CHAPITRE 5

INTÉGRALE DE RIEMANN

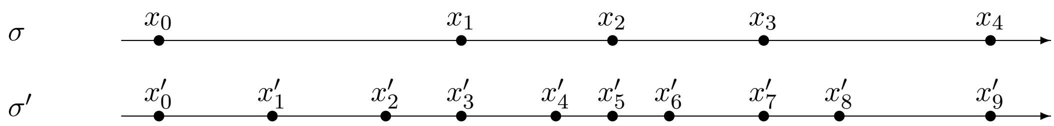
Ce chapitre suit de près le polycopié de LM115 par Jean-Lin Journé.

5.1. Intégrale d'une fonction en escalier

Dans toute cette section, on fixe $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

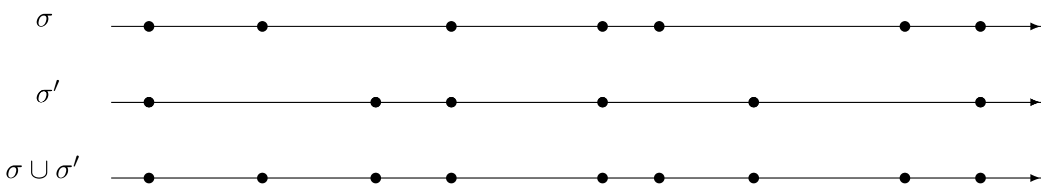
Définition 5.1 **(Subdivisions)**. — 1. Une *subdivision* σ de l'intervalle $[a, b]$ est une famille finie de points $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. On écrira simplement $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$, où il est entendu que $a = x_0 < \cdots < x_n = b$. En fait, il faut penser à une subdivision comme à la suite des intervalles $[x_{i-1}, x_i]$ pour $i = 1, \ldots, n$, i.e. on subdivise le « grand » intervalle $[a, b]$ en la réunion de ces « petits » intervalles $[x_{i-1}, x_i]$.

2. On dira qu'une autre subdivision $\sigma' = \{x'_0, \ldots, x'_N\}$ est *plus fine* que σ si l'ensemble $\{x_0, \ldots, x_n\}$ est contenu dans l'ensemble $\{x'_0, \ldots, x'_N\}$, c.-à-d. si chaque x_i est un x'_j (pour un indice j pouvant être $\neq i$). Ceci revient à dire que tout intervalle $[x'_{j-1}, x'_j]$ est inclus dans un intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, i.e. que l'on a découpé $[a, b]$ en morceaux plus petits : c'est pour cette raison que l'on dit que σ' est *plus fine* que σ. On écrira alors $\sigma \preceq \sigma'$. Illustrons ceci par un exemple :



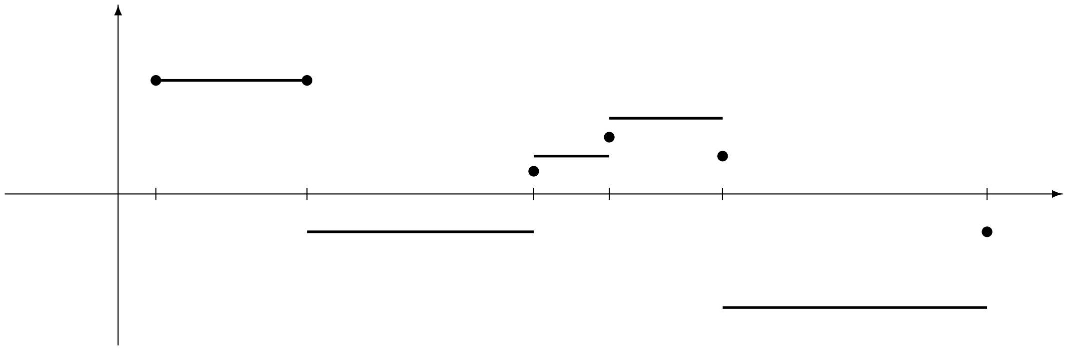
3. Le *pas* d'une subdivision σ, noté $|\sigma|$, est la longueur maximale des « petits » intervalles $[x_{i-1}, x_i]$, i.e. $|\sigma| = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$. On dit que la subdivision $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ est *régulière* ou *de pas constant* si $x_i - x_{i-1}$ est constant, et donc égal à $(b - a)/n$; dans ce cas on a $|\sigma| = (b - a)/n$ et $x_i = a + i(b - a)/n$ pour tout $i = 0, \ldots, n$.

Remarque 5.2. — Soient $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ et $\sigma' = \{x'_0, \ldots, x'_N\}$ deux subdivisions de $[a, b]$. On note $\sigma \cup \sigma'$ la subdivision obtenue en prenant la réunion des ensembles $\{x_0, \ldots, x_n\}$ et $\{x'_0, \ldots, x'_N\}$ et en rangeant les éléments par ordre croissant ; elle est plus fine que σ et que σ'. Par exemple :



Définition 5.3 **(Fonctions en escalier)**. — Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$.

(i) On dit que f est *en escalier* (sur $[a, b]$) s'il existe une subdivision $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$ telle f soit constante sur chaque intervalle *ouvert* $]x_{i-1}, x_i[$, disons de valeur c_i. Noter que l'on n'impose rien à la valeur $f(x_i)$, qui peut être distincte de c_i et de c_{i+1}. Par exemple, la fonction ci-dessous est en escalier (les points de la subdivision sont représentés par des | et leurs images par des •) :

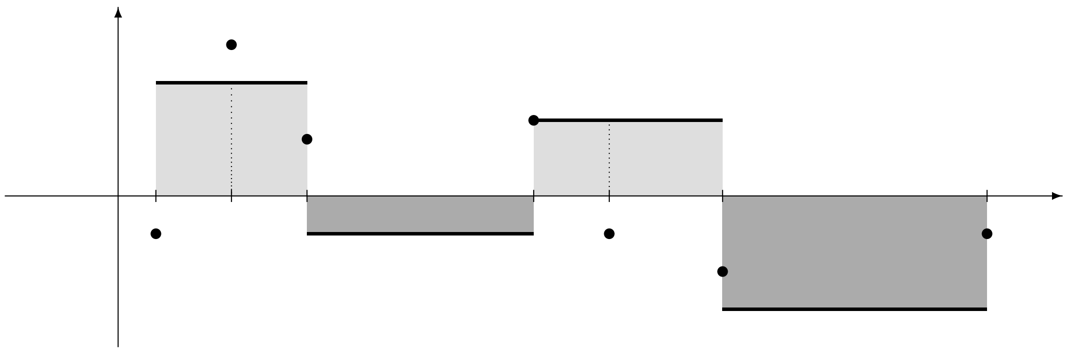


(ii) Soient f une fonction en escalier et $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. On dit que σ est *associée* à f, ou que f est *en escalier sur* σ, si f est constante sur chaque intervalle ouvert $]x_{i-1}, x_i[$. Remarquons tout de suite que dans ce cas, toute subdivision τ plus fine que σ est aussi associée à f.

Définition 5.4. — Soit f une fonction en escalier sur $[a, b]$ et $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$ associée à f, i.e. f est constante sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, de valeur c_i. L'intégrale de f sur $[a, b]$, notée $\int_a^b f$, est définie par :

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) c_i. \qquad (*)$$

C'est donc la somme des aires algébriques des rectangles de base $x_i - x_{i-1}$ et de hauteur $|c_i|$, cette aire étant comptée positivement si $c_i \geq 0$ et négativement si $c_i \leq 0$. Ainsi, dans l'exemple ci-dessous l'intégrale est la somme des aires des rectangles gris clair moins celles des gris foncés :



Avec cette interprétation géométrique, il est clair que la somme $(*)$ ci-dessus ne dépend pas de la subdivision associée σ, car si on subdivise un rectangle en rectangles de même hauteur et de bases plus petites, l'aire algébrique du grand rectangle est la somme des aires algébriques des petits. C'est le cas dans l'exemple ci-dessus pour les deux rectangles gris clair.

