Travaux dirigés, feuille 1 : intégrales de Riemann

Riemann-intégrabilité

Exercice 1
Montrer que la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ (c-à-d définie par 1 si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon) n'est pas Riemann intégrable.

Exercice 2
1) Montrer que la fonction $f : [0,1] \to [0,1]$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x \text{ irrationnel} \\ 1 & \text{si } \ x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ fraction irréductible} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable, par deux méthodes :

- construire pour $\varepsilon > 0$ une division D de [0,1] pour laquelle $S(D) < 2\varepsilon$ où $S(D)$ est la grande somme de Darboux associée à f et D;
- montrer que f est limite uniforme de fonctions en escalier.

2) Utiliser cette fonction et la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par composition. Utiliser la fonction indicatrice de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par limite simple.

Exercice 3
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann-intégrable (donc bornée) et g une fonction définie sur un segment contenant $f([a,b])$.
1) On suppose g lipschitzienne. Montrer que $g \circ f$ est Riemann-intégrable.
2) Montrer que toute fonction g continue sur un segment est limite uniforme de fonctions lipschitziennes (on pourra approcher g par des fonctions affines par morceaux). En déduire que si g est continue alors $g \circ f$ est Riemann-intégrable.

Exercice 4
On dit qu'une $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée si elle est limite uniforme d'une suite de fonctions en escaliers.
1) Montrer qu'une fonction réglée est Riemann-intégrable.
2) Montrer que si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée, alors elle a en tout point une limite à droite et une limite à gauche. *(Rem. : la réciproque est vraie.)*
3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f est Riemann-intégrable mais pas réglée.

Sommes de Riemann

Exercice 5
En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites des suites suivantes:

$$a_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2n+3k} \ , \quad b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \ , \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2} \ ,$$

$$d_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{\pi}{k} \ , \quad e_n = \sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{\pi}{k}\right) \ , \quad f_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3} \ , \quad g_n = n^2 \prod_{k=1}^{n} k^{-\frac{4k}{n^2}} \ .$$

Exercice 6
En utilisant les sommes de Riemann, calculer la limite (si elle existe) lorsque $n \to +\infty$ de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right) \ .$$

Exercice 7
Calculer $\int_0^{2\pi} \log(1-2x\cos\theta + x^2)d\theta$ pour $x \geq 0, x \neq 1$.
Indication : on utilisera les sommes de Riemann après avoir remarqué que $1-2x\cos\theta+x^2 = |1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|^2$.

Intégrales impropres

Exercice 8
Déterminer la nature des intégrales suivantes ($\alpha \geq 0$ est un paramètre) :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{t}) - \tan(\sqrt{t})}{t^2}\, dt \ , \quad I_2 = \int_1^2 \frac{\cos t}{1-\sqrt{t}}\, dt \ , \quad I_3 = \int_0^1 \frac{e^{it^{-1}}}{t}\, dt \ ,$$

$$I_4 = \int_e^4 \frac{dt}{\ln^\alpha(\ln t)} \ , \quad I_5 = \int_1^{+\infty} \sin^\alpha\left(\frac{1}{t}\right) dt \ .$$

Exercice 9
1) Étudier selon la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de l'intégrale

$$J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha \sqrt{t^2-1}} \ .$$

2) Calculer $J(\alpha)$ lorsque $\alpha = 1, 2$ et 4.

Exercice 10
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue périodique de période $T > 0$, non identiquement nulle, et telle que $\int_0^T f(t)\, dt = 0$.
1) Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Montrer que F est périodique et en déduire que F est bornée (justifier votre réponse).

2) Montrer que la fonction $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ est intégrable au sens impropre sur $[T, +\infty)$.
3) Montrer que la fonction $|g(t)|$ n'est pas intégrable au sens impropre sur $[T, +\infty)$.

Exercice 11 - fonction Gamma
Pour un nombre réel s, on considère l'intégrale impropre

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt\,.$$

1) Pour quelles valeurs de s, $\Gamma(s)$ est-il bien défini ?
2) Montrer que $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ pour tout $s > 0$. En déduire la formule

$$\Gamma(n+1) = n!$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, puis calculer $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) Calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12
1) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, étudier la convergence des intégrales de Riemann impropres

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^1 x^\alpha |\ln x|^\beta dx \quad \text{et} \quad J_{\alpha,\beta} = \int_2^\infty x^\alpha |\ln x|^\beta dx\,.$$

2) Trouver un équivalent simple du reste $\int_A^\infty x^\alpha |\ln x|^\beta dx$ quand $A \to \infty$ pour $\alpha < -1$, et un équivalent de $\int_2^A x^\alpha |\ln x|^\beta dx$, quand $A \to \infty$ pour $\alpha > -1$.

Exercice 13 - intégrales de Fresnel
1) En utilisant un changement de variable approprié, montrer que l'intégrale impropre suivante est convergente:

$$\int_0^{+\infty} e^{it^2} dt\,.$$

2) En déduire la nature des intégrales de Fresnel

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt\,,\ \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt\,.$$

3) Ces intégrales sont-elles absolument convergentes ?

Exercice 14
Soient $a > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue admettant des limites en $+\infty$ et $-\infty$. Montrer que l'intégrale impropre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+a) - f(x))\, dx$$

est convergente et la calculer.

