Chapitre 24
SOMMES DE RIEMANN

Enoncé des exercices

1 Les basiques

Exercice 24.1 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite définie par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

Déterminer sa limite.

Exercice 24.2 *Déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k}$.

Exercice 24.3 *Calculer la limite de* $u_n = \frac{1}{n^2} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 24.4 *Déterminer la limite de* $u_n = \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!n^n}}$.

Exercice 24.5 *Déterminer la limite de* $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

2 Les techniques

Exercice 24.6 *Déterminer la limite de* $u_n = \sum\limits_{k=1}^{2n} \frac{k}{n^2+k^2}$.

Exercice 24.7 *Soit* $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, *on pose* $f(x) = \int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos t + 1\right) dt$.

1. *Déterminer* Df.
2. *Factoriser sur* $\mathbb{C}$ *le polynôme* $X^n - 1$.
3. *Calculer* $f(x)$ *à l'aide de ses sommes de Riemann.*

Exercice 24.8 *Soit*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}}$$

déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *(Indication : il y a un 1 de trop !).*

Exercice 24.9 *Soit* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ *et* $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

1. *Nature et limite de la suite* $(S_n)_n$.
2. *Nature et limite de la suite* $(U_n)_n$. *(On pourra comparer* U_{2n} *et* S_n *)*

Exercice 24.10 *Soit* f *continue sur* $[0,1]$, *déterminer la limite de* $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx$.

Exercice 24.11

1. *Montrer que pour* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *on a* $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$
2. *Déterminer la limite de la suite* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Exercice 24.12 *Déterminer* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$ *où* $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{\pi k}{2n}\right)$.

Exercice 24.13 *(D'après Mines Douai 2009). On définit* f *et* φ *sur* $\mathbb{R}_2[X]$ *par* $f : P \longmapsto \dfrac{1}{2}\left[P\left(\dfrac{X}{2}\right) + P\left(\dfrac{X+1}{2}\right)\right]$ *et* $\varphi : P \longmapsto P(1)$.

1. *Vérifier que* $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ *et que* $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R})$.
2. *Montrer que* $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^n(P) = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$.
3. *En déduire que* $\varphi(f^n(P)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt$.

3 Les exotiques

Exercice 24.14 *Déterminer la limite de* $u_n = n^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left(1^1 2^2 3^3 \cdots n^n\right)^{\frac{1}{n^2}}$.

Exercice 24.15 *On désire déterminer la limite de*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n^2+nk+2009}$$

1. *S'agit-il d'une somme de Riemann ?*
2. *Simplifier*
$$\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} - \frac{2009}{n^2\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k}{n}+\dfrac{2009}{n^2}\right)}$$
3. *Conclure.*

4 Le grenier

Exercice 24.16 *Déterminer pour* $x \neq 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k^2 x^2}$

rép : on a $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2x^2} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{1 + x^2 \left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$ *est une somme de Riemann pour* $f(t) = \dfrac{1}{1+x^2t^2}$. *La somme converge vers* $\int_0^1 f(t)\, dt = \dfrac{\arctan x}{x}$.

Exercice 24.17 *Calculer la limite de* $\dfrac{1}{\sqrt{n^2+8n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+16n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+24n}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{9n^2}}$

rép : c'est $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+8kn}}$ *qui est une somme de Riemann, converge vers* $\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+8x}} = \dfrac{1}{2}$

Exercice 24.18 *Déterminer* $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right)$.

Réponse : On va utiliser l'inégalité suivante, $\forall x > 0,\ x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$, *inégalité qui peut s'établir à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange. Notons* Π_n *le produit à étudier et* $u_n = \ln(\Pi_n)$. *Alors on a*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}$$

mais $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ *où* $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$ *est une somme de Riemman qui converge vers* $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$ *et* $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k(n-k)}{n^2} = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$ *où* $g(x) = x(1-x)$ *est une somme de Riemman qui converge. Par encadrement, on en déduit que* $(u_n)_n$ *converge vers* $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)}dx$. *La valeur de cette intégrale est l'aire du demi disque de centre* $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ *et de rayon* $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n^2}\right) = e^{\frac{\pi}{8}}$$

Chapitre 24
MATRICES

Solution des exercices

1 Les basiques

Exercice 24.1 *On a*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

on a donc une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ *défininе par* $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, *on sait que* u_n *converge alors vers*