Notation 5.5. — Pour deux applications $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, on écrira $f \leq g$ si l'on a $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Théorème 5.6. — *Soit $\mathscr{E}(a, b)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.*

(i) *$\mathscr{E}(a, b)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

(ii) *L'application $\mathscr{E}(a, b) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire, et elle est* croissante*, c.-à-d. si $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

Démonstration. — Soient $f, g \in \mathscr{E}(a, b)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit σ (resp. σ') une subdivision associée à f (resp. g). Alors la subdivision $\sigma \cup \sigma' = \{x_0, \dots, x_n\}$ est associée à la fois à f et à g, i.e. f et g sont constantes sur chaque intervalle $]x_{i-1}, x_i[$, de valeurs respectives c_i et d_i, et donc $\lambda f + g$ y est aussi constante, de valeur $\lambda c_i + d_i$. Ceci montre déjà que $\lambda f + g$ est en escalier, donc que $\mathscr{E}(a,b)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel de toutes les fonctions $[a,b] \to \mathbb{R}$. De plus, on a

$$\int_a^b (\lambda f + g) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})(\lambda c_i + d_i) = \lambda \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})c_i + \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})d_i = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Ceci montre que l'application $\mathscr{E}(a,b) \to \mathbb{R}$, $h \mapsto \int_a^b h$ est linéaire.

De plus, si $f \geq 0$, i.e. si tous les c_i sont ≥ 0, il est clair que $\int_a^b f \geq 0$. Sous l'hypothèse que $f \leq g$, on peut appliquer ceci à la fonction en escalier $g - f$, qui est ≥ 0 ; on obtient donc :

$$0 \leq \int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f$$

(l'égalité découlant de la linéarité, déjà établie). On a donc $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, ce qui achève la démonstration du théorème. □

***Proposition 5.7* (Relation de Chasles).** — *Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $c \in]a,b[$. Alors :*

(i) *f est en escalier sur $[a,b]$ si et seulement si f est en escalier sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.*

(ii) *Dans ce cas, on a* $\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.}$

Démonstration. — C'est clair. □

Notation 5.8. — Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction en escalier sur J. Pour tout $a < b$ dans J, on a donc défini l'intégrale $\int_a^b f$. Il est commode de poser aussi $\boxed{\int_b^a f = -\int_a^b f}$. Alors $\int_a^b f$ est défini pour tout couple (a,b) de points de J (et vaut 0 si $a = b$) et à partir de la relation de Chasles établie pour $a < b < c$, on vérifie facilement que pour tout triplet (a,b,c) de J on a la relation de Chasles « généralisée » : $\boxed{\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.}$

5.2. Fonctions intégrables au sens de Riemann

Avant de pouvoir définir l'intégrale d'une fonction continue sur $[a,b]$, on a besoin des notions techniques d'intégrales inférieure et supérieure, introduites dans la définition suivante.

Définitions 5.9. — Soit f une application *bornée* de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$ (on peut, si on veut, prendre pour m (resp. M) la borne inférieure (resp. supérieure) de l'ensemble des $f(x)$ pour $x \in [a,b]$). On définit alors :

(i) $\boxed{\mathscr{E}(a,b,\leq f) = \{g \in \mathscr{E}(a,b) \mid g \leq f\}}$ et $\boxed{\mathscr{E}(a,b,\geq f) = \{h \in \mathscr{E}(a,b) \mid f \leq h\}.}$

Ces ensembles sont non vides, car le premier (resp. second) contient la fonction constante de valeur m (resp. M). Alors, pour tout $g \in \mathscr{E}(a,b,\leq f)$ et $h \in \mathscr{E}(a,b,\geq f)$ on a $g \leq f \leq h$ et donc $\int_a^b g \leq \int_a^b h$. Gardant h fixé et faisant varier g, on en déduit que :

(ii) L'ensemble non vide $\{\int_a^b g \mid g \in \mathscr{E}(a,b,\leq f)\}$ est majoré, donc admet une borne supérieure notée $\boxed{I^-(a,b,f).}$ Elle est $\leq \int_a^b h$ pour tout $h \in \mathscr{E}(a,b \geq f)$. Faisant alors varier h, on obtient que :

(iii) L'ensemble non vide $\{\int_a^b h \mid h \in \mathscr{E}(a,b,\geq f)\}$ est minoré, donc admet une borne inférieure notée $\boxed{I^+(a,b,f).}$ Elle est $\geq I^-(a,b,f)$.

(iv) $I^-(a,b,f)$ (resp. $I^+(a,b,f)$) s'appelle l'intégrale *inférieure* (resp. *supérieure*) de f sur $[a,b]$. On les notera simplement $I^-(f)$ et $I^+(f)$ lorsqu'il ne sera pas nécessaire de préciser a et b.

(v) Par définition des bornes inférieure et supérieure, on a donc : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathscr{E}(a,b,\leq f)$ et $h \in \mathscr{E}(a,b,\geq f)$ tels que

$$I^-(a,b,f) - \varepsilon < \int_a^b g \leq I^-(a,b,f) \leq I^+(a,b,f) \leq \int_a^b h < I^+(a,b,f) + \varepsilon.$$

***Définition et proposition 5.10* (Fonctions intégrables).** — *Soit f une application* bornée *de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $I^-(a, b, f) = I^+(a, b, f)$.

(2) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathscr{E}(a, b, \leq f)$ et $h \in \mathscr{E}(a, b, \geq f)$ tels que $0 \leq \int_a^b (h-g) < \varepsilon$.*

(ii) *Sous ces conditions, on dit que f est* intégrable *(au sens de Riemann) sur $[a, b]$ et l'on pose $\int_a^b f = I^-(a, b, f) = I^+(a, b, f)$.*

Démonstration de (i). — Supposons $I^-(a, b, f) = I^+(a, b, f)$ et notons-le I ; alors, par définition des bornes inférieure et supérieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathscr{E}(a, b, \leq f)$ et $h \in \mathscr{E}(a, b, \geq f)$ tels que

$$I - \frac{\varepsilon}{2} < \int_a^b g \leq I \leq \int_a^b h < I + \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où $\int_a^b (h - g) < \varepsilon$. Réciproquement, si (2) est vérifiée alors, comme $\int_a^b g \leq I^-(a, b, f) \leq I^+(a, b, f) \leq \int_a^b h$, on obtient que $0 \leq I^+(a, b, f) - I^-(a, b, f) < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $I^+(a, b, f) = I^-(a, b, f)$. □

Commençons par établir la propriété suivante des fonctions intégrables :

Proposition 5.11. — *Si f est intégrable sur $[a, b]$, elle l'est sur tout intervalle $[c, d]$ contenu dans $[a, b]$.*

Démonstration. — Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $g \in \mathscr{E}(a, b, \leq f)$ et $h \in \mathscr{E}(a, b, \geq f)$ tels que $0 \leq \int_a^b (h - g) < \varepsilon$. Or, d'après la relation de Chasles et le fait que $h - g \geq 0$, on a

$$\int_a^b (h - g) = \underbrace{\int_a^c (h - g)}_{\geq 0} + \int_c^d (h - g) + \underbrace{\int_d^b (h - g)}_{\geq 0} \geq \int_c^d (h - d)$$

d'où $0 \leq \int_c^d (h - g) < \varepsilon$. Ceci prouve que f est intégrable sur $[c, d]$. □

Afin de montrer que toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable, on aura besoin des deux propriétés qui suivent des intégrales inférieure et supérieure.

***Proposition 5.12* (Relation de Chasles pour I^- et I^+).** — *Soit f une application bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et soit $c \in [a, b]$. Alors $I^-(a, b, f) = I^-(a, c, f) + I^-(c, b, f)$ et de même pour I^+.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que $I^-(c, c, f) = 0$, donc l'égalité est trivialement vraie si $c = a$ ou $c = b$. On peut donc supposer $c \in]a, b[$. Soit $g \in \mathscr{E}(a, b, \leq f)$. Notons g_1 et g_2 les restrictions de g à $[a, c]$ et $[c, b]$, ce sont des fonctions en escalier. Utilisant la relation de Chasles pour la fonction en escalier g, on obtient donc :

$$\int_a^b g = \int_a^c g_1 + \int_c^b g_2 \leq I^-(a, c, f) + I^-(c, b, f)$$

d'où $I^-(a, b, f) \leq I^-(a, c, f) + I^-(c, b, f)$.

