Intégrale de Riemann

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Concept de fonction

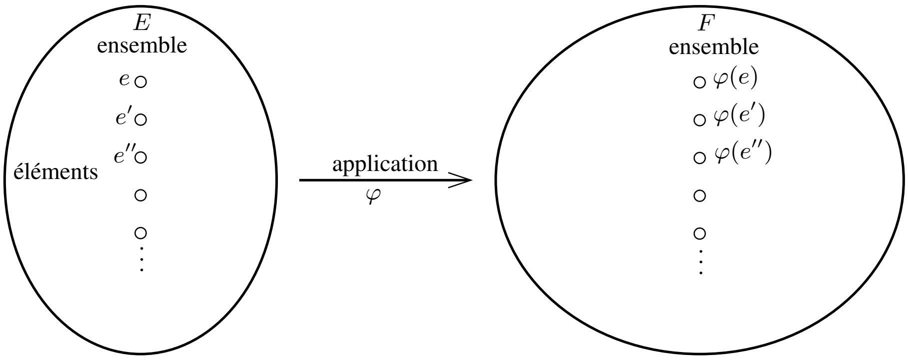
> Toute la Science mathématique repose sur l'idée de *fonction*, c'est-à-dire de dépendance entre deux ou plusieurs grandeurs, dont l'étude constitue le principal objet de l'Analyse. Il a fallu longtemps avant qu'on se rendît compte de l'étendue extraordinaire de cette notion ; c'est là, d'ailleurs, une circonstance qui a été très heureuse pour les progrès de la Science. [...] Dans les époques vraiment créatrices, une vérité incomplète ou approchée peut être plus féconde que la même vérité accompagnée des restrictions nécessaires.
> Émile PICARD

Dans les mathématiques contemporaines, une *fonction* réelle :

$$f\colon \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

est une *application*, c'est-à-dire qu'à tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est associé un unique nombre réel $f(x) \in \mathbb{R}$, ce qui paraît très simple.

Mais contrairement à notre intuition habituelle, il se pourrait qu'un tel concept n'ait en fait rien d'évident, puisqu'*a priori*, aucune règle, aucune formule, aucune expression ne donne concrètement $x \longmapsto f(x)$.



En tout cas, depuis l'avènement de la théorie des ensembles dans les années 1890–1930, on admet le concept d'*application :*

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad E &\longrightarrow F \\ e &\longmapsto \varphi(e), \end{aligned}$$

dans une abstraction absolue, pure, non mystérieuse, aussi transparente et limpide que sur une figure 'simplette'.

Mais nous insisterons ici sur le fait que l'intuition minimale qui accompagne notre sentiment d'évidence lorsque nous écrivons :

$$x \longmapsto f(x)$$

cache de nombreuses questions mathématiques profondes qui sont encore loin d'être résolues à notre époque. Même la plus classique et la plus connue des intégrales, celle de Riemann à laquelle est consacrée ce chapitre, répond intelligemment à la question mathématique :

Comment définir l'intégrale $\int f(x)\,dx$ d'une fonction ?

C'est le mathématicien allemand Bernhard Riemann qui, vers 1854 et dans la lignée de Peter Lejeune-Dirichlet son maître, fut l'un des premiers à avoir conceptualisé la notion de fonction dans la généralité maximale $x \longmapsto f(x)$, bien avant la théorie des ensembles, *et Riemann voyait surtout qu'un tel concept très général de fonction ouvrait des questions mathématiques nouvelles et très difficiles*.

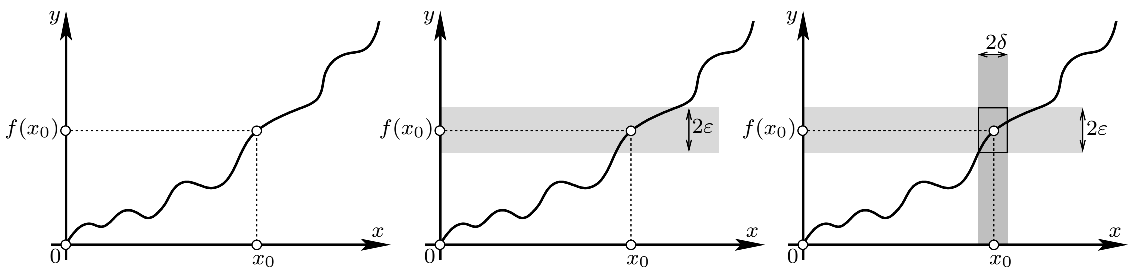
En fait, quelques décennies après Cauchy qui avait élaboré sa théorie des fonctions au début des années 1800, l'histoire de la théorie de l'intégration est essentiellement devenue une histoire des *tentatives* de donner à la notion d'*intégrale* l'extension la plus grande possible, afin d'embrasser le plus de fonctions *discontinues* possible, et ce, jusque dans les années 1950.

En effet, au bout d'un certain temps, les mathématiciens ont considéré qu'intégrer des fonctions continues, c'était '*trop facile*', et donc, qu'il fallait passer à des fonctions plus compliquées, qu'il fallait être plus ambitieux, ne serait-ce que pour des applications à la physique.

Mais tout d'abord, qu'est-ce qu'une fonction *continue* ?

Encore d'un point de vue moderne et très élaboré, la définition classique due à Weierstrass stipule que f est continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \Big(\forall\, x \quad |x - x_0| \leqslant \delta \implies \big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$



Géométriquement, quelle que soit la finesse $2\,\varepsilon > 0$ d'une bande horizontale centrée autour de la droite horizontale $\{y = f(x_0)\}$, il existe une bande verticale de largeur $2\,\delta$ assez petite centrée autour de la droite verticale $\{x = x_0\}$ telle que toute la partie du graphe correspondante *reste entièrement enfermée dans la bande horizontale choisie à l'avance*.

Mais historiquement, ce n'est pas du tout ainsi que les notions de fonction et de continuité sont apparues.

Fonctions définies par des expressions explicites arbitrairement complexes En 1718, Bernouilli écrit dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* :

> **Définition :** On appelle ici **fonction** d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.

Euler prend la suite en 1734, et dans une note de l'Académie de Saint Pétersbourg, il introduit la notation :

$$f\big(\tfrac{x}{a}+c\big),$$

> pour désigner une fonction arbitraire de $\frac{x}{a}+c$.

En 1748, dans son *Introduction in analysis infinitorum*, Euler reprend la définition de Bernoulli en ajoutant le mot *analytique*, à savoir *développable en série entière convergente* :

> En conséquence, toute expression analytique dans laquelle, à côté de la variable z, toutes les quantités qui composent cette expression sont des constantes, est une fonction de cette même z ; ainsi $a+3\,z$, $a-4\,zz$, *etc.*

Qui plus est, Euler a essayé d'éclaircir l'idée de quantité constante et de quantité variable.

> **1.** Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.
>
> **2.** Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.
>
> **3.** Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.
>
> **4.** Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.
>
> **5.** Une fonction d'une variable est donc aussi une quantité variable.

Voici quelques exemples plus élaborés de fonctions au sens d'Euler — inutile de chercher à comprendre lorsqu'on ne connaît pas, il s'agit juste d'une visite sans guide d'un jardin zoologique mystérieux — :

$$\frac{e^{az}+e^{-az}}{e^{az}-e^{-az}},$$

$$\Gamma(z) := \frac{e^{-\gamma\,z}}{z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1} e^{\frac{z}{n}},$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

$$\sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty}(-1)^n\,q^{\frac{3\,n^2-n}{2}},$$

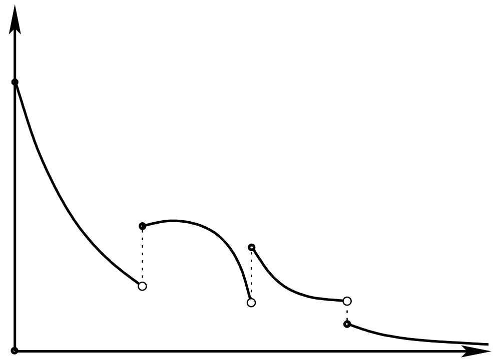
$$z^{z-\frac{1}{2}}\,e^{-z}\,\sqrt{2\pi}\left[1+\frac{1}{12\,z}+\frac{1}{288\,z^2}-\frac{139}{51840\,z^3}\right],$$

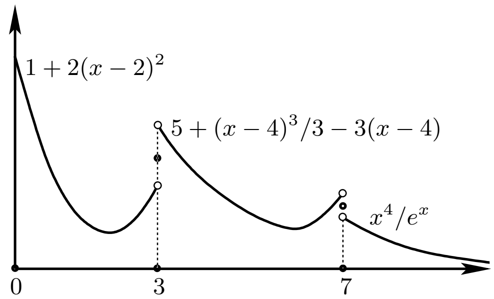
$$\int_0^{\pi/2}\sin^k x\,dx,$$

$$\frac{t}{1+t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\cdots(2k)}{3\cdot(2k+1)}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^k.$$

En résumé, nous pouvons dire qu'une fonction au sens d'Euler est une fonction de la variable réelle, non constante, définie par une expression analytique, avec une totale liberté dans la complexité formelle, une fonction, donc, qui est donnée par des formules essentiellement explicites, en utilisant l'addition, la multiplication, la composition d'une manière arbitrairement complexe, et en incorporant aussi diverses constantes sympathiques.

Fonctions discontinues. En réponse à d'Alembert qui voulait maintenir que les fonctions devaient être données par une unique expression algébrique ou développables en série entière convergente, Euler a été conduit à admettre que les courbes puissent être '*irrégulières*', ou '*discontinues*', au sens où elles soient formées d'un nombre fini de courbes différentes, mais toujours données par des formules.





En effet, longtemps dans l'histoire des mathématiques, les fonctions *discontinues* n'étaient que des fonctions lisse ($\mathscr{C}^\infty$) ou analytiques ($\mathscr{C}^\omega$) par morceaux, données par des formules explicites sur un nombre fini d'intervalles successifs.

Ainsi, ce qu'on appelait *discontinuité* ne désignait qu'un *changement de formule* en traversant un point spécifique.

L'Idée de fonction abstraite pure qui déclenche des Questions mathématiques. Mais avec Dirichlet et Riemann, le statut des fonctions change radicalement : le concept de fonction devient une abstraction idéale qui *provoque des questions mathématiques nouvelles*.

Nous venons de voir que l'*épure totale du concept* de fonction conduit à demander seulement qu'à tout réel $x \in \mathbb{R}$ est associé un unique réel $f(x) \in \mathbb{R}$, sans aucune hypothèse de continuité, sans formules, sans supposer que le nombre de points de discontinuité soit fini ou discret, en un mot : *sans aucune hypothèse*.

Si donc on admet un tel concept de fonction le plus général possible, alors de nombreuses questions surgissent :

Question. *Comment définir l'intégrale d'une fonction réelle* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *quelconque ?*

Question. *L'intégrale d'une fonction* f *existe-t-elle toujours ?*

Question. *Y-a-t-il un unique concept d'intégrale, ou* plusieurs concepts d'intégrale *qui ne sont pas équivalents entre eux ?*

Ce cours présentera trois concepts d'intégrale :

$$\boxed{\textbf{Intégrale de Riemann}}$$

$$\boxed{\textbf{Intégrale de Kurzweil-Henstock}}$$

$$\boxed{\textbf{Intégrale de Lebesgue}}$$

La plus classique est l'*Intégrale de Riemann*.

L'*intégrale de Kurzweil-Henstock* est la seule qui montre véritablement que l'intégration :

$$\int f' = f$$

d'une fonction dérivée f' redonne la fonction f dont on est parti, ce qui semble être le minimum de tenue correcte qu'on puisse exiger de l'intégrale à son examen d'entrée en L3 d'Intégration !

Enfin, à un niveau supérieur d'abstraction, c'est l'*Intégrale de Lebesgue* qui fait l'unanimité dans les mathématiques contemporaines pour sa plasticité, sa généralité, et sa complétude.

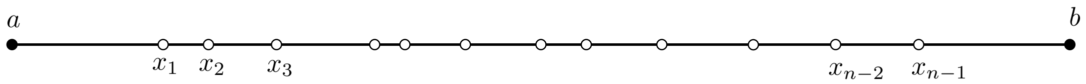
Donc en France et dans le monde, les cours de L3 en Mathématiques se font un devoir de présenter ce joyau de pensée qu'est la célèbre *Intégrale de Lebesgue*, bien qu'elle soit quelque peu difficile d'accès lors d'une toute première rencontre.

Alors pour faciliter une telle première rencontre, nous allons commencer par effectuer des révisions sur l'Intégrale de Riemann, en dévoilant quelques théorèmes nouveaux qui anticiperont la longue théorie de l'Intégrale de Legesgue.

2. Définition de l'intégrale de Riemann

Soient deux nombres réels $-\infty < a < b < \infty$ et soit l'intervalle fermé borné donc compact :

$$[a, b] \subset \mathbb{R}.$$



Définition 2.1. [Subdivisions] Une *subdivision* Δ d'un tel intervalle $[a, b]$ est une suite finie de nombres réels $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ satisfaisant :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

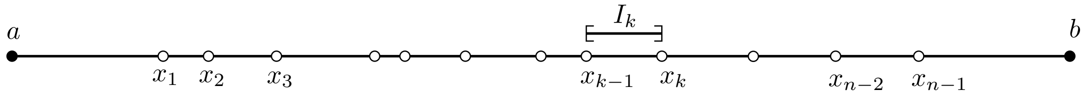
Étant donné une telle subdivision, considérons les intervalles :

$$I_k := \big[x_{k-1}, x_k\big] \qquad\qquad (k = 1 \cdots n),$$

et notons :

$$\big|I_k\big| := x_k - x_{k-1}$$

leurs longueurs.



Définition 2.2. [Sommes de Darboux] À toute fonction $\boxed{\textit{bornée}}$:

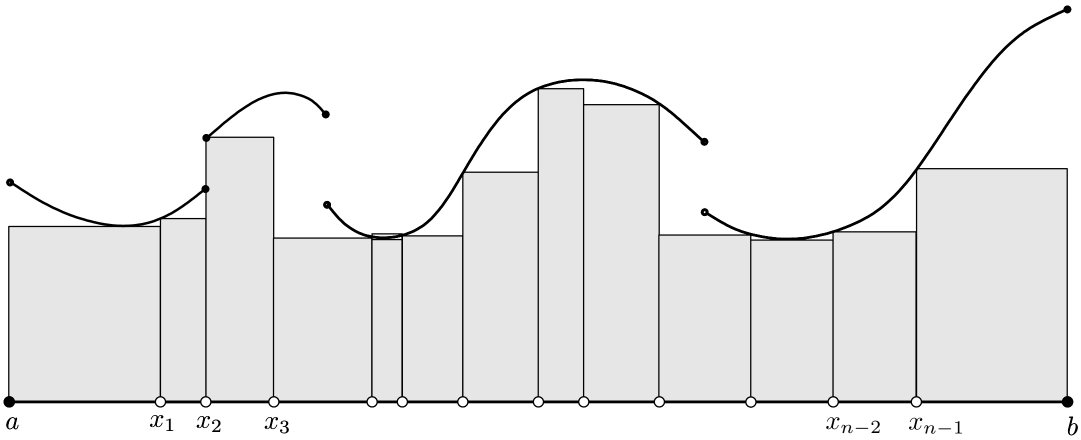
$$f\colon \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

à savoir qui satisfait :

$$-\infty < \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) < \infty,$$

sont associées premièrement la *somme de Darboux inférieure* relativement à la subdivision Δ :

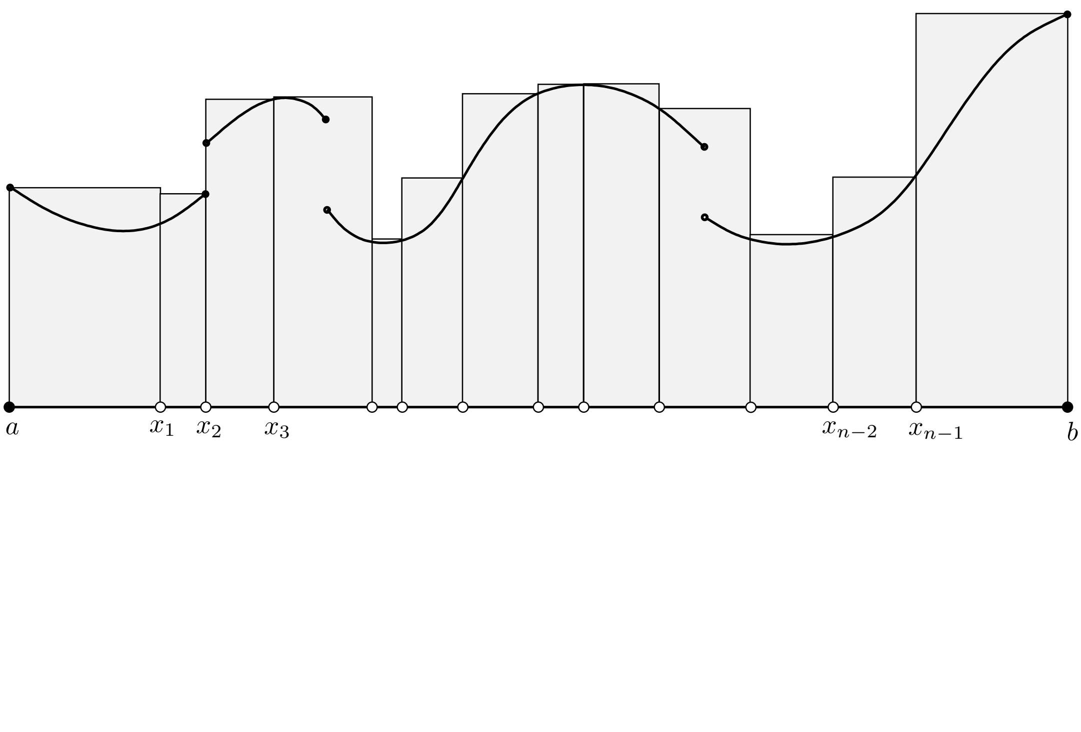
$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f) &:= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} |I_k| \inf_{x\,\in\, I_k} f,\end{aligned}$$



et deuxièmement la *somme de Darboux supérieure* :

$$\begin{aligned}\Sigma^\Delta(f) &:= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f \\ &= \sum_{k=1}^{n} |I_k| \sup_{x\,\in\, I_k} f(x).\end{aligned}$$

La fonction n'est pas supposée continue, ni même discontinue seulement en un nombre fini de points (malheureusement, nos piètres figures sont incapables de montrer plus que 3 points de discontinuité), et aussi, il n'y a aucune raison pour que la subdivision Δ s'adapte aux points de discontinuité de f lorsqu'il en existe.



Comme sur les diagrammes, la fonction f n'est pas supposée continue ici, mais ces deux sommes finies existent simplement parce que toutes les quantités :

$$\inf_{x \in I_k} f \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in I_k} f$$

sont des nombres réels *finis*, puisque f est supposée *bornée*.

De plus, la somme de Darboux inférieure est minorée uniformément, comme le montre un délicieux calcul téléscopique facile :

$$\begin{aligned}
\Sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{I_k} f \\
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[a,b]} f \\
&= \Big(b - x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2} + \cdots + x_2 - x_1 + x_1 - a\Big) \inf_{[a,b]} f \\
&= (b-a) \inf_{[a,b]} f \\
&> -\infty,
\end{aligned}$$

et, de manière symétrique, la somme supérieure est elle aussi majorée uniformément :

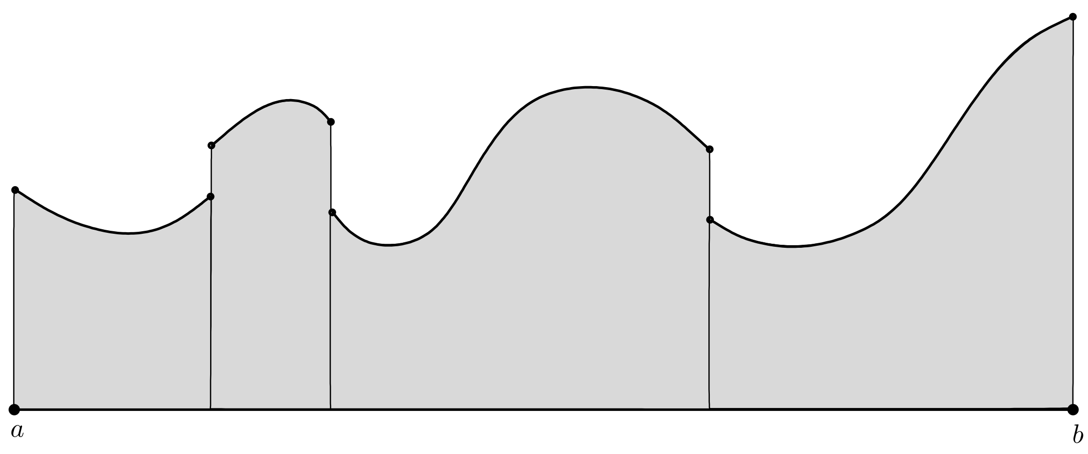
$$\begin{aligned}
\Sigma^\Delta(f) &\leqslant (b-a) \sup_{[a,b]} f \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Enfin, puisque :

$$\inf_{I_k} f \leqslant \sup_{I_k} f,$$

pour tout $k = 1, \dots, n$, ces sommes satisfont toujours manifestement (exercice direct) :

$$\boxed{\Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f).}$$

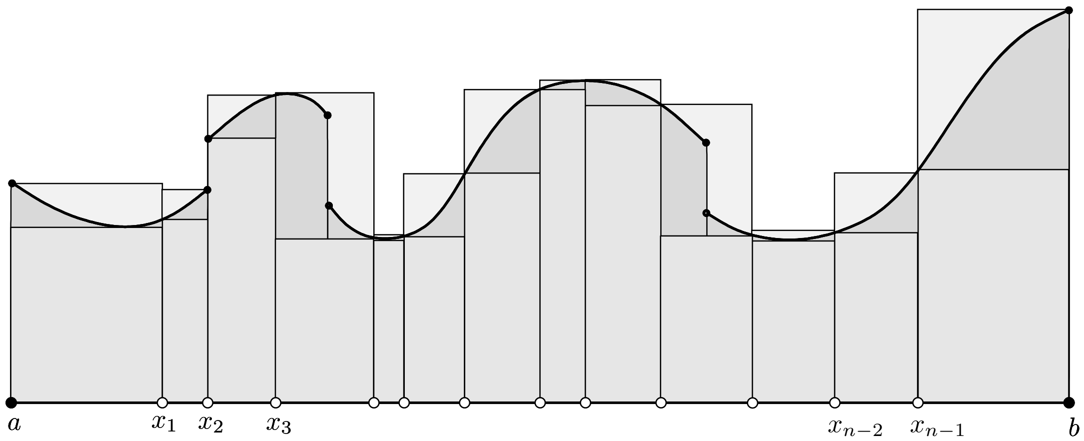


Interprétation géométrique en termes de l'aire de l'hypographe de f. Lorsque f est suffisamment régulière, disons continue $f \in \mathscr{C}^0$, voire même continûment différentiable $f \in \mathscr{C}^1$, et lorsque de plus $f \geqslant 0$ ne prend que des valeurs positives, l'aire de la région :

$$\text{hypographe}(f) := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\},$$

du Grec '*hypo*', '*sous*' — si tant est qu'on puisse donner à une telle aire un sens puisque la recherche de définitions variées pour la notion d'*intégrale* vise justement à se donner les moyens de calculer de telles aires —, sera visiblement approchée en-dessous par $\Sigma_\Delta(f)$, et approché au-dessus par $\Sigma^\Delta(f)$:

$$\boxed{\Sigma_\Delta(f) \leqslant \text{Aire}\big(\text{hypographe}(f)\big) \leqslant \Sigma^\Delta(f).}$$



Notons que l'*hypo*thèse[1] ici faite que $f \geqslant 0$ est positive n'est essentiellement pas restrictive, puisque l'on peut toujours remplacer f par $f + \mathrm{C}$ où $\mathrm{C} \gg 1$ est une constante assez grande pour que $f + \mathrm{C} \geqslant 0$.

Définition 2.3. [Intégrabilité au sens de Riemann] Une fonction *bornée* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *intégrable au sens de Riemann*, ou de manière abrégée *Riemann-intégrable*, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a,b]$ telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon.$$

Par exemple, les fonctions constantes $f(x) \equiv \mathrm{c} \in \mathbb{C}$ sont trivialement Riemann-intégrables (exercice), heureusement, d'ailleurs.

Afin d'attribuer une valeur à l'*intégrale* de f :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \textbf{?},$$

il faut s'assurer que les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f)$ et supérieure $\Sigma^\Delta(f)$ convergent vers *une même valeur réelle* à mesure que $\varepsilon \to 0$, *i.e.* comme on s'y attend, à mesure que la subdivision s'enrichit de plus en plus de points pour que ces gratte-ciel de plus en plus étroits serrés les uns contre les autres approchent de mieux en mieux l'aire de l'hypographe de f.

Définition 2.4. Une subdivision Δ' de l'intervalle $[a,b]$ est dite être *plus fine* qu'une subdivision Δ de $[a,b]$ lorsque Δ' contient tous les points Δ et éventuellement aussi, de nombreux autres points.

Attention ! On ne dira *jamais* que Δ est '*plus grosse*' que Δ', cela ne serait pas mathématiquement correct !

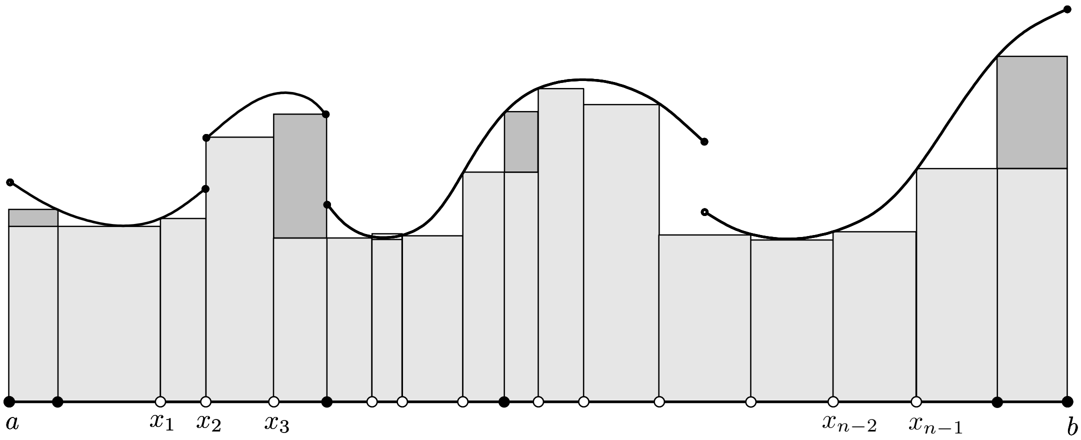
1. Il y a des '*hypo*' partout ! Décidément, les Grecs sont envahissants !

