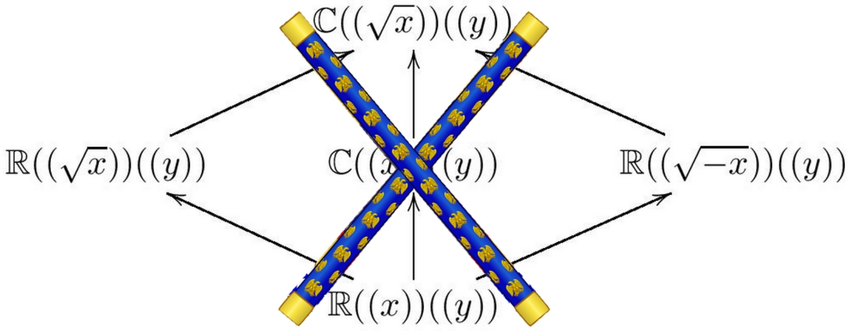
Exercices sur l'Intégrale de Riemann

Université d'Eleuthéria-Polites
République de Poldévie

Licence 2 — 2017/2018
Bruno Deschamps
Version 2.2



Suites de fonctions

Exercice 1.— Pour $p \geq 1$ et $x > 0$, on pose

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}$$

Etudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_p$.

Exercice 2.— Sur quels intervalles y-a-t-il convergence uniforme pour la suite $(f_n)_n$ lorsque :

a) $f_n(x) = \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

b) $f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}})$ pour $x \in [0,1]$.

Exercice 3.— Etudier sur $[0,+\infty[$ la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_n$ définie par

$$u_n(x) = x^n \ln x$$

Exercice 4.— Etudier sur $[0,1]$ la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_n$ définie par

$$u_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}$$

Exercice 5.— Pour $n \geq 0$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $u_n(x) = e^{-nx}\sin(nx)$.

a) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(u_n)_n$ sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$.

b) Même question sur $[0,+\infty[$.

Exercice 6.— Pour $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$.

a) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(u_n)_n$ sur $]-\infty,a] \cup [a,+\infty[$ pour $a > 0$.

b) Même question sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.— Pour $n \geq 0$ et $x \in [0,+\infty[$, on pose $u_n(x) = nx^2e^{-nx}$.

a) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(u_n)_n$ sur $[a,+\infty[$ pour $a > 0$.

b) Même question sur $[0,+\infty[$.

Exercice 8.— Pour $n \geq 0$ et $x > 0$, on pose $u_n(x) = x^2\sin\left(\dfrac{1}{nx}\right)$ et $u_n(0) = 0$.

a) Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(u_n)_n$ sur $[-a,a]$ pour $a > 0$.

b) Même question sur $[0,+\infty[$.

Exercice 9.— Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

a) Etudier la limite simple de la suite $(f_n)_n$ et montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$f_n(x) > \lim_n f_n(x)$$

b) Après avoir montré que, pour tout $t \geq 0$, on a :

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

justifier que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ (avec $a > 0$).

c) Etablir qu'en fait, la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Exercice 10.— Soit $(P_n)_n$ une suite de fonctions polynomiales réelles convergeant uniformément vers une fonction f. Montrer que f est nécessairement une fonction polynomiale.

Exercice 11.— Soient $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$ deux suites de fonctions d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$, convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées. Montrer que la suite $(f_ng_n)_n$ converge uniformément vers la fonction fg.

Exercice 12.— Montrer que la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformément continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est elle-même une fonction uniformément continue.

Exercice 13.— Etablir que la limite simple d'une suite de fonctions d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$ convexes est convexe.

Exercice 14.— Soit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions décroissantes et continues telles que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que cette convergence est uniforme.

Exercice 15.— (Théorème de Dini) Soient des fonctions $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues telles que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle. On suppose que pour tout $x \in [a,b]$, la suite réelle $(f_n(x))_n$ est décroissante. On désire montrer que la convergence de la suite $(f_n)_n$ est uniforme.

a) Justifier l'existence de $\lim_n \|f_n\|_\infty$.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que $\|f_n\|_\infty = f_n(x_n)$.

c) En observant que pour tout $p \leq n$, $f_n(x_n) \leq f_p(x_n)$, montrer finalement que $\lim_n \|f_n\|_\infty$.