Réciproquement, soient $g_1 \in \mathscr{E}(a, c, \leq f)$ et $g_2 \in \mathscr{E}(c, b, \leq f)$, posons $g(x) = g_1(x)$ si $x \in [a, c]$ et $g(x) = g_2(x)$ si $x \in]c, b]$. Alors g est en escalier sur $[a, b]$ et vérifie $g \leq f$. On a donc :

$$\int_a^c g_1 + \int_c^b g_2 = \int_a^b g \leq I^-(a, b, f).$$

Fixant g_2 et prenant le sup sur g_1, on obtient $I^-(a, c, f) \leq I^-(a, b, f) - \int_c^b g_2$, d'où $\int_c^b g_2 \leq I^-(a, b, f) - I^-(a, c, f)$. Prenant le sup sur g_2, on obtient alors $I^-(c, b, f) \leq I^-(a, b, f) - I^-(a, c, f)$ d'où $I^-(a, c, f) + I^-(c, b, f) \leq I^-(a, b, f)$. Combiné avec l'inégalité obtenue plus haut, ceci prouve que $I^-(a, c, f) + I^-(c, b, f) = I^-(a, b, f)$. La démonstration pour I^+ est analogue. □

(Q) ***Proposition 5.13* (Encadrements pour I^- et I^+).** — *Soit f une application bornée de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x dans l'intervalle* ouvert $]a,b[$.[1] *Alors on a :*

$$(\star) \qquad \boxed{(b-a)m \leq I^-(a,b,f) \leq I^+(a,b,f) \leq (b-a)M.}$$

Démonstration. — Soit g (resp. h) la fonction en escalier sur $[a,b]$ définie par $g(a) = f(a) = h(a)$, $g(b) = f(b) = h(b)$ et $g(x) = m$ (resp. $h(x) = M$) pour tout $x \in]a,b[$. Alors $g \in \mathscr{E}(a,b,\leq f)$ et $h \in \mathscr{E}(a,b,\geq f)$ et donc : $(b-a)m = \int_a^b g \leq I^-(a,b,f) \leq I^+(a,b,f) \leq \int_a^b h = (b-a)M$. □

Remarque 5.14. — Les intégrales inférieure et supérieure ne sont pas linéaires : pour deux applications bornées $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ on peut montrer que $I^-(f) + I^-(g) \leq I^-(f+g)$ et $I^+(f+g) \leq I^+(f) + I^+(g)$, mais ces inégalités peuvent être strictes. Par exemple, si $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont définies par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) = 0$ sinon, et $g(x) = 1 - f(x)$, alors on vérifie que $I^-(f) = 0 = I^-(g)$ et $I^+(f) = 1 = I^+(g)$, tandis que $I^-(f+g) = 1 = I^+(f+g)$.

Le théorème suivant peut être appelé « théorème fondamental du calcul intégral », même si l'on réserve d'habitude cette terminologie au cas particulier où f est supposée continue. On le signale comme question de cours « avancée », mais en fait il sera suffisant d'apprendre l'énoncé pour f continue.

(Q^+) ***Théorème 5.15.*** — *Soit f une application bornée de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'en tout point $x \in]a,b[$, f possède une* limite à gauche, *notée $f(x^-)$, et une* limite à droite, *notée $f(x^+)$. Alors :*

(i) *f est intégrable sur $[a,b]$.*

(ii) *L'application $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f$ est continue sur $[a,b]$, nulle en a, et pour tout $x \in]a,b[$, F est dérivable à gauche et à droite en x, de dérivée à gauche $f(x^-)$ et de dérivée à droite $f(x^+)$.*

(iii) *Si f possède une limite à droite $f(a^+)$ en a, alors F est dérivable à droite en a de dérivée à droite $f(a^+)$, et de même si f possède une limite à gauche $f(b^-)$ en b.*

Pour démontrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 5.16. — *Sous les hypothèses du théorème, posons $F_-(x) = I^-(a,x,f)$ et $F_+ = I^+(a,x,f)$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors :*

(i) *$F_-(a) = 0 = F_+(a)$.*

(ii) *Pour tout $x \in]a,b[$, F_- et F_+ admettent $f(x^-)$ (resp. $f(x^+)$) comme dérivée à gauche (resp. à droite) en x.*

(iii) *F_- et F_+ sont continues sur $[a,b]$.*

Démonstration. — (i) découle des définitions. Prouvons (ii). Fixons $x_0 \in]a,b[$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} = f(x_0^-)$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0[$ on ait $f(x_0^-) - \varepsilon < f(x) < f(x_0^-) + \varepsilon$ et donc d'après la proposition 5.13 on a

$$(1) \qquad (x_0 - x)(f(x_0^-) - \varepsilon) \leq I^-(x, x_0, f) \leq I^+(x, x_0, f) \leq (x_0 - x)(f(x_0^-) + \varepsilon).$$

Or, d'après la relation de Chasles (prop. 5.12), pour tout $x \in [a, x_0[$ on a :

$$F_-(x_0) - F_-(x) = I^-(a, x_0, f) - I^-(a, x, f) = I^-(x, x_0, f)$$

et de même pour F_+. Donc (2) se récrit en :

$$f(x_0^-) - \varepsilon \leq \frac{F_-(x_0) - F_-(x)}{x_0 - x} \leq \frac{F_+(x_0) - F_+(x)}{x_0 - x} \leq f(x_0^-) + \varepsilon$$

et ceci entraîne que F_- et F_+ admettent $f(x^-)$ comme dérivée à gauche en x_0. On montre de même qu'elles admettent $f(x^+)$ comme dérivée à droite en x_0. Ceci prouve (ii).

[1] Les valeurs $f(a)$ et $f(b)$ n'ont pas d'importance.

En particulier, F_- admet $F_-(x_0)$ comme limite à gauche et à droite en x_0, donc est continue en x_0, et de même pour F_+. Reste à montrer que F_- et F_+ sont continues à droite en a et à gauche en b. Or il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, d'où

$$m(x-a) \leq I^-(a,x,f) \leq I^+(a,x,f) \leq M(x-a).$$

Or, d'après la relation de Chasles (prop. 5.12), $I^-(a,x,f) = F_-(x) - F_-(a)$ et de même pour I^+, et donc les inégalités ci-dessus montrent que F_- et F_+ sont continues à droite en a. Leur continuité à gauche en b se prouve de façon analogue. Le lemme est démontré. □

Démonstration du théorème. — Pour tout $x \in [a,b]$, posons $G(x) = F_+(x) - F_-(x)$. Alors $G(a) = 0$, G est continue sur $[a,b]$ et en tout point $x \in]a,b[$, G est dérivable à gauche en x de dérivée à gauche nulle, et aussi dérivable à droite en x de dérivée à droite nulle. Donc, G est dérivable en tout point $x \in]a,b[$, de dérivée $G'(x) = 0$. Il résulte alors du théorème des accroissements finis que G est constante sur $[a,b]$, de valeur $G(a) = 0$. Donc $0 = G(b) = I^+(a,b,f) - I^-(a,b,f)$. Ceci prouve que f est intégrable sur $[a,b]$.

De plus, la démonstration donne aussi que pour tout $x \in [a,b]$, on a $0 = G(x) = F_+(x) - F_-(x)$, ce qui prouve que $F_+ = F_-$ et que f est intégrable sur $[a,x]$. (Ceci découle aussi de la prop. 5.11.) Donc la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_a^x f = F_-(x) = F_+(x)$ est bien définie, et d'après le lemme précédent elle est continue sur $[a,b]$, nulle en a, et en tout $x \in]a,b[$ elle est dérivable à gauche de dérivée à gauche $F'_g(x) = f(x^-)$ et dérivable à droite de dérivée à droite $F'_d(x) = f(x^+)$, et l'on a aussi $F'_d(a) = f(a^+)$ (resp. $F'_g(b) = f(b^-)$) si la limite $f(a^+)$ (resp. $f(b^-)$) existe. Le théorème est démontré. □

Dans le cas particulier où f est continue sur $[a,b]$ (donc bornée sur $[a,b]$), on obtient le :

(Q) ***Théorème 5.17* (fondamental du calcul intégral)**. — *Soit f une application* continue *de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. Alors :*

(i) *f est intégrable sur l'intervalle $[a,x]$ pour tout $x \in [a,b]$ et la fonction définie par $F(x) = \int_a^x f$ est une primitive de f sur $[a,b]$. C'est l'unique primitive de f sur $[a,b]$ s'annulant en a.*

(ii) *Pour* toute *primitive G de f sur $[a,b]$, on a $G(b) - G(a) = \int_a^b f$.*

Démonstration. — La première partie de (i) a déjà été démontrée, donc F est bien une primitive de f sur $[a,b]$ telle que $F(a) = 0$. Si G est une autre primitive de f sur $[a,b]$, alors $G - F$ est dérivable sur $[a,b]$ de dérivée nulle, donc est une constante c, d'où $G(x) = c + F(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Par conséquent, si $G(a) = 0 = F(a)$, alors $c = 0$ donc $G = F$; de plus, on a $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f$. Ceci achève la preuve de (i) et de (ii). □

Donnons maintenant quelques propriétés des fonctions intégrables (qui auraient pu être énoncées et démontrées *avant* le théorème fondamental).