Alors, en ajoutant juste un point à la fois pour passer pas à pas de Δ à Δ', on démontre aisément par récurrence le :

Lemme 2.5. [Propriété cruciale de monotonie par rapport aux subdivisions] *Si une subdivision Δ' est plus fine qu'une subdivision Δ, on a toujours :*

$$\Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma_{\Delta'}(f) \leqslant$$
$$\leqslant \Sigma^{\Delta'}(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f),$$

ce qui veut dire que le raffinement des subdivisions améliore l'approximation inférieure et l'approximation supérieure tout en réduisant l'écart qui les sépare.

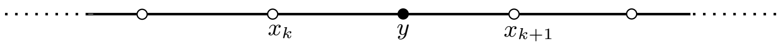


Plus sveltes sont les gratte-ciel, meilleures sont les approximations inférieure et supérieure.

Démonstration. En effet, ajoutons juste un point supplémentaire y à la subdivision quelconque Δ. Ce point appartiendra à un certain intervalle ouvert :

$$y \in]x_k, x_{k+1}[,$$

pour un certain entier $0 \leqslant k \leqslant n-1$.



Traitons seulement le cas des sommes de Darboux inférieures, le cas des sommes de Darboux supérieures étant complètement similaire.

Alors la seule différence entre la somme de Darboux inférieure associée à Δ et celle associée à $\Delta \cup \{y\}$, c'est qu'on remplace le terme :

$$\mathsf{I} := \big(x_{k+1} - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f$$

par les deux termes (repérer le signe '$+$') :

$$\mathsf{II} := \big(x_{k+1} - y\big) \inf_{y \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f + \big(y - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant y} f,$$

les autres termes restant intouchés.

Mais puisque pour toute application bornée $F \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ d'un espace topologique X à valeurs dans $\mathbb{R}$ satisfait trivialement, pour tous sous-ensembles quelconques $A, B \subset X$:

$$\inf_{A \cup B} F \leqslant \inf_A F \qquad \text{et} \qquad \inf_{A \cup B} F \leqslant \inf_B F,$$

on obtient ici par un calcul simple :

$$\begin{aligned}
\mathsf{I} &= \big(x_{k+1} - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f \\
&= \big(x_{k+1} - y + y - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f \\
&= \big(x_{k+1} - y\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f + \big(y - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f \\
&\leqslant \big(x_{k+1} - y\big) \inf_{y \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f + \big(y - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant y} f \\
&= \mathsf{II},
\end{aligned}$$

la majoration qui conclut. □

Corollaire 2.6. [Miracle logique de l'intégrale de Riemann] *Étant donné deux subdivisions quelconques Δ_1 et Δ_2 de l'intervalle $[a, b]$, on a toujours :*

$$\Sigma_{\Delta_1}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_2}(f).$$

Démonstration. La subdivision-réunion :

$$\Delta_1 \cup \Delta_2,$$

est simultanément plus fine que Δ_1 et plus fine que Δ_2, donc la monotonie cruciale qui vient d'être énoncée et démontrée assure que :

$$\Sigma_{\Delta_1}(f) \leqslant \Sigma_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_1 \cup \Delta_2}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_2}(f),$$

ce qu'il fallait faire voir. □

Rappelons maintenant le :

Théorème de la borne Supérieure/Inférieure. *Pour tout sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}$* borné*, à savoir satisfaisant :*

$$E \subset [m, M],$$

pour certains réels $m < M$, il existe deux nombres réels uniques :

$$\inf E \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \sup E \in \mathbb{R}$$

tels que :

$$E \subset \big[\inf E,\ \sup E\big],$$

et qui sont optimaux *au sens où E n'est* pas *contenu dans :*

$$\begin{aligned}
E &\not\subset \big[\inf E + \varepsilon,\ \sup E\big], \\
E &\not\subset \big[\inf E,\ \sup E - \varepsilon\big],
\end{aligned}$$

quel que soit $\varepsilon > 0$. □

Grâce au Lemme 2.5 de monotononie par rapport aux subdivisions, grâce à l'encadrement fixe valable pour toute subdivision Δ :

$$-\infty < \underbrace{(b-a) \inf_{[a,b]} f}_{=:\, m} \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \underbrace{(b-a) \sup_{[a,b]} f}_{=:\, M} < \infty,$$

et grâce au Théorème de la borne supérieure/inférieure les deux nombres réels :

$$I_*(f) := \sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \qquad \text{et} \qquad I^*(f) := \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f)$$

existent et ils satisfont :

$$\Sigma_\Delta(f) \overset{\text{croissant}}{\longrightarrow} I_*(f) \leqslant I^*(f) \overset{\text{décroissant}}{\longleftarrow} \Sigma^\Delta(f).$$

Autrement dit, les aires-sommes de gratte-ciel approchées en-dessous et au-dessus convergent toutes deux vers deux limites, éventuellement différentes, d'ailleurs.

Mais demander que f soit Riemann-intégrable au sens de la Définition 2.3, c'est justement demander (exercice mental) que :

$$I_*(f) = I^*(f).$$

Définition 2.7. L'intégrale au sens de Riemann d'une fonction *bornée* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est alors cette valeur commune :

$$\int_a^b f(x)\,dx := I_*(f) = I^*(f).$$

Nous laissons au lecteur en exercice de compréhension le soin de se convaincre de la véracité de l'énoncé synthétique suivant.

Lemme 2.8. *Une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable d'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de l'intervalle $[a,b]$ telle que :*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,}$$

ou, de manière équivalente, telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon. \qquad \square$$

Une définition alternative équivalente de la Riemann-intégrabilité d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pourrait être de demander sur toutes les subdivisions Δ de $[a,b]$ que l'on ait :

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) = \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f),$$

mais techniquement parlant, une telle définition s'avèrerait être moins économique que la Définition 2.3 lorsqu'il s'agit d'établir que certaines classes naturelles de fonctions sont automatiquement Riemann-intégrables, donc nous ne l'utiliserons pas.

En fait, c'est la Définition 2.3 que nous avons donné plus haut qui est la plus pratique, mais qu'exprime-t-elle au juste ? Elle dit plus précisément qu'une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est *Riemann-intégrable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ de l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

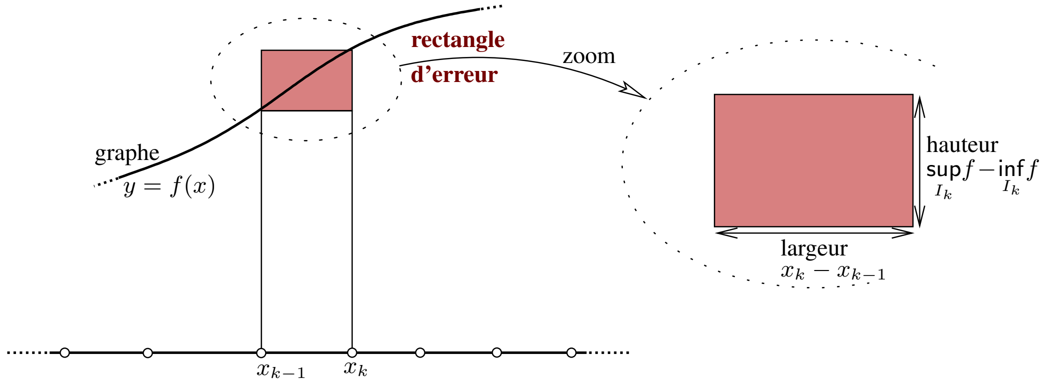
telle que :

$$\big(0 \leqslant\big) \quad \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon,$$

mais justement, cette différence entre la somme de Darboux supérieure $\Sigma^\Delta(f)$ et la somme de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f)$ se calcule comme :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\big|I_k\big| \bigg(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\bigg)}_{k\text{-ème terme d'erreur}},$$

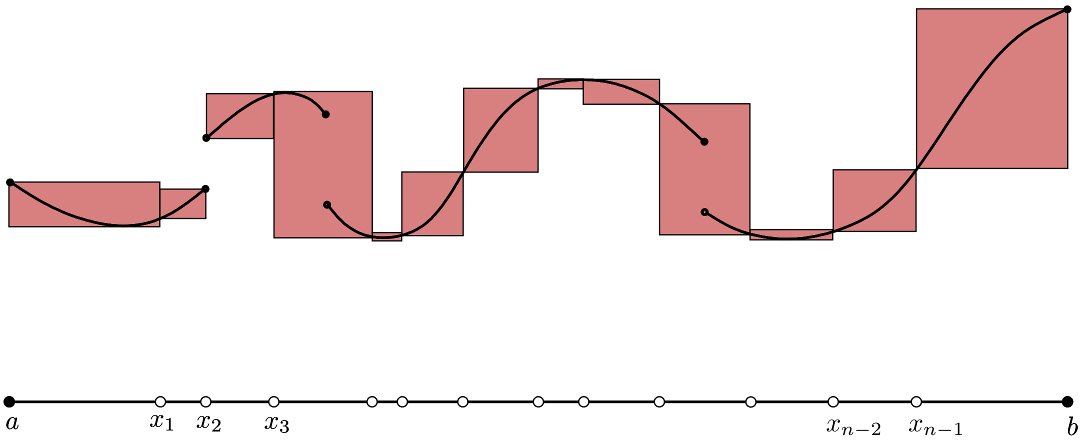
et géométriquement, le k-ème terme d'erreur représente l'aire d'un rectangle — plutôt assez écrasé en général — qui est la différence entre le k-ème gratte-ciel supérieur et le k-ème gratte-ciel inférieur.



On suppose sur la figure que $f \geqslant 0$, ce à quoi on peut toujours se ramener après translation.

Signification géométrique fondamentale de la Riemann-intégrabilité. *Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est Riemann-intégrable lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut approximer son hypographe $\{(x,y)\colon\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ en-dessous et au-dessus par des rectangles verticaux serrés les uns contre les autres, assez effilés et assez nombreux pour que :*

$$\mathsf{somme des aires de tous les rectangles d'erreur} \leqslant \varepsilon.$$



3. Continuité uniforme des fonctions continues définies sur un intervalle compact

Soient à nouveau deux nombres réels :

$$-\infty < a < b < \infty,$$

et considérons l'intervalle réel fermé borné, donc compact :

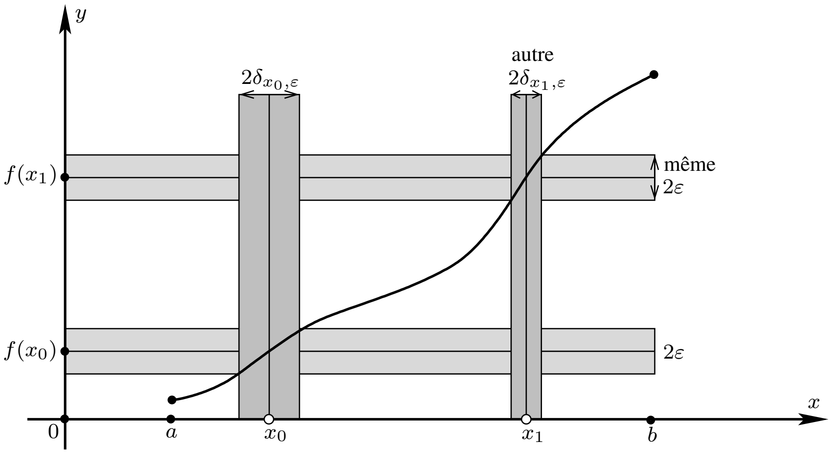
$$[a,b].$$

Définition 3.1. Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue en un point* $x_0 \in [a,b]$ si :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta_{x_0,\varepsilon} > 0 \quad \Big(\forall\,x \quad |x - x_0| \leqslant \delta_{x_0,\varepsilon} \implies \big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Ici, le $\delta_{x_0,\varepsilon}$ dépend en général inévitablement :

- du $\varepsilon > 0$ *arbitrairement petit* qu'on s'est donné à l'avance ;
- du point x_0 en lequel on teste si f est continue.



En un autre point $x_1 \in [a, b]$ en lequel f serait aussi continue, si l'on prenait le même $\varepsilon > 0$ très petit, il se pourrait en effet très bien qu'un $\delta_{x_1,\varepsilon}$ convenable en x_1 soit beaucoup plus petit que le premier $\delta_{x_0,\varepsilon}$ en x_0.

Définition 3.2. Une fonction $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue* lorsqu'elle est continue en *tout* point $x_0 \in [a, b]$.

Alors le fait qu'un $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ ne dépende pas du point x_0 en lequel on se situe, mais seulement de $\varepsilon > 0$, est exprimé par le concept mathématique important et classique de *continuité uniforme*.

Définition 3.3. Une fonction $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dite *uniformément continue* lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \Big(\forall\, x' \in E \;\; \forall\, x'' \in E \quad |x' - x''| \leqslant \delta_\varepsilon \implies \big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Théorème 3.4. [dit de Heine] *Toute fonction $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle fermé borné (donc compact) qui est continue en* tout *point $x \in [a, b]$ est en fait uniformément continue sur $[a, b]$.*

Le bonus, donc, c'est que le δ_ε ne dépend pas du point x, et c'est *vraiment* le fait que $[a, b]$ est *compact* qui va garantir une telle uniformité avantageuse.

Attention ! Lorsque f n'est définie et continue que sur un intervalle *ouvert* $]a, b[$, elle n'y est pas forcément uniformément continue (Exercice 1).

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par hypothèse, en tout point $x \in [a, b]$, il existe $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ tel que :

$$\forall\, x' \quad |x' - x| \leqslant \delta_{x,\varepsilon} \implies \big|f(x') - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Bien entendu, ces $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ doivent être au moins assez petits pour que les intervalles :

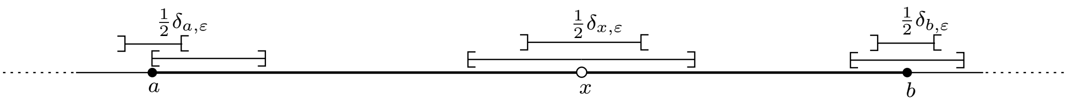
$$\big[x - \delta_{x,\varepsilon},\; x + \delta_{x,\varepsilon}\big] \;\subset\; \big[a,\, b\big]$$

soient contenus dans le domaine de définition de f. Mais à ce sujet, deux points spéciaux méritent attention, à savoir les extrémités :

$$x = a \qquad \text{et} \qquad x = b,$$

puisqu'alors il faut se restreindre à considérer les intervalles :

$$\big[a,\, a + \delta_{a,\varepsilon}\big] \qquad \text{et} \qquad \big[b - \delta_{b,\varepsilon},\, b\big].$$



Considérons alors plutôt les intervalles *ouverts* rétrécis d'un facteur $\frac{1}{2}$:

$$I_x := \big]x - \tfrac{1}{2}\delta_{x,\varepsilon},\ x + \tfrac{1}{2}\delta_{x,\varepsilon}\big[,$$

la raison pour laquelle on choisit $\frac{1}{2}$ devant être comprise plus tard, et aux extrémités a et b, considérons aussi de même les deux intervalles ouverts complets :

$$\big]a - \tfrac{1}{2}\delta_{a,\varepsilon},\ a + \tfrac{1}{2}\delta_{a,\varepsilon}\big[, \qquad \text{et} \qquad \big]b - \tfrac{1}{2}\delta_{b,\varepsilon},\ b + \tfrac{1}{2}\delta_{b,\varepsilon}\big[,$$

lesquels débordent donc légèrement de $[a, b]$.

Puisque l'on a trivialement :

$$\bigcup_{x \in [a,b]} \{x\} = [a, b],$$

et puisque chaque intervalle ouvert $I_x \ni x$ contient x, on voit que :

$$\bigcup_{x \in [a,b]} I_x \supset [a, b].$$

Nous pouvons donc appliquer un résultat censé être bien connu en L3 MFA (si tel n'est pas le cas, résoudre l'Exercice 2, ou lire la suite de ce chapitre).

Théorème 3.5. [dit de Heine-Borel] *De tout recouvrement d'un intervalle fermé borné (donc compact) :*

$$[a, b] \subset \bigcup_{j \in J} I_j,$$

par une famille quelconque *d'intervalles* ouverts *non vides :*

$$I_j \subset \mathbb{R},$$

indexée par un ensemble J de cardinal éventuellement arbitrairement grand, on peut extraire *un sous-recouvrement* fini*, à savoir il existe un entier $n \geqslant 0$ et $(n+1)$ indices :*

$$j_0, j_1, j_2, \dots, j_n \in J$$

tels que, en fait :

$$[a, b] \subset \underbrace{I_{j_0} \cup I_{j_1} \cup I_{j_2} \cup \cdots \cup I_{j_n}}_{\text{un nombre fini d'intervalles ouverts suffit en fait pour recouvrir}}. \qquad \square$$

Une application de ce résultat fondamental donne un nombre $(n+1) \geqslant 2$ de points distincts :

$$x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_{n-1},\, x_n \,\in\, [a,b]$$

ordonnés de manière croissante avec nécessairement (exercice : pourquoi ?) :

$$x_0 = a \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad x_n = b,$$

tels que la réunion de nos intervalles ouverts réduits à moitié :

$$\bigcup_{0 \leqslant k \leqslant n} \big]x_k - \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon},\; x_k + \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon}\big[\;\supset\; [a,b]$$

recouvre tout l'intervalle $[a,b]$ de définition de f.

Or souvenons-nous qu'à chacun des points $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ de $[a,b]$ sont associées des quantités :

$$\delta_{x_0,\varepsilon} > 0,\; \delta_{x_1,\varepsilon} > 0,\; \ldots\ldots,\; \delta_{x_{n-1}} > 0,\; \delta_{x_n} > 0,$$

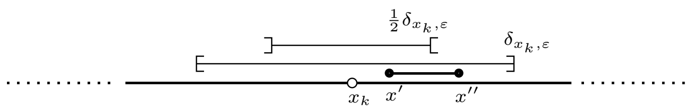
et définissons alors la plus petite d'entre elles :

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon &:= \min\big(\delta_{x_0,\varepsilon},\, \delta_{x_1,\varepsilon},\, \ldots,\, \delta_{x_{n-1},\varepsilon},\, \delta_{x_n,\varepsilon}\big)\\ &> 0.\end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration que f est uniformément continue, il suffit de prouver une :

Assertion 3.6. *Avec ce $\delta_\varepsilon > 0$, pour tous $x', x'' \in [a,b]$, on a :*

$$|x' - x''| \leqslant \tfrac{1}{2}\,\delta_\varepsilon \;\Longrightarrow\; \big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant 2\,\varepsilon.$$



En effet premièrement, puisque nos intervalles ouverts recouvrent $[a,b]$, il existe un point de référence x_k tel que :

$$x' \in \big]x_k - \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon},\; x_k + \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon}\big[,$$

et donc par définition de $\delta_{x_k,\varepsilon}$:

$$\big|f(x') - f(x_k)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Deuxièmement, par une simple inégalité triangulaire, on a aussi :

$$\begin{aligned}|x'' - x_k| &\leqslant |x'' - x'| + |x' - x_k|\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\,\delta_\varepsilon + \tfrac{1}{2}\,\delta_{x_k,\varepsilon}\\ &\leqslant \delta_{x_k,\varepsilon},\end{aligned}$$

ce qui nous fait comprendre pourquoi nous avions rétréci les intervalles d'un facteur $\frac{1}{2}$ puisque nous voyons ainsi que x'' appartient aussi à l'intervalle qui nous permet de déduire que :

$$\big|f(x'') - f(x_k)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Enfin, une dernière inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\big|f(x') - f(x'')\big| &\leqslant \big|f(x') - f(x_k)\big| + \big|f(x_k) - f(x'')\big|\\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon,\end{aligned}$$

nous fournit la conclusion terminale. □

En Topologie Générale, on démontre d'une manière très analogue le :

Théorème 3.7. *Une application continue $F\colon X \longrightarrow Y$ d'un espace topologique métrique (X, d) munie d'une distance d à valeurs dans un autre espace topologique (Y, e) munie d'une distance e est nécessairement uniformément continue lorsque X est* compact. □

4. Classes élémentaires de fonctions Riemann-intégrables

Définition 4.1. Une fonction bornée $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ à valeurs complexes, décomposée en parties réelle et en partie imaginaire comme :

$$f(x) = u(x) + \sqrt{-1}\, v(x),$$

est dite *intégrable au sens de Riemann* si u et v le sont, et on définit :

$$\int_a^b f(x)\, dx := \int_a^b u(x)\, dx + \sqrt{-1} \int_a^b v(x)\, dx.$$

Théorème 4.2. *Toute fonction continue :*

$$f \in \mathscr{C}^0\big([a, b], \mathbb{C}\big)$$

est Riemann-intégrable.

Démonstration. Rappelons que toute fonction continue $F\colon X \to \mathbb{C}$ sur un espace topologique X *compact* est uniformément continue.

Ici, l'intervalle fermé borné $[a, b] \Subset \mathbb{R}$ est compact, donc f est uniformément continue, ce qui s'exprime en caractères symboliques comme :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \quad \Big(\forall\, x' \; \forall\, x'' \in [a, b], \quad \big|x' - x''\big| \leqslant \delta(\varepsilon) \implies \big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Pour montrer que f est Riemann-intégrable, en partant de $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il s'agit de trouver une subdivision Δ de l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$\big(0 \leqslant \big) \quad \Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon.$$

Or nous prétendons que si l'entier $n \gg 1$ est choisi assez grand pour que :

$$\frac{b - a}{n} \leqslant \delta(\varepsilon),$$

alors la subdivision la plus simple à n intervalles, à savoir celle qui est équidistribuée à écarts horizontaux constants tous de même longueur $\frac{1}{n}$:

$$\Delta = \bigg\{a, \; \underbrace{a + \frac{b-a}{n}}_{=:\, x_1}, \; \underbrace{a + 2\, \frac{b-a}{n}}_{=:\, x_2}, \; \dots\dots, \; \underbrace{a + (n-1)\, \frac{b-a}{n}}_{=:\, x_{n-1}}, \; b\bigg\},$$

va facilement convenir.

En effet, pour une telle subdivision, les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f sont :

$$\Sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \inf \left\{ f(x) \colon\, a + (k-1)\,\frac{b-a}{n} \leqslant x \leqslant a + k\,\frac{b-a}{n} \right\},$$

$$\Sigma^\Delta(f) = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \sup \left\{ f(x) \colon\, a + (k-1)\,\frac{b-a}{n} \leqslant x \leqslant a + k\,\frac{b-a}{n} \right\},$$

et donc en abrégeant comme d'habitude $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, leur soustraction vaut :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \right). \end{aligned}$$

Mais comme $f\big|_{I_k}$ est *continue* sur l'intervalle *compact* I_k, elle y atteint d'après un théorème connu sa borne inférieure et sa borne supérieure :

$$\begin{aligned} &\exists\, x_k^- \quad \text{tel que} \quad f(x_k^-) = \inf_{I_k} f, \\ &\exists\, x_k^+ \quad \text{tel que} \quad f(x_k^+) = \sup_{I_k} f. \end{aligned}$$

De plus, comme $x_k^- \in I_k$ et $x_k^+ \in I_k$ avec par choix de $n \gg 1$:

$$\big|I_k\big| = \frac{b-a}{n} \leqslant \delta(\varepsilon),$$

on voit instantanément que :

$$\big|x_k^- - x_k^+\big| \leqslant \delta(\varepsilon),$$

et donc au final :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} \Big(\underbrace{f(x_k^+) - f(x_k^-)}_{\leqslant \varepsilon} \Big) \\ &\leqslant \varepsilon\,(b-a) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \\ &\leqslant \varepsilon\,(b-a), \end{aligned}$$

ce qui conclut, quitte à remplacer ε à l'avance par $\varepsilon/(b-a)$. □

Définition 4.3. Une fonction $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *croissante* lorsque :

$$\forall\, x' \; \forall\, x'' \in [a,b] \quad x' \leqslant x'' \implies f(x') \leqslant f(x'').$$

Elle est dite *décroissante* lorsque :

$$\forall\, x' \; \forall\, x'' \in [a,b] \quad x' \leqslant x'' \implies f(x') \geqslant f(x'').$$

Définition 4.4. Une fonction $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *monotone* lorsqu'elle est ou bien croissante, ou bien décroissante sur *tout* l'intervalle $[a,b]$.

Il faut bien faire attention que la notion de monotonie peut être *localisée :* une fonction peut fort bien ne pas être monotone sur l'intervalle $[a, b]$ tout entier, mais être monotone sur des sous-intervalles assez petits $J \subset [a, b]$, penser par exemple à $\theta \longmapsto \sin\theta$ sur $[0, 2\pi]$, fonction qui est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, puis décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, et enfin croissante sur $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

Notons aussi que toute fonction monotone $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, par exemple croissante, est nécessairement bornée, puisque :

$$a \leqslant x \leqslant b \implies \underbrace{f(a)}_{>-\infty} \leqslant f(x) \leqslant \underbrace{f(b)}_{<\infty}.$$

Théorème 4.5. *Toute fonction monotone (bornée) f sur un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.*

Démonstration. Pour fixer les idées, nous supposerons f croissante, car le cas où f est décroissante se traiterait de manière entièrement similaire. D'ailleurs, c'est un exercice facile de vérifier qu'une fonction f est Riemann-intégrable si et seulement si son opposée $-f$ l'est, et donc, si on partait d'une fonction décroissante f, on se ramènerait de toute façon à une fonction croissante en travaillant avec $-f$.

Prenons une subdivision quelconque de l'intervalle $[a, b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

et attendons de voir naturellement quelle condition simple Δ doit satisfaire pour que $\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon$.