Exercice 16.— Pour $x \in [0,\pi/2]$, on pose $f_n(x) = n \sin x \cos^n x$.

a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$.

b) Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt$. Y-a-t-il convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$?

c) Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0,\pi/2]$.

Exercice 17.— Soit $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2 x(1-nx)$ si $x \in [0,1/n]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

a) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)dt$. Y a-t-il convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$?

c) Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_n$ sur $[a,1]$ avec $a > 0$.

Exercice 18.— Soit $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

Montrer que chaque f_n est de classe C^1 et que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f qui n'est pas de classe C^1.

Exercice 19.— Soit $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x + \dfrac{1}{n}$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément mais pas la suite $(f_n^2)_n$.

Exercice 20.— Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et de dérivée seconde bornée. Montrer que la suite des fonctions $(g_n)_n$ où

$$g_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

converge uniformément vers f'.

Exercice 21.— Soit $f(x) = 2x(1-x)$ pour $x \in [0,1]$. Etudier la convergence de la suite $(f_n)_n$ où f_n est l'itérée n-ième de la fonction f.

Exercice 22.— Soit $(f_n)_n$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par, $f_0(x) = x$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$f_{n+1}(x) = \frac{x}{2 + f_n(x)}$$

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23.— Etudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$ données par $f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x)$.

Exercice 24.— a) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}^+$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, converge simplement vers une fonction f à déterminer.

b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.

c) Calculer $\lim_n \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx$.

Exercice 25.— On définit la suite de fonctions $(u_n)_n$ de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$ par $u_0(x)=1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)dt$$

a) Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

b) En déduire que pour $n,p \geq 0$, $\|u_{n+p}-u_n\|_\infty \leq \sum_{k \geq n+1} \dfrac{1}{k!}$.

c) Etablir que pour tout $x \in [0,1]$, la suite numérique $(u_n(x))_n$ est de Cauchy.

d) Etablir que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant $u'(x) = u(x-x^2)$.

Exercice 26.— On note E l'ensemble des fonctions $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continues. Pour tout $f \in E$, on pose

$$\Phi(f)(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}dt$$

On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie par $f_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, $f_{n+1} = \Phi(f_n)$.

a) Etudier la suite $(f_n)_n$.

b) Si l'on note $f = \lim_n f_n$, trouver une équation différentielle dont f est solution. Y a-t-il unicité de la solution nulle en o ?

Sommes de Riemann

Exercice 27.— Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ lorsque, pour $n \geq 1$,

a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

b) $u_n = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$.

c) $u_n = \displaystyle\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{n-k}}$.

Exercice 28.— Pour $n \geq 1$, on pose

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+4n}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+6n}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3n^2}}$$

Déterminer $\lim_n u_n$.

Exercice 29.— Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ lorsque, pour $n \geq 1$,

a) $u_n = \mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) + \mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}\right) + \cdots + \mathrm{ch}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right) - n$.

b) $u_n = n - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}\right) - \cdots - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right)$.

Exercice 30.— On considère une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en 0 et vérifiant $f(0) = 0$ et $f^{'}(0) \neq 0$. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_n$ définie, pour $n \geq 1$, par

$$u_n = f\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2 + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

Exercice 31.— a) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \log x dx$.

b) pour $n \geq 1$, expliciter R_n^{sup}, la n-ième somme de Riemann supérieure associée à la fonction $x \longmapsto \log x$ sur le segment $[1,2]$. Que vaut $\lim_n R_n^{\text{sup}}$?

c) En déduire que $\displaystyle\lim_n \left(\frac{(2n)!}{n^n n!}\right)^{1/n} = \frac{4}{e}$.

Exercice 32.— En utilisant les sommes de Riemann pour une fonction bien choisie, montrer que

$$\left(1^1 2^2 \cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}} \simeq_n \frac{\sqrt{n}}{e^{-1/4}}$$

Intégration par parties

Exercice 33.— Déterminer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int t \ln t dt$ b) $\displaystyle\int t\arctan(t)dt$ c) $\displaystyle\int t \sin^3 t dt$ d) $\displaystyle\int (t^2 - t + 1)e^{-t}dt$ e) $\displaystyle\int (t-1)\sin t dt$ f) $\displaystyle\int (t+1)\text{ch}(t)dt$.