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Exercice 24.2 *Un changement d'indice donne*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} \underset{j=k-n}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j+2n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{j}{n}}$$

qui est une somme de Riemann pour la fonction continue $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$ *sur* $[0,1]$, *ainsi*

$$\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{dx}{2+x} = \ln\frac{3}{2}$$

Remarque : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2+\frac{j}{n}}$ *est aussi une somme de Riemann de la fonction* $g(x) = \dfrac{1}{x}$ *sur l'intervalle* $[2,3]$ *car de la forme* $\dfrac{3-2}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{j-1} \frac{1}{2+\frac{k(3-2)}{n}}$. *On a bien*

$$\int_2^3 \frac{dt}{t} = \ln\frac{3}{2}$$

Exercice 24.3 *On a* $u_n > 0$ *et*

$$\begin{aligned}
\ln u_n &= -2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(n^2+k^2\right) = -2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) \\
&= -2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\ln n + \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) = -2\ln n + 2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

est une somme de Riemann à pour la fonction continue $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ *entre* 0 *et* 1. *Ainsi*

$$\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx$$

On intègre par parties (on dérive $\ln\left(1+x^2\right)$*) pour obtenir,*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right) dx &= \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}\, dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{2\left(x^2+1-1\right)}{x^2+1}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\pi + \ln 2 - 2 \end{aligned}$$

d'où

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$$

Exercice 24.4 *On a* $u_n = \left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow \ln u_n = \dfrac{1}{n}\left(\ln(2n)! - \ln n! - n\ln n\right)$. *Or*

$$\begin{aligned} \ln(2n!) &= \sum_{k=1}^{2n} \ln k \ \ et\ \ \ln n! = \sum_{k=1}^{n} \ln k \\ n\ln n &= \sum_{k=n+1}^{2n} \ln n \end{aligned}$$

d'où

$$\ln u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} \ln\frac{k}{n} \underset{j=k-n}{=} \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln\left(\frac{n+j}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ln\left(1+\frac{j}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\, dx = 2\ln 2 - 1$$

d'où

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{e}$$

Exercice 24.5 *On a* $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{k}{n}}{\sqrt{4-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} = \left[-\sqrt{4-x^2}\right]_0^1 = 2-\sqrt{3}$

2 Les techniques

Exercice 24.6 *On a* $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$, *il ne s'agit pas d'une somme de Riemann ! En revanche, si on considère la somme*

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{2}{p}\sum_{k=1}^{p} \frac{\frac{2k}{p}}{1+\left(\frac{2k}{p}\right)^2} = \frac{b-a}{p}\sum_{k=0}^{p} f\left(\frac{k(b-a)}{p}\right) \ \ où \\ b &= 2,\ a=0,\ f(t) = \frac{x}{1+x^2} \end{aligned}$$

Alors

$$v_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_0^2 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\ln 5$$

Donc

$$u_n = v_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\ln 5$$

Exercice 24.7 1. *On a* $x^2-2x\cos t+1 = (x-\cos t)^2+1-\cos^2 t = (x-\cos t)^2+\sin^2 t \geq 0$. *De plus* $x^2-2x\cos t+1 = 0 \iff \begin{cases} x=\cos t \\ \sin^2 t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\pm 1 \\ t = 0 \ (\pi) \end{cases}$ *ce qui est exclus par hypothèse.*
On en déduit que la fonction $\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)$ *est définie et continue sur* $[0,2\pi]$. *Ainsi* $Df = \mathbb{R}\diagdown\{-1,1\}$.

2. *On a* $X^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$

3. *Calculer* $f(x)$ *à l'aide de ses sommes de Riemann.*
La somme de Riemann à gauche de f *est*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right) \\ &= \frac{2\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right)\right) \end{aligned}$$

Or $\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right) = \left(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(x-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ *d'où*

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\left(x-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right) \\ &= \frac{2\pi}{n}\ln\left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right)\right) \end{aligned}$$

Mais $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = x^n-1$ *et* $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \overline{\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)} = \overline{x^n-1} = x^n-1$ *d'où*

$$S_n = \frac{2\pi}{n}\ln\left(x^n-1\right)^2 = \frac{4\pi}{n}\ln|x^n-1|$$

Si $|x|>1$, *on a*

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4\pi}{n}\ln|x^n| = 4\pi\ln|x|$$