Posons comme à l'accoutumée :

$$I_k := \big[x_{k-1}, x_k\big] \qquad\qquad (k = 1 \cdots n).$$

Pour calculer les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f associées à Δ, comme f est supposée croissante, *on sait* ce que valent les bornes inférieures et supérieures de f sur les intervalles I_k :

$$f(x_{k-1}) = \inf_{I_k} f \qquad \text{et} \qquad f(x_k) = \sup_{I_k} f,$$

tout simplement parce que :

$$x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k \implies f(x_{k-1}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_k).$$

Alors la différence entre les deux sommes de Darboux en question se majore aisément sans valeur absolue puisque tous les termes sont positifs :

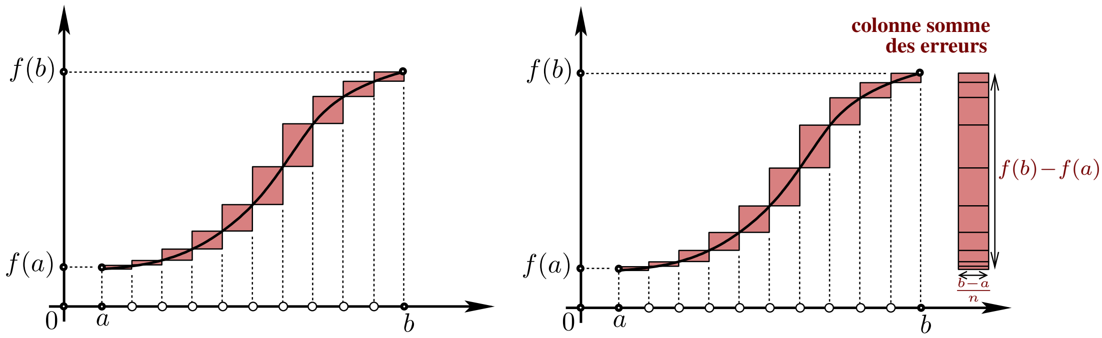
$$\begin{aligned}
0 \leqslant \Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) &= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \Big(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(\underbrace{x_k - x_{k-1}}_{\geqslant 0}\big) \big(\underbrace{f(x_k) - f(x_{k-1})}_{\text{toujours} \geqslant 0}\big) \\
&\leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \\
\text{[Somme téléscopique !]} \qquad &= \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \Big[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots \\
&\qquad \cdots + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(b) - f(x_{n-1})\Big] \\
&= \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \big[f(b) - f(a)\big].
\end{aligned}$$

En conclusion, pourvu seulement que la subdivision Δ soit choisie assez resserrée pour que :

$$x_k - x_{k-1} \leqslant \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \qquad (k = 1 \cdots n),$$

on obtiendra bien $\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon$. □

Graphiquement, la Riemann-intégrabilité des fonctions monotones s'illustre de manière spectaculairement éclairante.



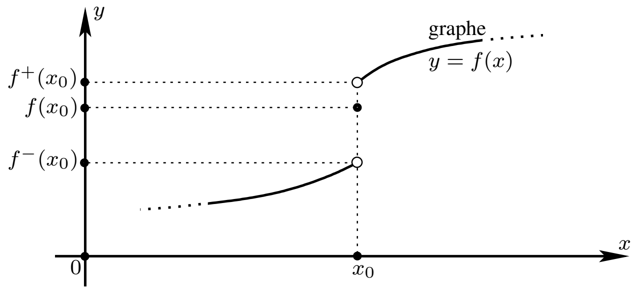
Pour simplifier, la figure est réalisée dans le cas d'une fonction croissante *continue*, avec une subdivision à pas constant $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Cette figure montre que la somme totale des erreurs correspond à une colonne dont la hauteur reste égale à $f(b) - f(a)$, donc bornée, tandis que la largeur de la base, égale à $\frac{b-a}{n}$, tend vers zéro quand $n \to \infty$. L'aire de ce rectangle-colonne vertical somme des erreurs :

$$\frac{b-a}{n} \times \big(f(b) - f(a)\big) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

tend donc bien vers zéro lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Toutefois, il importe de noter que le théorème que nous venons de démontrer est valable pour toute fonction monotone sans hypothèse de continuité.

Il existe d'ailleurs des fonctions monotones qui ont un nombre fini, voire infini dénombrable, de points de discontinuité. Mais nous verrons que les fonctions monotones sont '*presque partout*' différentiables, où le sens qu'il convient de donner à l'expression '*presque partout*' dépendra d'une théorie supérieure, celle de Lebesgue, notre objectif principal dans ce cours.



En tout cas pour l'instant, rappelons que toute fonction monotone $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet, en tout point $x_0 \in [a,b]$, une *limite à gauche* et une *limite à droite*, à savoir plus précisément :

$$\forall\, x_0 \in [a,b] \quad \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) =: f^-(x_0),$$
$$\forall\, x_0 \in [a,b] \quad \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) =: f^+(x_0),$$

les deux notations $f^-(x_0)$ et $f^+(x_0)$ pour ces deux limites parlant tout à fait à l'intuition ; en effet, l'existence de ces deux limites découle simplement par monotonie de f d'une application du Théorème de la borne inférieure/supérieure :

$$f^-(x_0) = \sup \underbrace{\big\{f(x) \in \mathbb{R}\colon\ x < x_0\big\}}_{\text{ensemble borné} \subset [f(a), f(x_0)]},$$
$$f^+(x_0) = \inf \underbrace{\big\{f(x) \in \mathbb{R}\colon\ x > x_0\big\}}_{\text{ensemble borné} \subset [f(x_0), f(b)]}.$$

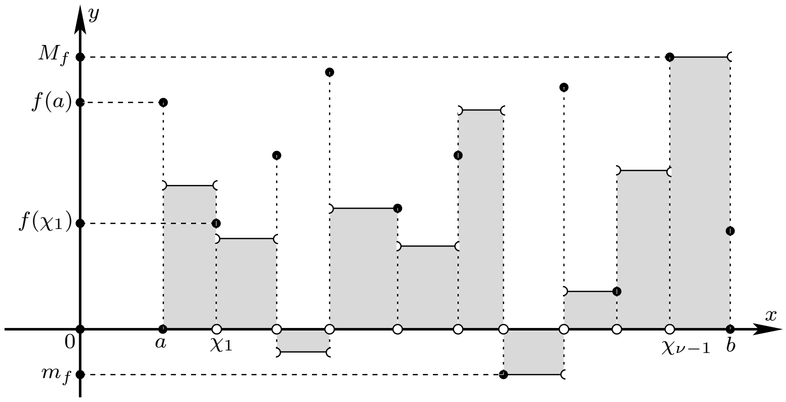
Définition 4.6. Une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée *fonction en escalier* sur $[a,b]$ s'il existe une suite croissante finie de 'points-seuils' :

$$a = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \cdots < \chi_{\nu-2} < \chi_{\nu-1} < \chi_\nu = b,$$

et s'il existe des constantes $c_1, c_2, \dots, c_{\nu-1}, c_\nu \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{array}{ll}
f(x) = c_1 & \forall\, \chi_0 < x < \chi_1, \\
f(x) = c_2 & \forall\, \chi_1 < x < \chi_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f(x) = c_{\nu-1} & \forall\, \chi_{\nu-2} < x < \chi_{\nu-1}, \\
f(x) = c_\nu & \forall\, \chi_{\nu-1} < x < \chi_\nu,
\end{array}$$

aucune condition particulière n'étant demandée sur les valeurs $f(a)$, $f(\chi_1)$, ..., $f(\chi_{\nu-1})$, $f(b)$, qui apparaissent en noir sur la figure.



Autrement dit, sur chaque intervalle ouvert $]\chi_{\lambda-1},\ \chi_\lambda[$, la fonction est constante :

$$f\big|_{]\chi_{\lambda-1},\chi_\lambda[} \equiv c_\lambda \qquad\qquad (1 \leqslant \lambda \leqslant \nu).$$

Même si les valeurs de $f(a)$, $f(\chi_1)$, ..., $f(\chi_{\nu-1})$, $f(b)$ sont éventuellement libres d'être totalement déconnectées des constantes $c_1, c_2, \dots, c_{\nu-1}, c_\nu$, on est certain puisque la fonction est bornée que les deux quantités :

$$m_f := \inf_{x\in[a,b]} f(x) \,>\, -\infty,$$
$$M_f := \sup_{x\in[a,b]} f(x) \,<\, \infty,$$

sont *finies*.

Théorème 4.7. *Toute fonction en escalier $f^{\mathsf{esc}}\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, et plus précisément, dans les notations de la Définition générale 4.6, la valeur de son intégrale est la somme des aires (orientées) des rectangles :*

$$\int_a^b f^{\mathsf{esc}}(x)\,dx = \big(\chi_1 - a\big)\,c_1 + \big(\chi_2-\chi_1\big)\,c_2 + \cdots + \big(\chi_{\nu-1}-\chi_{\nu-2}\big)\,c_{\nu-1} + \big(b-\chi_{\nu-1}\big)\,c_\nu.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que :

$$m_{f^{\mathsf{esc}}} \,<\, M_{f^{\mathsf{esc}}},$$

car si au contraire on avait $m_{f^{\mathsf{esc}}} = M_{f^{\mathsf{esc}}}$, la fonction f^{esc} serait *constante*, auquel cas le théorème serait trivial.

Intuitivement, on pourrait être tenté de prétendre que la démonstration est immédiate, puisqu'il semble suffire de choisir la subdivision :

$$\square := \big\{a = \chi_0 < \chi_1 < \cdots < \chi_{\nu-1} < \chi_\nu = b\big\},$$

mais les 'inf' et les 'sup' qui apparaissent dans les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\square$ et $\Sigma^\square$ sont par définition à prendre sur les intervalles *fermés* $[\chi_{\lambda-1}, \chi_\lambda]$, et justement, comme on n'a aucune connaissance des valeurs aux extrémités $f(\chi_{\lambda-1})$ et $f(\chi_\lambda)$, il y a comme qui dirait '*un petit hic*'.

L'Exercice 5 montre qu'on peut modifier la définition des sommes de Darboux pour que ce problème technique disparaisse. Mais il vaut mieux mettre ici au point une démonstration indépendante, pour faire apparaître des idées géométriques qui resserviront ultérieurement.

Intuitivement, lorsqu'on interprète l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ comme étant l'aire de l'hypographe $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ : 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ d'une fonction en escalier $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}_+$ à valeurs positives, les $(\nu+1)$ segments verticaux entre les immeubles :

$$\{0\leqslant y\leqslant f(a)\}\bigcup\{0\leqslant y\leqslant f(\chi_1)\}\bigcup\cdots\bigcup\{0\leqslant y\leqslant f(\chi_{\nu-1})\}\bigcup\{0\leqslant y\leqslant f(b),$$

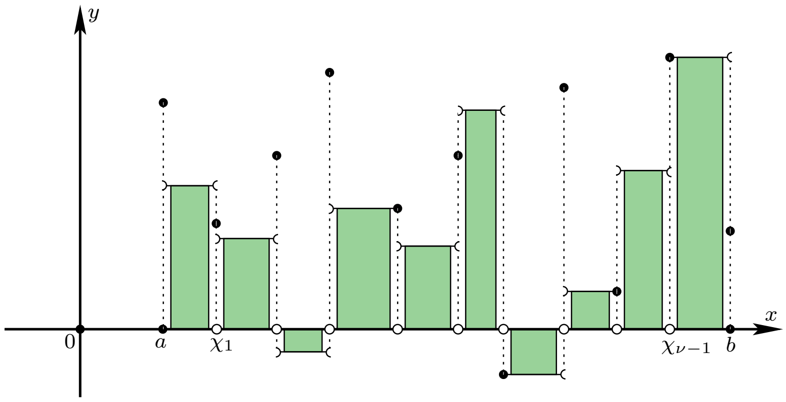
s'ils se mettent à dépasser commes des antennes de télécommunication attachées aux parois verticales, comptent de toute façon pour rien en termes de surface : ils sont *de mesure nulle*.

Pour rendre cette idée rigoureuse, adjoignons des points à la subdivision $\square$ en introduisant, pour un $\delta>0$ très petit, en tout cas plus petit que :

$$\delta<\tfrac{1}{2}\min\big\{\chi_1-a,\ \chi_2-\chi_1,\ \ldots\ldots,\ \chi_{\nu-1}-\chi_{\nu-2},\ b-\chi_{\nu-1}\big\},$$

à chaque fois deux points serrés de part et d'autre de chaque point de $\square$:

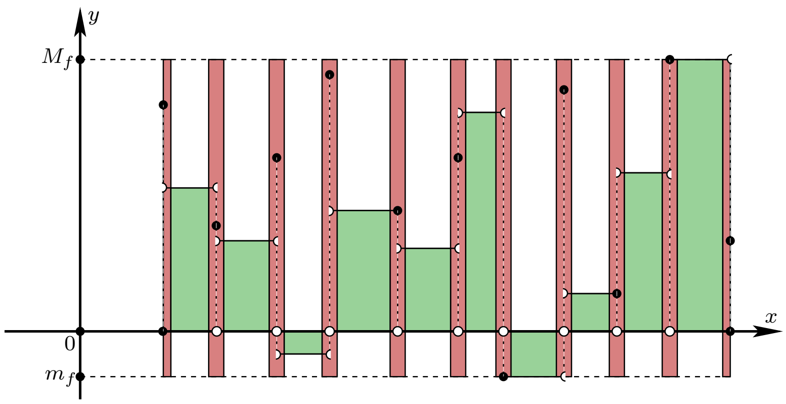
$$\Delta:=\Big\{a,\ a+\delta,\ \chi_1-\delta,\ \chi_1,\ \chi_1+\delta,\ \ldots\ldots,\ \chi_{\nu-1}-\delta,\ \chi_{\nu-1},\ \chi_{\nu-1}+\delta,\ b-\delta,\ b\Big\}.$$



À ce moment-là, on est certain que sur tous les intervalles *fermés :*

$$\big[a+\delta,\ \chi_1-\delta\big],\quad \big[\chi_1+\delta,\ \chi_2-\delta\big],\quad \ldots\ldots\ldots,\quad \big[\chi_{\nu-2}+\delta,\ \chi_{\nu-1}-\delta\big],\quad \big[\chi_{\nu-1}+\delta,\ b-\delta\big],$$

la fonction est bel et bien constante, y compris aux extrémités.



Pour cette subdivision Δ, nous laissons au lecteur le soin de se convaincre par la réflexion que l'erreur entre sommes de Darboux :

$$\Sigma^{\Delta}(f)-\Sigma_{\Delta}(f)$$

est majorée par la somme des aires de $(\nu+1)$ tours verticales ultra-fines entre les immeubles amaigris, toutes ces tours étant d'une hauteur égale à :

$$M_f - m_f \;>\; 0,$$

et toutes — excepté les deux demi-tours en a et en b — ayant une largeur à la base égale à :

$$2\,\delta,$$

donc au total la somme des erreurs possède le majorant :

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f) - \Sigma^\Delta(f) \;&\leqslant\; \big(M_f - m_f\big)\,\big(\delta + \underbrace{2\delta + \cdots + 2\delta}_{\nu-1\text{ fois}} + \delta\big) \\ &= \big(M_f - m_f\big)\,\nu\,2\,\delta\end{aligned},$$

une quantité qui peut être rendue arbitrairement petite, *i.e.* plus petite qu'un $\varepsilon > 0$ quelconque fixé à l'avance, pourvu que :

$$\delta \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{(M_f - m_f)\,2\,\nu},$$

ce qui conclut la démonstration et fournit la valeur annoncée pour $\int_a^b f(x)\,dx$ (exercice de compréhension). □

Au niveau de progression que nous venons d'atteindre, il importe de réinterpréter la Riemann-intégrabilité d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ à l'aide du concept de fonction en escalier.

En effet, la somme de Darboux inférieure de f associée à une subdivision Δ de l'intervalle $[a,b]$:

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) \\ &= \int_a^b f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x)\,dx,\end{aligned}$$

s'avère, grâce au théorème que nous venons de démontrer, être *égale* à l'intégrale d'une certaine *fonction en escalier inférieure* f_Δ^{esc} naturellement associée à f, laquelle est définie, en introduisant pour abréger les $(n+1)$ constantes :

$$c_\Delta^1(f) := \inf_{a\leqslant x\leqslant x_1} f(x), \qquad c_\Delta^2(f) := \inf_{x_1\leqslant x\leqslant x_2} f(x), \qquad \ldots\ldots, \qquad c_\Delta^n(f) := \inf_{x_{n-1}\leqslant x\leqslant x_n} f(x),$$

dans les n intervalles *ouverts* de la subdivision par :

$$\begin{array}{ll} f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) := c_\Delta^1(f) & \forall\, a < x < x_1, \\ f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) := c_\Delta^2(f) & \forall\, x_1 < x < x_2, \\ \multicolumn{2}{l}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) := c_\Delta^n(f) & \forall\, x_{n-1} < x < b, \end{array},$$

tandis que les valeurs de cette fonction en escalier inférieure f_Δ^{esc} aux points de la subdivision — sans importance pour la valeur de son intégrale $\int f_\Delta^{\mathsf{esc}}$ — sont simplement assignés à être celles de la fonction originale :

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}}(a) := f(a), \qquad f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x_1) := f(x_1), \qquad \ldots\ldots, \qquad f_\Delta^{\mathsf{esc}}(b) := f(b).$$

De manière entièrement similaire, la somme de Darboux supérieure de f associée à la même subdivision Δ :

$$\begin{aligned}\Sigma^{\Delta}(f) &= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) \\ &= \int_a^b f_{\mathsf{esc}}^{\Delta}(x)\,dx,\end{aligned}$$

s'avère être égale à l'intégrale d'une certaine *fonction en escalier supérieure* $f_{\mathsf{esc}}^{\Delta}$ dont il n'est pas nécessaire d'expliciter la définition.

En tout cas, ces deux fonctions en escalier *encadrent* f :

$$f_{\Delta}^{\mathsf{esc}} \leqslant f \leqslant f_{\mathsf{esc}}^{\Delta},$$

et en appliquant l'intégration $\int_a^b (\cdot)$ qui respecte les inégalités entre les fonctions grâce au Théorème 5.1 ci-dessous, on réobtient :

$$\underbrace{\Sigma_{\Delta}(f)}_{=\int_a^b f_{\Delta}^{\mathsf{esc}}} \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \underbrace{\Sigma^{\Delta}(f)}_{=\int_a^b f_{\mathsf{esc}}^{\Delta}}.$$

En accord avec les intuitions géométriques qui transparaissaient volontairement dans tous les diagrammes qui précèdent, nous pouvons alors effectivement énoncer une :

Proposition 4.8. [Réinterprétation fondamentale de la Riemann-intégrabilité] *Une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe* deux *fonctions en escalier encadrant f :*

$$f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \leqslant f \leqslant f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}}$$

telles que :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \int_a^b f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} - \int_a^b f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Sur un plan strictement *logique*, l'équivalence entre les deux définitions n'est pas immédiate, mais l'Exercice 6 propose de s'en convaincre rigoureusement.

5. Propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann

Théorème 5.1. *Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions bornées Riemann-intégrables définies sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, alors :*

(i) [Additivité] *leur somme $f + g$ est elle aussi Riemann-intégrable avec :*

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

(ii) [Dilativité] *pour toute constante $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda\, f$ est Riemann-intégrale avec :*

$$\int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx;$$

(iii) [Croissance de l'intégrale] *si f et g sont à valeurs* réelles *et si :*

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in [a,b]),$$

alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx;$$

(iv) [Règle de Chasles] *pour tout* $c \in \,]a,b[$, *en restriction aux deux intervalles* $[a,c]$ *et* $[c,b]$, *la fonction* f *est Riemann-intégrable avec :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(v) [Dégénérescence] *Lorsque* $b = a$, *auquel cas l'intervale* $[a,a] = \{a\}$ *est réduit à un point :*

$$0 = \int_a^a f(x)\,dx.$$

Définition 5.2. [Convention de Chasles algébrique] En accord avec ces propriétés, lorsque les bornes d'intégration sont inversées, il convient de poser :

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx \overset{\mathsf{def}}{=} -\int_a^b f(x)\,dx.}$$

Démonstration. Contentons-nous d'établir rigoureusement l'additivité **(i)**, les propriétés **(ii)** et **(iii)** se vérifiant par le même type d'arguments, tandis que **(iv)** demande simplement de raffiner les subdivisions concernées en leur ajoutant seulement le point c. Quant à **(v)**, *stricto sensu*, la théorie n'a été développée jusqu'à présent que pour $-\infty < a < b < \infty$, mais il est clair que lorsque $b = a$, quelle que soit la subdivision Δ choisie, toutes les différences $(x_k - x_{x-1})$ dans les sommes de Darboux sont nulles, d'où $0 = \Sigma_\Delta(f) = \Sigma^\Delta(f)$.

Grâce à la reformulation synthétique du Lemme 2.8, si on se donne un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, la Riemann-intégrabilité de f et de g s'exprime en disant qu'il existe deux subdivisions :

$$\Delta_1 = \Delta_1(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 = \Delta_2(\varepsilon)$$

de l'intervalle $[a,b]$ telles que :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon &\leqslant \Sigma_{\Delta_1}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_1}(f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,\\
\int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon &\leqslant \Sigma_{\Delta_2}(g) \leqslant \Sigma^{\Delta_2}(g) \leqslant \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon,
\end{aligned}$$

simultanément. Bien entendu, on est instantanément tenté d'introduire leur *réunion :*

$$\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2,$$

car le Lemme 2.5 crucial de monotonie :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\Delta_1}(f) \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_1}(f),\\
\Sigma_{\Delta_2}(g) \leqslant \Sigma_\Delta(g) \leqslant \Sigma^\Delta(g) \leqslant \Sigma^{\Delta_2}(g),
\end{aligned}$$

assure qu'on aura aussi :

$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,$$
$$\int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(g) \leqslant \Sigma^\Delta(g) \leqslant \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon,$$

maintenant pour une seule et même subdivision Δ de $[a, b]$. Une addition directe de ces deux inégalités donne alors un résultat à conserver en mémoire :

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx-2\,\varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f)+\Sigma_\Delta(g) \leqslant \Sigma^\Delta(f)+\Sigma^\Delta(g) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx+2\,\varepsilon.$$

Lemme 5.3. *Pour tout sous-intervalle fermé :*

$$I \subset [a, b],$$

on a :

$$\begin{aligned} \inf_{x\in I} f(x) + \inf_{x\in I} g(x) \leqslant \inf_{x\in I} &\big((f+g)(x)\big) \\ &\sup_{x\in I}\big((f+g)(x)\big) \leqslant \sup_{x\in I} f(x) + \sup_{x\in I} g(x). \end{aligned}$$

Démonstration. Contentons-nous de prouver l'inégalité sur les inf, celle sur les sup étant similaire et équivalente (exercice).

Posons pour abréger :

$$\varphi := \inf_{x\in I} f(x), \qquad \psi := \inf_{x\in I} g(x), \qquad \chi := \inf_{x\in I}\big(f(x)+g(x)\big).$$

Par définition, on a donc en particulier :

$$\varphi \leqslant f(x), \qquad \psi \leqslant g(x), \qquad \chi \leqslant f(x)+g(x) \qquad {\scriptstyle(\forall\, x\in I)},$$

mais puisqu'il s'agit de l'*infimum* pour cette troisième et dernière inégalité, il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments $x_n \in I$ telle que :

$$\chi + \varepsilon_n = f(x_n) + g(x_n),$$

avec un léger décalage supérieur $\varepsilon_n \geqslant 0$ qui tend vers zéro $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$. Alors par jeu d'inégalités simples :

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &\leqslant f(x_n) + g(x_n) \\ &= \chi + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

et à la limite $\varphi + \psi \leqslant \chi$, ce qu'il fallait faire voir. □

Grâce à cette inégalité sur les inf, nous pouvons majorer l'addition des sommes de Darboux inférieures de f et de g :

$$\begin{aligned}
\Sigma_\Delta(f)+\Sigma_\Delta(g) &= \sum_{k=1}^{n}\big(x_k-x_{k-1}\big)\inf_{I_k} f + \sum_{k=1}^{n}\big(x_k-x_{k-1}\big)\inf_{I_k} g \\
&= \sum_{k=1}^{n}\big(x_k-x_{k-1}\big)\Big[\inf_{I_k} f+\inf_{I_k} g\Big] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n}\big(x_k-x_{k-1}\big)\inf_{I_k}\big(f+g\big) \\
&= \Sigma_\Delta(f+g),
\end{aligned}$$

et de manière entièrement similaire, le lecteur vérifiera que pour les sommes de Darboux supérieures, on a l'inégalité :

$$\Sigma^\Delta(f+g)\leqslant\Sigma^\Delta(f)+\Sigma^\Delta(g).$$

Une synthèse entre les deux inégalités obtenues s'exprime comme pour le mieux dans le meilleur des mondes :

$$\Sigma_\Delta(f)+\Sigma_\Delta(g)\leqslant\Sigma_\Delta(f+g)\underbrace{\leqslant}_{\text{toujours vrai}}\Sigma^\Delta(f+g)\leqslant\Sigma^\Delta(f)+\Sigma^\Delta(g).$$

Enfin, une comparaison visuelle avec le résultat conservé en mémoire ci-dessus fournit l'information finale :

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx-2\,\varepsilon}_{\text{gendarme à gauche}}\leqslant\Sigma_\Delta(f+g)\leqslant\Sigma^\Delta(f+g)\leqslant\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx+2\,\varepsilon}_{\text{gendarme à droite}},$$

grâce à laquelle, étant donné que :

$$\text{différence entre les deux gendarmes}=4\,\varepsilon,$$

on voit que :

$$\Sigma^\Delta(f+g)-\Sigma_\Delta(f+g)\leqslant 4\,\varepsilon,$$

ce qui conclut que $f+g$ est Riemann-intégrable et en bonus automatique aussi, que $\int(f+g)=\int f+\int g$. □

Corollaire 5.4. *L'application :*

$$f\longmapsto\int_a^b f(x)\,dx$$

est une application linéaire sur l'espace des fonctions bornées Riemann-intégrables sur $[a,b]$. □

Proposition 5.5. *Soit* $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction bornée définie sur un intervalle compact* $[a,b]\Subset\mathbb{R}$*, et soit un point quelconque :*

$$c\in\,]a,b[.$$

Si, pour tout $\delta>0$ *arbitrairement petit, les deux restrictions :*

$$f\big|_{[a,\,c-\delta]}\qquad\text{et}\qquad f\big|_{[c+\delta,\,b]}$$

sont Riemann-intégrables, alors f elle-même est Riemann-intégrable avec :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Notons :

$$\sup_{[a,b]} |f| =: M_{|f|} < \infty,$$

et pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, choisissons $\delta > 0$ assez petit pour que :

$$4\,\delta\, M_{|f|} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par hypothèse, il existe deux subdivisions Δ_1 de $[a, c-\delta]$ et Δ_2 de $[c+\delta, b]$ telles que les différences entre les sommes de Darboux associées sont arbitrairement petites :

$$\begin{aligned}
\big(0 \leqslant\big) \qquad \Sigma^{\Delta_1}\big(f\big|_{[a,c-\delta]}\big) - \Sigma_{\Delta_1}\big(f\big|_{[a,c-\delta]}\big) &\leqslant \frac{\varepsilon}{3},\\
\big(0 \leqslant\big) \qquad \Sigma^{\Delta_2}\big(f\big|_{[c+\delta,b]}\big) - \Sigma_{\Delta_2}\big(f\big|_{[c+\delta,b]}\big) &\leqslant \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Alors tout simplement pour la subdivision réunion :

$$\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2,$$

qui contient bien entendu $\{c-\delta\}$ et $\{c+\delta\}$ comme extrémité droite de Δ_1 et gauche de Δ_2 ce qui ajoute le seul segment $[c-\delta, c+\delta]$ de longueur $2\,\delta$, les sommes de Darboux deviennent :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{\Delta}(f) &= \Sigma_{\Delta_1}(f) + 2\,\delta \inf_{[c-\delta,c+\delta]} f + \Sigma_{\Delta_2}(f),\\
\Sigma^{\Delta}(f) &= \Sigma^{\Delta_1}(f) + 2\,\delta \sup_{[c-\delta,c+\delta]} f + \Sigma^{\Delta_2}(f),
\end{aligned}$$

et donc par soustraction :

$$\begin{aligned}
\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) &\leqslant \Sigma^{\Delta_1}(f) - \Sigma_{\Delta_1}(f) + 2\,\delta \Big(\sup_{[c-\delta,c+\delta]} f - \inf_{[c-\delta,c+\delta]} f\Big) + \Sigma^{\Delta_2}(f) - \Sigma_{\Delta_2}(f)\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + 2\,\delta\, 2\, M_{|f|} + \frac{\varepsilon}{3}\\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

quantité arbitrairement petite, ce qui conclut. □

Définition 5.6. Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *continue par morceaux* lorsqu'il existe une suite croissante de points :

$$a < \eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_{\nu-1} < \eta_\nu < b,$$

telle que f est continue en restriction à chacun des intervalles :

$$[a, \eta_1[, \qquad]\eta_1, \eta_2[, \qquad \ldots\ldots, \qquad]\eta_{\nu-1}, \eta_\nu[, \qquad]\eta_\nu, b].$$

On notera :

$$f \in \mathscr{C}^0_{\mathsf{pm}}([a,b]).$$

Corollaire 5.7. *Toute fonction bornée $f \in \mathscr{C}^0_{\mathsf{pm}}([a,b])$ est Riemann-intégrable avec :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{\eta_1} f(x)\,dx + \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{\eta_{\nu-1}}^{\eta_\nu} f(x)\,dx + \int_{\eta_\nu}^b f(x)\,dx. \qquad \square$$

Une autre question importante est de déterminer si le *produit* fg de deux fonctions Riemann-intégrables est encore Riemann-intégrable. Cette propriété positive sera un corollaire de l'énoncé général suivant.

