EXERCICE 1.

Déterminer ($x + y\,i$), représentation cartésienne du nombre complexe :

1.1. $(5 - i\,)^2$; $(2 + 3\,i\,)^3$; $(1 - i\,\sqrt{5}\,)^3$.

1.2. $(5 - 4\,i\,)(3 + 6\,i\,)$; $(4 + 3\,i\,)^3\,(4 - 3\,i\,)^3$.

1.3. $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^2$; $\left(\dfrac{1}{i}+\dfrac{i}{2}\right)^2$.

1.4. $\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\dfrac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-1-i\right)^7$.

1.5. $\dfrac{1+\alpha\,i}{2\,\alpha+(\alpha^2-1)\,i}$; $\dfrac{(\alpha+\beta\,i)^2}{\alpha+(\beta+1)\,i}$; $(\alpha,\beta)\in \mathrm{R}^2$.

SOLUTION.

1.1. $(5 - i\,)^2$; $(2 + 3\,i\,)^3$;$(1 - i\,\sqrt{5})^3$.

1.1.1. $(5 - i\,)^2$.

$$(5 - i)^2 = 5^2 + i^2 - 2 \times 5\,i = 25 - 1 - 10\,i = 24 - 10\,i$$

$$\boxed{(5 - i)^2 = 24 - 10\,i}$$

1.1.2. $(2 + 3\,i\,)^3$.

$$\begin{aligned}(2 + 2\,i\,)^3 &= 2^3\,(1 + i\,)^3\\ &= 8\,(\,1^3 + 3\,i + 3 \times i^2 + i^3\,)\\ &= 8\,(\,1 + 3\,i - 3 - i\,)\\ &= 8\,(-\,2 + 2\,i\,)\\ &= 16\,(\,-\,1 + i\,)\end{aligned}$$

$$\boxed{(2 + 2\,i\,)^3 = -\,16 + 16\,i}$$

1.1.3. $(1 - i\,\sqrt{5})^3$.

$$\begin{aligned}(1 - i\,\sqrt{5}\,)^3 &= 1^3 - 3 \times (i\,\sqrt{5}\,) + 3 \times (i\,\sqrt{5}\,)^2 - (i\,\sqrt{5}\,)^3\\ &= 1 - 3\,i\,\sqrt{5}\, - 75 + 5\,i\,\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\boxed{(1 - i\,\sqrt{5}\,)^3 = -\,74 + 2\,i\,\sqrt{5}}$$

1.2. $(5 - 4\,i\,)(3 + 6\,i\,)$; $(4 + 3\,i\,)^3\,(4 - 3\,i\,)^3$.

1.2.1. $(5 - 4\,i\,)(3 + 6\,i\,)$.

$$\begin{aligned}(5 - 4\,i\,)(3 + 6\,i\,) &= 5 \times 3 + 5 \times 6\,i - 4\,i \times 3 - 4\,i \times 6\,i\\ &= 15 + 30\,i - 12\,i + 24\end{aligned}$$

$$\boxed{(5 - 4\,i\,)(3 + 6\,i\,) = 39 + 18\,i}$$

1.2.2. $(4+3i)^3(4-3i)^3$.

$$
\begin{aligned}
(4+3i)^3(4-3i)^3 &= [(4+3i)(4-3i)]^3\\
&= (4^2-9i^2)^3\\
&= (16+9)^3\\
&= 25^3
\end{aligned}
$$

$$\boxed{(4+3i)^3(4-3i)^3 = 15\,625}$$

1.3. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$; $\left(\frac{1}{i}+\frac{i}{2}\right)^2$.

1.3.1. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} &= \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}\\
&= \frac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{3+1}\\
&= \frac{4i}{4}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = \boldsymbol{i}}$$

1.3.2. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2$.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 &= \left(\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)^2\\
&= \left(\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}\right)^2\\
&= \left(\frac{-2i}{2}\right)^2\\
&= (-i)^2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = -1}$$

1.3.3. $\left(\frac{1}{i}+\frac{i}{2}\right)^2$**.**

$$\left(\frac{1}{i}+\frac{i}{2}\right)^2 = \left(\frac{2+i^2}{2i}\right)^2 = \left(\frac{1}{2i}\right)^2 = \frac{1}{-4}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{i}+\frac{i}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4}}$$

1.4. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-1-i\right)^7$.