(Q) ***Théorème 5.18***. — *Soit $\mathcal{I}(a,b)$ l'ensemble des fonctions intégrables $[a,b] \to \mathbb{R}$.*

(i) *$\mathcal{I}(a,b)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

(ii) *L'application $\mathcal{I}(a,b) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int_a^b f$ est linéaire, et elle est* croissante, *c.-à-d. si $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

(iii) *Si $f \in \mathcal{I}(a,b)$ alors l'application $|f| : x \mapsto |f(x)|$ est intégrable, et l'on a $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.*

Démonstration. — Soient $f, g \in \mathcal{I}(a,b)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions en escaliers r, u, v, w sur $[a,b]$ telles que $r \leq f \leq u$, $v \leq g \leq w$ et

$$(*) \qquad \int_a^b r \leq \int_a^b f \leq \int_a^b u < \int_a^b r + \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \int_a^b v \leq \int_a^b g \leq \int_a^b w < \int_a^b v + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $r + v \leq f + g \leq u + w$ et l'on a $\int_a^b (u + w - r - v) = \int_a^b (u - r) + \int_a^b (w - v) < \varepsilon$. Ceci prouve que $f + g$ est intégrable. De plus, d'après la linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier et les encadrements $(*)$ plus haut, on a :

$$-\varepsilon + \int_a^b f + \int_a^b g < \int_a^b (r + v) \leq \int_a^b (f + g) \leq \int_a^b (u + w) < \varepsilon + \int_a^b f + \int_a^b g.$$

On a donc $\left|\int_a^b(f+g)-\int_a^b f-\int_a^b g\right|<\varepsilon$ pour tout $\varepsilon>0$, d'où $\int_a^b(f+g)-\int_a^b f-\int_a^b g$.

Soit maintenant $\lambda\in\mathbb{R}$. Si $\lambda=0$ alors λf est la fonction nulle, qui est intégrable, donc on peut supposer $\lambda\neq 0$. Alors, pour tout $\varepsilon>0$ il existe des fonctions en escaliers r,u sur $[a,b]$ telles que $r\le f\le u$ et

$$\int_a^b r\le\int_a^b f\le\int_a^b u<\int_a^b r+\frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Si $\lambda>0$, on a $\lambda r\le\lambda f\le\lambda u$ et $\int_a^b\lambda(u-r)<\varepsilon$. Ceci montre que λf est intégrable. De plus,

$$-\varepsilon+\lambda\int_a^b f<\lambda\int_a^b r=\int_a^b\lambda r\le\int_a^b\lambda f\le\int_a^b\lambda u=\lambda\int_a^b u<\varepsilon+\lambda\int_a^b f.$$

On a donc $\left|\int_a^b\lambda f-\lambda\int_a^b f\right|<\varepsilon$ pour tout $\varepsilon>0$, d'où $\int_a^b\lambda f=\lambda\int_a^b f$.

Enfin, si $\lambda<0$, on a a $\lambda u\le\lambda f\le\lambda r$ et $\int_a^b\lambda(r-u)<\varepsilon$ et le reste de la démonstration est analogue à ce qui précède. Ceci prouve que $\mathcal{I}(a,b)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application $\mathcal{I}(a,b)\to\mathbb{R}$, $f\mapsto\int_a^b f$ est linéaire.

Montrons qu'elle est croissante. Si $h\in\mathcal{I}(a,b)$ est ≥ 0, elle est minorée par la fonction constante 0 et donc $\int_a^b h\ge 0$. Maintenant, soient $f,g\in\mathcal{I}(a,b)$ telles que $f\le g$. Alors $h=g-f$ est ≥ 0 et appartient à $\mathcal{I}(a,b)$ d'après ce qui précède. On a donc $0\le\int_a^b(g-f)=\int_a^b g-\int_a^b f$, d'où $\int_a^b f\le\int_a^b g$. Ceci achève la preuve de (ii).

Prouvons (iii). Soit $f\in\mathcal{I}(a,b)$. Pour tout $x\in[a,b]$, posons $f_+(x)=\max(f(x),0)$ et $f_-(x)=\max(-f(x),0)$; alors on a $f=f_+-f_-$ et $|f|=f_++f_-$. Montrons que f_+ et f_- sont intégrables. Soit $\varepsilon>0$. Il existe u,v en escalier sur $[a,b]$ telles que $u\le f\le v$ et $\int_a^b(v-u)<\varepsilon$. Alors u_+ et v_+ sont en escalier et l'on a $u_+\le f_+\le v_+$ et

$$v_+(x)-u_+(x)=\begin{cases} v(x)-u(x) & \text{si } u(x)\ge 0\\ v(x)<v(x)-u(x) & \text{si } v(x)\ge 0>u(x)\\ 0\le v(x)-u(x) & \text{si } 0>v(x)\ge u(x)\end{cases}$$

donc $0\le\int_a^b(v_+-u_+)\le\int_a^b(v-u)<\varepsilon$. Ceci prouve que f_+ est intégrable, et la démonstration est analogue pour f_-. (On peut aussi dire que $f_-=(-f)_+$.) Donc $|f|$ est intégrable. Alors, comme $-|f|\le f\le|f|$ et comme l'intégrale est croissante, on a $-\int_a^b|f|\le\int_a^b f\le\int_a^b|f|$, d'où $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$. Le théorème est démontré. □

Proposition 5.19. — *Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ intégrables, alors le produit fg l'est aussi.*

Démonstration. — Supposons d'abord $f,g\ge 0$. Comme f,g sont bornées, il existe $M\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $0\le f,g\le M$. Soit $\varepsilon>0$. Il existe des fonctions en escalier r,u,v,w telles que :

$$0\le r\le f\le u\le M\qquad\text{et}\qquad 0\le v\le g\le w\le M,\tag{1}$$

$$\int_a^b(u-r)<\frac{\varepsilon}{2M}\qquad\text{et}\qquad\int_a^b(w-v)<\frac{\varepsilon}{2M}.\tag{2}$$

Comme dans (1) les termes sont tous ≥ 0, on peut multiplier ces inégalités et l'on obtient $rv\le fg\le uw$; de plus $uw-rv=u(w-v)+v(u-r)\le M(w-v)+M(u-r)$ et donc

$$\int_a^b(uw-rv)\le M\int_a^b(w-v)+M\int_a^b(u-r)<\varepsilon.$$

Ceci montre que fg est intégrable. Dans le cas général, comme f,g sont bornées il existe $A\in\mathbb{R}_+^*$ tel que les fonctions $A+f$ et $A+g$ soient ≥ 0. Alors, d'après ce qui précède le produit $(A+f)(A+g)$ est intégrable, or il est égal à $A^2+A(f+g)+fg$ et comme A^2 et $A(f+g)$ sont intégrables, on en déduit que fg l'est aussi. □

Remarque 5.20. — Attention, on a $\int_a^b fg\neq(\int_a^b f)(\int_a^b g)$! Par exemple, $\int_0^1 x=[x^2/2]_0^1=1/2$ mais $\int_0^1 x^2=[x^3/3]_0^1=1/3\neq(1/2)^2$.

(Q) ***Proposition 5.21.*** — *Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables, avec g* positive. *On note m (resp. M) la borne inférieure (resp. supérieure) de f sur $[a,b]$. Alors :*

(i) *On a* $\boxed{m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.}$

(ii) *Si de plus f est* continue *il existe $c \in [a,b]$ tel que* $\boxed{\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.}$ (Formule de la moyenne)

(iii) *En particulier, si f est* continue et si $g = 1$, *il existe $c \in [a,b]$ tel que* $\boxed{\int_a^b f = f(c)(b-a).}$

Démonstration. — D'après la proposition 5.19, on sait que fg est intégrable. Pour tout $x \in [a,b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$ et $g(x) \geq 0$ donc $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$, et comme l'intégrale est croissante on obtient (i).

Supposons f continue. Alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires et celui des bornes atteintes, on a $f([a,b]) = [m,M]$. Posons $I = \int_a^b g$ et $J = \int_a^b fg$. On a $I \geq 0$ puisque $g \geq 0$. Si $I = 0$ alors $J = 0$ et l'on a $J = f(c)I$ pour tout $c \in [a,b]$. Si $I > 0$, alors $m \leq J/I \leq M$ et donc il existe $c \in [a,b]$ tel que $J/I = f(c)$, d'où $J = f(c)I$. Ceci prouve (ii) et aussi (iii).