Théorème 5.8. *Si une fonction bornée* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable et si une fonction* $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue, alors leur composée :*

$$\varphi\circ f\colon \quad [a,b] \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$$

est elle aussi Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration. Par hypothèse, la quantité :

$$M_{|f|} := \sup_{x\in[a,b]} \big|f(x)\big| < \infty$$

est finie. Pour effectuer la composition $\varphi\circ f$, il suffit en fait de connaître φ seulement sur l'intervalle *compact :*

$$\big[-M_{|f|},\, M_{|f|}\big],$$

intervalle sur lequel, d'ailleurs, φ est — gratuitement grâce au Théorème 3.4 de Heine — uniformément continue :

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,\delta_\varepsilon>0 \quad \Big(\forall\,|y'|\leqslant M_{|f|} \;\; \forall\,|y''|\leqslant M_{|f|} \quad \big|y'-y''\big|\leqslant\delta_\varepsilon \implies \big|\varphi(y')-\varphi(y'')\big|\leqslant\varepsilon\Big).$$

Soit donc un tel $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, et soit un $\delta_\varepsilon>0$ associé. Notons en passant qu'il est loisible de rapetisser $\delta_\varepsilon>0$ tout en conservant vraie cette implication $\Longrightarrow$ de continuité uniforme, et à la fin de la démonstration, nous aurons besoin d'avoir :

$$0<\delta_\varepsilon\leqslant\varepsilon,$$

ce que nous pouvons donc d'ores et déjà supposer.

Puisque f est Riemann-intégrable, en prenant le carré $(\delta_\varepsilon)^2$ de ce $\delta_\varepsilon>0$ comme quantité arbitrairement petite $\varepsilon^\sim>0$, il existe une subdivision :

$$\Delta = \Delta_{\varepsilon^\sim} = \Delta_{(\delta_\varepsilon)^2} = \big\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\big\}$$

de l'intervalle $[a,b]$ assez fine pour que l'erreur entre les sommes de Darboux associées :

$$\Sigma^\Delta(f)-\Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; (\delta_\varepsilon)^2,$$

soit majorée par $(\delta_\varepsilon)^2$. Autrement dit, on adapte à l'avance une finesse extrême — puisque $\delta_\varepsilon^2\ll\varepsilon$ — de la subdivision afin de compenser ce que va faire perdre la composition avec φ.

Comme à l'accoutumée, pour $k=1,\dots,n$, notons $I_k=[x_{k-1},x_k]$. Il s'agit maintenant de regarder et d'estimer la différence entre les sommes de Darboux de $\varphi\circ f$ associées à Δ :

$$\Sigma^\Delta(\varphi\circ f)-\Sigma_\Delta(\varphi\circ f) \;=\; \sum_{k=1}^n \big(x_k-x_{k-1}\big)\bigg(\sup_{x\in I_k}\varphi\circ f(x) - \inf_{x\in I_k}\varphi\circ f(x)\bigg).$$

À cet effet, décomposons l'ensemble des indices en *deux* classes *disjointes :*

$$\begin{aligned}\big\{1,2,\dots,n-1,n\big\} &= K\cup K',\\ \emptyset &= K\cap K',\end{aligned}$$

la première classe repérant tous les indices :

$$K := \Big\{ k \in \{1, \dots, n\} \colon \sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \leqslant \delta_\varepsilon \Big\},$$

pour lesquels on peut appliquer en composition la continuité uniforme de φ écrite ci-dessus, ce qui nous donne :

$$\sup_{x \in I_k} \varphi \circ f(x) - \inf_{x \in I_k} \varphi \circ f(x) \leqslant \varepsilon,$$

seulement donc lorsque $k \in K$.

Alors la première fraction concernée de la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure de $\varphi \circ f$:

$$\Sigma^\Delta(\varphi \circ f) - \Sigma_\Delta(\varphi \circ f) = \underbrace{\sum_{k \in K} \big(\text{même chose}\big)}_{\text{Erreur}(K)} + \underbrace{\sum_{k \in K'} \big(\text{même chose}\big)}_{\text{Erreur}(K')}$$

va être aisément majorée :

$$\begin{aligned} \text{Erreur}(K) &= \sum_{k \in K} \big(x_k - x_{k-1}\big) \bigg(\underbrace{\sup_{I_k} \varphi \circ f - \inf_{I_k} \varphi \circ f}_{\leqslant \varepsilon} \bigg) \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{k \in K} \big(x_k - x_{k-1}\big) \\ &\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \\ &= \varepsilon \, (b - a), \end{aligned}$$

par une quantité arbitrairement petite.

Ensuite et par ailleurs, lorsque $k \in K'$, à savoir par définition lorsque :

$$\delta_\varepsilon < \sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f,$$

en multipliant par $(x_k - x_{k-1})$ et en sommant seulement sur K', on déduit :

$$\begin{aligned} \delta_\varepsilon \sum_{k \in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) &< \sum_{k \in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \bigg(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \bigg) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(\text{même chose}\big) \\ \text{[Reconnaître]} \qquad &= \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \\ &\leqslant \big(\delta_\varepsilon\big)^2, \end{aligned}$$

d'où après une division par δ_ε qui explique pourquoi on avait choisi $(\delta_\varepsilon)^2$ à l'avance :

$$\sum_{k \in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \leqslant \delta_\varepsilon.$$

Grâce à cette inégalité, la *deuxième* fraction concernée de la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure de $\varphi \circ f$ va être majorée par :

$$\begin{aligned}\mathsf{Erreur}(K') &= \sum_{k \in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \left(\sup_{I_k} \varphi \circ f - \inf_{I_k} \varphi \circ f\right) \\ &\leqslant 2 \underbrace{\sup_{|y| \leqslant M_{|f|}} |\varphi|}_{=: C_\varphi < \infty} \cdot \sum_{k \in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \\ &\leqslant 2\, C_\varphi\, \delta_\varepsilon,\end{aligned}$$

car on a généralement :

$$\begin{aligned}\Big| \sup_{x \in I_k} \varphi \circ f(x) \Big| &\leqslant \sup_{|y| \leqslant M_{|f|}} |\varphi(y)| \;=:\; C_\varphi, \\ \Big| \inf_{x \in I_k} \varphi \circ f(x) \Big| &\leqslant \sup_{|y| \leqslant M_{|f|}} |\varphi(y)| \;=:\; C_\varphi,\end{aligned}$$

pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$ sans restriction.

Enfin, par simple addition des majorants des deux types d'erreurs :

$$\begin{aligned}\Sigma^\Delta(\varphi \circ f) - \Sigma_\Delta(\varphi \circ f) &= \mathsf{Erreur}(K) + \mathsf{Erreur}(K') \\ &\leqslant \varepsilon\,(b-a) + 2\, C_\varphi\, \delta_\varepsilon \\ &\leqslant \varepsilon\, \big[(b-a) + 2\, C_\varphi\big],\end{aligned}$$

quantité qui est manifestement arbitrairement petite puisque l'on a assuré à l'avance que $\delta_\varepsilon \leqslant \varepsilon$, ce qui conclut l'intégrabilité de $\varphi \circ f$. □

Plusieurs applications de ce Théorème 5.8 de composition tombent alors de l'arbre mathématique comme de délicieuses mirabelles bien mûres.

Corollaire 5.9. *Si* $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *sont deux fonctions bornées Riemann-intégrables, alors leur produit :*

$$f\, g$$

est lui aussi Riemann-intégrable.

Démonstration. En effet, on sait déjà que $f + g$ et $f - g$ sont Riemann-intégrables, et alors le Théorème 5.8 appliqué avec $\varphi(y) := y^2$ assure que $(f+g)^2$ et $(f-g)^2$ sont aussi Riemann-intégrables, d'où la conclusion par l'identité algébrique élémentaire :

$$f\, g = \frac{(f+g)^2 - (f-g)^2}{4},$$

dont l'essence intime remonte aux mathématiques de la Préhistoire, temps béni de la cueillette. □

Corollaire 5.10. [Très souvent utile] *Si une fonction bornée* $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable, alors la fonction valeur absolue :*

$$|f|$$

est elle aussi bornée Riemann-intégrable avec de plus :

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b \big| f(x) \big|\, dx.$$

Démonstration. En effet, le même Théorème 5.8 s'applique instantanément à $\varphi(y) := |y|$, donc $|f|$ est Riemann-intégrable.

Ensuite, les deux inégalités :

$$- |f| \leqslant f \leqslant |f|$$

restent vraies après intégration grâce à la propriété **(iii)** du Théorème 5.1 :

$$- \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int \big|f(x)\big|\,dx. \qquad \square$$

Corollaire 5.11. [Très souvent utile] *Soit une fonction bornée Riemann-intégrable :*

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Alors pour tout intervalle compact :

$$[c,d] \Subset [a,b],$$

on a la majoration :

$$\bigg|\int_c^d f(x)\,dx\bigg| \leqslant \max_{[c,d]} |f| \cdot \underbrace{(d-c)}_{\substack{\text{longueur de}\\ \text{l'intervalle}}}. \qquad \square$$

Dans la lignée de ces considérations élémentaires, il est parfois avisé de localiser la partie positive $\geqslant 0$ d'une fonction ainsi que sa partie négative $\leqslant 0$.

Définition 5.12. Si $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un espace topologique X, soient :

$$f^+(x) := +\max\big(0,\ f(x)\big), \qquad\qquad (x \in X)$$

$$f^-(x) := -\min\big(f(x), 0\big), \qquad\qquad (x \in X)$$

deux fonctions à valeurs $\geqslant 0$ satisfaisant (exercice) :

$$f = f^+ - f^-.$$

Intuitivement, la '*partie positive*' de f est dans f^+, tandis que sa '*partie négative*' est dans $-f^-$.

Manifestement aussi :

$$|f| = f^+ + f^-.$$

Corollaire 5.13. *Si une fonction bornée* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable, alors ses parties positive et négative :*

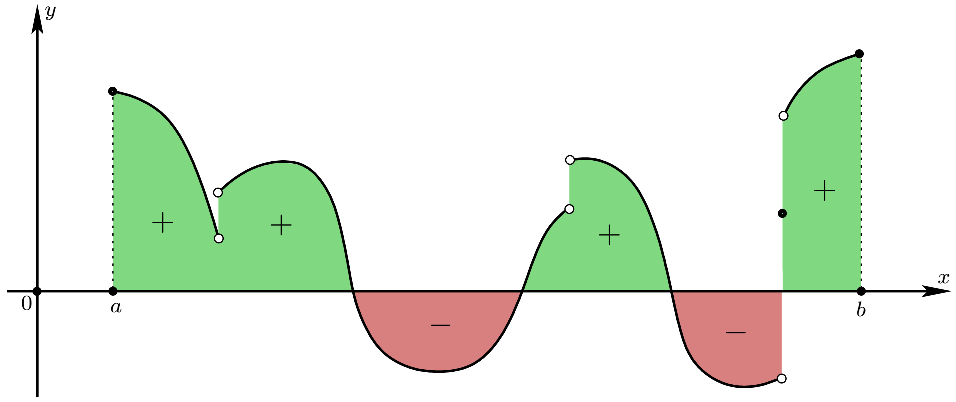
$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \qquad \text{et} \qquad -f^- = \frac{-|f| + f}{2}$$

sont elles aussi Riemann-intégrables, avec :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx,$$

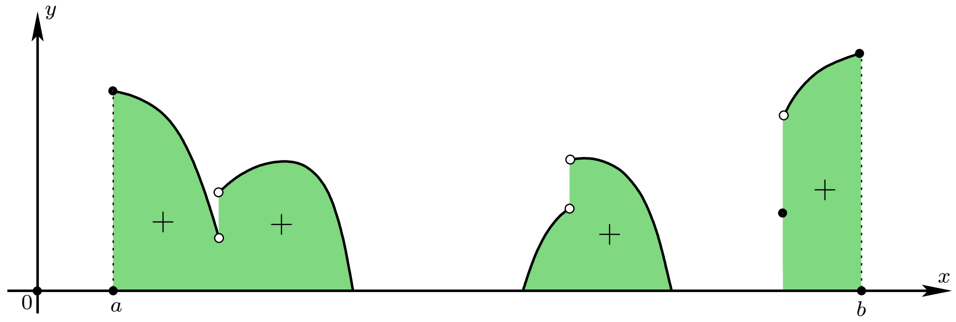
$$\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx. \qquad \square$$

Géométriquement, le graphe d'une fonction réelle qui prend des valeurs positives et négatives délimite une région bidimensionnelle :



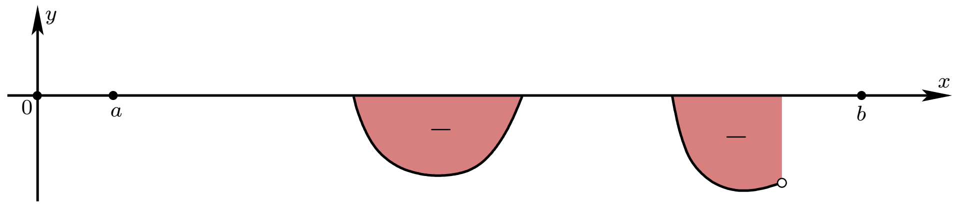
découpée par l'axe des x en une première région :

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ 0\leqslant y\leqslant f^+(x)\big\}$$



et une deuxième région :

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ -\ f^-(x)\leqslant y\leqslant 0\big\},$$



sachant que l'intégrale de f est la somme des aires orientés de ces deux régions :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx=\mathsf{Aire}\Big(\big\{0\leqslant y\leqslant f^+(x)\big\}\Big)-\mathsf{Aire}\Big(\big\{-\ f^-(x)\leqslant y\leqslant 0\big\}\Big);}$$

ici, la notion d'aire bidimensionnelle pourrait être précisée mathématiquement, mais nous nous en dispenserons, puisque la théorie de Lebesgue se chargera de le faire dans un cadre général et englobant.

Principe de proximité entre sommation discrète et intégration continue. *Intuitivement et philosophiquement, la version approchée, finie, discrète d'une intégrale étant une grande* *somme — par exemple de Darboux —, on peut s'imaginer que le signe de sommation :*

$$\sum$$

se métamorphose progressivement en le signe d'intégration :

$$\int,$$

ce qu'on résumera symboliquement par :

$$\boxed{\sum \approx \int}$$

En particulier, l'analogue de l'intégrale d'un produit :

$$\int fg$$

est la somme de produits de nombres :

$$\sum \lambda_i \mu_i.$$

Mais puisqu'il est déjà impossible d'exprimer une somme à deux termes :

$$\lambda_1 \, \mu_1 + \lambda_2 \, \mu_2$$

algébriquement en fonction de $\lambda_1 + \lambda_2$ et de $\mu_1 + \mu_2$, il n'y a aucune raison pour que l'intégrale $\int fg$ d'un produit de deux fonctions intégrables s'exprime algébriquement en fonction de $\int f$ et de $\int g$.

Toutefois, on sait qu'en *élevant au carré*, une identité remarquable élémentaire (exercice) :

$$\big(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\big) \, \big(\mu_1^2 + \mu_2^2\big) - \big(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2\big)^2 = \underbrace{\big(\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2\big)^2}_{\text{toujours} \geqslant 0}$$

dont le second membre est positif, montre qu'on a toujours l'inégalité :

$$\big(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\big) \, \big(\mu_1^2 + \mu_2^2\big) \;\geqslant\; \big(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2\big)^2.$$

Plus généralement, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_{\rm N} \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \dots, \mu_{\rm N} \in \mathbb{R}$, l'*identité de Lagrange* (laissée en exercice) :

$$\Big(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{\rm N}^2\Big) \, \Big(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{\rm N}^2\Big) - \Big(\lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_{\rm N} \mu_{\rm N}\Big)^2 = \underbrace{\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant {\rm N}} \big(\lambda_j \mu_k - \mu_j \lambda_k\big)^2}_{\text{quantité toujours positive}}$$

conduit à l'*inégalité de Cauchy-Schwarz discrète :*

$$\Big(\lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_{\rm N} \mu_{\rm N}\Big)^2 \;\leqslant\; \Big(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{\rm N}^2\Big) \, \Big(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{\rm N}^2\Big).$$

À la limite lorsqu'il y a une infinité de termes, on aboutit intuitivement au :

Théorème 5.14. [Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale] *Si f et g sont deux fonctions réelles bornées Riemann-intégrables sur $[a, b]$, alors :*

$$\bigg| \int_a^b f(x) \, g(x) \, dx \bigg| \;\leqslant\; \bigg(\int_a^b f(x)^2 \, dx \bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\int_a^b g(x)^2 \, dx \bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. L'Exercice 10 propose de déduire ce théorème d'un passage à la limite dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, mais il existe une voie plus économique.

Grâce aux résultats qui précèdent, nous savons maintenant que les quatre fonctions :

$$f^2, \quad g^2, \quad f\,g, \quad \big(t\,f+g\big)^2,$$

où $t \in \mathbb{R}$ est quelconque, sont Riemann-intégrables, et nous pouvons développer la quantité intégrale positive :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \int_a^b \big(t\,f(x)+g(x)\big)^2\,dx \\ &= t^2 \underbrace{\int_a^b f(x)^2\,dx}_{=:\,\alpha\,\geqslant\,0} + t\,2 \underbrace{\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx}_{=:\,\beta} + \underbrace{\int_a^b g(x)^2\,dx}_{=:\,\gamma\,\geqslant\,0}, \end{aligned}$$

ce qui conduit à un trinôme du second degré en t :

$$\alpha\,t^2 + \beta\,t + \gamma,$$

lequel, pour être toujours $\geqslant 0$, doit avoir son discriminant :

$$\beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma \leqslant 0$$

négatif ou nul (exercice), inégalité qui équivaut à celle de Cauchy-Schwarz. □

6. Intégrale de Riemann et primitives

Définition 6.1. Une fonction $F\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dite 1-*lipschitzienne* s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :

$$\forall\,x' \in E \quad \forall\,x'' \in E \qquad \big|F(x') - F(x'')\big| \leqslant C\,\big|x' - x''\big|,$$

avec exposant 1 dans $|x' - x''|^1$.

En particulier, les fonctions 1-lipschitziennes sont continues, et même uniformément continues (exercice mental) !

Proposition 6.2. *Étant donné une fonction bornée Riemann-intégrable $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, donc Riemann-intégrable sur tout intervalle $[a,x]$ avec $a \leqslant x \leqslant b$, la fonction de x définie par :*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

est continue et même 1-lipschitzienne sur $[a,b]$:

$$\big|F(x') - F(x'')\big| \leqslant M_{|f|} \cdot \big|x' - x''\big|,$$

avec la constante $M_{|f|} = \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

Démonstration. En effet, partant donc de deux points quelconques :

$$x' \in [a,b] \qquad \text{et} \qquad x'' \in [a,b],$$

on majore aisément la différence :

$$\begin{aligned}\big|F(x')-F(x'')\big| &= \bigg|\int_a^{x'} f(t)\,dt-\int_a^{x''} f(t)\,dt\bigg| \\ &= \bigg|\int_{x''}^{x'} f(t)\,dt\bigg| \\ &\leqslant \big|x'-x''\big|\cdot\max_{[a,b]}|f|,\end{aligned}$$

ce qui prouve la 1-lipschitzianité de f. □

Théorème 6.3. *Soit une fonction continue donc bornée Riemann-intégrable :*

$$f\colon\quad [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}.$$

Si, en un point $x_0\in\,]a,b[$, la limite $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, à savoir si :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

alors la fonction définie pour $a\leqslant x\leqslant b$ par :

$$F(x):=\int_a^x f(t)\,dt,$$

est dérivable en x_0 avec :

$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Démonstration. Il s'agit de déterminer si le quotient différentiel :

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\bigg(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt\bigg) \\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\end{aligned}$$

admet une limite lorsque $h\xrightarrow{\neq}0$.

Or par hypothèse, f est continue en x_0 :

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta_\varepsilon>0\quad\Big(\forall\,t\quad |t-x_0|\leqslant\delta_\varepsilon\implies |f(t)-f(x_0)|\leqslant\varepsilon\Big).$$

Alors avec ce même $\delta_\varepsilon>0$, puisque l'objectif est de montrer que $F'(x_0)=f(x_0)$, on estime la différence entre ce quotient différentiel, écrit pour un $h\neq 0$ satisfaisant $|h|\leqslant\delta_\varepsilon$, et cette valeur attendue :

$$\begin{aligned}\bigg|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\bigg| &= \bigg|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt-\frac{h}{h}\,f(x_0)\bigg| \\ &= \bigg|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\bigg| \\ &\leqslant \frac{1}{\underline{|h|}}\,\underbrace{\max_{|t-x_0|\leqslant|h|}\big|f(t)-f(x_0)\big|}_{\leqslant\varepsilon}\cdot\underline{|h|} \\ &\leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

les deux quantités infimes $|h|\big/|h|=1$ disparaissant agréablement, ce qui conclut. □

Définition 6.4. Étant donné une fonction $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, on appelle *primitive* de f une fonction $F \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable en tout point dont la dérivée :

$$F' = f$$

redonne la fonction.