Si $|x|<1$ *alors* $x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)dt &= 4\pi\ln|x| \ \textit{pour}\ |x|>1 \\ \int_0^{2\pi}\ln\left(x^2-2x\cos t+1\right)dt &= 0 \ \textit{pour}\ |x|<1 \end{aligned}$$

Exercice 24.8 *On s'inspire de l'indication et on considère* $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n)}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)}$ *qui est une somme de Riemann à droite pour la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, *continue sur* $[0,1]$. *On en déduit que*

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$
Reste à montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ont même limite. Pour cela, on considère*

$$w_n = v_n - u_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n)}} - \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}}\right)$$

On a

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+n)}} - \frac{1}{\sqrt{(k+n)(k+1+n)}} \\
&= \frac{\sqrt{(k+1+n)} - \sqrt{(k+n)}}{\sqrt{(k+n)}\sqrt{(k+n)}\sqrt{(k+1+n)}} \\
&= \frac{\left(\sqrt{(k+1+n)}\right)^2 - \left(\sqrt{(k+n)}\right)^2}{(n+k)\sqrt{(k+1+n)}\left(\sqrt{(k+1+n)}+\sqrt{(k+n)}\right)} \\
&= \frac{1}{(k+n)\sqrt{k+1+n}\left(\sqrt{k+1+n}+\sqrt{k+n}\right)} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)\sqrt{1+n}\left(\sqrt{1+n}+\sqrt{1+n}\right)} = \frac{1}{2(n+1)^2} \text{ car } k \geq 1
\end{aligned}$$

d'où

$$0 \leq w_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(n+1)^2} = \frac{1}{2}\frac{n}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Pour conclure

$$u_n = v_n - w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$$

Exercice 24.9

1. *On a* $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ *est une somme de Riemann pour la fonction continue* $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ *sur* $[0,1]$. *Ainsi* $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2.$
2. *On a* $U_{2n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n}$ *et* $S_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots \dfrac{1}{2n}$. *Puisque l'on indique qu'il faut comparer les deux termes, on peut regarder* S_1 *et* U_2, S_2 *et* U_4 *par exemple. On a donc*

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2},\ U_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
S_2 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}\ ,\ U_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}
\end{aligned}$$

Il semble donc que $S_n = U_{2n}$, *il reste à le prouver!!!!*
On peut procéder par récurrence, en effet

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= +\frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = S_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\
&= S_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}
\end{aligned}$$

et

$$U_{2n+2} = U_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

ce qui prouve bien l'hérédité.
Autre preuve :

$$\begin{aligned}
U_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} - 2 \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots \frac{1}{2n}
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
S_n &= U_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2 \\
U_{2n+1} &= S_n + \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2
\end{aligned}$$

les suites de rang pair et impair convergent vers la même limite, donc $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge aussi vers* $\ln 2$.
On peut aussi écrire que

$$S_{E\left(\frac{n}{2}\right)} \leq U_n \leq S_{E\left(\frac{n}{2}\right)} + \frac{1}{n}$$

et appliquer le théorème des gendarmes.

Exercice 24.10 *Posons* $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ *qui est définie sur* $[0,1]$*, alors*

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\left[F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,F\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,F\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(n+1-j)\,F\left(\frac{j}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,F\left(\frac{k}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} F\left(\frac{j}{n}\right)
\end{aligned}$$

est une somme de Riemann associée à F.(qui est continue). Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 F(t)\,dt$. *Puisque* F *est* $\mathcal{C}^1$*, on peut intégrer par parties (en dérivant* F*) pour obtenir (car* $F(0) = 0$*)*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 F(t)\,dt &= [(t-1)\,F(t)]_0^1 - \int_0^1 (t-1)\,f(t)\,dt = \int_0^1 (1-t)\,f(t)\,dt \\
& \quad u(t) = F(t) \qquad u'(t) = F'(t) = f(t) \\
& \quad v'(t) = 1 \qquad v(t) = t-1
\end{aligned}$$

Remarque : *Le résultat n'est pas surprenant. En effet, si* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$*, alors la formule de Taylor donne*

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{k+1}{n}\right) &= F\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\tfrac{k+1}{n} - t\right) F''(t)\,dt \\
\text{soit } \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx &= \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\tfrac{k+1}{n} - t\right) f'(t)\,dt
\end{aligned}$$

ainsi

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\tfrac{k+1}{n}-t\right) f'(t)\, d$$