Exercice 34.— Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$ b) $\displaystyle\int_1^e t^n \ln t dt$ c) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t)dt$ d) $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)dt$ e) ${}_0^{1/2} t\arctan(t)dt$ f) $\displaystyle\int_0^1 t\arctan(t)dt$.

Changement de variables

Exercice 35.— Déterminer les primitives suivantes :

a) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}$ b) $\displaystyle\int \frac{\ln t dt}{t + t(\ln t)^2}$ c) $\displaystyle\int \frac{e^{2t}dt}{e^t+1}$ d) $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ e) $\displaystyle\int \frac{dt}{t + t(\ln t)^2}$ f) $\displaystyle\int \frac{dt}{t\sqrt{\ln t + 1}}$ g) $\displaystyle\int \frac{dt}{e^t+1}$ h) $\displaystyle\int \frac{\ln t dt}{\sqrt{t}}$ i) $\displaystyle\int \sqrt{1-t^2}dt$ j) $\displaystyle\int t^2\sqrt{1-t^2}dt$.

Exercice 36.— En effectuant le changement de variables $t = \sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}$, déterminer la valeur de $\displaystyle\int_{4/3}^{8/5} \frac{dx}{x\sqrt{(2-x)(x-1)}}$.

Exercice 37.— On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 f(xt)dt = 0$. Montrer que f est indentiquement nulle.

(Ind. On pourra utiliser un changement de variables.)

Exercice 38.— Calculer $\displaystyle\int_0^{1/2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ en effectuant le changement de variable $x=\cos t$.

Exercice 39.— a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\ln(\cos t)dt=\int_0^{\pi/4}\ln(\cos(\pi/4-t))dt$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\ln(1+\tan t)dt$.

Exercice 40.— a) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{\cos t+\sin t}dt=\frac{\pi}{4}$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

Exercice 41.— On considère une fonction continue $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que pour tout $x\in[a,b]$, $f(a+b-x)=f(x)$. Montrer que

$$\int_a^b xf(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$$

Exercice 42.— a) Montrer que si $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continue alors

$$\int_0^\pi tf(\sin t)dt=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin t)dt$$

b) En déduire la valeur, pour $n\geq 0$, de

$$I_n=\int_0^\pi\frac{x\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}dx$$

Exercice 43.— Pour deux réels a et b tels que $ab>0$, on considère

$$I(a,b)=\int_a^b\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}dx$$

a) Calculer, en fonction de $I(a,b)$, les quantités $I(-b,-a)$, $I(a^{-1},b^{-1})$ et $I(a^{-1},a)$.

b) Calculer $I(a,b)$ quand $a,b>1$ en utilisant le changement de variables $t=x+1/x$ puis $v=1/t$.

c) Montrer, finalement, que la relation ainsi obtenue reste valable si l'on suppose juste $ab>0$.

Exercice 44.— Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin t}{3+\cos^2 t}dt$ b) $\displaystyle\int_1^2\frac{dt}{2t+\sqrt{t}}$ c) $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln(1+t)-ln(t)}{t^2}dt$.

Exercice 45.— Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)dt$.

Exercice 46.— a) Déterminer $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que, pour tout $u\neq 1/2$, on ait

$$\frac{u^2-1}{2u-1}=au+b+\frac{c}{2u-1}$$

b) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x^2-1}{2x-1}dx$.

c) Grâce à un changement de variable trigonométrique, en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{0} \frac{\cos^3 t}{1-2\sin t}dt$.

Intégrale fonction de la borne supérieure

Exercice 47.— Pour une fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée, justifier que les fonctions $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et exprimer leur dérivée :

a) $g(x) = \displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)dt$.

b) $g(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} xf(t)dt$.

c) $g(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t+x)dt$.

Exercice 48.— Etudier la fonction $f(x) = \displaystyle\int_{x}^{2x} \frac{\text{sh}t}{t}dt$.

Exercice 49.— Pour $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue donnée, on définit $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x) = \int_0^1 \min(x,t)f(t)dt$$

a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer F''.

b) En déduire que $F(x) = \displaystyle\int_0^x \int_u^1 f(t)dtdu$.