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-1-i\right)^7 = \left(\frac{(\sqrt{3}-i)^2+(\sqrt{3}+i)^2}{(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}-1-i\right)^7 = \left(\frac{2-2\sqrt{3}i+2+2\sqrt{3}i}{3+1}-1-i\right)^7 = (-i)^7$$

$$\boxed{\left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}+\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}-1-i\right)^7 = i}$$

1.5. $\frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i}$; $\frac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha+(\beta+1)i}$; $(\alpha,\beta)\in R^2$.

1.5.1. $\frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i}$**.**

$$\frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i} = \frac{i(\alpha-i)}{i(\alpha^2-2\alpha i-1)} = \frac{\alpha-i}{(\alpha-i)^2} = \frac{1}{\alpha-i} = \frac{\alpha+i}{(\alpha-i)(\alpha+i)}$$

$$\boxed{\frac{1+\alpha i}{2\alpha+(\alpha^2-1)i} = \frac{\alpha+i}{\alpha^2+1}}$$

1.5.2. $\frac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha+(\beta+1)i}$**.**

$$\frac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha+(\beta+1)i} = \frac{(\alpha+\beta i)^2(\alpha-(\beta+1)i)}{(\alpha+(\beta+1)i)(\alpha-(\beta+1)i)}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta i)^2(\alpha-\beta i-i)}{\alpha^2+(\beta+1)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta i)(\alpha^2+\beta^2-i(\alpha+\beta i))}{\alpha^2+(\beta+1)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta i)(\alpha^2+\beta^2+\beta-i\alpha)}{\alpha^2+(\beta+1)^2}$$

$$= \frac{(\alpha+\beta i)(\alpha^2+\beta^2)-i(\alpha+i\beta)^2}{\alpha^2+(\beta+1)^2}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)+i\beta(\alpha^2+\beta^2)-i(\alpha^2-\beta^2)+2\alpha\beta}{\alpha^2+(\beta+1)^2}$$

$$\boxed{\frac{(\alpha+\beta i)^2}{\alpha+(\beta+1)\,i} = \frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha\beta+i(\beta(\alpha^2+\beta^2)-\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2+(\beta+1)^2}}$$

EXERCICE 2.

Soit φ réel ; $z = cos^2 \varphi + i\, sin\, \varphi\, cos\, \varphi$.

1° Déterminer φ tel que $z = 0$.

2° Si $z \neq 0$, calculer z^{-1}, z^2, z^{-2}, z^3, z^{-3}.

SOLUTION.

1°/ Détermination de φ.

L'équation $z = 0$ s'écrit, en fonction de φ :

$$cos^2 \varphi + i \sin \varphi\, cos\, \varphi = 0$$

$$cos\, \varphi\, (\, cos\, \varphi + i\, sin\, \varphi\,) = 0$$

Il y a donc deux sorte de solutions possibles :

- $cos\, \varphi = 0$, soit $\varphi = \frac{\pi}{2} + k\, \pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
- $cos\, \varphi + i\, sin\, \varphi = 0$, soit $e^{i\,\varphi} = 0$, ce qui est impossible car $|\, e^{i\,\varphi}\, | = 1$ et un nombre complexe de module 1 ne peut jamais être égal à 0.

Les seules solutions du problème sont donc données par :

$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} + k\, \pi,\ k \in \mathbb{Z}.}$$

2°/ Puissances de *z*.

De la relation :

$$\boxed{z = cos\, \varphi \times e^{i\,\varphi}}$$

on tire immédiatement les résultats :

$z^{-1} = \dfrac{e^{-i\varphi}}{cos \varphi} = 1 - i\, tan\, \varphi$

$z^2 = cos^2 \varphi\, e^{2\, i\, \varphi} = cos^2 \varphi\, (cos^2 \varphi - sin^2 \varphi) + 2\, i\, sin\, \varphi\, cos^3 \varphi$

$z^{-2} = \dfrac{e^{-2i\varphi}}{cos^2 \varphi} = (1 - tan^2 \varphi) - 2\, i\, tan\, \varphi$

$z^3 = cos^3 \varphi\, e^{3\, i\, \varphi} = cos^3 \varphi\, (cos\, 3\, \varphi + i\, sin\, 3\, \varphi)$

$z^{-3} = \dfrac{e^{-3i\varphi}}{cos^3 \varphi} = \dfrac{cos\, 3\varphi}{cos^3 \varphi} - i\, \dfrac{sin\, 3\varphi}{cos^3 \varphi}$

EXERCICE 3.