Assertion 6.5. *Deux primitives d'une fonction sur un intervalle $[a,b]$ diffèrent toujours seulement d'une constante, à savoir :*

$$F_1' = f \qquad \text{et} \qquad F_2' = f$$

implique :

$$\exists\, C \in \mathbb{C} \quad \forall\, x \in [a,b] \quad F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Démonstration. En effet, une soustraction immédiate donne :

$$0 = \big(F_1 - F_2\big)',$$

et donc l'énoncé revient à dire qu'une fonction dérivable dont la dérivée est identiquement nulle est en fait une fonction constante, ce qui est connu. □

Corollaire 6.6. *Si $f \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\, \mathbb{C}\big)$ est continue sur $[a,b]$, alors la fonction :*

$$F \colon \begin{aligned} [a,b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$, et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration. On vient de voir que F est dérivable en tout point, de dérivée égale à f. Évidemment :

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Comme les primitives sont définies à une constante près, F est bien l'unique primitive en question. □

Théorème 6.7. [Théorème fondamental du calcul différentiel] *Soit $F \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ qui est dérivable en tout point. Si sa dérivée $f := F'$ est Riemann-intégrable, alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soit une subdivision quelconque de $[a,b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}.$$

Considérons la formule téléscopique :

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \big[F(x_k) - F(x_{k-1})\big].$$

Comme F est continue et dérivable sur chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ de dérivée $f := F'$, le Théorème des valeurs intermédiaires assure, pour tout $k = 1, \dots, n$, qu'il existe un point :

$$c_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

tel que :

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = \big(x_k - x_{k-1}\big)\, f(c_k).$$

Instantanément, il en découle que :

$$\big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \;\leqslant\; F(x_k) - F(x_{k-1}) \;\leqslant\; \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f.$$

En sommant $\sum_{k=1}^n(\cdot)$ ces deux inégalités, on obtient :

$$\Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; F(b) - F(a) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f).$$

Mais comme f est Riemann-intégrable :

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) = \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f) = \int_a^b f(x)\, dx,$$

ce qui force :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

et conclut. □

Théorème 6.8. [Intégration par parties] *Soient* $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continues sur un intervalle fermé borné* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *qui sont dérivables sur* $[a,b]$ *et telles que* f' *et* g' *sont Riemann-intégrables sur* $[a,b]$*. Alors on a la formule :*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \;=\; f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Démonstration. La fonction produit $f\,g$ est continue sur $[a,b]$, et grâce à la formule de Leibniz :

$$(fg)' = f'\,g + f\,g'.$$

Comme les quatre fonctions f, g, f', g' sont Riemann-intégrables, il en va de même pour $f\,g'$, $f'\,g$, $(f\,g)'$. Alors le Théorème qui précède donne :

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \;&=\; \int_a^b (f\,g)'(x)\, dx \\ &=\; (f\,g)(b) - (f\,g)(a),\end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée. □

7. Changement de variable dans les intégrales

Soit comme précédemment un intervalle fermé borné :

$$[a,b] \Subset \mathbb{R},$$

et soit une application continue :

$$\varphi\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Un énoncé de Topologie Générale censé être connu dans ce cours, à savoir le :

Théorème 7.1. *Soit une application* continue :

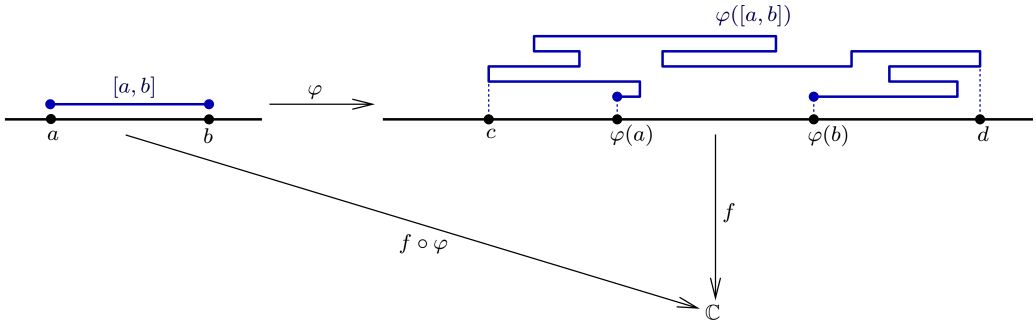
$$F\colon \quad X \longrightarrow Y$$

entre deux espaces topologiques X *et* Y*. Si* $K \Subset X$ *est un sous-ensemble* compact et connexe*, alors son image* $F(K)$ *est aussi compacte et connexe.* □

assure alors que l'image par φ de l'intervalle $[a, b]$:

$$\varphi\big([a, b]\big) \;=\; [c, d],$$

est aussi un certain intervalle fermé borné $[c, d] \Subset \mathbb{R}$.

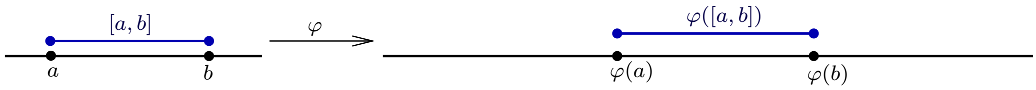


En fait, cet intervalle image contient :

$$[c, d] \;\supset\; \big[\varphi(a),\, \varphi(b)\big],$$

sachant qu'il faut plutôt écrire $[\varphi(b), \varphi(a)]$ lorsque $\varphi(b) < \varphi(a)$, mais, et c'est important de le faire remarquer géométriquement au moyen d'une figure intuitive éclairante, *une telle inclusion peut fort bien être stricte*.

Toutefois, dans les applications, il se trouve que la plupart du temps, φ est monotone. Dans ce cas, l'intuition simplette est correcte.



Théorème 7.2. [Changement de variable dans les intégrales simples] *Soit une fonction de classe $\mathscr{C}^1$:*

$$\varphi\colon\quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

définie sur un intervalle compact $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, d'où :

$$\varphi\big([a, b]\big) =: [c, d] \;\supset\; \big[\varphi(a),\, \varphi(b)\big].$$

Alors pour toute fonction continue :

$$f\colon\quad [c, d] \longrightarrow \mathbb{C},$$

on a :

$$\boxed{\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\, \varphi'(x)\, dx \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt.}$$

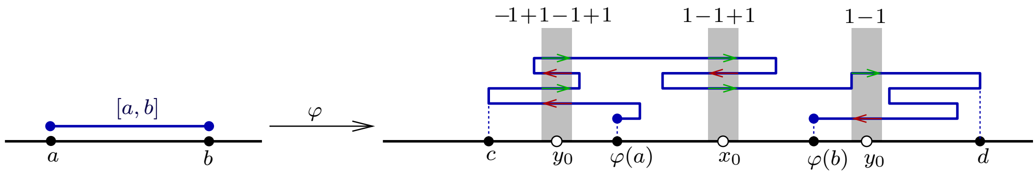
Rappelons que dans les vrais calculs, la recette classique, c'est d'écrire :

$$t = \varphi(x),$$

de différentier :

$$dt = \varphi'(x)\, dx,$$

et de remplacer.



Question. *Mais pourquoi l'intégrale à droite* $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$ *porte-t-elle seulement sur l'intervalle* $[\varphi(a), \varphi(b)]$, *et non pas sur tout l'intervalle* $[c, d]$ *?*

Parce que au-dessus d'un point quelconque :

$$y_0 \in [c, d] \backslash \big[\varphi(a), \varphi(b)\big],$$

la somme géométrique des contributions s'annule toujours, tandis qu'au-dessus d'un point :

$$x_0 \in \big[\varphi(a), \varphi(b)\big],$$

elle vaut toujours $+1$, ce qui est illustré par le diagramme. Toutefois, cette vision géométrique sera totalement absente des arguments qui suivent.

Démonstration. Observons pour commencer que la fonction :

$$f \circ \varphi \cdot \varphi'$$

est continue sur $[a, b]$, donc bornée Riemann-intégrable.

Introduisons alors deux fonctions-intégrales :

$$\begin{aligned} F(u) &:= \int_{\varphi(a)}^{u} f(t)\, dt, \\ G(v) &:= \int_{a}^{v} f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx. \end{aligned}$$

Grâce au Corollaire 6.6 d'après lequel dériver une intégrale redonne la fonction intégrée, on a :

$$\begin{aligned} F' &= f, \\ G' &= f \circ \varphi \cdot \varphi'. \end{aligned}$$

Or lorsqu'on dérive par ailleurs en appliquant une formule connue la fonction composée :

$$\begin{aligned} \big(F \circ \varphi\big)' &= F' \circ \varphi \cdot \varphi' \\ &= f \circ \varphi \cdot \varphi' \\ &= G', \end{aligned}$$

on retrouve la dérivée de la deuxième fonction, et comme ces deux fonctions qui ont donc partout la même dérivée s'annulent ensemble au point a :

$$\begin{aligned} F \circ \varphi(a) &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(a)} = 0, \\ G(a) &= \int_{a}^{a} = 0, \end{aligned}$$

on obtient leur égalité partout :

$$F \circ \varphi(x) \equiv G(x),$$

ce qui, au point final $x = b$:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt \;=\; F \circ \varphi(b) \;=\; G(b) \;=\; \int_a^b f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\,dx$$

apporte effectivement sur un plateau doré la formule de changement de variable annoncée, et ce, sans aucune intuition géométrique scintillante, hélas ! □

Corollaire 7.3. *Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour toute fonction continue $f\colon [a+c,\, b+c] \longrightarrow \mathbb{C}$, on a :*

$$\int_a^b f(x+c)\,dx \;=\; \int_{a+c}^{b+c} f(t)\,dt. \qquad \square$$

Corollaire 7.4. *Soit $c \in \mathbb{R}^*$ non nul. Pour toute fonction continue $f\colon [ac, bc] \longrightarrow \mathbb{C}$, on a :*

$$\int_a^b f(cx)\,dx \;=\; \frac{1}{c} \int_{a\,c}^{b\,c} f(t)\,dt. \qquad \square$$

Dans ce deuxième corollaire extrêmement élémentaire, il faut bien prendre garde néanmoins que lorsque $c < 0$ est négatif, d'où :

$$ac \;>\; bc,$$

un redressement des bornes d'intégration $\int_{ac}^{bc} = -\, \int_{bc}^{ac}$ est en général nécessaire lorsqu'on cherche à réaliser des calculs concrets.

8. Approximation des fonctions Riemann-intégrables

Théorème 8.1. *Pour toute fonction bornée Riemann-intégrable définie sur un intervalle compact de* $\mathbb{R}$:

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},$$

il existe une suite de fonctions continues :

$$\big(f_n\big)_{n\geqslant 1} \;\in\; \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{C}\big)$$

avec :

$$\sup_{[a,b]} \big|f_n\big| \;\leqslant\; \sup_{[a,b]} \big|f\big| \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}),$$

qui approxime f en moyenne au sens intégral où :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx.$$

De manière équivalente, on peut énoncer et démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction continue $f_\varepsilon\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$\int_a^b \big|f_\varepsilon(x) - f(x)\big|\,dx \;\leqslant\; \varepsilon.$$

Démonstration. En traitant séparément la partie réelle et la partie imaginaire de f, on peut bien entendu supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par hypothèse de Riemann-intégrabilité, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision de l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta = \Delta_\varepsilon = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

telle que les sommes de Darboux inférieure et supérieure associées satisfassent :

$$\big(0 \leqslant\big) \quad \Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon.$$

L'idée de la démonstration est alors simple et naturelle.

Étape 1 : Approximer dans un premier temps f par une fonction en escalier f^{esc}.

Étape 2 : « *Écorner les gratte-ciel et installer des toboggans vertigineux* » (regarder à l'avance les figures qui suivent), à savoir aplatir les angles de cette fonction en escalier f^{esc} pour la rendre continue en modifiant très peu les intégrales correspondantes.

Comme nous le savons déjà, deux fonctions en escalier sont naturellement associées aux deux sommes de Darboux $\Sigma_{\Delta}(f)$ et $\Sigma^{\Delta}(f)$, mais nous n'aurons besoin que d'une seule, par exemple la *fonction en escalier inférieure :*

$$f_{\Delta}^{\mathsf{esc}},$$

qui est définie, rappelons-le, par :

$$f_{\Delta}^{\mathsf{esc}}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f & \text{lorsque } x \in \,]x_{\kappa-1},\, x_\kappa[\text{ pour un } \kappa = 1, \dots, \nu; \\ f(x) & \text{lorsque } x = a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b. \end{cases}$$

Par construction :

$$f_{\Delta}^{\mathsf{esc}} \leqslant f,$$

d'où par intégration :

$$\Sigma_{\Delta}(f) = \int_a^b f_{\Delta}^{\mathsf{esc}}(x)\, dx \leqslant \underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{\text{en fait aussi} \leqslant \Sigma^{\Delta}(f)},$$

et donc puisque $\Sigma^{\Delta} - \Sigma_{\Delta} \leqslant \varepsilon$, nous obtenons que :

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f_{\Delta}^{\mathsf{esc}}(x)\, dx \leqslant \varepsilon,$$

et mieux encore, puisque l'on vient de voir que $f_{\Delta}^{\mathsf{esc}} \leqslant f$, c'est pour la *valeur absolue* de la différence qu'on a la majoration :

$$\int_a^b \big| f(x) - f_{\Delta}^{\mathsf{esc}}(x) \big|\, dx \leqslant \varepsilon.$$

Maintenant, puisque nous désirons une suite de fonctions approximantes continues $(f_n)_{n \geqslant 1}$, prenons :

$$\varepsilon := \frac{1}{2\,n},$$

et notons pour abréger :

$$f_{\Delta}^{\mathsf{esc}} = f_{\Delta_\varepsilon}^{\mathsf{esc}} = f_{\Delta_{\frac{1}{2n}}}^{\mathsf{esc}} =: g_n^{\mathsf{esc}}.$$

Avec cette suite de fonctions en escalier $(g_n^{\mathsf{esc}})_{n \geqslant 1}$ satisfaisant :

$$\int_a^b \big| f(x) - g_n^{\mathsf{esc}}(x) \big|\, dx \leqslant \frac{1}{2\,n},$$

nous avons donc réalisé l'Étape 1, mais ces fonctions g_n^{esc} ne sont pas continues !

Heureusement, l'Étape 2 est réalisée par un résultat fondamental et naturel.

Théorème 8.2. [Approximation intégrale des fonctions en escalier par des fonctions continues] *Sur un intervalle compact* $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, *étant donné une fonction en escalier quelconque fixée :*

$$g^{\mathsf{esc}} \colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},$$

pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction* continue :

$$g_\varepsilon \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{C}\big)$$

telle que :

$$\int_a^b \big|g^{\mathsf{esc}}(x) - g_\varepsilon(x)\big|\,dx \leqslant \varepsilon.$$

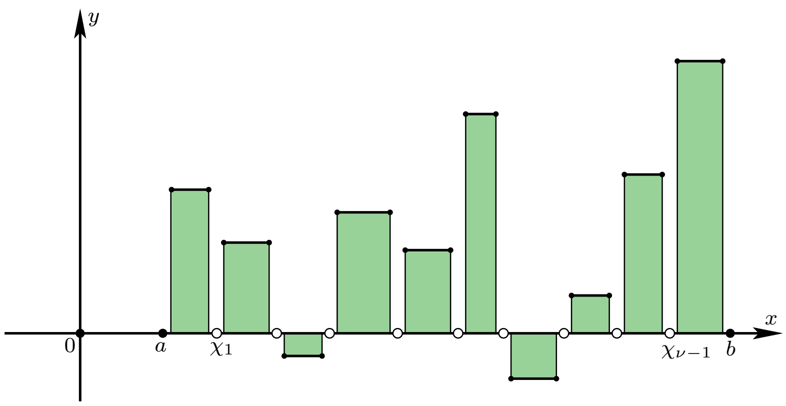
Démonstration. Comme dans la Définition 4.6 et dans le Théorème 4.7, à une telle fonction en escalier g^{esc} est attachée un certain découpage :

$$\square = \big\{a = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \cdots < \chi_{\nu-2} < \chi_{\nu-1} < \chi_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a,b]$ sur les intervalles ouverts $]\chi_{\kappa-1},\, \chi_\kappa[$ de laquelle g^{esc} est constante :

$$g^{\mathsf{esc}}(x) = c_\kappa \qquad\qquad \forall\, \chi_{\kappa-1} < x < \chi_\kappa \qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant \kappa \leqslant \nu)},$$

avec $c_\kappa \in \mathbb{C}$.



Or rappelons que dans la démonstration du Théorème 4.7, afin d'établir que g^{esc} est Riemann-intégrable d'intégrale égale à :

$$\int_a^b g^{\mathsf{esc}}(x)\,dx = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(\chi_\kappa - \chi_{\kappa-1}\big)\cdot c_\kappa,$$

nous avons enrichi la subdivision $\square$ de g^{esc} en ajoutant de part et d'autre de chaque point χ_κ les deux points :

$$\chi_\kappa - \delta \qquad\quad \text{et} \qquad\quad \chi_\kappa + \delta$$

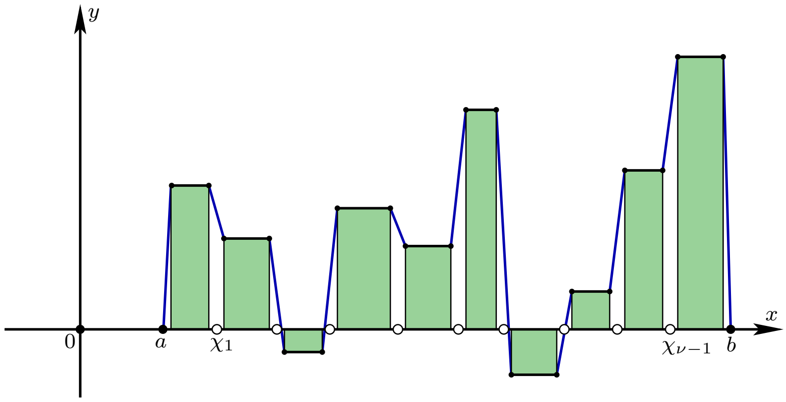
situés à une distance constante infime $\delta > 0$, ce qui nous donnait la subdivision :

$$\Delta := \Big\{a,\ a+\delta,\ \chi_1 - \delta,\ \chi_1,\ \chi_1 + \delta,\ \ldots\ldots,\ \chi_{\nu-1} - \delta,\ \chi_{\nu-1},\ \chi_{\nu-1} + \delta,\ b - \delta,\ b\Big\}.$$

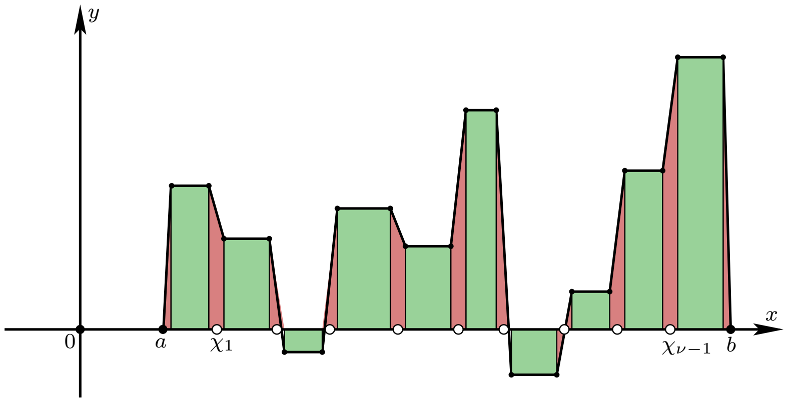
Sur les figures destinées à présenter les idées, on voit qu'il s'agit tout d'abord de restreindre la fonction en escalier g^{esc} à être définie seulement sur les ν intervalles fermés :

$$\big[a+\delta,\ \chi_1 - \delta\big] \bigcup \big[\chi_1 + \delta,\ \chi_2 - \delta\big] \bigcup \cdots\cdots \bigcup \big[\chi_{\nu-1} + \delta,\ b - \delta\big],$$

ce qui fait apparaître des « *fossés très étroits entre les gratte-ciel* » de longueur $2\,\delta$, voire de longueur seulement δ aux extrémités a et b.



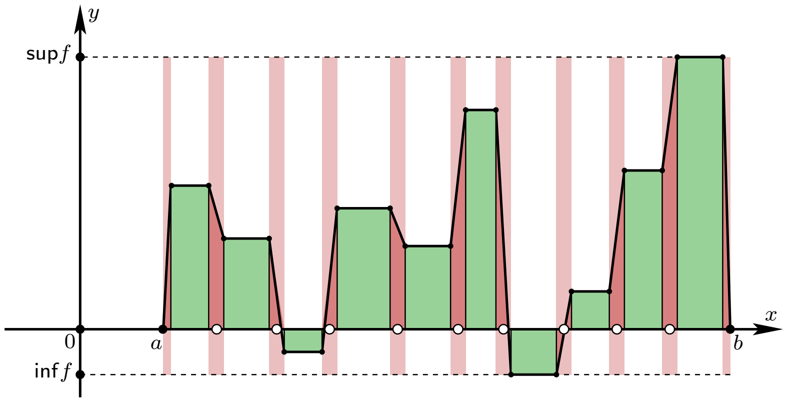
Mais puisque notre but est de trouver une fonction continue, décidons tout simplement de combler les fossés au moyen de fonctions affines qui joignent les coins supérieurs de nos gratte-ciel, comme de dangereux toboggans plongeant presque verticalement dans le vide, fils d'araignée virtuels dont seuls des funambules ne s'effrairaient pas. Nous obtenons ainsi le graphe d'une fonction *continue*, certes parfois très descendante et très ascendante — mais *continue*, Monsieur l'Inspecteur !



Alors la somme des erreurs commises, visible sous forme de la somme des aires d'un certain nombre de trapèzes très effilés va rester bornée par :

$$\underbrace{(\nu+1)}_{\text{nombre de rues}} \times \underbrace{2\,\delta}_{\text{largeur maximale des rues}} \times \underbrace{\Big(\sup_{[a,b]} g^{\text{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\text{esc}}\Big)}_{\text{hauteur maximale des caves aux toits}},$$

puisque les trapèzes en question sont toujours contenus dans des rectangles tout aussi allongés verticalement.



Mais comme $\delta > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, cette somme d'erreurs peut devenir inférieure ou égale à un certain $\varepsilon > 0$ quelconque donné à l'avance, ce qui termine essentiellement la démonstration.

Toutefois, certes, ces fantômes drapés nous parlent le langage fort compréhensible des images, l'expression des fonctions affines qui interpolent entre les gratte-ciel importe relativement peu, mais détaillons quand même les arguments dans un langage analytique, afin de terminer rigoureusement la démonstration, puisque, en tant que mathématiciens, nous ne pouvons nous contenter de converser seulement avec les esprits, voire avec l'Esprit de Géométrie.

Fixons donc $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, choisissons comme suggéré :

$$0 < \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,\nu\,(\sup g^{\mathsf{esc}} - \inf g^{\mathsf{esc}})};$$

avec ν au lieu de $(\nu+1)$ au dénominateur (nous verrons pourquoi), et notons que sans perte de généralité, nous pouvons supposer à l'avance que :

$$\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} > \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}},$$

car si au contraire ce '$\sup$' coïncidait avec cet '$\inf$', la fonction g^{esc} serait *constante*, donc continue, auquel cas le théorème serait trivial.

Comme l'ont montré nos diagrammes, la fonction continue recherchée g_ε sera alors égale à g^{esc} sur chacun des intervalles :

$$\big[\chi_{\kappa-1}+\delta,\ \chi_\kappa-\delta\big] \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant \kappa \leqslant \nu)},$$

et elle *interpolera de manière affine* cette fonction entre deux de ces intervalles consécutifs de longueur $2\,\delta$:

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\kappa & \forall\, x \in [\chi_{\kappa-1}+\delta,\ \chi_\kappa-\delta] \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant \kappa \leqslant \nu)}, \\ c_\kappa + \dfrac{c_{\kappa+1}-c_\kappa}{2\,\delta}\,\big(x-\chi_\kappa+\delta\big) & \forall\, x \in [\chi_\kappa-\delta,\ \chi_\kappa+\delta] \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant \kappa \leqslant \nu-1)}, \end{cases}$$

tandis que l'interpolation affine sur les deux intervalles extrémités de longueur seulement δ :

$$[a,\ a+\delta] \qquad \text{et} \qquad [b-\delta,\ b]$$

sera pour simplifier constante :

$$g_\varepsilon(x) = c_1 \quad \forall\, x \in [a,\ a+\delta] \qquad \text{et} \qquad g_\varepsilon(x) = c_\nu \quad \forall\, x \in [b-\delta,\ b].$$

Lemme 8.3. *Cette fonction continue g_ε interpolante de g^{esc} reste encadrée par :*

$$\inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} \leqslant \min(c_1, \dots, c_\nu) \leqslant g_\varepsilon \leqslant \max(c_1, \dots, c_\nu) \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}.$$

Démonstration. En effet, pour tout κ avec $1 \leqslant \kappa \leqslant \nu - 1$, deux cas sont à distinguer :

$$c_{\kappa+1} \geqslant c_\kappa \qquad \text{ou} \qquad c_{\kappa+1} \leqslant c_\kappa.$$

Dans le premier cas :

$$\Big(\chi_\kappa - \delta \leqslant x \leqslant \chi_\kappa + \delta\Big) \implies \bigg(\underbrace{c_\kappa + 0}_{= c_\kappa} \leqslant \underbrace{c_\kappa + \frac{c_{\kappa+1} - c_\kappa}{2\,\delta}\big(x - \chi_\kappa + \delta\big)}_{g_\varepsilon(x)} \leqslant \underbrace{c_\kappa + \frac{c_{\kappa+1} - c_\kappa}{2\,\delta}\,2\,\delta}_{= c_{\kappa+1}}\bigg),$$

tandis que dans le second cas, à cause du signe négatif de $c_{\kappa+1} - c_\kappa \leqslant 0$, les inégalités après l'implication changent simplement de sens :

$$\Big(\chi_\kappa - \delta \leqslant x \leqslant \chi_\kappa + \delta\Big) \implies \bigg(\underbrace{c_\kappa + 0}_{= c_\kappa} \geqslant \underbrace{c_\kappa + \frac{c_{\kappa+1} - c_\kappa}{2\,\delta}\big(x - \chi_\kappa + \delta\big)}_{g_\varepsilon(x)} \geqslant \underbrace{c_\kappa + \frac{c_{\kappa+1} - c_\kappa}{2\,\delta}\,2\,\delta}_{= c_{\kappa+1}}\bigg).$$

Enfin, aux deux extrémités de l'intervalle, il n'y a rien à démontrer puisqu'on a déclaré g_ε constante égale à c_1 et à c_ν. □

Comme deux encadrements identiques sont satisfaits simultanément par g^{esc} et par g_ε :

$$\begin{aligned} \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} &\leqslant g^{\mathsf{esc}} \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}, \\ \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} &\leqslant \ g_\varepsilon \ \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}, \end{aligned}$$

on déduit par soustraction que :

$$\big|g^{\mathsf{esc}} - g_\varepsilon\big| \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}.$$

Nous affirmons alors que :

$$\int_a^b \big|g^{\mathsf{esc}}(x) - g_\varepsilon(x)\big|\,dx \leqslant \varepsilon.$$

En effet, puisque g^{esc} est égale à g_ε excepté sur les petits intervalles de jonction, cette intégrale est égale à la somme des $(\nu + 1)$ intégrales suivantes :

$$\int_a^b = \int_a^{a+\delta} + \int_{\chi_1-\delta}^{\chi_1+\delta} + \cdots + \int_{\chi_{\nu-1}-\delta}^{\chi_{\nu-1}+\delta} + \int_{b-\delta}^b,$$

et donc grâce à ce qui précède, on peut maintenant aisément majorer :

$$\begin{aligned} \int_a^b \big|g^{\mathsf{esc}} - g_\varepsilon\big| &= \bigg(\int_a^{a+\delta} + \int_{\chi_1-\delta}^{\chi_1+\delta} + \cdots + \int_{\chi_{\nu-1}-\delta}^{\chi_{\nu-1}+\delta} + \int_{b-\delta}^b\bigg)\Big(\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}\Big) \\ &\leqslant \Big(\delta + \underbrace{2\,\delta + \cdots + 2\,\delta}_{(\nu-1)\text{ fois}} + \delta\Big)\Big(\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}\Big) \\ &= 2\,\nu\,\delta\,\Big(\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}\Big) \\ &\leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

quantité qui est effectivement inférieure ou égale à ε, grâce au choix initial annoncé pour δ.