Exercice 50.— Pour une fonction continue $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée, on pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$$

a) Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = \int_0^x \cos(x-t)g(t)dt$

b) Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$.

c) Achever la résolution de cette équation différentielle.

Exercice 51.— Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour $x \neq 0$, par

$$F(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt$$

a) Montrer que F peut être prolongée par continuité en o. On effectue ce prolongement.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et exprimer F'(x) à l'aide d'une intégrale.

c) Montrer que F est dérivable en 0 et observer $F'(0) = 0$.

Exercice 52.— On considère une application continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - f(y) = \int_{2x+y}^{2y+x} f(t)dt$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f.

Exercice 53.— Pour $x \in \mathbb{R}^+ - \{0,1\}$, on pose

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

a) Calculer la limite de f en 0^+, 1 et $+\infty$ et la limite de $f(x)/x$ en $+\infty$.

b) Calculer $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x} dx$.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ mais qu'elle ne l'est pas sur $[0,+\infty[$.

d) Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 54.— Montrer que la fonction $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 55.— Pour une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ donnée, on définit pour $x \neq 0$,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

Montrer que g est prolongeable sur $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 56.— On considère la fonction

$$f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{te^{-t}}{t-2} dt$$

1/ a) Déterminer le domaine de définition D_f de la fonction f.

b) Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer f'.

c) Etudier les variations de f sur D_f.

2/ On considère sur $]1/2,2[$ la fonction $\varphi(t) = \dfrac{te^{-t} - 2e^{-2}}{t-2}$.

a) Montrer que φ est prolongeable par continuité en 2.

b) En déduire que $\int_1^x \frac{te^{-t}}{t-2} dt \simeq_{x\to 2^-} 2e^{-2}\ln(2-x)$ et, par suite, que $f(x) \simeq_{x\to 2^-} 2e^{-2}\ln(2-x)$.

c) Donner un équivalent de f en $1/2^+$.

Inégalités sur les intégrales

Exercice 57.— (Inégalité de Tchebycheff)

1) On se donne $(a_k)_{1\leq k\leq N}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq N}$ deux suites finies croissantes de réels positifs.

a) Pour tout $k = 1, \cdots, N$, on pose $E_k = E(a_1, \cdots, a_k, \cdots, a_k)$ où

$$E(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} x_i b_i - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{N} b_i \right)$$

Montrer que la suite finie $(E_k)_{1\leq k\leq N}$ est croissante.

b) En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \geq \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} b_i\right)$.

2) Soient $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ deux applications croissantes. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 fg \geq \left(\int_0^1 f\right)\left(\int_0^1 g\right)$.

Exercice 58.— (Inégalité de Wirtinger)

On considère une application $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = f(\pi) = 0$.

1) Après avoir montré que les fonctions incriminées sont bien intégrables, montrer que

$$\int_0^{\pi} f(x)f'(x)\text{cotan}(x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(x)^2(1+\text{cotan}(x)^2)dx$$

2) En déduire que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)^2 dx \leq \int_0^{\pi} f'(x)^2 dx$ et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 59.— (Caractérisation de la convexité)

1) Soient g une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et f une fonction en escalier sur le segment $[a,b]$. Montrer que $g \circ f \in \mathscr{E}([a,b])$.

2) Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $f \in \mathscr{E}([0,1])$, $\displaystyle g\left(\int_0^1 f\right) \leq \int_0^1 g \circ f$.

Exercice 60.— (Inégalité de Jensen)

Soit $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ une application continue. Montrer que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln \circ \varphi \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi\right)$$

Suites d'intégrales

Exercice 61.— Pour tout $n \geq 0$, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

a) Calculer I_0, I_1 et I_2.

b) Montrer que la suite $(I_n)_n$ est strictement croissante.

c) En utilisant, par exemple, le théorème de convergence dominé, montrer que $\lim\limits_n I_n = 1$.

d) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $\displaystyle 1 - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)dt$.

e) Montrer que, pour tout réel $u > -1$, on a $\ln(1+u) \leq u$. En déduire que $\displaystyle\lim_n \int_0^1 \ln(1+t^n)dt = 0$.

f) Prouver finalement que $\displaystyle I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 62.— Pour p et q deux entiers naturels, on pose :

$$I(p,q) = \int_a^b (t-a)^p(b-t)^q dt$$

a) Former une relation de récurrence liant $I(p,q)$ et $I(p+1, q-1)$.

b) En déduire une expression de $I(p,q)$.