Or $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 (1-t) f(t)\, dt$ *car c'est une somme de Riemann de la fonction continue* $x \mapsto (1-x) f(x)$. *Et*

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\tfrac{k+1}{n}-t\right) f'(t)\, dt\right| &\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\tfrac{k+1}{n}-t\right) \sup|f'|\, dt \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}(n-k)\frac{\sup|f'|}{2n^2}dt = \frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

mais $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 (1-t)\, dt$ *donc* $\displaystyle\frac{1}{2n}\times\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Exercice 24.11

1. *On peut faire une étude de fonction, mais la formule de taylor à l'ordre* 3, *avec reste intégral pour la fonction* sin *entre* 0 *et* x *s'écrit*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\sin t dt$$

Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, *alors* $\forall t \in [0, x]$, *on a* $\sin t \geq 0$ *donc* $\dfrac{(x-t)^3}{3!}\sin t \geq 0$, *ainsi* $\int_0^x \dfrac{(x-t)^3}{3!}\sin t dt \geq 0$ *et* $\sin x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$. *L'autre inégalité provient de la convexité.*

2. *On a alors, puisque* $\sin\dfrac{k}{n} \geq 0$ *lorsque* $k \in \{1, \cdots, n\}$

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{n^6}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right) \leq u_n \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

La somme de droite

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

est une somme de Riemann pour la fonction continue $f(x) = x\sin x$ *sur l'intervalle* $[0, 1]$, *on a donc*

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x\sin x dx$$

On cherche une primitive de xe^{ix} *sous la forme* $(ax+b)e^{ix}$, *on dérive pour avoir*

$$ae^{ix} + i(ax+b)e^{ix} = xe^{ix} \Longrightarrow ai = 1 \text{ et } a + ib = 0 \Longrightarrow a = -i \text{ et } b = 1$$

$$\int xe^{ix}dx = (-ix+1)e^{ix} + K \Longrightarrow \int x\sin x dx = \sin x - x\cos x + C$$

d'où

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x\sin x dx = \sin 1 - \cos 1$$

Pour la somme de gauche, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{n^6}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right) = Sn - \frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n}k^3\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

Or
$$\left|\sum_{k=1}^{n} k^3 \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} k^3 \leq \sum_{k=1}^{n} n^3 = n^4$$
d'où
$$0 \leq \left|\frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
et
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}-\frac{k^3}{n^6}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin 1 - \cos 1$$
conclusion
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin 1 - \cos 1$$

Exercice 24.12 *On a*
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sin\frac{\pi x}{2}\,dx = \left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$
Car on reconnaît une somme de Riemann pour la fonction continue, $f(x) = \sin\frac{\pi x}{2}$. Ainsi $a_n \sim \dfrac{2n}{\pi}$. Reste à déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$. Une intégration par parties donne (on intègre x^{2n})
$$\int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{2n+1} - \frac{\pi}{2(2n+1)}\int_0^1 x^{2n+1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx$$
Or
$$\left|\int_0^1 x^{2n+1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx\right| \leq \int_0^1 x^{2n+1}dx = \frac{1}{2n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
Ainsi
$$2n\int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \iff \int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx \sim \frac{1}{2n}$$
et
$$\lim_{n\to\infty} a_n\int_0^1 x^{2n}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)dx = \frac{1}{\pi}$$

Exercice 24.13

1. *Simple vérification, attention à bien préciser que $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$ et que $\varphi(P) \in \mathbb{R}$.*
2. *On procède par récurrence sur n. Pour $n = 1$, on a $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2-1} P\left(\frac{X+k}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{X}{2}\right)+P\left(\frac{X+1}{2}\right)\right] = f(P)$.*

   Supposons alors que $\displaystyle f^n(P) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+k}{2^n}\right)$ à $n \geq 1$ fixé. On a ainsi
$$\begin{aligned} f^{n+1}(P) &= f(f^n(P)) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{\frac{X}{2}+k}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{\frac{X+1}{2}+k}{2^n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right) + \frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right) \end{aligned}$$

   Si on considère la somme $\displaystyle\sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+j}{2^{n+1}}\right)$, on peut la couper en deux sommes. Celle où l'indice j est pair, et celle où j est impair. Si l'on pose $j = 2k$, on a alors $j = 2k \leq 2^{n+1}-1 \Longrightarrow 2k \leq 2^{n+1}-2 \Longrightarrow k \leq 2^{n+1}-1$. La *somme des indices pairs est donc* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right)$.