Ceci achève cette démonstration, volontairement conduite de manière à faire transparaître une *symbiose synthétique* entre la pensée géométrique inventive et l'exigence de réalisation formelle. □

Fin de la démonstration du Théorème 8.1. Repartons donc des fonctions en escalier g_n^{esc} abandonnées en chemin. Grâce au Théorème d'approximation 8.2 démontré à l'instant que l'on applique avec $\varepsilon := \frac{1}{2n}$, il existe pour tout $n \geqslant 1$ une fonction *continue* que nous noterons :

$$f_n \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{C}\big),$$

telle que :

$$\int_a^b \big|g_n^{\mathsf{esc}}(x) - f_n(x)\big|\,dx \leqslant \frac{1}{2n}.$$

Alors une simple inégalité triangulaire dans les intégrales :

$$\begin{aligned}\int_a^b \big|f(x) - f_n(x)\big|\,dx &= \int_a^b \big|f(x) - g_n^{\mathsf{esc}}(x) + g_n^{\mathsf{esc}}(x) - f_n(x)\big|\,dx \\ &\leqslant \int_a^b \big|f(x) - g_n^{\mathsf{esc}}(x)\big|\,dx + \int_a^b \big|g_n^{\mathsf{esc}}(x) - f_n(x)\big|\,dx \\ &\leqslant \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}}_{\text{tend vers } 0},\end{aligned}$$

fournit sans délai la conclusion finale. □

9. Sommes de Riemann

Les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f)$ et supérieure $\Sigma^\Delta(f)$ d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ relativement à une subdivision font intervenir les infima et les suprema de f sur les petits intervalles concernés, ce qui permet d'encadrer et d'approximer la valeur finale recherchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$. De cette façon, on fixe clairement les idées sur chaque petit intervalle.

Toutefois, ce n'est pas de cette manière-là que Riemann a introduit en 1854 l'intégrale qui porte maintenant son nom. Riemann raisonnait au contraire presque « *en probabiliste* », car il choisissait *au hasard* un point dans chaque intervalle, point en lequel la fonction n'a aucune raison d'atteindre son minimum ou son maximum.

Définition 9.1. Étant donné une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}$$

d'un intervalle $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, on appelle *somme de Riemann* d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ toute somme :

$$R_\Delta(f,\xi) := \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, f(\xi_{k-1}),$$

dans laquelle les points :

$$\xi_{k-1} \in \big[x_{k-1},\, x_k\big] \qquad\qquad (k = 1 \cdots n),$$

sont choisis librement.

Bien entendu, puisque sur chaque petit intervalle on a l'encadrement trivial :

$$\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) \;\leqslant\; f(\xi_k) \;\leqslant\; \sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x),$$

toute somme de Riemann est toujours encadrée par les sommes de Darboux inférieure et supérieure :

$$\Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; R_\Delta(f,\xi) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f).$$

Le « *miracle* », maintenant, c'est que l'approche « *au hasard* » de Riemann va s'avérer être équivalente à celle « *bien encadrée* » de Darboux que nous avons développée jusqu'à présent.

Définition 9.2. On appelle *pas* d'une telle subdivision Δ quelconque la quantité :

$$\mathsf{pas}(\Delta) := \max_{1\leqslant k\leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big).$$

En ces termes, on a en effet l'équivalence fondamentale suivante.

Théorème 9.3. [Équivalence entre deux définitions de la Riemann-intégrabilité] *Pour toute fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est Riemann-intégrable au sens de Darboux, à savoir :*

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \;=\; \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f),$$

le supremum des sommes de Darboux inférieures et l'infimum des sommes de Darboux supérieures étant pris sur les subdivisions Δ de $[a,b]$;

(ii) *f est Riemann-intégrable au sens original de Riemann, à savoir les sommes de Riemann de f :*

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} R_\Delta(f,\xi)$$

possèdent une limite bien définie lorsque le pas des subdivisions Δ tend vers zéro, indépendamment du choix des points $\xi_\bullet$ *appartenant aux intervalles de Δ.*

De plus, lorsque l'une ou l'autre de ces deux conditions équivalentes est satisfaite, les deux nombres en question coïncident*, et ils constituent par définition l'*intégrale de Riemann *de f :*

$$\boxed{\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\overset{\mathsf{def}}{:=} \sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \;=\; \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f)\\ &= \lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} R_\Delta(f,\xi).\end{aligned}}$$

Il suffit bien entendu d'établir cette équivalence pour les fonctions à valeurs réelles.

Démonstration. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**. Notons en abrégé :

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \;=\; \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f) \;=:\; I.$$

Puisque nous connaissons déjà l'encadrement :

$$\Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; R_\Delta(f,\xi) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f),$$

il suffit de montrer que ce supremum et cet infimum sont tous deux des *limites*, à savoir il suffit de démontrer la :

Proposition 9.4. *Sous l'hypothèse* **(i)***, on a en fait :*

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} \Sigma_\Delta(f) = \sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) = I,$$

et de même aussi :

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} \Sigma^\Delta(f) = \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f) = I.$$

En effet, l'encadrement en question donnera alors instantanément :

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} R_\Delta(f,\xi) = I.$$

Pour ce qui est de cette Proposition 9.4, contentons-nous de la première limite concernant $\Sigma_\Delta(f)$, le traitement de celle afférente à $\Sigma^\Delta(f)$ étant entièrement similaire.

Par l'hypothèse **(i)**, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une subdivision $\Delta = \Delta_\varepsilon$ de l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

telle que :

$$0 \leqslant I - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon.$$

Avec :

$$M_{|f|} := \max_{[a,b]} |f|,$$

introduisons :

$$\delta := \min\left(\frac{\varepsilon}{4\,n\,M_{|f|}},\ \frac{1}{2}\min_{1\leqslant k\leqslant n}\big(x_k - x_{k-1}\big)\right).$$

La première limite de la Proposition sera alors vérifiée grâce à une :

Assertion 9.5. *Alors pour toute autre subdivision quelconque de* $[a,b]$ *:*

$$\square := \big\{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b\big\},$$

ayant un pas assez petit satisfaisant :

$$\mathsf{pas}(\square) \leqslant \delta,$$

la somme de Darboux inférieure associée satisfait :

$$0 \leqslant I - \Sigma_\square(f) \leqslant 2\,\varepsilon,$$

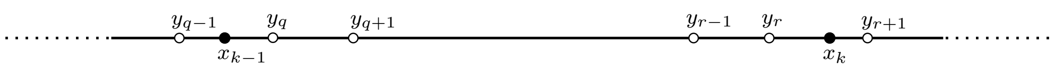
d'où :

$$\lim_{\mathsf{pas}(\square)\to 0} \Sigma_\square(f) = I.$$

Démonstration. Comme par arrangement à l'avance on a :

$$\mathsf{pas}(\square) \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2}\min_{1\leqslant k\leqslant n}\big(x_k - x_{k-1}\big),$$

chaque intervalle $[x_{x-1},\, x_k]$ de la subdivision Δ contient toujours *au moins deux points* de la subdivision $\square$. Fixons donc un tel $[x_{k-1},\, x_k]$ quelconque.



Soient alors les deux indices q et r dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, m-1, m\}$ des indices de $\square$ avec $0 \leqslant q < r \leqslant m$ qui satisfont :

$$y_{q-1} \notin [x_{k-1}, x_k], \qquad y_q, y_{q+1}, \dots, y_{r-1}, y_r \in [x_{k-1}, x_k], \qquad y_{r+1} \notin [x_{k-1}, x_k].$$

Dans la somme de Darboux inférieure qui nous intéresse :

$$\Sigma_\square(f) = \sum_{l=1}^{m} \big(y_l - y_{l-1}\big) \inf_{y_{l-1} \leqslant x \leqslant y_l} f(x),$$

apparaît la sous-somme qui correspond à ce qui est illustré par le diagramme, à savoir :

$$\big(y_q - y_{q-1}\big) \inf_{y_{q-1} \leqslant x \leqslant y_q} f(x) + \big(y_{q+1} - y_q\big) \inf_{y_q \leqslant x \leqslant y_{q+1}} f(x) + \cdots + \big(y_r - y_{r-1}\big) \inf_{y_{r-1} \leqslant x \leqslant y_r} f(x) + \big(y_{r+1} - y_r\big) \inf_{y_r \leqslant x \leqslant y_{r+1}} f(x).$$

Mais comme les deux segments extrêmes débordent à gauche au-delà de x_{k-1} et à droite au-delà de x_k, il est avisé de décomposer les deux termes correspondants chacun en deux morceaux :

$$\begin{aligned} \big(y_q - y_{q-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f &= \underline{\big(x_{k-1} - y_{q-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f} + \big(y_q - x_{k-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f, \\ \big(y_{r+1} - y_r\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f &= \big(x_k - y_r\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f + \underline{\big(y_{r+1} - x_k\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f} \end{aligned}$$

et d'éliminer les morceaux hors de $[x_{k-1}, x_k]$, ce qui conduit à introduire :

$$\Sigma_\square^k(f) := \big(y_q - x_{k-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f + \big(y_{q+1} - y_q\big) \inf_{[y_q, y_{q+1}]} f + \cdots + \big(y_r - y_{r-1}\big) \inf_{[y_{r-1}, y_r]} f + \big(x_k - y_r\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f.$$

Avec ces notations et de légères adaptations lorsque $x_{k-1} = a$, *i.e.* pour $k = 1$, et lorsque $x_k = b$, *i.e.* pour $k = n$, il est alors clair que :

$$\Sigma_\square(f) = \sum_{k=1}^{n} \Sigma_\square^k(f).$$

Et maintenant, nous pouvons minorer patiemment et astucieusement :

$$\begin{aligned} \Sigma_\square^k(f) &\geqslant -\big(y_q - x_{k-1}\big) M_{|f|} + \big[y_{q+1} - y_q + \cdots + y_r - y_{r-1}\big] \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(x_k - y_r\big) M_{|f|} \\ &= -\big(y_q - x_{k-1}\big) M_{|f|} + \big[y_r - y_q\big] \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(x_k - y_r\big) M_{|f|} \\ &= -\big(y_q - x_{k-1}\big) M_{|f|} + \big[-(x_k - y_r) + (x_k - x_{k-1}) - (y_q - x_{k-1})\big] \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(x_k - y_r\big) M_{|f|} \\ &\geqslant -\big(y_q - x_{k-1}\big) M_{|f|} - \big(x_k - y_r\big) M_{|f|} + \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(y_q - x_{k-1}\big) M_{|f|} - \big(x_k - y_r\big) M_{|f|} \\ &\geqslant \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - 4\, M_{|f|}\, \mathsf{pas}(\square), \end{aligned}$$

et une sommation finale sur k nous donne :

$$\begin{aligned} \Sigma_\square(f) = \sum_{k=1}^{n} \Sigma_\square^k(f) &\geqslant \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - 4\, n\, M_{|f|}\, \mathsf{pas}(\square) \\ &= \Sigma_\Delta(f) - 4\, n\, M_{|f|}\, \mathsf{pas}(\square) \\ &\geqslant \Sigma_\Delta(f) - \varepsilon \\ &\geqslant I - 2\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Mais comme de toute façon :

$$I = \sup_\square \Sigma_\square(f),$$

nous concluons bien que :

$$I - 2\,\varepsilon \leqslant \Sigma_\square(f) \leqslant I,$$

ce qui termine l'Assertion, la Proposition et la première implication **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** du Théorème.

Traitons à présent à la deuxième implication **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)**. Notons en abrégé :

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} R_\Delta(f,\xi) =: J$$

cette limite, qui existe. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et soit une subdivision Δ de $[a,b]$ dont le pas est assez petit pour que :

$$\Big|R_\Delta(f,\xi) - J\Big| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire telle que :

$$\bigg|\sum_{k=1}^n \big(x_k - x_{k-1}\big)\,f(\xi_k) - J\bigg| \leqslant \varepsilon,$$

et ce, *quel que soit* le choix des ξ_k. Pour se rapprocher des sommes de Darboux inférieure et supérieure, l'astuce va donc consister à bien choisir chaque ξ_k de deux manières différentes afin d'approximer l'infimum et le supremum de f sur $[x_{k-1},\, x_k]$.

En effet, il est clair que pour tout $k = 1,\dots,n$, on peut trouver deux points ξ_k^- et ξ_k^+ appartenant à $[x_{k-1},\, x_k]$ tels que :

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant f(\xi_k^-) - \inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a},\\
0 &\leqslant \sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) - f(\xi_k^+) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.
\end{aligned}$$

Alors on peut majorer la différence (positive) :

$$\begin{aligned}
\big(0\leqslant\big)\qquad R_\Delta(f,\xi^-) - \Sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^n \big(x_k - x_{k-1}\big)\Big[f(\xi_k^-) - \inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x)\Big]\\
&\leqslant \sum_{k=1}^n \big(x_k - x_{k-1}\big)\,\frac{\varepsilon}{b-a}\\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}\,\big[x_1 - a + x_2 - x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + b - x_{n-1}\big]\\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui aboutit à :

$$0 \leqslant R_\Delta(f,\xi^-) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon.$$

En procédant d'une manière très similaire, on obtient de même :

$$0 \leqslant \Sigma^\Delta(f) - R_\Delta(f,\xi^+) \leqslant \varepsilon.$$

Mais si l'on se rappelle que l'hypothèse peut être appliquée librement à $\xi = \xi^-$ et à $\xi = \xi^+$, on a aussi gratuitement deux jeux supplémentaires d'inégalités :

$$\begin{aligned}
-\,\varepsilon &\leqslant R_\Delta(f,\xi^-) - J \leqslant \varepsilon,\\
-\,\varepsilon &\leqslant R_\Delta(f,\xi^+) - J \leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nous laissons alors au lecteur le soin de se convaincre que ces quatre inégalités conduisent (exercice) à :

$$J - 2\,\varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant J + 2\,\varepsilon,$$

d'où découle :

$$0 \leqslant \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant 4\,\varepsilon,$$

ce qui démontre bien que f est Riemann-intégrable au sens de la Définition 2.3 que nous avons adoptée constamment dans ce chapitre.

Enfin, pour parachever les arguments, les deux implications **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** et **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** que nous venons de détailler montrent en filigrane (exercice mental) que $I = J$ dans les deux cas. □

Dans la vraie vie des mathématiques, les sommes de Riemann les plus importantes et les plus utiles sont celles qui sont *à pas constant équidistribué :*

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n},$$

et dans lesquelles on choisit ou bien $\xi_k = x_{k-1}$ ou bien $\xi_k = x_k$.

Théorème 9.6. *Pour toute fonction Riemann-intégrable* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie sur un intervalle compact* $[a,b] \Subset \mathbb{R}$*, on a la convergence :*

$$\boxed{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\bigg(a + (k-1)\,\frac{b-a}{n}\bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx,}$$

et aussi :

$$\boxed{\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\bigg(a + k\,\frac{b-a}{n}\bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Par exemple, avec la fonction $f(x) := \frac{1}{1+x}$ qui est continue sur l'intervalle $[0,1]$, on détermine aisément une limite inconnue en reconnaissant une somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2.$$

10. Interversion entre limite et intégrale

Théorème 10.1. *Si une suite de fonctions Riemann-intégrables :*

$$f_n\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \qquad\qquad (n \geqslant 1)$$

définies sur un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *converge* uniformément *vers une certaine fonction :*

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},$$

alors cette fonction-limite est elle aussi Riemann-intégrable, et on a de plus :

$$\boxed{\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx.}$$

Démonstration. L'Exercice 13, laissé au lecteur, établit la Riemann-intégrabilité de la fonction limite (uniforme) f.

Une fois ce résultat admis, les arguments sont naturels.

En effet, on a par hypothèse que les f_n convergent uniformément vers f :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \geqslant 1 \quad \forall\, n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall\, x \in [a,b] \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Alors pour $n \geqslant n_\varepsilon$ une simple majoration :

$$\begin{aligned} \bigg|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\bigg| &= \bigg|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)\,dx\bigg| \\ &\leqslant \int_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx \\ &\leqslant (b-a)\,\frac{\varepsilon}{b-a)} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

conclut. □

Théorème 10.2. [Convergence monotone en théorie de Riemann] *Sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, soit une suite de fonctions :*

$$f_n \colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)},$$

qui sont toutes décroissantes :

$$\Big(a \leqslant x' \leqslant x'' \leqslant b\Big) \implies \Big(f_n(a) \geqslant f_n(x') \geqslant f_n(x'') \geqslant f_n(b)\Big),$$

donc bornées et Riemann-intégrables. On suppose qu'en tous les points $x \in [a,b]$, les limites :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=:\; f(x)$$

existent (convergence ponctuelle), donc définissent une certaine fonction :

$$f \colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors cette fonction-limite est elle aussi décroissante, donc bornée Riemann-intégrable sur $[a,b]$, et surtout, *on a :*

$$\boxed{\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx.}$$

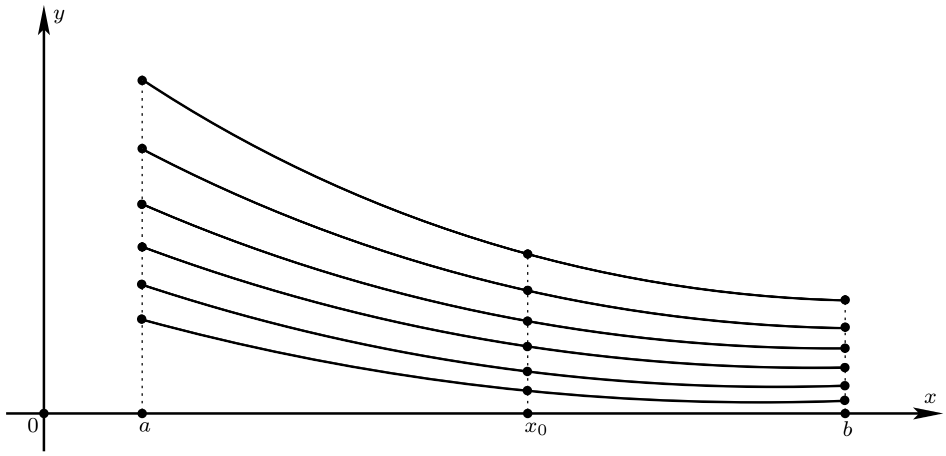
Ce résultat est vrai aussi pour des suites de fonctions qui sont toutes croissantes.

Démonstration. Tout d'abord, la décroissance de la fonction-limite :

$$\Big(x' \leqslant x''\Big) \implies \Big(f(x') \geqslant f(x'')\Big)$$

provient d'un simple passage à la limite dans les inégalités de décroissance des fonctions f_n :

$$\Big(x' \leqslant x''\Big) \implies \Big(f_n(x') \geqslant f_n(x'')\Big) \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)}.$$

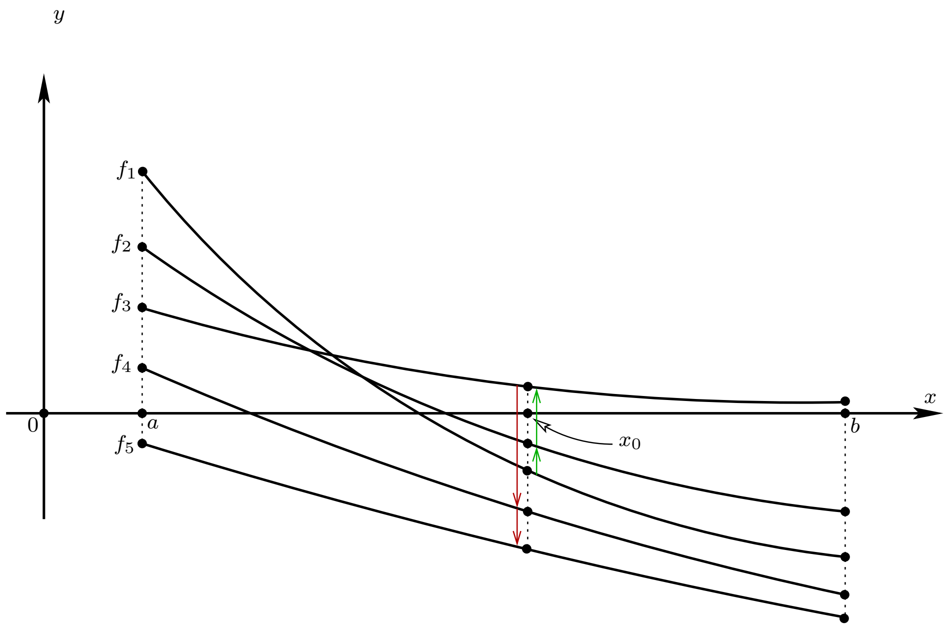


La figure qu'on a spontanément en tête pour se représenter mentalement une telle suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions décroissantes est inexacte par excès de simplicité.

Certes, chaque fonction f_n est décroissante sur $[a, b]$, mais cela ne veut pas forcément dire qu'en un point fixé $x_0 \in [a, b]$, la suite de nombres réels :

$$\big(f_n(x_0)\big)_{n\geqslant 1}$$

soit elle-même décroissante ! Bien qu'une telle affirmation semble contre-intuitive, la figure suivante illustre ce qui peut tout à fait se produire.



En un point $x_0 \in [a, b]$, la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n\geqslant 1}$ peut donc effectivement commencer par croître, puis décroître, *etc.*

Gaston Bachelard disait qu'il faut constamment confronter, éduquer, transformer, métamorphoser, transcender, sublimer, son intuition mathématique. Or les figures, de part leur caractère souvent incomplet et maladroit, exposent salutairement à des questionnements impromptus.

En tout cas, puisque la fonction-limite f est décroissante, elle est Riemann-intégrable. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision :

$$\Delta = \Delta_\varepsilon = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon.$$

Les points d'une telle subdivision Δ_ε sont en nombre fini, égal à $(\nu + 1)$. Or par hypothèse, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge *ponctuellement* vers f. En particulier, elle converge en *tous* les points de la subdivision :

$$\begin{aligned}
f_n(a) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a),\\
f_n(x_1) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_1),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_n(x_{\nu-1}) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_{\nu-1}),\\
f_n(b) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(b).
\end{aligned}$$

Autrement dit, avec ce même $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\exists\, n_\varepsilon^0 \geqslant 1 \quad &\Big(n \geqslant n_\varepsilon^0 \implies \big|f_n(a) - f(a)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big),\\
\exists\, n_\varepsilon^1 \geqslant 1 \quad &\Big(n \geqslant n_\varepsilon^1 \implies \big|f_n(x_1) - f(x_1)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\exists\, n_\varepsilon^{\nu-1} \geqslant 1 \quad &\Big(n \geqslant n_\varepsilon^{\nu-1} \implies \big|f_n(x_{\nu-1}) - f(x_{\nu-1})\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big),\\
\exists\, n_\varepsilon^\nu \geqslant 1 \quad &\Big(n \geqslant n_\varepsilon^\nu \implies \big|f_n(b) - f(b)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big).
\end{aligned}$$

Donc si nous prenons le *maximum* de tous ces entiers-seuils :

$$n_\varepsilon := \max\big(n_\varepsilon^0,\, n_\varepsilon^1,\, \dots,\, n_\varepsilon^{\nu-1},\, n_\varepsilon^\nu\big),$$

alors pour $n \geqslant n_\varepsilon$ nous sommes certains de contrôler par encadrement :

$$f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant f_n(x_\kappa) \leqslant f(x_\kappa) + \frac{\varepsilon}{b-a},$$

pour tous les indices $0 \leqslant \kappa \leqslant \nu$.

Et maintenant, le miracle argumentatif va être que la *monotonie* — ici la *décroissance* —, des fonctions f_n et f assurera que ce simple contrôle en le nombre fini des points de la subdivision Δ se propagera sur les intervalles de Δ.

En effet, si, toujours pour $n \geqslant n_\varepsilon$, nous estimons la somme de Darboux supérieure de f_n, alors la décroissance de f_n et les inégalités finies de contrôle obtenues à l'instant :

$$\begin{aligned}
\Sigma^\Delta(f_n) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \sup_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f_n(x) \\
\text{[f_n est décroissante !]} \qquad &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f_n(x_{\kappa-1}) \\
\text{[Contrôle aux points $x_{\kappa-1}$]} \qquad &\leqslant \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \Big(f(x_{\kappa-1}) + \frac{\varepsilon}{b-a}\Big) \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f(x_{\kappa-1}) + \frac{\varepsilon}{b-a}\big(x_1 - a + \cdots + b - x_{\nu-1}\big) \\
\text{[f aussi est décroissante !]} \qquad &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \sup_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f(x) + \varepsilon \\
\text{[Reconnaître Darboux]} \qquad &= \Sigma^\Delta(f) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

produisent une majoration en termes de la somme de Darboux supérieure de la fonction-limite f.

