.3

Soit  $f$  une fonction **continue** sur un intervalle  $I$ . Alors :

- ①  $f$  admet des primitives sur  $I$  ;
- ② si  $F$  est une primitive de  $f$ , alors toutes les primitives de  $f$  s'obtiennent en ajoutant une constante réelle à  $F$  ;
- ③ pour toute primitive  $F$  de  $f$  et  $(a, b) \in I^2$ , on a :  $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$ .

Notations :

- la quantité  $F(b) - F(a)$  se note aussi  $[F(t)]_a^b$  ;
- on note  $\int f(x) dx$  toute primitive de  $f$  (définie à une constante additive près).

## Corollaire 3.4

Soit  $f$  une fonction de **classe  $\mathcal{C}^1$**  sur un intervalle  $I$ .

Alors on a pour tout  $(a, b) \in I^2$  :  $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$ .

On fera attention de ne pas confondre la formule précédente avec la suivante (valable pour  $f$  continue), l'**ordre** d'intégration et de dérivation n'étant pas le même :

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

## Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

① La fonction d'intérêt : soit  $f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x-1}{\ln x}$

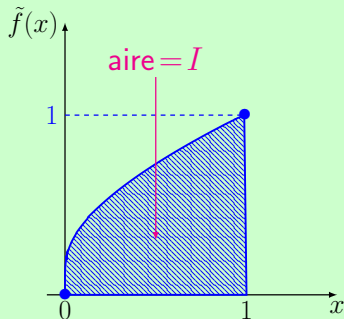
- La fonction  $f$  est continue sur  $]0, 1[$ .
- On a  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ .
- Donc  $f$  admet un prolongement par continuité  $\tilde{f}$  en 0 et 1 obtenu en posant  $\tilde{f}(0) = 0$  et  $\tilde{f}(1) = 1$ .  
Plus précisément :

$$\tilde{f} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in ]0, 1[ \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

On se propose alors de calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \tilde{f}(x) dx.$$



## Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

② Une fonction intermédiaire : soit  $F : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

- Limite en  $0^+$ .** Posons  $\varphi(t) = \frac{1}{\ln t}$  pour  $t \in ]0, 1[$ . La fonction  $\varphi$  étant continue sur  $]0, 1[$  et  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = 0$ , elle est bornée au voisinage de 0 (disons  $|\varphi(t)| \leq M$ ).  
On a  $|F(x)| \leq Mx(1-x)$ . D'où  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$ .
- Limite en  $1^-$ .** On a le DL généralisé en 1 :  $\varphi(t) \underset{t \rightarrow 1}{=} \frac{1}{t-1} + \frac{1}{2} + o(1) = \frac{1}{t-1} + \varepsilon(t)$  où  $\varepsilon$  est une fonction continue sur  $]0, 1[$  admettant une limite finie ( $\frac{1}{2}$ ) en 1, donc bornée au voisinage de 1 (disons  $|\varepsilon(t)| \leq M_2$ ). Alors  $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt + \int_x^{x^2} \varepsilon(t) dt$  avec  $\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt = \ln(x+1)$  et  $\left| \int_x^{x^2} \varepsilon(t) dt \right| \leq M_2x(1-x)$ . D'où  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \ln 2$ .
- Prolongement par continuité sur  $[0, 1]$ .** Donc  $F$  admet un prolongement par continuité  $\tilde{F}$  en 0 et 1 obtenu en posant  $\tilde{F}(0) = 0$  et  $\tilde{F}(1) = \ln 2$  ( $F$  étant continue sur  $]0, 1[$ ).
- Dérivée de  $\tilde{F}$ .** La fonction  $\varphi$  étant continue sur  $]0, 1[$ , elle admet une primitive  $\Phi$ . On peut écrire  $F(x) = \Phi(x^2) - \Phi(x)$ ,  $\Phi$  étant dérivable sur  $]0, 1[$ .  
On voit alors que  $F$  est dérivable sur  $]0, 1[$  et  $F'(x) = 2x\varphi(x^2) - \varphi(x) = f(x)$ .  
Par ailleurs,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F'(x) = \tilde{f}(0)$  et  $\lim_{x \rightarrow 1^-} F'(x) = \tilde{f}(1)$ , donc d'après le théorème de la limite de la dérivée,  $\tilde{F}$  est dérivable en 0 et en 1 et  $\tilde{F}' = \tilde{f}$  sur  $[0, 1]$ .

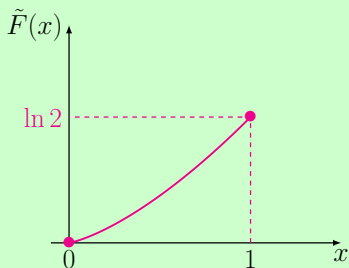
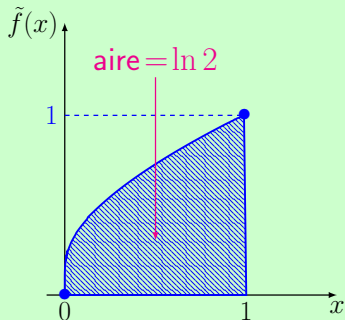


## Exemple 3.5 (Un calcul d'intégrale)

## ③ Le calcul d'aire :

- La fonction  $\tilde{f}$  est une **primitive** de  $\tilde{f}$  sur  $[0, 1]$ .  
En conséquence,  $I = [\tilde{F}(x)]_0^1 = \tilde{F}(1) - \tilde{F}(0)$  soit

$$I = \ln 2.$$



Partant des dérivées des fonctions classiques, on peut dresser une liste de primitives à connaître :

### Exemple 3.6 (Fonctions puissances/exponentielles/trigonométriques/hyperboliques)

$$\textcircled{1} \int x^p dx = \frac{1}{p+1} x^{p+1} + Cste \text{ pour tout } p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ et } \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + Cste$$

ou encore  $\int \frac{1}{x^p} dx = -\frac{1}{p-1} \frac{1}{x^{p-1}} + Cste \text{ pour tout } p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\textcircled{2} \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + Cste \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}^*$$

$$\textcircled{3} \int \cos x dx = \sin x + Cste \text{ et } \int \sin x dx = -\cos x + Cste$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + Cste \text{ et } \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + Cste$$

$$\textcircled{4} \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + Cste \text{ et } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + Cste$$

$$\int \operatorname{th} x dx = \ln \operatorname{ch} x + Cste \text{ et } \int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx = \operatorname{th} x + Cste$$

$$\textcircled{5} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + Cste \text{ et } \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{argsh} x + Cste$$

$$\textcircled{6} \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + Cste$$

## Série de Riemann

*Aimé Lachal*

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama\\_riemann.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_riemann.pdf)

## Formule de Stirling

*Aimé Lachal*

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama\\_stirling.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_stirling.pdf)

## Entre Machin et Plouffe...

*Aimé Lachal*

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama\\_machin\\_plouffe.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_machin_plouffe.pdf)

## Sinus et produit eulérien

*Aimé Lachal*

[http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama\\_sinus\\_eulerien.pdf](http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_sinus_eulerien.pdf)

## Notions à retenir

- Sommes de Riemann
  - ★ Application au calcul de limites de certaines suites
- Intégrale de Riemann
  - ★ Interprétation géométrique
  - ★ Opérations
  - ★ Inégalités, théorème de la moyenne
- Primitives
  - ★ Théorème fondamental de l'analyse : lien entre intégrale définie et primitive
  - ★ Primitives usuelles à connaître