Si l'on pose $j=2k+1$, *on a alors* $2k+1\le 2^{n+1}-1 \Longrightarrow k\le 2^{n+1}-1$, *la somme des indices impairs est donc* $\displaystyle\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)$.

Conclusion $\displaystyle\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k}{2^{n+1}}\right)+\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{X+2k+1}{2^{n+1}}\right)=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{j=0}^{2^{n+1}-1} P\left(\frac{X+j}{2^{n+1}}\right)$ *et ceci prouve l'hérédité.*

3. *On a donc*

$$\varphi\left(f^n\left(P\right)\right)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} P\left(\frac{1+k}{2^n}\right)\underset{j=k+1}{=}\frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n} P\left(\frac{j}{2^n}\right)$$

Qui est la somme de Riemann de P *sur* $[0,1]$ *pour une subdivision à* 2^n *éléments. On a donc*

$$\varphi\left(f^n\left(P\right)\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 P\left(t\right)dt.$$

3 Les exotiques

Exercice 24.14 *On a*

$$\begin{aligned}\ln u_n &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n+\frac{1}{n^2}\ln\left(\prod_{k=1}^{n}k^k\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n+\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln k\end{aligned}$$

On va commencer par évaluer le comportement de la somme, elle évoque une somme de Riemann pour $f\left(x\right)=x\ln x$ *prolongée en* 0 *par* $f\left(0\right)=0$ *(car* $x\ln x\xrightarrow[x\to 0]{}0$ *ainsi* f *est continue sur* $[0,1]$*). On a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\left(\ln k-\ln n\right)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln k-\frac{\ln n}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln k-\frac{\ln n}{n^2}\times\frac{n\left(n+1\right)}{2}\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln k-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\ln n\end{aligned}$$

or $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1 f\left(x\right)dx$. *Il reste donc à calculer cette intégrale, soit* $g\left(x\right)=x^2\ln x$ *prolongée par* $g\left(0\right)=0$, *alors* g *est continue sur* $[0,1]$ *et* $g'\left(x\right)=2x\ln x+x\xrightarrow[x\to 0]{}0$ *donc par le théorème du prolongement* $\mathcal{C}^1$, *on a* g $\mathcal{C}^1$ *sur* $[0,1]$. *On a* $g'\left(x\right)=2f\left(x\right)+x$ *ainsi*

$$\int_0^1 g'\left(x\right)dx=g\left(1\right)-g\left(0\right)=0=2\int_0^1 f\left(x\right)dx+\int_0^1 xdx$$

ainsi

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx=-\frac{1}{4}$$

et

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{1}{4}}$$

Exercice 24.15

1. *Non, car* $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1-\dfrac{k}{n}}{1+\dfrac{k}{n}+\dfrac{2009}{n^2}}$
2. *On a*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} - \frac{2009}{n^2\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k}{n}+\dfrac{2009}{n^2}\right)} &= \frac{1}{1+\dfrac{k}{n}}\left(1-\frac{2009}{n^2+kn+2009}\right) = \frac{1}{1+\dfrac{k}{n}} \times \frac{n^2+kn}{n^2+kn+2009} \\
&= \frac{n^2}{n^2+kn+2009}
\end{aligned}$$

3. *Donc*

$$\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{1+\dfrac{k}{n}} - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2009\,(n-k)}{n^2\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k}{n}+\dfrac{2009}{n^2}\right)} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\dfrac{k}{n}}{1+\dfrac{k}{n}} - \frac{2009}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1-\dfrac{k}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k}{n}+\dfrac{2009}{n^2}\right)}
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1-\dfrac{k}{n}}{1+\dfrac{k}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1-t}{1+t}dt = 2\ln 2 - 1$$

$$\begin{aligned}
\textit{Pour } 1 &\leq k \leq n,\ 0 \leq \frac{\left(1-\dfrac{k}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k}{n}+\dfrac{2009}{n^2}\right)} \leq 1 \\
\textit{d'où } 0 &\leq \frac{2009}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(1-\dfrac{k}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{k}{n}\right)\left(1+\dfrac{k}{n}+\dfrac{2009}{n^2}\right)} \leq \frac{2009}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0
\end{aligned}$$