Soit α réel ; $z = (\alpha - i)[(10 - \alpha) + (2 + \alpha)\, i\,]$.

Déterminer α tel que z soit réel.
Préciser, dans ce cas, la valeur de z.

SOLUTION.

Calculons la partie imaginaire de z :

$$\Im\,(z\,) = -\,(10 - \alpha) + \alpha\,(2 + \alpha) = \alpha^2 + 3\,\alpha - 10.$$

Pour que z soit réel, il faut et il suffit que sa partie imaginaire soit nulle. Cette condition s'exprime par l'équation:

$$\alpha^2 + 3\,\alpha - 10 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont données par :

$$\boxed{\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = 2 \text{ ou } -5.}$$

Il y a donc deux solutions :

- $\alpha = 2.$

  Dans ce cas, $z = \Re\,(z) = \alpha\,(10 - \alpha) + 2 + \alpha = -\,\alpha^2 + 11\,\alpha + 2 = -\,4 + 22 + 2 = 20$
- $\alpha = -\,5.$

  Dans ce cas, $z = \Re\,(z) = -\,\alpha^2 + 11\,\alpha + 2 = 25 - 55 + 2 = -\,28.$

EXERCICE 4.

A tout point $M\,(x,y)$ du plan rapporté au repère (O,u,v), on associe le nombre complexe :

$$z = [(2\,x - y) + (x - y)\,i\,][x + (x - y)\,i\,].$$

Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z soit réel.

SOLUTION.

Pour que z soit réel, il faut et il suffit que sa partie imaginaire soit nulle :

$$(x - y)\,x + (2\,x - y)(x - y) = 0$$

$$(x - y)(3\,x - y) = 0$$

L'ensemble de points $M\,(x,y)$ tels que z soit réel est donc formé des deux droites d'équations :

- $y = x$. C'est la première bissectrice.
- $y = 3\,x$.

EXERCICE 5.

1° Soit : α, β, réels fixés, $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$. Déterminer la représentation cartésienne de :

$$z_1 \times z_2 \; ; \; \frac{z_1}{z_2} \; ; \; z_1^{\,n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

2° Soit $j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Calculer : j^2 ; j^3 ; j^n ; $1 + j + j^2$.

SOLUTION.

4.1. Représentation cartésienne de nombres complexes.

$$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

$$z_2 = \cos\beta + i\sin\beta = e^{i\beta}$$

$$z_1 z_2 = e^{i\alpha} e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$\boxed{z_1 z_2 = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{i\alpha} e^{-i\beta} = e^{i(\alpha-\beta)} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \cos(\alpha-\beta) + i\sin(\alpha-\beta)}$$

$$z_1^{\,n} = e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

$$\boxed{z_1^{\,n} = \cos n\alpha + i\sin n\alpha}$$

4.2. Puissances de *j*.

$$j = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$j^2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$\boxed{j^2 = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})}$$

$$j^3 = e^{i\frac{6\pi}{3}} = e^{i2\pi} = 1$$

$$j^n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}$$

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$$

EXERCICE 6.

Soit z, nombre complexe, u, nombre complexe de module 1, $u \neq 1$. Démontrer que $\dfrac{z - u\,\overline{z}}{1-u}$ est réel.

SOLUTION.

$$\frac{z-u\overline{z}}{1-u} = \frac{(z-u\overline{z})(1-\overline{u})}{(1-u)(1-\overline{u})} = \frac{z-u\overline{z}-\overline{u}z+u\overline{u}\overline{z}}{1-u-\overline{u}+u\overline{u}}$$

Le dénominateur est réel, c'est le carré du module de $1 - u$.
$u\overline{z} + \overline{u}\,z$ est réel, c'est deux fois la partie réelle de $u\overline{z}$.
Reste à montrer que $z + |u|^2\ \overline{z}$ est réel, ce qui est clair puisque, par hypothèse, u est de module 1, donc :

$$z + u\ \overline{u}\ \overline{z}\ = z + |u|^2\ \overline{z}\ = z + \overline{z}\ = 2\ \mathrm{R}(z).$$

$$\boxed{\frac{z-u\overline{z}}{1-u} = 2\ \frac{\Re(z-u\overline{z})}{|1-u|^2} \text{ est réel.}}$$

EXERCICE 7.