Notons aussi que (iii) découle du théorème des accroissements finis : comme $F(x) = \int_a^x f$ est la primitive de f s'annulant en a, il existe $c \in [a,b]$ tel que $F(b) - F(a) = \int_a^b f$ égale $(b-a)$ fois $F'(c) = f(c)$. □

(Q) ***Proposition 5.22.*** — *Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$* continue et positive. *Si $\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$.*

(Q) *Démonstration.* — [2] La fonction $F(x) = \int_a^x f$ est nulle en a, continue et dérivable sur $[a,b]$, de dérivée $f \geq 0$, donc F est croissante. Si $\int_a^b f = F(b)$ vaut $0 = F(a)$, alors F est la fonction constante nulle ; donc sa dérivée $f = F'$ est nulle.

Autre démonstration. Supposons $f \neq 0$, alors il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) > 0$ (car si f est nulle sur $]a,b[$ alors $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = 0$ et de même $f(b) = 0$). Comme f est continue, il existe $\delta > 0$ tel que $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ soit contenu dans $[a,b]$ et $f(x) > f(x_0)/2$ pour tout $x \in I$. Alors la fonction g en escalier sur $[a,b]$ définie par $g(x) = f(x_0)/2$ si $x \in I$ et $g(x) = 0$ sinon, minore f et donc $\int_a^b f \geq \int_a^b g = 2\delta \times f(x_0)/2 = \delta f(x_0) > 0$. □

5.3. Intégration par parties et formule de changement de variable

Notation 5.23. — Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. On désigne par $\int f$ une primitive quelconque de f sur I. Ceci est justifié par ce qui suit : si on fixe $a \in I$, la fonction $F(x) = \int_a^x f$ est une primitive de f sur I ; bien sûr, si on choisit un autre point $b \in I$ alors la fonction $G(x) = \int_b^x f$ est une autre primitive de f sur I donc $G - F$ est une constante c ; plus précisément d'après la relation de Chasles on a $G(x) - F(x) = \int_a^b f$.

(Q) ***Théorème 5.24* (Intégration par parties).** — *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux applications de classe C^1. On suppose connue une primitive F de f sur I. Alors :*

(i) *Si on fixe $a \in I$, l'application $x \mapsto F(x)g(x) - \int_a^x Fg'$ est une primitive de fg sur I.*

(ii) *Plus précisément, pour tout $a, x \in I$ on a :*

$$\int_a^x fg = [Fg]_a^x - \int_a^x Fg' = F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^x Fg'.$$

Démonstration. — Fg est dérivable, de dérivée $(Fg)' = fg + Fg'$. De plus les fonctions fg, Fg' et $(Fg)'$ sont continues donc d'après le théorème fondamental du calcul intégral, elles sont intégrables sur I et pour tout $a, x \in I$ on a :

$$F(x)g(x) - F(a)g(a) = [Fg]_a^x = \int_a^x (Fg)' = \int_a^x fg + \int_a^x Fg'.$$

[2] Cette démonstration fait partie de la question de cours.

Ceci prouve le point (ii) et a fortiori le point (i). □

Exemples 5.25. — L'idée de l'intégration par parties (IPP) est bien sûr que la fonction Fg' est plus simple à intégrer que la fonction fg de départ, donc si on en connaît une primitive on en connaîtra une pour fg. Il faut parfois procéder à plusieurs IPP successives pour aboutir à un résultat. Illustrons ceci par deux exemples.

(1) Déterminer une primitive sur $I = \mathbb{R}$ de la fonction $h(t) = t^2e^t$. Posons $f(t) = e^t$ et $g(t) = t^2$, alors une primitive de f est $F(t) = e^t$ et l'on a $g'(t) = 2t$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(*) \qquad \int_0^x t^2e^t = [t^2e^t]_0^x - \int_0^x 2te^t = x^2e^x - \int_0^x 2te^t.$$

Recommençons l'opération en posant $u(t) = 2t$ et $v(t) = e^t = v'(t)$. Alors $u'(t) = 2$ et l'on a :

$$(**) \qquad \int_0^x 2te^t = \int_0^x uv' = [uv]_0^x - \int_0^x u'v = 2xe^x - \int_0^x 2e^t = 2xe^x - 2(e^x - 1).$$

En combinant $(*)$ et $(**)$, on obtient que $\int_0^x t^2e^t = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2 = (x^2 - 2x + 2)e^x - 2$. Vérifions : la dérivée de l'expression précédente est $e^x(x^2 - 2x + 2 - 2x - 2) = x^2e^x$.

(2) Déterminer une primitive sur $I = \mathbb{R}_+^*$ de $h(t) = \ln(t)$. Posons $f(t) = 1$ et $g(t) = \ln(t)$, alors une primitive de f est $F(t) = t$ et l'on a $g'(t) = 1/t$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_1^x \ln(t) = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x 1 = x\ln(x) - x + 1.$$

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ posons $f(t) = t^n$ et $g(t) = \ln(t)$. Alors une primitive de f est $F(t) = t^{n+1}/(n+1)$ et $g'(t) = 1/t$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$\int_1^x t^n \ln(t) = \Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\Big]_1^x - \frac{1}{n+1}\int_1^x t^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(x) - \frac{1}{(n+1)^2}(x^{n+1} - 1).$$

***Théorème 5.26* (Formule de Taylor avec reste intégral)**. — *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^{n+1}. Pour tout $a, b \in I$ on a :*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t).$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur n. Si $n = 0$, l'hypothèse est que f' est continue, et alors d'après le théorème fondamental du calcul intégral on a $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)$. Traitons encore le cas $n = 1$. Calculons $\int_a^b f'(t)$ en intégrant par parties : on pose $u(t) = f'(t)$ et $v'(t) = 1$. Alors $u'(t) = f''(t)$ et, comme primitive de $v'(t) = 1$ on choisit celle qui s'annule en b, à savoir $v(t) = t - b$. On obtient donc :

$$\int_a^b f'(t) = \big[f'(t)(t-b)\big]_a^b - \int_a^b (t-b)f''(t) = f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t)f''(t)$$

ce qui est la formule voulue pour $n = 1$. Soit donc $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons la formule établie au cran $n-1$. Calculons $I_{n-1} = \displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)$ par IPP. On pose $u(t) = f^{(n)}(t)$ et $v'(t) = \dfrac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}$. Alors $u'(t) = f^{(n+1)}(t)$ et, comme primitive de $v'(t)$, on choisit $v(t) = -\dfrac{(b-t)^n}{n!}$. On obtient donc :

$$I_{n-1} = \Big[-f^n(t)\frac{(b-t)^n}{n!}\Big]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) = f^n(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t).$$

La formule voulue est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et le théorème est démontré. □

***Corollaire 5.27* (Formule de Taylor-Lagrange)**. — *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application de classe C^{n+1}. Pour tout $a < b$ dans I il existe $c \in [a, b]$ tel que*

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Démonstration. — Puisque $f^{(n+1)}$ est continue et que la fonction $g(t) = (b-t)^n/n!$ est ≥ 0 sur $[a, b]$ alors, d'après la formule de la moyenne (5.21), il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(c) \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} = f^{(n+1)}(c) \Big[\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} \Big]_a^b = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Ceci prouve le corollaire. □

Notation 5.28. — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ intégrable. Désormais, pour tout $a, b \in I$, l'intégrale $\int_a^b f$ sera notée $\int_a^b f(t)dt$.

(Q) ***Théorème 5.29* (Changement de variable).** — *Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, soit $I = f([c, d])$ et soit $g : I \to \mathbb{R}$ continue. Alors on a :*

$$\int_c^d g(f(t))f'(t)dt = \int_{f(c)}^{f(d)} g(u)du.$$

On dit que l'intégrale de droite est déduite de celle de gauche par le changement de variable $u = f(t)$.