Quant à une minoration de la somme de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f_n)$, elle se déroule de manière similaire :

$$\begin{aligned}
\Sigma_\Delta(f_n) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \inf_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f_n(x) \\
\text{[f_n est décroissante !]} \qquad &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f_n(x_\kappa) \\
\text{[Contrôle aux points $x_{\kappa-1}$]} \qquad &\geqslant \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \Big(f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a}\Big) \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a}\big(x_1 - a + \cdots + b - x_{\nu-1}\big) \\
\text{[f aussi est décroissante !]} \qquad &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \inf_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f(x) - \varepsilon \\
\text{[Reconnaître Darboux]} \qquad &= \Sigma_\Delta(f) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nous avons donc obtenu une majoration et une minoration :

$$\Sigma^\Delta(f_n) \leqslant \Sigma^\Delta(f) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Sigma_\Delta(f_n) \geqslant \Sigma_\Delta(f) - \varepsilon,$$

qu'il vaut mieux récrire comme :

$$\Sigma^\Delta(f_n) - 2\,\varepsilon \leqslant \Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f_n) + 2\,\varepsilon,$$

afin de synthétiser ces deux résultats avec l'inégalité de départ qui exprimait la Riemann-intégrabilité de f :

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_{\Delta}(f) + \varepsilon,$$

ce qui nous donne les inégalités agréables suivantes :

$$\Sigma^{\Delta}(f_n) - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_{\Delta}(f_n) + 2\,\varepsilon.$$

En effet, ces inégalités sont fort agréables parce que si nous nous souvenons que les sommes de Darboux supérieure et inférieure sont toujours au-dessus et en-dessous de la valeur d'une intégrale :

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \leqslant \Sigma^{\Delta}(f_n) \qquad \text{et} \qquad \Sigma_{\Delta}(f_n) \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx,$$

nous obtenons instantanément un encadrement :

$$\int_a^b f_n(x)\,dx - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx + 2\,\varepsilon,$$

d'où découle, et ce, toujours pour $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant 2\,\varepsilon,$$

ce qui montre bien la convergence désirée $\int f_n \longrightarrow \int f$. □

11. Caractérisation des fonctions Riemann-intégrables

Nous avons observé que toutes les fonctions continues, voire continues par morceaux, sont Riemann-intégrables. Le but de cette section est de réaliser une étude plus aboutie des discontinuités des fonctions Riemann-intégrables, ce qui anticipera avantageusement certains concepts de la Théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Définition 11.1. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit être de mesure 0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille *finie* ou *infinie dénombrable* :

$$\{I_k\}_{k \geqslant 1}$$

d'intervalles *ouverts* $I_k \subset \mathbb{R}$ telle que :

(i) $E \subset \bigcup_{k \geqslant 1} I_k$;

(ii) $\sum_{k \geqslant 1} |I_k| \leqslant \varepsilon$, où $|I_k|$ désigne la longueur de l'intervalle I_k.

La première condition demande que la réunion des intervalles recouvre E, et la deuxième condition exprime que cette réunion peut être rendue de longueur totale arbitrairement petite. Dans cette définition, il importe au plus haut point que la famille des I_k soit de cardinal au plus dénombrable.

Lemme 11.2. *Lorsqu'un tel ensemble E de mesure nulle est de plus* compact*, il est en fait possible de le recouvrir par un nombre* fini *d'intervalles ouverts I_k tels que* $\sum_{k \geqslant 1} |I_k| \leqslant \varepsilon$.

Démonstration. Appliquer simplement le Théorème 3.5 de Heine-Borel pour extraire un recouvrement fini. □

Lemme 11.3. *Si $F \subset E \subset \mathbb{R}$ sont deux sous-ensembles, et si E est de mesure 0, alors F est aussi de mesure 0.*

Démonstration. Tout recouvrement de E par des intervalles ouverts, avec somme de longueurs très petite, recouvre aussi F. □

Lemme 11.4. *Tout sous-ensemble* fini :

$$E = \big\{x_1, x_2, \dots, x_N\big\} \subset \mathbb{R}$$

est de mesure nulle.

Démonstration. En effet, pour tout $\delta > 0$, la réunion des N intervalles ouverts :

$$I_k := \big]x_k - \delta,\ x_k + \delta\big[\ni x_k \qquad {\scriptstyle (k=1 \cdots N)}$$

recouvre manifestement E, et la somme de toutes leurs longueurs :

$$2\,\delta\,N \leqslant \varepsilon$$

sera inférieure à un $\varepsilon > 0$ quelconque pourvu seulement que $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,N}$. □

Lemme 11.5. *Tout sous-ensemble* infini dénombrable :

$$E = \big\{x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots\dots\big\} \subset \mathbb{R}$$

est aussi de mesure nulle

Démonstration. Au premier abord, cet énoncé semble exagérément optimiste, puisque si l'on s'en réfère à l'argument qui précède, à savoir si l'on recouvre les points de E par des intervalles ouverts de longueur $2\,\delta$, lorsque $N \to \infty$, la somme de leurs longueurs :

$$2\,\delta\,N \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

ne pourra jamais être rendue arbitrairement petite !

Toutefois, rien n'interdit de *rapetisser de plus en plus* la longueur des intervalles qui contiennent les points $x_1, x_2, x_3, \dots$, et en effet, si l'on prend :

$$I_k := \big]x_k - \tfrac{1}{2}\,\tfrac{\varepsilon}{2^k},\ x_k + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{\varepsilon}{2^k}\big[\ni x_k \qquad {\scriptstyle (k=1 \cdots \infty)},$$

alors la somme des longueurs correspondantes :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} &= 2\,\varepsilon\bigg(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \cdots\bigg) \\
&= 2\,\varepsilon\,\frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= 2\,\varepsilon
\end{aligned}$$

sera effectivement arbitrairement petite. □

Lemme 11.6. *Toute réunion* finie *ou* infinie dénombrable *d'ensembles de mesure nulle est encore de mesure 0.*

Démonstration. L'idée est essentiellement la même que dans le lemme qui précède. Notons :

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ \dots,\ E_i,\ E_{i+1},\ \dots\dots$$

ces ensembles et notons :

$$E := \bigcup_{i \geqslant 1} E_i$$

leur réunion finie ou dénombrable.

Par hypothèse, chaque E_i est de mesure nulle. Pour chaque indice i, appliquons alors la définition non pas avec ε, mais avec $\frac{\varepsilon}{2^i}$, ce qui nous fournit des intervalles :

$$I_{i,1},\ I_{i,2},\ \dots,\ I_{i,k},\ \dots\dots$$

dont la réunion recouvre E_i :

$$E_i \subset \bigcup_{k \geqslant 1} I_{i,k},$$

et dont la somme totale des longueurs est donc majorée par :

$$\sum_{k \geqslant 1} \big|I_{i,k}\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Mais alors il est clair que la double réunion recouvre l'ensemble :

$$E \subset \bigcup_{i \geqslant 1} \bigcup_{k \geqslant 1} I_{i,k},$$

et un calcul simple montre que la somme totale des longueurs correspondantes :

$$\begin{aligned}\sum_{i \geqslant 1} \sum_{k \geqslant 1} \big|I_{i,k}\big| &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

est effectivement arbitrairement petite. □

Nous pouvons maintenant énoncer la caractérisation fondamentale des fonctions Riemann-intégrables en termes de leurs discontinuités, caractérisation qui mettra en lumière les limitations de cette théorie.

Théorème 11.7. [Caractérisation fondamentale des fonctions Riemann-intégrables] *Une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble des points où elle n'est* pas *continue est de mesure* 0.

Autrement dit, on a Riemann-intégrabilité lorsque et seulement lorsque l'ensemble des points de discontinuité est de mesure nulle.

Mais au fait, qu'appelle-t-on un *point de discontinuité* d'une fonction f ? Avant d'entamer la démonstration de ce théorème, il convient de développer quelques préliminaires conceptuels.

Par définition, une fonction :

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est *continue* en un point $c \in [a,b]$ si :

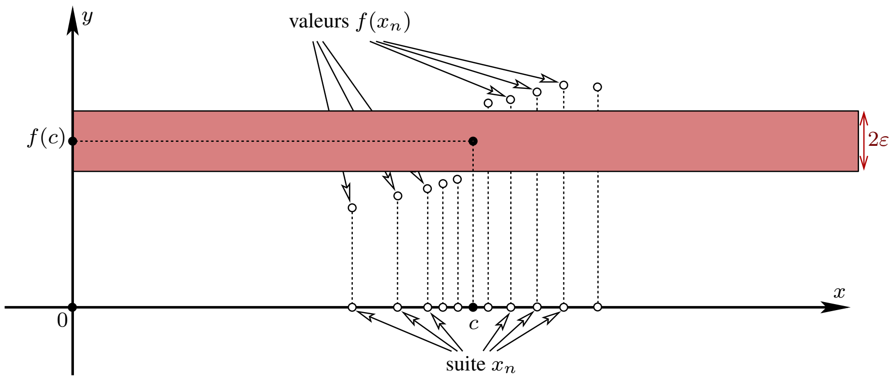
$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \forall\,x \quad |x-c| \implies \big|f(x)-f(c)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Si maintenant, nous nous rappelons que la négation d'une formule logique du premier ordre intervertit les symboles $\forall$ et $\exists$, la *non*-continuité de la fonction f en un point $c \in [a,b]$ s'exprimera comme :

$$\exists\,\varepsilon > 0 \quad \forall\,\delta > 0 \quad \exists\,x \quad |x-c| \leqslant \delta \quad \text{tel que} \quad \big|f(x)-f(c)\big| > \varepsilon.$$

Pour des raisons personnelles qui n'ont pas de fondement rationnel, l'auteur de ces lignes préfère les inégalités larges et nous écrirons plutôt $\geqslant \varepsilon$ à la fin, ce qui de toute façon, est *a fortiori* satisfait ici :

$$\exists\,\varepsilon > 0 \quad \forall\,\delta > 0 \quad \exists\,x \quad |x-c| \leqslant \delta \quad \text{tel que} \quad \big|f(x)-f(c)\big| \geqslant \varepsilon.$$



Assertion 11.8. *Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ est* non-*continue en un point $c \in [a,b]$ si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ et il existe une suite de points :*

$$\big(x_n\big)_{n\geqslant 1} \in [a,b]$$

qui tendent vers :

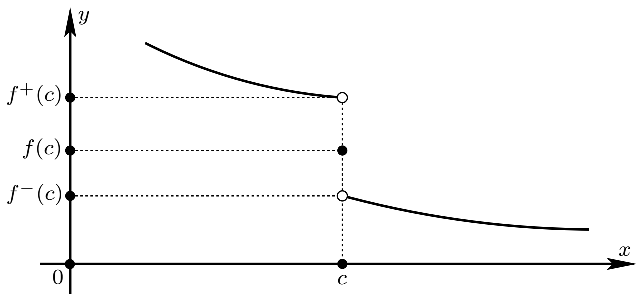
$$c = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

tels que :

$$\big|f(x_n)-f(c)\big| \geqslant \varepsilon \qquad\qquad (\forall\,n\geqslant 1).$$

Démonstration. Il s'agit de prendre une suite de nombres strictement positifs $\delta_n \to 0$ tendant vers 0, les détails de cet énoncé censé être connu étant laissés en exercice. □

Intuitivement, donc, le graphe d'une fonction réelle f au voisinage d'un point de discontinuité saute, s'écarte, oscille. Mais comment conceptualiser cela plus avant ?



Définition 11.9. Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ est dite admettre une *discontinuité de première espèce* en un point :

$$c \in [a,b],$$

lorsque les deux limites suivantes à gauche et à droite :

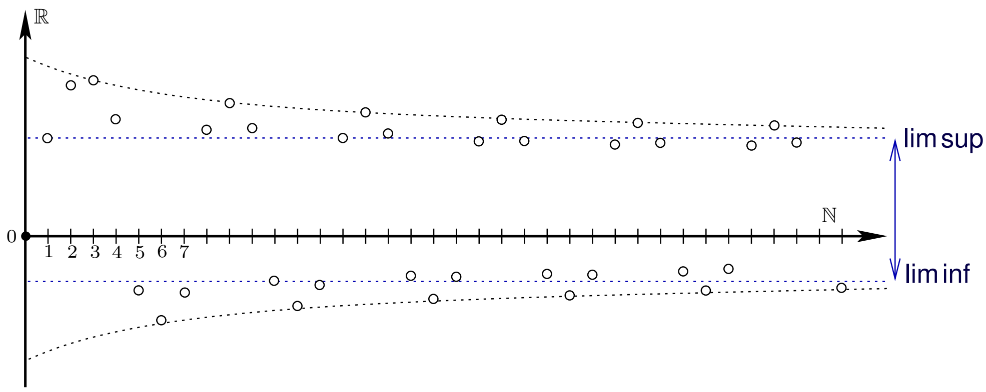
$$\lim_{\substack{x\to c\\ <}} f(x) =: f^-(c) \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{\substack{x\to c\\ >}} f(x) =: f^+(c) \in \mathbb{R}$$

existent et sont finies — pour $c = a$ ou $c = b$, l'une des deux limites n'est bien sûr pas à considérer.

Toutefois, ces discontinuités de première espèce qui sont bien connues sont un peu trop simples. Comment, alors, mieux s'imaginer la *vibration* d'une discontinuité ?

Un concept plus avancé, le concept d'*oscillation*, va *quantifier* la non-continuité d'une fonction en un point, en disant *de combien* une fonction est discontinue. Commençons par un élément d'inspiration.



Définition 11.10. L'*oscillation à l'infini* d'une suite de nombres réels :

$$\big(a_n\big)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}$$

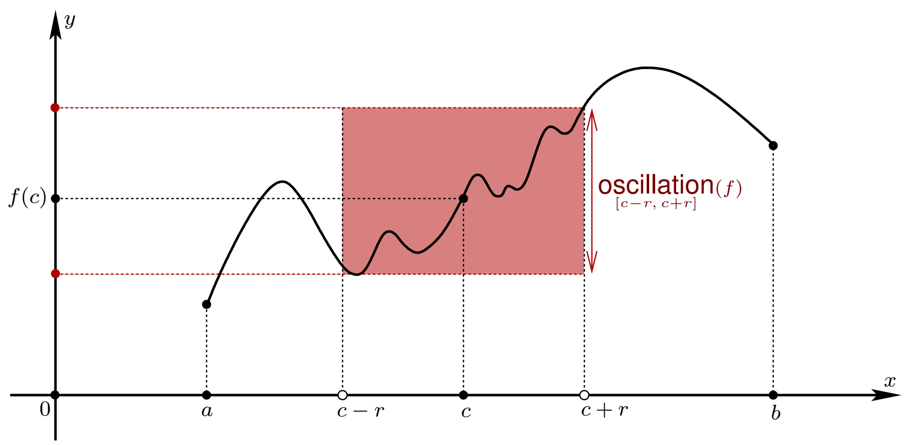
est la quantité :

$$\mathrm{oscillation}\big((a_n)_{n\geqslant 1}\big) := \limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Si nous revenons donc à une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, pour capturer ce que l'on pourra se représenter comme étant son *oscillation microscopique* autour d'un point $c \in [a,b]$, il conviendra de regarder des intervalles centrés au point c :

$$\big[c - r,\, c + r\big]$$

de longueur $2\,r > 0$ petite et de regarder l'écartement maximal entre les valeurs de f sur cet intervalle.



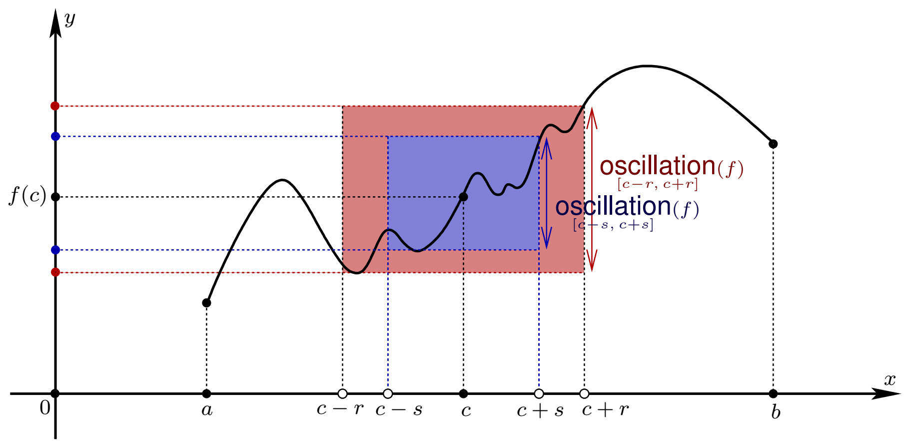
Définition 11.11. Sur un tel intervalle $[c-r,\, c+r]$, on introduit :

$$\underset{[c-r,\,c+r]}{\mathrm{oscillation}}(f) \;:=\; \sup_{x,y\in[c-r,c+r]} \big|f(x)-f(y)\big|.$$

Comme tout supremum décroît lorsqu'on réduit l'ensemble sur lequel on le prend, la fonction :

$$r \longmapsto \underset{[c-r,\,c+r]}{\mathrm{oscillation}}(f)$$

est *décroissante*. Elle admet donc certainement une limite lorsque $r \underset{>}{\longrightarrow} 0$.



Définition 11.12. En un point $c \in [a,b]$, l'*oscillation* d'une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ est cette limite des oscillations macroscopiques sur des intervalles centrés en c qui rétrécissent indéfiniment :

$$\boxed{\mathrm{oscillation}\,(f,c) \;:=\; \lim_{r \underset{>}{\rightarrow} 0}\, \underset{[c-r,\,c+r]}{\mathrm{oscillation}}(f).}$$

On se convainc alors aisément (exercice) de la véracité de l'énoncé suivant.

Assertion 11.13. *Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est* continue *en un point $c \in [a,b]$ si et seulement si :*

$$0 = \mathrm{oscillation}(f,c).$$ □

De plus, si, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on introduit les ensembles :

$$\mathrm{Osc}_\varepsilon(f) \;:=\; \big\{c \in [a,b]\colon\ \text{l'oscillation de } f \text{ en } c \text{ est } \geqslant \varepsilon\big\},$$

alors une conséquence directe de cette dernière assertion est que :

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Disc}(f) &:= \big\{c \in [a,b]\colon\ f \text{ n'est pas continue en } c\big\} \\ &= \bigcup_{\varepsilon>0} \mathrm{Osc}_\varepsilon(f). \end{aligned}}$$

Lemme 11.14. *Pour $\varepsilon > 0$ fixé quelconque, le sous-ensemble :*

$$\mathrm{Osc}_\varepsilon(f) \;\subset\; [a,b]$$

est fermé, *donc* compact.

Démonstration. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe une suite de points dans ce sous-ensemble :

$$\big(c_n\big)_{n\geqslant 1} \in \mathsf{Osc}_\varepsilon(f)$$

qui tend vers un point $c \in [a,b]$ qui ne lui appartient *plus :*

$$c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c \notin \mathsf{Osc}_\varepsilon(f).$$

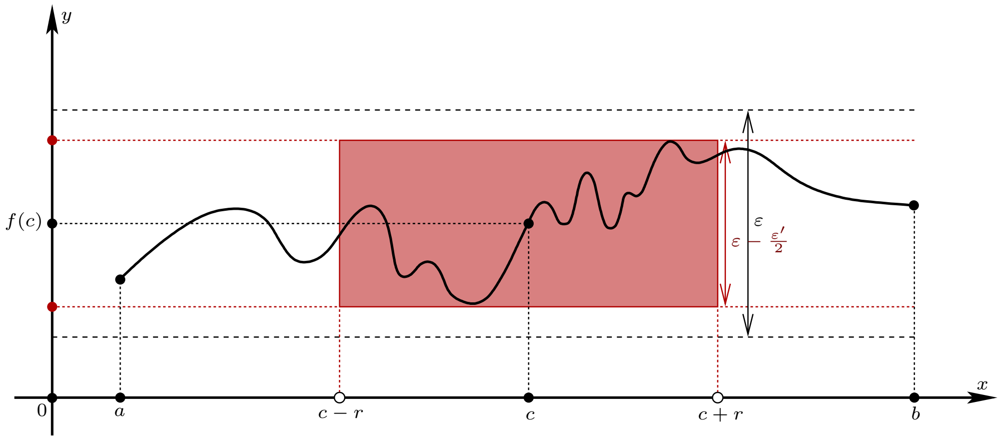
Ceci veut dire qu'en ce point, l'oscillation de f est strictement inférieure :

$$\mathsf{oscillation}(f,c) < \varepsilon,$$

ce qu'on peut ré-exprimer en disant qu'elle est égale à :

$$\varepsilon - \varepsilon' = \mathsf{oscillation}(f,c),$$

pour un certain $\varepsilon' > 0$ strictement positif.



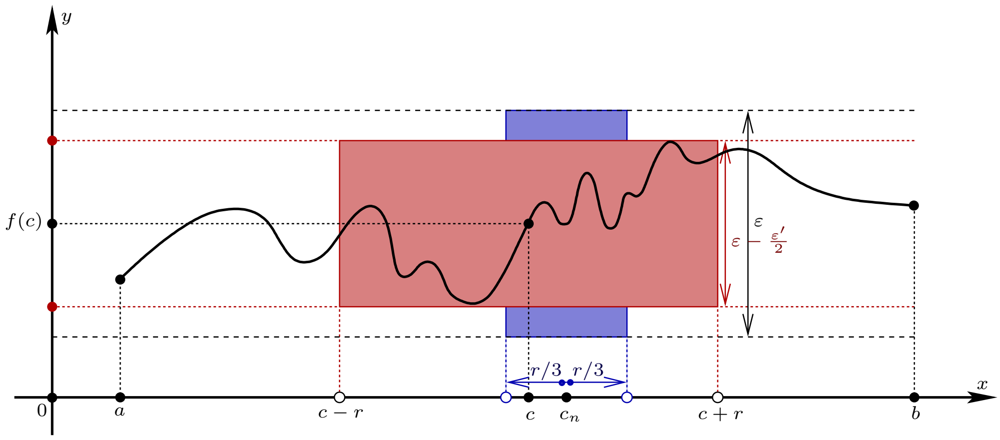
Or par définition, cette oscillation est une limite décroissante :

$$\varepsilon - \varepsilon' = \lim_{r\to 0} \underset{[c-r,c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f),$$

donc il existe un $r > 0$ assez petit pour que :

$$\underset{[c-r,c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f) \leqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon,$$

soit toujours strictement inférieure à ε.



Ensuite, comme $c_n \to c$ tend vers c, prenons un entier $n \gg 1$ assez grand pour que :

$$\big|c_n - c\big| \leqslant \frac{r}{3}.$$

En de tels points :

$$c_n \in \mathsf{Osc}_\varepsilon(f),$$

l'oscillation sur un intervalle est bien entendu supérieure à l'oscillation ponctuelle :

$$\begin{aligned}\underset{[c_n-r/3,\, c_n+r/3]}{\mathsf{oscillation}}(f) &\geqslant \mathsf{oscillation}(f, c_n)\\ &\geqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Mais alors, puisqu'on a arrangé les choses de manière à avoir l'inclusion :

$$\big[c_n - \tfrac{r}{3},\ c_n + \tfrac{r}{3}\big] \subset \big[c - r,\ c + r\big],$$

on déduit un jeu d'inégalités :

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leqslant \underset{[c_n-r/3,\, c_n+r/3]}{\mathsf{oscillation}}(f)\\ &= \sup_{x,y\in[c_n-r/3,\, c_n+r/3]} \big|f(x) - f(y)\big|\\ &\leqslant \sup_{x,y\in[c-r,\, c+r]} \big|f(x) - f(y)\big|\\ &= \underset{[c-r,\, c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f)\\ &\leqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2},\end{aligned}$$

qui apporte une contradiction terminant l'argumentation. Géométriquement, la courbe qui est enfermée dans une boîte de hauteur $\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2}$ ne peut plus dépasser jusqu'à une hauteur ε autour de c_n. $\square$

Démonstration du Théorème 11.7. Montrons la première implication :

$$\big(f \text{ est Riemann-intégrable}\big) \implies \big(0 = \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Disc}(f)\big)\big).$$

Nous savons que l'ensemble des points de discontinuité de f :

$$\mathsf{Disc}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)$$

est la réunion *dénombrable* des ensembles où l'oscillation de f est $\geqslant 1/n$. Grâce au Lemme 11.6 d'après lequel la nullité de la mesure est stable par réunion dénombrable, il suffit de montrer pour tout $n \geqslant 1$ que :

$$0 = \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)\big).$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Comme f est par hypothèse Riemann-intégrable, il existe une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \frac{\varepsilon}{n}.$$

Soit un point quelconque :

$$x \in \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f).$$

Il se peut que x soit l'un des points $a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b$ de la subdivision Δ, mais comme ces points sont en nombre *fini*, donc de mesure nulle, il suffit même de montrer :

Assertion 11.15. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a :*

$$0 = \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)\big\backslash\{a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b\}\big).$$

Démonstration. L'intérêt, c'est que maintenant dans l'intervalle $[a, b]$ excisé de ces points, on n'a plus affaire qu'à des intervalles *ouverts :*

$$\mathring{I}_\kappa :=]x_{\kappa-1},\, x_\kappa[\qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant \kappa \leqslant \nu)},$$

lesquels conviendront mieux dans les arguments techniques. En effet, soit un point quelconque :

$$x \in \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)\big\backslash\{a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b\},$$

donc appartenant à un certain tel intervalle ouvert :

$$x \in \mathring{I}_\kappa \cap \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f).$$

Alors par définition de l'oscillation de f en x :

$$\begin{aligned}\sup_{[x_{\kappa-1},\, x_\kappa]} f - \inf_{[x_{\kappa-1},\, x_\kappa]} f &\geqslant \mathsf{oscillation}(f, x) \\ &\geqslant \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

En revenant à la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure, on peut donc minorer :

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{n} &\geqslant \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big|I_\kappa\big| \Big(\sup_{I_\kappa} f - \inf_{I_\kappa} f\Big) \\ &\geqslant \sum_{\{\kappa\colon\ \mathring{I}_\kappa \cap \mathsf{Osc}_{1/n}(f) \neq \emptyset\}} \big|I_\kappa\big| \cdot \frac{1}{n},\end{aligned}$$

ce qui, après division par $\frac{1}{n}$ donne la majoration :

$$\sum_{\{\kappa\colon\ \mathring{I}_\kappa \cap \mathsf{Osc}_{1/n}(f) \neq \emptyset\}} \big|I_\kappa\big| \leqslant \varepsilon,$$

et montre bien, finalement, qu'on a recouvert l'ensemble $\mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)\big\backslash\{a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b\}$ par une réunion d'intervalles ouverts de mesure arbitrairement petite. $\square$

Montrons maintenant la deuxième implication :

$$\big(f \text{ est Riemann-intégrable}\big) \Longleftarrow \Big(0 = \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Disc}(f)\big)\Big).$$

Soit donc f une fonction dont les discontinuités sont de mesure nulle. Comme nous savons que l'ensemble de ces discontinuités est la réunion des points où l'oscillation est strictement positive :

$$\mathsf{Disc}(f) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathsf{Osc}_\varepsilon(f),$$

fixons donc un tel $\varepsilon > 0$, et suppons-le arbitrairement petit. Par hypothèse et par le Lemme 11.3 :

$$0 = \text{Mesure}\big(\text{Osc}_\varepsilon(f)\big),$$

et comme ce sous-ensemble :

$$\text{Osc}_\varepsilon(f) \subset [a,b]$$

est fermé grâce au Lemme 11.14, donc compact, le Lemme 11.2 assure qu'il existe un nombre *fini* $N \geqslant 1$ d'intervalles *ouverts* $I_k \subset \mathbb{R}$ le recouvrant :

$$\text{Osc}_\varepsilon(f) \subset I_1 \cup \cdots \cup I_N,$$

et de longueur totale :

$$|I_1| + \cdots + |I_N| \leqslant \varepsilon,$$

avec le même $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Maintenant, ces I_k étant ouverts, le complémentaire :

$$[a,b] \backslash \big(I_1 \cup \cdots \cup I_N\big)$$

est fermé, borné, donc compact, et en l'un quelconque de ses points :

$$\begin{aligned} z &\in [a,b] \backslash \big(I_1 \cup \cdots \cup I_N\big) \\ &\subset [a,b] \backslash \text{Osc}_\varepsilon(f) \\ &= [a,b] \backslash \big\{c \in [a,b] \colon \text{oscillation}(f,c) \geqslant \varepsilon\big\} \end{aligned}$$

on a manifestement :

$$\text{oscillation}(f,z) < \varepsilon.$$

Par conséquent, autour de tout tel point z, il existe un certain intervalle ouvert $J_z \ni z$ assez petit pour que l'oscillation associée de f sur la fermeture $\overline{J}_z$ satisfasse :

$$\sup_{x,y \in \overline{J}_z} \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Le Théorème 3.5 de Heine-Borel assure alors que du recouvrement ouvert infini :

$$\bigcup_z J_z \supset [a,b] \backslash \big(I_1 \cup \cdots \cup I_N\big)$$

on peut extraire un recouvrement *fini*, que l'on notera :

$$J_1 \cup \cdots \cup J_M,$$

et donc au total les $I_\bullet$ et les $J_\bullet$ recouvrent tout l'intervalle de définition de f :

$$I_1 \cup \cdots \cup I_N \bigcup J_1 \cup \cdots \cup J_M \supset [a,b].$$

Maintenant, si nous prenons tous les points-extrémités de ces $(N+M)$ intervalles $I_\bullet$ et $J_\bullet$ qui appartiennent à $[a,b]$, nous obtenons une certaine subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}.$$

Assertion 11.16. *Alors les sommes de Darboux supérieure et inférieure de f associées à cette subdivision satisfont :*

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon\Big(2 \sup_{[a,b]} |f| + b - a\Big).$$

Démonstration. En effet, remémorons-nous que cette différence s'explicite comme :

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \Big(\sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f - \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f\Big).$$

Alors si dans cette somme de ν termes, nous distinguons deux cas — pas forcément exclusifs (exercice mental) — :

Cas 1 : $[x_{\kappa-1},\, x_\kappa] \subset I_\bullet$,

Cas 2 : $[x_{\kappa-1},\, x_\kappa] \subset J_\bullet$,

nous pouvons la majorer comme suit :

$$\begin{aligned}
\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) &\leqslant \sum_{\{\kappa\colon [x_{\kappa-1},x_\kappa]\subset I_\bullet\}} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \underbrace{\Big(\sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f - \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f\Big)}_{\leqslant \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f} + \sum_{\{\kappa\colon [x_{\kappa-1},x_\kappa]\subset J_\bullet\}} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \underbrace{\Big(\sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f - \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f\Big)}_{\leqslant \varepsilon, \text{ car } [x_{\kappa-1},x_\kappa] \text{ est un } J_\bullet} \\
&\leqslant \Big(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f\Big) \sum_{\{\kappa\colon [x_{\kappa-1},x_\kappa]\subset I_\bullet\}} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) + \varepsilon \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \\
&\leqslant \Big(2 \sup_{[a,b]} |f|\Big) \big(\underbrace{|I_1| + \cdots + |I_N|}_{\leqslant \varepsilon}\big) + \varepsilon\,(b-a) \\
&\leqslant \varepsilon \Big(2 \sup_{[a,b]} |f| + b - a\Big),
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Puisque $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, cette dernière assertion montre bien que f est Riemann-intégrable, terminant donc le traitement de la deuxième implication.