Soit : $z_1 = 4 + 4\,i$; $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$. Déterminer le module et un argument de : $z_1{}^2$, $z_1\,z_2$, $z_1{}^3$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\dfrac{z_2}{z_1}$.

SOLUTION.

$z_1 = 4\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 2\ e^{-i\frac{\pi}{3}}$ entraînent :

$z_1{}^2 = 32\ e^{i\frac{\pi}{2}} = 32\,i.$

$z_1\,z_2 = 8\sqrt{2}\ e^{-i\frac{\pi}{12}}$

$z_1{}^3 = 144\sqrt{2}\ e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$\dfrac{z_1}{z_2} = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{7\pi}{12}}$

$\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\,e^{-i\frac{7\pi}{12}}$

et ces formules donnent instantanément les modules et arguments des nombres complexes calculés.

EXERCICE 8.

Déterminer le module et un argument de z :

3.1. $z = a\dfrac{1-i\tan\alpha}{1+i\tan\alpha} \quad (a,\alpha) \in R^2$

3.2. $z = \dfrac{5+11\sqrt{3}\,i}{7-4\sqrt{3}\,i}$.

3.3. $z = \dfrac{(1-i)^3}{\left(1-i\sqrt{3}\right)^4}$.

SOLUTION.

3.1.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow z = a\,\frac{1-i\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+i\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = a\,\frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = a\,\frac{e^{-i\alpha}}{e^{+i\alpha}} = a\,e^{-2i\alpha}$$

Le module de z est donc $|\,a\,|$.
Un argument de z est :

$-2\,\alpha$ si a est positif,
$\pi - 2\,\alpha$ si a est négatif.

3.2.

$$z = \frac{5+11\sqrt{3}\,i}{7-4\sqrt{3}\,i} = \frac{\left(5+11\sqrt{3}\,i\right)\left(7+4\sqrt{3}\,i\right)}{\left(7-4\sqrt{3}\,i\right)\left(7+4\sqrt{3}\,i\right)} = \frac{1}{97}(35 - 132 + 97\sqrt{3}\,i) = -1 + \sqrt{3}\,i = 2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

Le module de z est donc 2, et son argument est $\dfrac{2\pi}{3}$, à un multiple de $2\,\pi$ près.

3.3.

$1 - i = \sqrt{2}\;e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$1 - i\sqrt{3} = 2\,e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$$z = \frac{(1-i)^3}{(1-i\sqrt{3})^4} = 2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{3\pi}{4}} \times \frac{1}{16} \times e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{8}\,e^{i\frac{7\pi}{12}}.$$

Le module de z est donc $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ et son argument est $\dfrac{7\pi}{12}$.

EXERCICE 9.

Résoudre dans $\mathbb{U}$, ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\begin{cases} z + z' + z'' = 1 \\ z\, z'\, z'' = 1 \end{cases}$$

SOLUTION.

z, z', z'' sont solutions de l'équation

$$(Z - z)(Z - z')(Z - z'') = 0$$

$$Z^3 - (z + z' + z'')\, Z^2 + (z\,z' + z'\,z'' + z''\,z)\, Z - z\,z'\,z'' = 0$$

$$Z^3 - Z^2 + (z\,z' + z'\,z'' + z''\,z)\, Z - 1 = 0$$

$$z\,z' + z'\,z'' + z''\,z = \frac{zz' + z'z'' + z''z}{1} = \frac{zz' + z'z'' + z''z}{zz'z''} = \frac{1}{z''} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z'}$$

Mais, par hypothèse, *z, z'* et *z''* sont des nombres complexes de module 1 : ***leur conjugué est donc égal à leur inverse.***

$$\frac{1}{z} = \overline{z}\ ,\ \frac{1}{z'} = \overline{z}'\ ,\ \frac{1}{z''} = \overline{z}''$$

$z\,z' + z'\,z'' + z''\,z = \overline{z} + \overline{z}' + \overline{z}'' = \overline{z + z' + z''} = 1$, puisque $z + z' + z'' = 1$.