Exercice 63.— (Intégrales de Wallis et applications)

1) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$$

a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$.

b) Montrer que la suite $(W_n)_n$ est strictement décroissante.

c) A l'aide d'une intégration par partie, trouver, pour $n \geq 0$, une relation de récurrence liant W_{n+2} et W_n. En déduire, pour tout entier $p \geq 0$, une expression simple de W_{2p} et W_{2p+1}

d) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

f) Prouver que, pour tout $n \geq 0$, on a

$$1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$$

et en déduire un équivalent simple de W_n.

2) Montrer que $\displaystyle\lim_n \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4k^2}\right) = \frac{2}{\pi}$ (Formule de Wallis).

3) On considère la suite $(u_n)_n$ définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$$

et la suite auxiliaire $(v_n)_n$ définie pour $n \geq 2$ par

$$v_n = \log u_n - \log u_{n-1}$$

a) Exprimer simplement v_n en fonction n et donner un développement limité à l'ordre 2 en $\dfrac{1}{n}$ de la suite $(v_n)_n$.

b) En déduire que la série $\sum v_n$ est convergente et, par suite, qu'il existe un réel $K > 0$ tel que

$$n! \simeq_n K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

c) En utilisant cet équivalent, calculer un équivalent simple de la suite $(W_{2p})_p$. En déduire que $K = \sqrt{2\pi}$ et, par suite, que

$$n! \simeq_n \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

(Formule de Stirling)

4) On se propose d'étudier ici le comportement du volume d'une boule de rayon fixé quand on fait varier la dimension de l'espace. Plus précisément, on se fixe un réel $R > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$ on considère dans $\mathbb{R}^n$ la boule $\mathcal{B}_n$ de centre O et de rayon R :

$$\mathcal{B}_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n / \ x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2\}$$

On note V_n son volume.

a) Soit $n \geq 2$. Montrer que, pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathcal{B}_n \Longleftrightarrow \begin{cases} (x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathcal{B}_{n-1} \\ -\sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \leq x_n \leq \sqrt{R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-1}^2} \end{cases}$$

En déduire que $\mathcal{B}_n$ eſt continûment paramétrable.

b) Soient $\lambda > 0$ un réel et $m \geq 0$ un entier. Montrer que

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\lambda^2 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} dx = 2\lambda^{m+1} W_{m+1}$$

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $k = 1, \cdots, n-1$ on a

$$V_n = 2^k \left(\prod_{i=1}^{k} W_i\right) \int \cdots \int_{\mathcal{B}_{n-k}} \left(R^2 - x_1^2 - \cdots - x_{n-k}^2\right)^{\frac{k}{2}} dx_{n-k} \cdots dx_1$$

d) Prouver finalement que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$V_n = \left(\prod_{i=1}^{n} W_i\right)(2R)^n$$

et par suite, que pour $k \geq 1$

$$V_{2k} = \frac{\pi^k}{k!} R^{2k}$$

et que pour $k \geq 0$

$$V_{2k+1} = 2^{2k+1} \frac{k!}{(2k+1)!} \pi^k R^{2k+1}$$

Expliciter V_1, V_2, V_3 et V_4.

e) En utilisant la formule de Stirling, donner des équivalents simples des suites $(V_{2k})_k$ et $(V_{2k+1})_k$.

f) En déduire que $\lim_n V_n = 0$.

g) Montrer que, soit la suite $(V_n)_n$ eſt décroissante, soit il exiſte un rang n_0 tel que la suite $(V_n)_n$ soit croissante jusqu'au rang n_0, puis décroissante.

h) Donner les valeurs de R pour lesquelles la suite $(V_n)_n$ eſt décroissante.

i) Que vaut le rang n_0 de la queſtion I.3.g. quand $R = 1$?