Démonstration. — Posons $a = f(c)$ et $G(x) = \int_a^x g(u)du$ pour tout $x \in I$. On a $G(a) = 0$ et par le théorème fondamental du calcul intégral, G est dérivable sur I, de dérivée g. Par conséquent la fonction composée $H = G \circ f : [c, d] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto G(f(t)) = \int_a^{f(t)} g(u)du$ est nulle en c et dérivable sur $[c, d]$, de dérivée $H'(t) = g(f(t))f'(t)$ qui est continue. Donc, par le théorème fondamental à nouveau, on a

$$\int_c^d g(f(t))f'(t)dt = H(d) - H(c) = H(d) = \int_{f(c)}^{f(d)} g(u)du.$$

Ceci prouve le théorème. □

Remarque 5.30. — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Parfois (surtout en Physique) la fonction dérivée f' est notée $\dfrac{df}{dt}$, i.e. pour tout $t_0 \in I$ on pose $f'(t_0) = \dfrac{df}{dt}(t_0)$. De façon symbolique, on peut donc écrire que $df = f'dt$. En Physique, ceci signifie que pour un très petit accroissement dt de la variable autour de t_0, la variation de la fonction f est donnée approximativement (i.e. au 1er ordre) par $f(t_0 + dt) - f(t_0) = df(t_0) = f'(t_0)dt$.

Si l'on fait le changement de variable $u = f(t)$, on a alors $\dfrac{du}{dt} = u' = f'$ d'où de façon symbolique $\boxed{du = f'(t)dt,}$ ce qui aide à retenir la formule de changement de variable.

Exemples 5.31. — La plupart du temps, la formule de changement de variable est appliquée « de gauche à droite », comme dans les deux exemples suivants :

(1) On veut calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{e^t + 1} dt$, pour $x \in \mathbb{R}$. Si on pose $u = f(t) = e^t$ on a $du = f'(t)dt = e^t dt$ donc $I(x) = \displaystyle\int_1^{e^x} \frac{du}{u+1} = \big[\ln(u+1)\big]_1^{e^x} = \ln(e^x + 1) - \ln(2)$.

(2) On veut calculer $J(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} dt$, pour $x \in \mathbb{R}$. On a $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(t)} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} = \dfrac{2e^t}{e^{2t} + 1}$, donc si on pose $u = e^t$ alors $du = e^t dt$ et comme $e^{2t} = u^2$ on obtient :

$$J(x) = \int_1^{e^x} \frac{2du}{u^2 + 1} = \big[2 \operatorname{Arctan}(u)\big]_1^{e^x} = 2 \operatorname{Arctan}(e^x) - 2 \operatorname{Arctan}(1) = 2 \operatorname{Arctan}(e^x) - \frac{\pi}{2}.$$

(Comme $\tan(\pi/4) = 1$ on a $\operatorname{Arctan}(1) = \pi/4$.)

Mais parfois, on utilise la formule de changement de variable « de droite à gauche », comme dans l'exemple suivant :

(3) On veut calculer $K(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$, pour $x \in]-1, 1[$. Posons $u = f(t) = \sin(t)$, alors $du = f'(t)dt = \cos(t)dt$. On cherche alors un intervalle $[c, d]$ envoyé par f dans un intervalle J sur lequel $g(u) = 1/\sqrt{1-u^2}$ est définie est continue, d'où $J =]-1, 1[$, et tel que $\sin(c) = 0$ et

$\sin(d) = x$. Comme sin est une bijection de $I =]-\pi/2, \pi/2[$ sur J, on peut donc prendre $c = 0$ et $d = \operatorname{Arcsin}(x)$. Comme $\cos(t) > 0$ sur I, on a $\cos(t) = \sqrt{1-\sin^2(t)}$ pour tout $t \in I$, et l'on obtient donc :

$$K(x) = \int_0^{\operatorname{Arcsin}(x)} \frac{\cos(t)dt}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} = \int_0^{\operatorname{Arcsin}(x)} dt = \operatorname{Arcsin}(x).$$

On pouvait aussi trouver ceci directement en se souvenant que Arcsin : $[-1,1] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $]-1,1[$, de dérivée $\operatorname{Arcsin}'(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$.

5.4. Primitives de fractions rationnelles

***Définition 5.32* (Discriminant réduit).** — Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré 2, que nous écrivons $P = X^2 + 2bX + c$. Noter que le coefficient de X est noté $2b$! Le discriminant *réduit* de P est $\Delta' = b^2 - c$, il est égal à 1/4 du discriminant usuel $\Delta = (2b)^2 - 4c$. Supposons que Δ et donc Δ' soient < 0 et posons $d = \sqrt{-\Delta'}$. Alors on a

$$P(X) = (X+b)^2 + c - b^2 = (X+b)^2 + d^2 = d^2\Big[\Big(\frac{X+b}{d}\Big)^2 + 1\Big].$$

(Q) **5.4.1. Primitives de certaines fractions rationnelles « simples ».** — Il faut connaître les primitives suivantes :

paramètres	$f(x)$	primitives sur un intervalle I
$t \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{x-t}$	$\ln(x-t) + C$ sur $I =]t, +\infty[$ $\ln(t-x) + C$ sur $I =]-\infty, t[$
$t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{(x-t)^{n+1}}$	$\dfrac{-1}{n(x-t)^n} + C$ sur $I =]-\infty, t[$ ou $]t, +\infty[$
$b, c \in \mathbb{R},\ c > b^2$	$\dfrac{x+b}{x^2+2bx+c}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2bx+c\right) + C$ sur $I = \mathbb{R}$
$b, c \in \mathbb{R},\ c > b^2$ $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{x+b}{(x^2+2bx+c)^{n+1}}$	$\dfrac{-1}{2n(x^2+2bx+c)^n} + C$ sur $I = \mathbb{R}$
	$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\operatorname{Arctan}(x) + C$ sur $I = \mathbb{R}$
$d \in \mathbb{R}_+^*,\ b \in \mathbb{R}$	$\dfrac{1}{(x+b)^2+d^2}$	$\dfrac{1}{d}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+b}{d}\right) + C$ sur $I = \mathbb{R}$

Pour la dernière, la dérivée de $\dfrac{1}{d}\operatorname{Arctan}(\dfrac{x+b}{d})$ est bien $\dfrac{1}{d^2}\dfrac{1}{1+(x+b)^2/d^2} = \dfrac{1}{(x+b)^2+d^2}$.

Bien sûr, si l'on a $f(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{(x^2+2bx+c)^{n+1}}$ avec $b^2 < c$ et $n \in \mathbb{N}$, on écrit :

$$f(x) = \alpha\frac{x+b}{(x^2+2bx+c)^{n+1}} + \frac{\beta - \alpha b}{(x^2+2bx+c)^{n+1}}$$

et donc une primitive de f sur $I = \mathbb{R}$ est (en notant $d = \sqrt{c-b^2}$) :

$$\begin{cases} \text{si } n = 0 : & \dfrac{\alpha}{2}\ln\left(x^2+2bx+c\right) + \dfrac{\beta-\alpha b}{d}\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x+b}{d}\right) \\ \text{si } n \geq 1 : & \dfrac{-\alpha}{2n(x^2+2bx+c)^n} + (\beta-\alpha b)G_{n+1}(x), \end{cases}$$

où G_{n+1} désigne une primitive de $1/(x^2+2bx+c)^{n+1}$, voir le paragraphe suivant.

5.4.2. Primitives de $1/(x^2+1)^n$ pour $n \geq 2$. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\boxed{f_n(x) = \frac{1}{(x^2+1)^n}}$ et calculons une primitive F_n de f_n sur $\mathbb{R}$ par récurrence sur n. Posons $u(x) = f_n(x)$ et $v'(x) = 1$. Alors $u'(x) = \dfrac{-n2x}{(x^2+1)^{n+1}}$ et une primitive de $v'(x)$ est $v(x) = x$, d'où

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^n} = \left[\frac{t}{(t^2+1)^n}\right]_0^x + 2n\int_0^x \frac{t^2+1-1}{(t^2+1)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2+1)^n} + 2n(F_n(x) - F_{n+1}(x))$$

d'où $2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + \dfrac{x}{(x^2+1)^n}$. On obtient ainsi :

n	$f_{n+1}(x)$	$F_{n+1}(x)$
1	$\frac{1}{(x^2+1)^2}$	$\frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1}$
2	$\frac{1}{(x^2+1)^3}$	$\frac{3}{8}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{3}{8}\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2}$

Revenons à un polynôme unitaire de degré 2 sans racine réelle : $P(X) = X^2 + 2bX + c = (X+b)^2 + d^2$, où $d = \sqrt{c-b^2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{P(x)^n} = \frac{1}{d^{2n}} \frac{1}{\left[\left(\frac{x+b}{d}\right)^2 + 1\right]^n} = \frac{1}{d^{2n}} f_n\left(\frac{x+b}{d}\right)$$

et comme la dérivée de $F_n(\frac{x+b}{d})$ est $\frac{1}{d} f_n(\frac{x+b}{d})$, on en déduit qu'une primitive de $\dfrac{1}{P(x)^n}$ est la fonction $\dfrac{1}{d^{2n-1}} F_n(\frac{x+b}{d})$.