Ainsi, les nombres complexes *z, z', z''* sont les solutions de l'équation :

$$\boxed{Z^3 - Z^2 + Z - 1 = 0}$$

L'équation $Z^3 - Z^2 + Z - 1 = 0$ peut être écrite : $Z^2\,(Z - 1) + Z - 1 = 0$, soit $(Z - 1)(Z^2 + 1) = 0$. D'où les racines :

$$\boxed{\{\, z\,,\, z'\,,\, z'' \,\} = \{\, 1\,,\, i\,,\, -i \,\}}$$

EXERCICE 10.

Déterminer z, complexe tel que z^2 et z^6 soient conjugués.

SOLUTION.

L'équation définissant z s'écrit : $z^6 = \overline{z^2}$.

Les solutions réelles sont données par :

$x^6 = x^2$
$x^2\,(x^4 - 1) = 0$
$x^2\,(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$
$x^2\,(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = 0$

Il y a donc trois solutions réelles : 0, 1, −1.

Cherchons les solutions dans le plan complexe.

La relation $z^6 = \overline{z^2}$ entraîne, en module : $|\,z\,|^6 = |\,z\,|^2$. Comme $|\,z\,|$ est réel positif, il y a deux solutions :

$$|\,z\,| = 0 \text{ et } |\,z\,| = 1.$$

1^{er} cas.

$|\,z\,| = 0$ entraîne $z = 0$.

$$\boxed{z = 0}$$

2^e cas.

$|\,z\,| = 1$ entraîne $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$ et la relation $z^6 = \overline{z^2}$, que l'on peut écrire aussi $z^6 = \overline{z}^{\,2}$ s'écrit $z^6 = \dfrac{1}{z^2}$. Comme $|\,z\,|$ est égal à 1, z ne peut pas être nul et la relation $z^6 = \dfrac{1}{z^2}$ est équivalente à $z^8 = 1$.

Les solutions de l'équation $z^8 = 1$, sont données par : $z = e^{\frac{2ik\pi}{8}}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

$$\boxed{z = e^{ik\frac{\pi}{4}},\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.}$$

Les solutions réelles que nous avons trouvées sont comprises dans les neuf solutions complexes. La solution $x = 0$ correspond à $z = 0$ (1^{er} cas), la solution $x = 1$ correspond à $k = 0$ (2^e cas), la solution $x = -1$ correspond à $k = 4$ (2^e cas).

EXERCICE 11.

1° Soit z complexe, $z \neq 1$, et $S_n = \sum_{p=0}^{p=n} z^p$. Exprimer S_n en fonction de z et de n.

2° Soit :

$$\begin{cases} \Sigma_1 = 1 + cos\,\theta + cos\,2\theta + \cdots + cos\,n\theta, \\ \Sigma_2 = 0 + sin\,\theta + sin\,2\theta + \cdots + sin\,n\theta. \end{cases}$$

Calculer $\Sigma_1 + i\,\Sigma_2$. En déduire Σ_1 et Σ_2.

SOLUTION.

1°/ Somme d'une progression géométrique.

Considérons la somme :

$$S_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n$$

Muliplions les deux membres par z, nous obtenons :

$$z\,S_n = z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n+1}$$

Par soustraction membre à membre, il vient :

$$S_n - z\,S_n = 1 - z^{n+1}$$

Comme, par hypothèse, z est différent de 1, $1 - z$ est différent de 0, on peut diviser les deux membres par $1 - z$, il reste :

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

D'où la formule finale :

$$\boxed{1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}}$$

2°/ Application à l'exponentielle complexe.

Considérons les sommes :

$$\Sigma_1 = 1 + cos\ \theta + cos\ 2\theta + \ldots + cos\ n\theta$$
$$\Sigma_2 = 0 + sin\ \theta + sin\ 2\theta + \ldots + sin\ n\theta$$

En prenant Σ_1 pour partie réelle et Σ_2 pour partie imaginaire, nous obtenons le nombre complexe :

$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = (1 + cos\ \theta + cos\ 2\theta + \ldots + cos\ n\theta) + i\,(0 + sin\ \theta + sin\ 2\theta + \ldots + sin\ n\theta)$$
$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = (1 + i\ 0) + (cos\ \theta + i\ sin\ \theta) + (cos\ 2\theta + i\ sin\ 2\theta) + \ldots + (cos\ n\theta + i\ sin\ n\theta)$$
$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = 1 + e^{i\,\theta} + e^{2i\,\theta} + \ldots + e^{n\,i\,\theta} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n \text{ avec } z = e^{i\,\theta}.$$