La démonstration très détaillée de l'équivalence entre Riemann-intégrabilité et nullité de la mesure de l'ensemble des points de discontinuité est donc achevée. □

12. Fonctions non Riemann-intégrables

Exemple 12.1. [Fonction de Dirichlet non Riemann-intégrable] La fonction indicatrice des nombres rationnels sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \text{ est un nombre rationnel,} \\ 0 & \text{lorsque } x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1] \text{ est un nombre } ir\text{rationnel,} \end{cases}$$

est manifestement bornée.

Nous affirmons qu'elle n'est pas Riemann-intégrable.

En effet, pour toute subdivision de l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

grâce à la densité des nombres rationnels et à la densité des nombres irrationnels, pour tout $k = 1, \ldots, n$, il existera toujours simultanément :

- au moins un nombre rationnel $\frac{p_k}{q_k} \in [x_{k-1}, x_k] \cap \mathbb{Q}$,
- au moins un nombre irrationnel $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k] \cap \big(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\big)$,

d'où nous déduisons :

$$1 = \sup_{I_k} \big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big),$$
$$0 = \inf_{I_k} \big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big),$$

et par conséquent :

$$\Sigma^{\Delta}\big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{x_1}) \cdot 1 = 1,$$
$$\Sigma_{\Delta}\big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{x_1}) \cdot 0 = 0,$$

et donc puisque cela est vrai pour *toute* subdivision Δ, il n'y a absolument aucune chance de rendre l'erreur $\Sigma^{\Delta} - \Sigma_{\Delta}$ inférieure à un nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit donné à l'avance.

Dans peu de temps, nous verrons que la théorie supérieure de l'intégrale de Lebesgue démontre que cette fonction 'Riemann-pathologique' $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ *est en fait intégrable au sens de Lebesgue et qu'elle satisfait :*

$$0 = \int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}, \qquad \textit{et} \qquad 1 = \int_0^1 \mathbf{1}_{(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,1]},$$

ce qui est en cohérence avec le fait qu'il y a infiniment plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels.

Notation 12.2. On note :

$$\mathscr{R}[a,b] := \Big\{ f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}\colon\ f \text{ est Riemann-intégrable} \Big\}.$$

Cet ensemble est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition 12.3. Sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie ou infinie, on appelle *semi-norme* une application :

$$N\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

qui satisfait :

(i) [Homogénéité] pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in E$:

$$N(\lambda\, f) = |\lambda|\, N(f);$$

(ii) [Inégalité triangulaire] pour tous $f, g \in E$:

$$N(f+g) \leqslant N(f) + N(g).$$

Dans cette définition, la troisième condition très forte nécessaire pour avoir une vraie norme :

$$N(f) = 0 \implies f = 0,$$

n'est *pas* demandée.

Proposition 12.4. *L'application :*

$$\begin{aligned} \mathscr{R}[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx \end{aligned}$$

est une semi-norme.

Démonstration. La propriété **(i)** étant facile, pour vérifier **(ii)**, il suffit d'appliquer point par point l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$:

$$\big|f(x)+g(x)\big| \leqslant |f(x)|+|g(x)|,$$

et d'intégrer. □

Cette semi-norme intégrale de la valeur absolue d'une fonction n'est *pas* une norme — penser à une fonction en escalier nulle sur ses intervalles de définition et non nulle en leurs extrémités. *La théorie supérieure de Lebesgue montrera comment étendre le concept d'intégrale et comment mieux envisager les fonctions à une certaine équivalence près, afin que l'intégrale de la valeur absolue d'une fonction devienne une vraie norme.*

13. Exercices

Exercice 1. Montrer que la fonction $f\colon\ ]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \frac{1}{x(1-x)}$ est continue, mais qu'elle n'est pas uniformément continue.

Exercice 2. Soient deux réels a et b avec $-\infty < a \leqslant b < \infty$, et soit l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On suppose comme dans le Théorème 3.5 que $[a,b] \subset \bigcup_{j\in J} I_j$ est recouvert par une réunion quelconque d'intervalles ouverts non vides $I_j \subset \mathbb{R}$, et on introduit l'ensemble :

$$\mathscr{C} := \big\{c \in [a,b]\colon \text{ l'intervalle } [a,c] \text{ admet un sous-recouvrement } \textit{fini} \text{ extrait de } \cup_{j\in J}\ I_j\big\}.$$

(a) Montrer que $a \in \mathscr{C}$.

(b) Pour $c \in \mathscr{C}$, montrer que tout c' avec $a \leqslant c' \leqslant c$ appartient aussi à $\mathscr{C}$.

(c) En déduire qu'il existe $b^* \in [a,b]$ tel que $\mathscr{C} = [a,b^*[$, ou tel que $\mathscr{C} = [a,b^*]$.

(d) Montrer qu'en fait, $b^* \in \mathscr{C}$.

(d) Montrer enfin que $b^* = b$ et conclure.

Exercice 3. Démontrer le Théorème 3.7.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, où $-\infty < a < b < \infty$, est Riemann-intégrable si et seulement si son opposée $-f$ l'est.

Exercice 5. Montrer que la Définition 2.3 de Riemann-intégrabilité d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en termes de sommes de Darboux inférieure et supérieure dans lesquelles les inf et les sup sont pris sur des intervalles *fermés* $[x_{k-1},x_k]$ est équivalente à celle où l'on prendrait les inf et les sup sur des intervalles *ouverts* $]x_{k-1},x_k[$, à savoir plus précisément, montrer que f est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}$$

de l'intervalle $[a,b]$ telle que :

$$\big(0 \leqslant\big) \quad \Sigma_{\sim}^{\Delta} - \Sigma_{\Delta}^{\sim} \leqslant \varepsilon,$$

où :

$$\Sigma_{\Delta}^{\sim} := \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{x_{k-1}<x<x_k} f(x),$$

$$\Sigma_{\sim}^{\Delta} := \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{x_{k-1}<x<x_k} f(x).$$

Exercice 6. Montrer qu'une fonction bornée définie sur un intervalle compact est Riemann-intégrable si et seulement si elle est approchable en dessous et au-dessus par deux fonctions en escalier dont les valeurs intégrales peuvent être rendues arbitrairement proches, comme cela est stipulé dans la Proposition 4.8.

Exercice 7. Établir rigoureusement les propriétés **(ii)**, **(iii)** et **(iv)** du Théorème 5.1.

Exercice 8. Soit une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $|f|$ est Riemann-intégrable, f l'est-elle ?

Exercice 9. Comparer $\int_0^2 f(x)\,g(x)\,dx$ et le produit $\int_0^2 f(x)\,dx \times \int_0^2 g(x)\,dx$ lorsque $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ et $g = \mathbf{1}_{]1,2]}$.

Exercice 10. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz du Théorème 5.14 satisfaite par les paires de fonctions Riemann-intégrables en raisonnant avec des sommes de Darboux et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète :

$$\Big(\lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_N\mu_N\Big)^2 \leqslant \Big(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_N^2\Big)\,\Big(\mu_1^2 + \cdots + \mu_N^2\Big).$$

Exercice 11. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée Riemann-intégrable définie sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, et soit un point $x_0 \in \,]a,b[$. Montrer que si f admet une limite *à gauche* en x_0, à savoir si :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) =: f^-(x_0) \qquad \text{existe,}$$

alors la fonction F définie par :

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable *à gauche* en x_0 avec une valeur de sa dérivée à gauche $F'^{-}(x_0)$ justement égale à :

$$f^-(x_0) = F'^{-}(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}.$$

Traiter aussi le cas des limites à droite.

Exercice 12. Sans supposer f continue comme dans les Corollaires 7.3, 7.4, et en raisonnant avec des sommes de Darboux, montrer que si f est Riemann-intégrable sur les intervalles appropriés, les deux formules élémentaires :

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,dy \qquad (c \in \mathbb{R})$$

$$c\int_a^b f(cx)\,dx = \int_{ac}^{bc} f(y)\,dy \qquad (c \in \mathbb{R}^*)$$

sont encore valables.

Exercice 13. Le but est de démontrer que toute fonction qui est limite uniforme de fonctions Riemann-intégrables est encore Riemann-intégrable.

Sur un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}$, on suppose donnée une suite de fonctions *bornées* $f_n\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, qui converge uniformément vers une certaine fonction $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\,n \geqslant n_\varepsilon \quad \forall\,x \in E \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

(a) Montrer que f est elle aussi bornée.

(b) Montrer que pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$\Big|\inf_E f_n - \inf_E f\Big| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Big|\sup_E f_n - \sup_E f\Big| \leqslant \varepsilon,$$

et en déduire que :

$$\inf_E f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_E f \qquad \text{et} \qquad \sup_E f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_E f.$$

On suppose dorénavant que $E = [a,b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$ et on ajuste n_ε pour que :

$$n \geqslant n_\varepsilon \implies \left(\forall\,x \in [a,b] \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\right).$$

(c) Si Δ est une subdivision quelconque de $[a,b]$, montrer que pour tout $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon.$$

(d) Montrer que f est Riemann-intégrable.

(e) On appelle *fonction réglée* toute fonction qui est limite uniforme de fonctions en escalier. Montrer que les fonctions réglées sont Riemann-intégrables.

(f) Montrer que la fonction indicatrice :

$$\mathbf{1}_K$$

de l'ensemble :

$$K := \left\{1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2^2},\ \tfrac{1}{2^3},\ \tfrac{1}{2^4},\ \tfrac{1}{2^5},\ \dots\right\}$$

est Riemann-intégrable mais n'est pas réglée.

Exercice 14. **(a)** Montrer qu'une fonction réglée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet toujours des limites à droites et à gauche en tout point $x_0 \in [a,b]$.

(b) Montrer que la fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ pour $0 < x \leqslant 1$ est Riemann-intégrable mais pas réglée.

Exercice 15. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique :

$$f(\theta + 2k\,\pi) = f(\theta) \qquad (\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \forall\,k\in\mathbb{Z}),$$

bornée :

$$M_{|f|} = \sup_{\theta\in[-\pi,\pi]} |f(\theta)| < \infty,$$

et Riemann-intégrable. Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions continues *et* 2π-périodiques :

$$f_n\colon \quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C},$$

avec :

$$\sup_{\theta\in[-\pi,\pi]} |f_n(\theta)| \leqslant M_{|f|},$$

telles que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f_n(\theta) - f(\theta)\big|\,d\theta.$$

Exercice 16. Soit une fonction réelle $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité $c \in [a,b]$ de f qui sont de *première espèce* au sens où f admet des limites à gauche et à droite en c, est un sous-ensemble de $[a,b]$ de cardinal au plus dénombrable.

Exercice 17. Montrer que l'oscillation à l'infini de la suite $n \longmapsto \cos n$ vaut 2.

Exercice 18. Montrer que la fonction $x \longmapsto 1/x$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ prolongée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $0 \mapsto 0$ a une oscillation égale à ∞ en $x = 0$, et une oscillation nulle ailleurs.

Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin(1/x)$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ prolongée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $0 \mapsto 0$ a une oscillation égale à 2 en $x = 0$, et une oscillation nulle ailleurs.

Exercice 19. **(a)** Montrer que la fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \text{ est irrationnel,} \\ 1 & \text{lorsque } x = 0, \\ \dfrac{1}{q} & \text{lorsque } x = \dfrac{p}{q} \text{ est une fraction irréductible,} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable. Indication: Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, construire une subdivision Δ de $[0,1]$ telle que $\Sigma^\Delta(f) \leqslant \varepsilon$. Une autre démonstration consiste à établir que f est limite uniforme de fonctions en escalier.

(b) Utiliser cette fonction et la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ des rationnels de $[0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par composition.

(c) Utiliser de même la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ des rationnels de $[0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par limite simple.

(d) Montrer directement que l'ensemble des points de discontinuité de f est de mesure 0.

Exercice 20. Le but est de donner une preuve alternative du Théorème 5.8. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée Riemann-intégrable définie sur un intervalle borné compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, et soit φ une fonction définie sur un segment contenant $f([a,b])$.

(a) Lorsque φ est 1-lipschitzienne, montrer que $\varphi \circ f$ est Riemann-intégrable.

(b) Montrer que toute fonction continue sur un segment borné de $\mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions 1-lipschitziennes. Indication: Approximer φ par des fonctions affines par morceaux.

(c) En déduire que si φ est continue, alors $\varphi \circ f$ est Riemann-intégrable.

Exercice 21. Démontrer les trois résultats suivants :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \log 2; \tag{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2} = \frac{1}{2}; \tag{b}$$

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=n}^{2\,n-1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}. \tag{c}$$

Exercice 22. Démontrer les trois résultats suivants :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2\,kn}} = \sqrt{3}-1; \tag{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2\,n} \frac{k}{k^2+n^2} = \frac{1}{2}\log 5; \tag{b}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2\,k}} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{2}-1. \tag{c}$$

Exercice 23. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites des suites suivantes :

$$a_n := \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2\,n+3\,k}, \qquad b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\!\left(\frac{k\,\pi}{n}\right), \qquad c_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2},$$

$$d_n := \sum_{k=n}^{2\,n} \frac{\pi}{k}, \qquad e_n := \sum_{k=n}^{2\,n} \sin\!\left(\frac{\pi}{k}\right), \qquad f_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3},$$

$$g_n := n^2 \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{4\,k}{n^2}}}.$$

Exercice 24. Calculer les trois limites suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\log\left(\frac{k}{n}\right)}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\,n\right)}{n}.$$

Exercice 25. Évaluer les limites des deux sommes de Riemann suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\,\pi}{n}\right); \tag{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}. \tag{b}$$

Exercice 26. En utilisant les sommes de Riemann, calculer, si elle existe, la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\!\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right).$$

Exercice 27. Sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une fonction continue positive $f \in \mathscr{C}^0\big([a,b], \mathbb{R}_+\big)$. Montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \big[f(x)\big]^n\, dx\right)^{1/n} = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Exercice 28. Sur l'intervalle unité $[0,1]$, soit une fonction continue $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Déterminer :

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 x^n\, f(x)\, dx.$$

Exercice 29. Pour $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$, calculer :

$$\int_0^{2\pi} \log\big(1 - 2\,x\cos\theta + x^2\big)\, d\theta.$$

Indication: On utilisera les sommes de Riemann après avoir remarqué que $1 - 2x\cos\theta + x^2 = \big|1 - x\,e^{i\,\theta}\big|^2$.

Exercice 30. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue, où $-\infty < a < b < \infty$.
(a) Montrer qu'il existe une subdivision $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t)\, dt,$$

pour tout $k = 1, \dots, n$.
(b) Étudier :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}).$$

Exercice 31. Soit une fonction continue $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, où $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ est un segment compact. Pour $n \geqslant 1$ quelconque, montrer que la fonction :

$$F_n(x) := \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f(t)\, dt$$

est une *primitive* n*-ème* de f au sens où $\frac{d^n F_n}{dx^n} = f$.

Exercice 32. Sur l'intervalle $[1,2] \subset \mathbb{R}$, on considère la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Pour un entier $n \geqslant 1$ quelconque, on note Δ_n la subdivision de $[1,2]$ équidistribuée en n intervalles tous de longueur $\frac{1}{n}$.
(a) Montrer que la somme de Darboux supérieure $\Sigma^{\Delta_n}(f)$ de f s'exprime comme :

$$\Sigma^{\Delta_n}(f) = n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n+j)^2}.$$

(b) Établir les deux inégalités suivantes :

$$n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n+j)(n+j+1)} < \Sigma^{\Delta_n}(f) < n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n+j-1)(n+j)}.$$

(c) Montrer que :

$$\frac{1}{2} < \Sigma^{\Delta_n}(f) < \frac{n(n-2)}{n(2\,n-1)}.$$

Indication: Utiliser l'identité élémentaire :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

(d) En déduire que :

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma^{\Delta_n}(f) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 33. [Première formule de la moyenne] Sur un segment compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, soient deux fonctions Riemann-intégrables :

$$f,\, g\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

avec $g \geqslant 0$ *positive*.

(a) Montrer qu'il existe un nombre réel μ avec :

$$\inf f([a,b]) \,\leqslant\, \mu \,\leqslant\, \sup f([a,b])$$

tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \,=\, \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

(b) Si de plus f est *continue*, montrer qu'il existe un nombre réel $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \,=\, f(c) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Exercice 34. [Deuxième formule de la moyenne] Sur un segment compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, soient deux fonctions Riemann-intégrables :

$$f,\, g\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On suppose que f est *positive*, continûment différentiable, *décroissante*, et que g est *continue*.

(a) Introduire la fonction de $x \in [a,b]$ définie par :

$$G(x) := \int_a^x g(t)\,dt,$$

et montrer que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \,=\, f(b)\,G(b) - \int_a^b f'(x)\,G(x)\,dx.$$

(b) Montrer que :

$$\big(f(a) - f(b)\big) \inf_{[a,b]} G \,\leqslant\, \int_a^b \big(-\, f'(x)\big)\,G(x)\,dx \,\leqslant\, \big(f(a) - f(b)\big) \sup_{[a,b]} G.$$

(c) Montrer que :

$$f(a) \inf_{[a,b]} G \,\leqslant\, \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \,\leqslant\, f(a) \sup_{[a,b]} G.$$

(d) En déduire le *second théorème de la moyenne*, à savoir montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \,=\, f(a) \int_a^c g(x)\,dx.$$

Exercice 35. Soient $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées définies sur un segment compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ qui coïncident sauf en un nombre fini de points :

$$f(x) = g(x), \qquad \forall\, x \in [a,b] \backslash \{c_1, \dots, c_N\}.$$

Montrer que f est Riemann-intégrable si et seulement si g l'est, et lorsqu'il en est ainsi, montrer l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Exercice 36. Sur l'intervalle $[0,1]$, pour $n \geqslant 1$ entier, soit la subdivision Δ dont les points sont $x_k := \frac{k}{n}$ pour $k = 0, 1, \dots, n$. Calculer les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f)$ et supérieure $\Sigma^\Delta(f)$ pour la fonction $f(x) := x^2$. En déduire que $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$. Indication: Utiliser la formule $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 37. Sur un intervalle fermé $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une fonction continue $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\int_a^b f(x)\,dx \,=\, (b-a) \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Montrer que f est en fait une fonction constante.

Exercice 38. Sur l'intervalle unité fermé $[0,1] \subset \mathbb{R}$ soit une fonction continue $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 39. Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) Si $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, montrer que la fonction produit $f\, g$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

(b) Si, pour *toute* fonction en escalier $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$0 = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx,$$

montrer qu'en fait, la fonction f est nécessairement identiquement nulle.

Exercice 40. Soient trois nombres réels a, b, c avec $a \leqslant c < b$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on définit la fonction $g_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) := \begin{cases} n & \text{lorsque } x \in [c, c+1/n], \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(a) Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, g_n(x)\, dx = f(c).$$

(b) Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante, montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, g_n(x)\, dx = \lim_{\substack{x \to c \\ >}} f(x).$$

Exercice 41. Soit $\{q_k\colon k \geqslant 1\}$ une énumération des nombres rationnels de $\mathbb{Q} \cap [0,1[$, et soit $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de nombres réels strictement positifs de somme :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

On définit la fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(0) := 0$, et pour $x > 0$ par :

$$f(x) := \sum_{k \in Q(x)} a_k, \qquad Q(x) := \big\{k \geqslant 1\colon\ q_k \in [0, x[\,\big\}.$$

(a) Vérifier que $f(1) = 1$, et montrer que f est Riemann-intégrable.

(b) Montrer que f est discontinue en tout point rationnel de $[0,1[$, mais qu'elle est continue en tout point irrationnel.

Exercice 42. **(a)** Soit $f\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) & \text{lorsque } x \neq 0, \pi, 2\pi, \\ 0 & \text{lorsque } x = 0, \pi, 2\pi. \end{cases}$$

Montrer que f est Riemann-intégrable.

(b) Soit $g\colon [0, 1/\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x) := \begin{cases} \mathrm{signe}\big(\sin(1/x)\big) & \text{lorsque } x \neq 1/k\pi,\ \ k \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{lorsque } x = 0 \ \text{ ou } \ x = 1/k\pi,\ \ k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Montrer que g est Riemann-intégrable.

Exercice 43. Soit $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ un segment compact, soit $f_n\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions dérivables dont les dérivées $f_n'\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont toutes Riemann-intégrables. On suppose que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ converge simplement, et que $f_n' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ converge uniformément, où $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Montrer que f est continûment différentiable sur $[a,b]$ et que $f' = g$.

Exercice 44. **(a)** Étant donné un segment compact $[c,d] \Subset \mathbb{R}$ et une fonction bornée quelconque $g\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, montrer que :

$$\sup_{x,\,y\,\in[c,d]} \big|g(x) - g(y)\big| \;=\; \sup_{[c,d]} g - \inf_{[c,d]} g.$$

Cette quantité commune est appelée l'*oscillation* de g sur $[c,d]$ et est notée :

$$\operatorname*{osc}_{[c,d]} g.$$

(b) Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur un intervalle $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ muni d'une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}.$$

Pour $k = 1, \dots, n$, on note $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, et on rappelle que :

$$\mathsf{pas}(\Delta) := \max_{1\leqslant k\leqslant n} \big|I_k\big|.$$

Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit quelconque, soient :

$$A_\varepsilon := \Big\{k \in \{1,\dots,n\}\colon\ \operatorname*{osc}_{I_k} f := \sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \;\geqslant\; \varepsilon\Big\},$$

$$B_\varepsilon := \Big\{k \in \{1,\dots,n\}\colon\ \operatorname*{osc}_{I_k} f \;<\; \varepsilon\Big\},$$

de telle sorte que :

$$A_\varepsilon \cup B_\varepsilon = \{1,\dots,n\} \qquad \text{et} \qquad A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset.$$

Soit enfin la somme des longueurs des intervalles sur lesquels l'oscillation de f est 'au moins ε-grande' :

$$s_\varepsilon(\Delta) := \sum_{k\in A_\varepsilon} \big|I_k\big|.$$

Montrer alors le Théorème originalement dû à Riemann d'après lequel la fonction f est Riemann-intégrable *si et seulement si*, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, cette somme $s_\varepsilon(\Delta) \longrightarrow 0$ tend vers zéro lorsque $\mathsf{pas}(\Delta) \longrightarrow 0$.

Exercice 45. Sur un segment compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle quelconque, pas forcément bornée. Montrer qu'on peut néanmoins définir sans modification la notion de Riemann-intégrabilité de f, mais montrer alors que si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a,b]$ telle que $\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon$, alors ceci implique en fait que f est nécessairement bornée.

Exercice 46. EE