5.4.3. Décomposition en éléments simples. — On peut ainsi calculer, en principe, une primitive de toute fraction rationnelle de la forme $1/P^n$, où $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme unitaire soit de degré 1, soit de degré 2 sans racine réelle. Ceci suffit pour déterminer une primitive de toute fraction rationnelle, d'après le théorème ci-dessous (qui sera démontré dans le chapitre suivant).

(Q) ***Théorème 5.33.*** — *Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré ≥ 1 et soient $t_1, \dots, t_r$ ses racines réelles et $m_1, \dots, m_r$ leurs ordres de multiplicité.*

(i) *Il existe des polynômes de degré 2 unitaires $Q_1, \dots, Q_s$, sans racines réelles, et des entiers $n_1, \dots, n_s$, uniquement déterminés, tels que*

$$Q(X) = (X-t_1)^{m_1} \cdots (X-t_r)^{m_r} Q_1^{n_1} \cdots Q_s^{n_s}.$$

(ii) *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul et soit E le quotient de la division euclidienne de P par Q. Il existe des réels $a_i(j)$ pour $i = 1, \dots, r$ et $j = 1, \dots, m_i$ et des réels $b_i(j), c_i(j)$ pour $i = 1, \dots, s$ et $j = 1, \dots, n_i$, uniquement déterminés, tels que :*

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{j=1}^{m_1} \frac{a_1(j)}{(X-t_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{m_r} \frac{a_r(j)}{(X-t_r)^j} + \sum_{j=1}^{n_1} \frac{b_1(j)X + c_1(j)}{Q_1^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{n_s} \frac{b_s(j)X + c_s(j)}{Q_s^j}.$$

(iii) *Pour $i = 1, \dots, s$, soient z_i et $\overline{z}_i$ les racines complexes de Q_i. Alors il existe des nombres complexes $\alpha_i(j)$ pour $i = 1, \dots, s$ et $j = 1, \dots, n_i$, uniquement déterminés, tels que :*

$$\frac{P}{Q} = E + \sum_{j=1}^{m_1} \frac{a_1(j)}{(X-t_1)^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{m_r} \frac{a_r(j)}{(X-t_r)^j} +$$
$$\sum_{j=1}^{n_1} \left[\frac{\alpha_1(j)}{(X-z_1)^j} + \frac{\overline{\alpha_1(j)}}{(X-\overline{z}_1)^j}\right] + \cdots + \sum_{j=1}^{n_s} \left[\frac{\alpha_s(j)}{(X-z_s)^j} + \frac{\overline{\alpha_s(j)}}{(X-\overline{z}_s)^j}\right].$$

Remarques 5.34. — (1) Si les polynômes Q_i de degré 2 apparaissent tous avec une multiplicité $n_i = 1$, il peut-être avantageux de passer par la décomposition complexe (iii), car on a le calcul simple ci-dessous :

$$(\star)\qquad \frac{\alpha}{X-z} + \frac{\overline{\alpha}}{X-\overline{z}} = \frac{\alpha(X-\overline{z}) + \overline{\alpha}(X-z)}{X^2 - 2\mathcal{R}e(z)X + |z|^2} = 2\frac{\mathcal{R}e(\alpha)X - \mathcal{R}e(\alpha\overline{z})}{X^2 - 2\mathcal{R}e(z)X + |z|^2}.$$

(2) Pour toute racine t de Q, réelle ou complexe, de multiplicité m, le coefficient α de $1/(X-t)^m$ (dans la décomposition complexe) est facile à calculer : écrivant $Q(X) = (X-t)^m R(X)$ avec $R(t) \neq 0$ et multipliant l'égalité (iii) par $(X-t)^m$ et prenant la valeur en $X = t$, on trouve $\alpha = P(t)/R(t)$. De plus, en dérivant m fois l'égalité $Q(X) = (X-t)^m R(X)$ on obtient que $m!\,R(t) = Q^{(m)}(t)$, voir le lemme 5.37 plus bas. On obtient donc :

$$\boxed{(*)\text{ si } P(X) = (X-t)^m R(X) \text{ avec } R(t) \neq 0, \text{ le coefficient de } \frac{1}{(X-t)^m} \text{ est } \frac{P(t)}{R(t)} = \frac{m!\,P(t)}{Q^{(m)}(t)}.}$$

En particulier, on obtient la :

(Q) ***Proposition 5.35.*** — *Supposons que toutes les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ de Q dans $\mathbb{C}$ soient simples (y compris pour les racines réelles !) et que $\deg(P) < \deg(Q)$ (de sorte que $E = 0$). Alors :*

$$\frac{P}{Q} = \sum_{i=1}^{d} \frac{P(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)} \frac{1}{X-\alpha_i}.$$

Exemples 5.36. — (1) Soit $Q(X) = X^4 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+1)$. Ses racines dans $\mathbb{C}$ sont $1, -1, i, -i$. Comme $Q'(X) = 4X^3$ et $i^3 = 1/i$ on obtient :

$$\frac{1}{Q(X)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-1} + \frac{i}{X-i} - \frac{i}{X+i}\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X-1} + \frac{-2}{X^2+1}\right].$$

(2) Soit $Q(X) = X^6 - 1 = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$. Ses racines dans $\mathbb{C}$ sont $1, -1, j, \overline{j}, \xi, \overline{\xi}$, où $j = \exp(2i\pi/3) = (-1+i\sqrt{3})/2$ et $\xi = \exp(2i\pi/6) = \exp(i\pi/3) = (1+i\sqrt{3})/2$. Comme $Q'(X) = 6X^5$ et comme $j^5 = 1/j$ et $\xi^5 = 1/\xi$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q(X)} &= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{X-1} + \frac{-1}{X+1} + \frac{j}{X-j} + \frac{\overline{j}}{X-\overline{j}} + \frac{\xi}{X-\xi} + \frac{\overline{\xi}}{X-\overline{\xi}}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{X-1} + \frac{-1}{X+1} + 2\frac{\mathcal{R}e(j)X - \mathcal{R}e(j\overline{j})}{X^2+X+1} + 2\frac{\mathcal{R}e(\xi)X - \mathcal{R}e(\xi\overline{\xi})}{X^2-X+1}\right] \\
&= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{X-1} + \frac{-1}{X+1} + \frac{-X-2}{X^2+X+1} + \frac{X-2}{X^2-X+1}\right].
\end{aligned}$$

Lemme 5.37. — *Dans $\mathbb{C}[X]$, soit $Q(X) = (X-t)^m R(X)$. Alors il existe $S \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q^{(m)}(X) = m!\,R(X) + (X-t)S(X)$.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur m. Si $m = 0$, alors $Q^{(0)} = Q = R$ et on a l'égalité pour $S = 0$. On peut donc supposer $m \geq 1$ et le résultat établi pour $m-1$. On a :

$$Q'(X) = m(X-t)^{m-1}R(X) + (X-t)^m R'(X) = (X-t)^{m-1}R_1(X),$$

où l'on a posé $R_1(X) = mR(X) + (X-t)R'(X)$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée à Q' et R_1 au lieu de Q et R, il existe $S_1 \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$Q^{(m)}(X) = (Q')^{(m-1)}(X) = (m-1)!\,R_1(X) + (X-t)S_1(X) = m!\,R(X) + (X-t)S(X),$$

où l'on a posé $S(X) = R'(X) + (m-1)!\,S_1(X)$. Ceci prouve le lemme. □

Rappel 5.38. — Dans $\mathbb{R}[X]$, soient $P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0$ et $Q = b_f X^f + \cdots + b_1 X + b_0$, avec a_d et b_f non nuls, et soit $F(X) = P(X)/Q(X)$. Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $A > \alpha$ pour toute racine réelle α de Q. Alors $F(t)$ est défini sur $[A, +\infty[$ et l'on a

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } d < f, \\ a_d/b_f & \text{si } d = f, \\ \pm\infty & \text{si } d > f, \text{ où } \pm \text{ est le signe de } a_d/b_f. \end{cases}$$

En effet, pour $t \geq A$ on a $F(t) = t^{d-f} \dfrac{a_d + a_{d-1}t^{-1} + \cdots + a_0 t^{-d}}{b_f + b_{f-1}t^{-1} + \cdots + b_0 t^{-f}}$ et comme le quotient précédent tend vers a_d/b_f quand $t \to +\infty$, le résultat en découle.