La formule établie dans la question 1° donne alors la solution :

$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = \frac{1 - e^{i\,(n+1)\,\theta}}{1 - e^{i\,\theta}}$$

Pour séparer facilement la partie réelle et la partie imaginaire, nous allons transformer cette expression en mettant en facteur :

- au numérateur $e^{i\frac{n+1}{2}\theta}$
- au dénominateur $e^{i\frac{\theta}{2}}$.

Il vient :

$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}}$$

Les formules d'Euler donnent :

$$\sin\frac{n+1}{2}\theta = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}}{2i} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{2i}$$

d'où :

$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Sigma_1 + i\,\Sigma_2 = e^{i\frac{n}{2}\theta} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \left(\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, il vient :

$$\Sigma_1 = \cos\frac{n\theta}{2} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

$$\Sigma_2 = \sin\frac{n\theta}{2} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

D'où les formules :

$$\boxed{1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta = \cos\frac{n\theta}{2} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

$$\boxed{\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta = \sin\frac{n\theta}{2} \times \frac{\sin\frac{n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}}$$

EXERCICE 12.

Soit z_1 , z_2 , z_3 , nombres complexes dans le produit est $3\sqrt{3}\, i$, dont les arguments respectifs θ_1 , θ_2 , θ_3 , forment une progression arithmétique de raison $\frac{\pi}{3}$, et les modules respectifs ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , une suite géométrique de raison 2. Déterminer z_1 , z_2 , z_3 , et construire leurs images dans un plan complexe.

SOLUTION.

Les données de l'énoncé se traduisent par les relations :

$$z_1\, z_2\, z_3 = 3\sqrt{3}\, i$$

$$\theta_3 - \theta_2 = \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$\frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 2.$$

$$z_1\, z_2\, z_3 = \rho_1\, \rho_2\, \rho_3\, e^{i(\theta_1+\theta_2+\theta_3)} = 3\sqrt{3}\, i = 3\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}}$$

La dernière égalité montre que les modules et arguments de z_1 , z_2 , z_3 vérifient :

$$\rho_1\, \rho_2\, \rho_3 = 3\sqrt{3} \text{ et } \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Le système : $\begin{cases} \theta_3 - \theta_2 = \frac{\pi}{3} \\ \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{3} \\ \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}$ s'écrit aussi : $\begin{cases} \theta_3 - \theta_2 = \frac{\pi}{3} \\ \theta_2 - \theta_1 = \frac{\pi}{3} \\ 2\theta_2 + \theta_3 = (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + (\theta_2 - \theta_1) \\ \qquad = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

Sa solution est : $\begin{cases} \theta_2 = \frac{1}{3}\left((2\theta_2 + \theta_3) - (\theta_3 - \theta_2)\right) = \frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3} \\ \theta_3 = \theta_2 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\frac{\pi}{3}\ . \\ \theta_1 = \theta_2 - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\frac{\pi}{3} \end{cases}$

Les relations : $\rho_2 = 2\rho_1$; $\rho_3 = 2\rho_2$; $\rho_1\, \rho_2\, \rho_3 = 3\sqrt{3}$ donnent $8\rho_1^3 = 3\sqrt{3}$, d'où $\rho_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\rho_2 = \sqrt{3}$, $\rho_3 = 2\sqrt{3}$.

Les solutions cherchées sont donc :

- Pour $k = 0$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3} - i\right)$$

$$z_2 = \sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3} + i\right)$$

$$z_3 = 2\sqrt{3}\, e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\sqrt{3}\, i\ .$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\,(\sqrt{3} - i\,) \\ z_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,(\sqrt{3} + i\,) \\ z_3 = 2\,\sqrt{3}\;i\,. \end{array}}$$

- Pour $k = 1$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$$

$$z_2 = \sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}(-cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\,(\sqrt{3} - i\,)$$

$$z_3 = 2\,\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)} = 2\sqrt{3}(-cos\frac{\pi}{6} - i\,sin\frac{\pi}{6}) = 2\,\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + i\,).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i \\ z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,(\sqrt{3} - i\,) \\ z_3 = -\sqrt{3}\,(\sqrt{3} + i\,)\,. \end{array}}$$