Exercice 64.— Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$$

a) Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge vers 0.

b) Montrer que, pour $n \geq 0$, on a $I_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

c) En déduire que $e = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

Exercice 65.— Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$$

a) Calculer I_0 et I_1.

b) Etablir une relation liant I_n et I_{n+1}.

c) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $0 < I_n < \dfrac{e}{n+1}$.

d) Déterminer la limite puis un équivalent simple de la suite $(I_n)_n$.

e) Soit $(u_n)_n$ une suite réelle définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = e - (n+1)u_n$$

On suppose que $a \neq I_0$, montrer, en étudiant $D_n = |u_n - I_n|$, que $\lim_n |u_n| = +\infty$.

Exercice 66.— a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

b) Etablir que, pour tout $n \geq 0$, $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k dt = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.

c) En déduire que $\displaystyle\lim_n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 67.— Pour $n \geq 0$, on considère la fonction

$$I_n(x) = \int_0^{\pi} \frac{\cos(nt)}{1 - x\cos t} dt$$

1) Déterminer le domaine de définition de $I_n(x)$.

2.a) On se donne un réel $a \in]0, \pi[$. En effectuant le changement de variable $u = \tan(t/2)$, calculer les deux intégrales

$$\int_0^a \frac{1}{1 - x\cos t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^a \frac{\cos t}{1 - x\cos t} dt$$

(Ind. pour la deuxième intégrale, pour x fixé, on pourra déterminer quatre réels a, b, c et d tels que $\dfrac{1-u^2}{(1+u^2)((1-x)+(1+x)u^2)} = \dfrac{au+b}{1+u^2} + \dfrac{cu+d}{(1-x)+(1+x)u^2}$.)

2.b) En déduire une expression simple de $I_0(x)$ et $I_1(x)$.

3.a.) Trouver une relation liant $I_{n+2}(x) + I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.

3.b) En déduire que $I_n(x) = \dfrac{\pi}{x^n\sqrt{1-x^2}}\left(1 - \sqrt{1-x^2}\right)^n$.

Exercice 68.— On considère deux entiers $n \geq 0$ et $m \geq 0$ et l'on pose

$$I_{n,m} = \int_1^e x^n (\ln x)^m dx$$

a) Montrer que $I_{n,m+1} = \dfrac{e^{n+1}}{n+1} - \dfrac{m+1}{n+1} I_{n,m}$.

b) Calculer, pour tout $n \geq 0$, $I_{n,0}$.

c) En déduire que $I_{n,m} = e^{n+1}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k+1} \frac{m!}{(n+1)^k (m-k+1)!}\right) + \dfrac{(-1)^{m+1} m!}{(n+1)^{m+1}}$.

Exercice 69.— Pour tout $n \geq 0$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (\log(1+x))^n dx$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq I_n \leq (\log 2)^n$ et en déduire la limite de la suite $(I_n)_n$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$I_n = \frac{2}{n+1}(\log 2)^{n+1}\left(1 - \frac{I_{n+1}}{2(\log 2)^{n+1}}\right)$$

c) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a $0 \leq I_n \leq \dfrac{2}{n+1}(\log 2)^{n+1}$ et déterminer alors $\lim\limits_{n} \dfrac{I_{n+1}}{(\log 2)^{n+1}}$.

d) Prouver finalement que $I_n \simeq_n \dfrac{2}{n+1}(\log 2)^{n+1}$.

Exercice 70.— Pour tout réel $x \neq 0$ et tout entier $n \geq 0$, on pose

$$I_n(x) = \frac{1}{n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n e^{xt}dt$$

a.1.) Calculer $I_0(x)$ et $I_1(x)$.

a.2.) A l'aide d'intégrations par parties, montrer que pour tout $n \geq 0$, on a

$$I_{n+2}(x) = \frac{4}{x^2}I_n(x) - \frac{4n+6}{x^2}I_{n+1}(x)$$

a.3.) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, il existe un polynôme à coefficients entiers $P_n \in \mathbb{Z}[x]$ tel que

$$I_n(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}\left(e^x P_n(x) - e^{-x}P_n(-x)\right)$$

a.4.) Expliciter une relation de récurrence satisfaite par P_n, P_{n+1} et P_{n+2} et en déduire que le degré de P_n est égal à n.

b) Soit $r \in \mathbb{Q}^*$, $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$. On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tel que $e^r = a/b$ et l'on pose $D = abp^3$.

b.1.) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $D^n I_n(r) \in \mathbb{N}$.

b.2.) Prouver que $\lim\limits_{n} D^n I_n(r) = 0$.

b.3.) En déduire une absurdité.

c) Prouver finalement que, si $r \in \mathbb{Q}^*$, alors e^r est irrationel et que, si $r \in \mathbb{Q}^{*+}$, alors $\ln(r)$ est irrationel.