Remarque 5.39. — Pour décomposer en somme d'éléments simples une fraction rationnelle donnée F de degré < 0, outre les résultats indiqués dans la remarque 5.34, on peut prendre la valeur de F en des points $t_0, \dots, t_n$ où F est définie, et l'on peut aussi multiplier F par X et prendre la limite en $+\infty$. Dans les deux cas, ceci donne des relations qui permettent souvent de déterminer les coefficients indéterminés apparaissant dans la décomposition. Illustrons ceci par l'exemple suivant.

Soit $F(X) = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^4}$. On sait qu'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$F(X) = \frac{X^2+1}{(X-1)^4} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \frac{d}{(X-1)^4}.$$

Multipliant par $(X-1)^4$ et prenant la valeur en $X = 1$, on trouve $d = 2$. D'autre part, multipliant par X et prenant la limite en $+\infty$, on trouve $0 = a$. Prenant la valeur de F aux points 0 et -1 on obtient alors les relations $F(0) = 1 = b - c + 2$ d'où $c = b + 1$ et $F(-1) = \dfrac{1}{8} = \dfrac{b}{4} - \dfrac{c}{8} + \dfrac{1}{8}$, d'où $c = 2b$. On en déduit $b = 1$ puis $c = 2$.

5.5. Sommes de Riemann, méthode des points milieux

***Définition 5.40* (Subdivisions marquées)**. — Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Une subdivision *marquée* (σ, θ) de $[a, b]$ est la donnée d'une subdivision $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ de $[a, b]$ et, pour tout $i = 1, \dots, n$, d'un point $\theta_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

(Q) ***Définition 5.41* (Sommes de Riemann)**. — Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

(i) La *somme de Riemann* associée à une subdivision marquée (σ, θ) de $[a, b]$ est :

$$S(\sigma, \theta, f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\theta_i)$$

c.-à-d., c'est la somme des aires algébriques des rectangles de base $x_i - x_{i-1}$ et de hauteur algébrique $f(\theta_i)$.

(ii) En particulier, si la subdivision σ est de pas constant $(b-a)/n$, i.e. si l'on prend $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ pour $i = 0, 1, \dots, n$, la somme précédente vaut $\dfrac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\theta_i)$.

***Définition 5.42* (Sommes de Darboux inférieure et supérieure)**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et soit $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$.

(i) Comme f est intégrable, elle est bornée sur $[a, b]$ donc sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et l'on note m_i (resp. M_i) la borne inférieure (resp. supérieure) des $f(x)$ pour $x \in [x_{i-1}, x_i]$. Alors, les *sommes de Darboux* inférieure et supérieure associées à σ sont :

$$S_-(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i \qquad S_+(\sigma, f) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i.$$

(ii) Pour tout « marquage » θ de σ, i.e. pour tout choix d'un point $\theta_i \in [x_{i-1}, x_i]$, on a alors $m_i \leq f(\theta_i) \leq M_i$ et donc

$$(*) \qquad S_-(\sigma, f) \leq S(\sigma, \theta, f) \leq S_+(\sigma, f).$$

(iii) D'autre part, les fonctions en escalier g et h définies par $g(x) = m_i$ et $h(x) = M_i$ pour tout $x \in [x_{i-1}, x_i[$ (et, disons, $g(b) = f(b) = h(b)$) vérifient $g \leq f \leq h$ et l'on a donc :

$$(**) \qquad S_-(\sigma, f) = \int_a^b g \leq \int_a^b f \leq \int_a^b h = S_+(\sigma, f).$$

(Q) ***Théorème 5.43*** **(Convergence des sommes de Riemann).** — *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors :*

(i) *« Les sommes de Riemann $S(\sigma, \theta, f)$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f$ quand leur pas $|\sigma|$ tend vers 0 », c.-à-d. : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute subdivision marquée (σ, θ) de pas $|\sigma| < \delta$, on ait $\left| \int_a^b f - S(\sigma, \theta, f) \right| < \varepsilon$. (Et de même pour les sommes de Darboux.)*

(ii) *En particulier, prenant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la subdivision de pas constant $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, et prenant $\theta_i = x_{i-1}$ pour tout i, ou bien $\theta_i = x_i$ pour tout i, on obtient :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\Big(a + i\frac{b-a}{n}\Big) = \int_a^b f = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\Big(a + i\frac{b-a}{n}\Big).$$

Nous ne démontrerons pas ce théorème pour une fonction intégrable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ arbitraire, mais nous le démontrons ci-dessous lorsque f est supposée de classe C^1, auquel cas on obtient que la vitesse de convergence des sommes de Riemann de pas constant $(b-a)/n$ vers l'intégrale est « en $1/n$ ».

(Q) ***Théorème 5.44*** **(Sommes de Riemann dans le cas C^1).** — *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $M_1 = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$. Alors :*

(i) *Pour toute subdivision marquée (σ, θ) de $[a, b]$, on a $\left|\displaystyle\int_a^b f - S(\sigma, \theta, f)\right| < |\sigma|\,(b-a)M_1$, et de même pour les sommes de Darboux.*

(ii) *En particulier, prenant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la subdivision de pas constant $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$, on obtient : $\left|\displaystyle\int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\theta_i)\right| < \dfrac{(b-a)^2}{n} M_1$.*

Démonstration. — Soit (σ, θ) une subdivision marquée de $[a, b]$. D'après les inégalités $(*)$ et $(**)$ de 5.42, $\int_a^b f$ et $S(\sigma, \theta, f)$ sont toutes deux comprises entre $S_-(\sigma, f)$ et $S_+(\sigma, f)$, d'où

$$\left| \int_a^b f - \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\theta_i) \right| \leq S_+(\sigma, f) - S_-(\sigma, f)$$

donc il suffit de majorer le terme de droite ci-dessus, notons-le D. Comme f est continue, il existe pour tout i un élément c_i (resp. d_i) de $[x_{i-1}, x_i]$ (pas nécessairement unique), tel que $f(c_i) = m_i$ (resp. $f(d_i) = M_i$). Alors, comme f' est continue il résulte du théorème fondamental du calcul intégral que :

$$D = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1})\big(f(d_i) - f(c_i)\big) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \int_{c_i}^{d_i} f'(t)dt \leq |\sigma| \sum_{i=1}^n \int_{c_i}^{d_i} f'(t)dt.$$

De plus, $\int_{c_i}^{d_i} f'(t)dt \leq \left| \int_{c_i}^{d_i} |f'(t)|dt \right|$ (on prend la valeur absolue de l'intégrale pour le cas où on aurait $c_i > d_i$) et ceci est $\leq M_1\,|d_i - c_i| \leq (x_i - x_{i-1})M_1$. Donc $D \leq |\sigma|\,(b-a)M_1$. Ceci prouve (i), et (ii) en découle aussitôt. $\square$

Remarques 5.45. — (1) Les résultats qui précèdent sont surtout des résultats *théoriques*, qui permettent de calculer la limite de certaines suites, considérées comme des sommes de Riemann. Considérons par exemple la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \Big(1+\frac{k}{n}\Big)^{1/n}.$$

Ici, il s'agit d'un produit et non d'une somme, donc on commence par prendre le logarithme, i.e. on pose

$$S_n = \ln(P_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\ln\Big(1+\frac{k}{n}\Big)$$

et l'on reconnaît là une somme de Riemann pour la fonction $f(x) = \ln(x)$ entre $a = 1$ et $b = 2$. Donc la suite S_n converge vers $I = \int_1^2 \ln(x)dx$. D'autre part, on sait qu'une primitive de $\ln(x)$ est $x\ln(x) - x$ donc $I = 2\ln(2) - 2 - (0-1) = \ln(4) - 1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} P_n = e^I = 4/e$.

(2) Pour calculer une valeur approchée d'une intégrale, on dispose de méthodes plus performantes que les sommes de Riemann arbitraires. Par exemple, on a le résultat suivant.

***Théorème 5.46* (Méthode des points milieux).** — *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la subdivision de pas constant donnée par $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ et l'on note m_i le milieu du segment $[x_{i-1}, x_i]$, i.e. $m_i = (x_{i-1} + x_i)/2$. Alors on a :*

$$\Big|\int_a^b f - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Big| < \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2.$$

Pour la démonstration on renvoie aux feuilles d'exercices.