Suite d'intégrales, intervertion limite-intégrale, intégrales à paramètre

Exercice 15 - intégrales de Wallis
On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\, dx\,.$$

1) a)Vérifier que W_n est bien défini.
b) Montrer que $W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\, dx$.
c) Montrer que la suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.
2) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $nW_n = (n-1)W_{n-2}$.
Indication : on pourra remarquer que $\sin^n(x) = \sin^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))$, *et utiliser une intégration par parties.*
3) Calculer W_0 et W_1, et en déduire W_n pour totu n.
4)a) Montrer que W_n est équivalent à W_{n+1} quand $n \to \infty$.
b) On pose $u_n = (n+1)W_nW_{n+1}$, pour $n \geq 0$. Que peut-on dire de la suite (u_n)?
c) En déduire que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{quand } n \to \infty\,.$$

5) On suppose connue l'équivalence

$$n! \sim C\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{quand } n \to \infty\,,$$

pour une certaine constante C. Montrer à l'aide des questions précédentes que $C = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 16
Soient $-1 < a < 1$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, \pi/2]$, $u_n(t) = a^n \cos^n(t)$.
1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge uniformément sur $[0, \pi/2]$ vers une fonction limite que l'on déterminera.
2) En déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 - a\cos t} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\, dt \right) a^n\,.$$

Exercice 17
1) Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues, avec $g \geq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g\,.$$

2) Soit $H :]1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}\, dt\,.$$

Etudier la monotonie de H, son comportement au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de 1 (on pourra utiliser le résultat de 1) pour l'étude de H en 1).

Exercice 18
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, $a < b$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$ on définit

$$I(\lambda) \;=\; \int_a^b f(t)\sin(\lambda t)\,dt\,.$$

Claculer la limite de $I(\lambda)$ quand $\lambda \to \infty$ dans les cas suivants :
1) f est constante; 2) f est $\mathcal{C}^1$; 3) f est en escalier; 4) f est $\mathcal{C}_M$ (continue par morceaux).

Exercice 19
Soit ϕ une fonction continue à support compact.
1) Montrer que l'on a : $\lim_{k\to\infty}\int \phi(t)|\sin kt|dt = \frac{2}{\pi}\int \phi(t)dt$. Utiliser le fait que ϕ est limite uniforme de fonctions en escaliers (le vérifier).
2) Montrer que si F est une fonction continue périodique de période T, on a de même :

$$\lim_{k\to\infty}\int \phi(t)F(kt)dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^T F(u)\,du\right)\left(\int \phi(t)\,dt\right)\,.$$

Exercice 20
1) Montrer que ; $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^p}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{np+1}$ $(p > 0)$.
Indication : on pourra considérer, pour $a < 1$, l'intégrale de 0 à a et développer l'intégrande en série entière; il faudra ensuite montrer la convergence d'une certaine série de fonction de la variable a quand a tend vers 1.
2) Trouver C tel que $\displaystyle\sum_N^{\infty}\frac{(-1)^n}{np+1} \sim_{N\to\infty} (-1)^n\frac{C}{N}$.

Exercice 21
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue
1) On pose $h(x) = \ln x \int_0^x f(t)dt$ si $x \in]0,1], h(0) = 0$. Montrer que h est continue. Montrer que $\int_0^1 (\ln t)f(t)dt$ est absolument convergente.
2) On définit $g : [0,1] \to \mathbb{R}, g(x) = \ln x \int_0^x f(t)dt + \int_x^1 (\ln t)f(t)dt$ si $x \in]0,1]$,
$g(0) = \int_0^1 (\ln t)f(t)dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 22
Soient $\alpha \geq 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0,1]$, $f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$.
1) Montrer que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction limite que l'on déterminera.
2) Montrer que $\{f_n\}$ converge uniformément sur $[0,a]$ pour tout $0 < a < 1$.
3) Pour quelles valeurs de α la suite $\{f_n\}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?
4) Calculer en fonction de α, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$.

Exercice 23
1) Exprimer à l'aide des fonctions usuelles $f(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{2n+1}}{2n+1}$, pour $t \in]-1,1[$ ainsi que $I_n(t) = \int_0^t u^n \ln u du$.
2) On pose $g(t) = \sum_0^\infty \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)^2}$, pour $t \in]-1,1[$. Exprimer à l'aide de g et des fonctions usuelles, l'intégrale $J(t) = \int_0^t \frac{\ln u}{1-u^2}du$ $(t \in]-1,1[)$. En déduire $J(1)$ comme somme d'une série. Montrer que $g(1) = \int_0^\infty \frac{t}{2\mathrm{sh} t}dt$.

Exercice 24
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique continue de période $T > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n(f) = \int_a^b f(nt)dt\,.$$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt\,.$$

2) La suite de fonctions $f_n(t) = f(nt)$ converge-t-elle simplement sur $[a, b]$?
3) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n(f)\,.$

Exercice 25
1) Pour la suite de fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1 + n^2x^2)^2}$$

calculer $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$. La convergence est-elle uniforme ? A-t'on

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx \quad ?$$

2) Mêmes questions pour la suite $g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ donnée par $g_n(x) = \dfrac{n^2x}{(1 + n^2x^2)^2}$.