Intégrales à paramètres

Exercice 71.— (Irrationnalité de π^2)

On considère la suite de fonctions $(F_n(x))_n$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, par

$$F_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2^n.n!}\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \cos(xt)dt$$

1) a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, la fonction F_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$F_{n+1}(x) = F_n(x) - xF_n'(x)$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes $P_n \in \mathbb{Z}[X]$ et $Q_n \in \mathbb{Z}[X]$ tels que

$$F_n(x) = P_n(x)\sin(x) + Q_n\cos(x)$$

et donner deux relations de récurrence liant les polynômes P_{n+1} et Q_{n+1} aux polynômes $P_n, P_n', Q_n(x)$ et Q_n'.

$$P_0(x) = 1 \;\; Q_0(x) = 0$$

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux polynômes $\overline{P}_n \in \mathbb{Z}[X]$ et $\overline{Q}_n \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P_n(x) = \overline{P}_n(x^2)$ et $Q_n(x) = x\overline{Q}_n(x^2)$.

d) Donner deux relations de récurrence liant les polynômes $\overline{P}_{n+1}$ et $\overline{Q}_{n+1}$ aux polynômes $\overline{P}_n, \overline{P}_n', \overline{Q}_n(x)$ et $\overline{Q}_n'$. que $\overline{P}_n$ et $\overline{Q}_n$ sont de degré inférieur ou égal à n.

2) On suppose maintenant que π^2 soit un nombre rationnel et l'on écrit donc $\pi^2/4 = p/q$ où p et q sont deux entiers strictement positifs. On définit alors la suite

$$I_n = F_{2n}(\pi/2) = P_{2n}(\pi/2) = \bar{P}_{2n}(p/q)$$

a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, le réel $q^{2n}I_n$ est un nombre entier et que l'on a

$$q^{2n}I_n = \sqrt{\frac{p}{q}}\left(\frac{p}{2}\right)^{2n}\frac{1}{(2n)!}\int_0^1 (1-t^2)^{2n}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)dt$$

b) En déduire que, pour tout $n \geq 0$, $\left|q^{2n}I_n\right| \leq \sqrt{\frac{p}{q}}(\frac{p}{2})^{2n}\frac{1}{(2n)!}$ et, par suite, que $\lim_n q^{2n}I_n = 0$.

c) Prouver finalement qu'il existe un indice $N \geq 0$ tel que $I_N = 0$ et conclure.

Exercice 72.— (Putnam Prize competition) On veut montrer ici que si $t \in \mathbb{R}$ est tel que pour tout $n \geq 1$, $n^t \in \mathbb{Z}$ alors $t \in \mathbb{N}$.

On se donne un entier $N \geq 1$ et l'on considère, pour $x > N$, $f(x) = (N+x)^t$. Pour k entier, on définit la k-ième différence $(\Delta_k f)$ comme étant la fonction obtenue par la relation de récurrence

$$(\Delta_0 f)(x) = f(x) \; et \; \forall k \geq 1 \; (\Delta_k f)(x) = (\Delta_{k-1} f)(x+1) + (\Delta_{k-1} f)(x)$$

a) Montrer que la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]N, +\infty[$ et que

$$(\Delta_k f)(x) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f^{(k)}(x + t_1 + \cdots + t_k)dt_1 \cdots dt_k$$

b) On pose $k = [t] + 3$. Montrer qu'il existe $u_0 > 0$ tel que pour tout $u > u_0$, $|f^{(k)}(u)| \leq u^{-2}$.

c) Montrer que, pour tout entier $n > u_0$, on a $|(\Delta_k f)(n)| < 1$ et donc que $(\Delta_k f)(n) = 0$.

d) Prouver finalement qu'il existe $k_0 \in \{0, \cdots, k\}$ tel que $t = k_0$.