- Pour $k = 2$

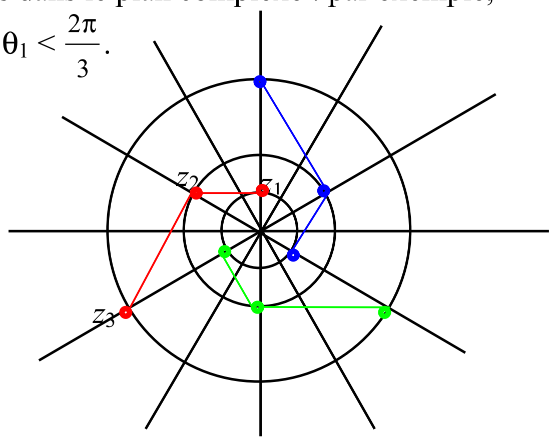
$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(-cos\frac{\pi}{6} - i\,sin\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\,(\sqrt{3} + i\,)$$

$$z_2 = \sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)} = -\sqrt{3}\,i$$

$$z_3 = 2\,\sqrt{3}\,e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)} = 2\,\sqrt{3}(cos\frac{\pi}{6} - i\,sin\frac{\pi}{6}) = 2\,\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \sqrt{3}\,(\sqrt{3} - i\,).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,(\sqrt{3} + i\,) \\ z_2 = -\sqrt{3}\;i \\ z_3 = \sqrt{3}(\sqrt{3} - i\,)\,. \end{array}}$$

Les trois groupes de solutions peuvent être représentés dans le plan complexe : par exemple, le groupe marqué z_1 , z_2 , z_3 , est celui pour lequel $0 < \theta_1 < \dfrac{2\pi}{3}$.



EXERCICE 13.

Soit $a \in$ R, $n \in$ N, et soit, dans C :

E_1 , équation en Z : $Z^n = \dfrac{1+a\,i}{1-a\,i}$.

E_2 , équation en z : $\left(\dfrac{1+z\,i}{1-z\,i}\right)^n = \dfrac{1+a\,i}{1-a\,i}$.

1° Démontrer que toute solution de E_1 a pour module 1, et que toute solution de E_2 est réelle.

2° Soit $a = 0$, $n = 3$. Résoudre E_2 .

SOLUTION.

1°/ Cas général.

Comme a est réel, $\dfrac{1+a\,i}{1-a\,i}$ est le rapport de deux nombres complexes conjugués : c'est donc un nombre complexe de module 1, puisque son module est le rapport des modules de deux nombres de même module. On a alors :

$$\boxed{|\,Z^n\,| = |\,Z\,|^n = \left|\,\frac{1+ai}{1-ai}\,\right| = 1 \Rightarrow |\,Z\,| = 1.}$$

La résolution de l'équation E_1 ramène la résolution de l'équation E_2 à la résolution de :

$$\frac{1+zi}{1-zi} = Z$$

Lorsque Z est solution de l'équation E_1 , la solution de l'équation E_2 est donnée par :

$$z = \frac{Z-1}{i(Z+1)} = i\,\frac{1-Z}{1+Z} = i\,\frac{(1-Z)(1+\overline{Z})}{(1+Z)(1+\overline{Z})} = i\,\frac{1-Z+\overline{Z}-Z\overline{Z}}{1+Z+\overline{Z}+Z\overline{Z}} = i\,\frac{-Z+\overline{Z}}{2+Z+\overline{Z}} \text{ puisque } Z\overline{Z} = |\,Z\,|^2 = 1.$$

$$z = i\,\frac{-2i\,\Im(Z)}{2(1+\Re(Z))}$$

$$\boxed{z = \frac{\Im(Z)}{1+\Re(Z)},}$$

z est un nombre réel, puisque c'est le rapport de deux nombres réels.

2°/ Cas particulier.

Pour $a = 0$ et $n = 3$, l'équation E_1 s'écrit : $Z^3 = 1$. Ses solutions sont $\{\ 1\ ,\ e^{i\frac{2\pi}{3}}\ ,\ e^{-i\frac{2\pi}{3}}\ \}$. A chacune de ces solutions correspond une solution de l'équation E_2 : $\left(\dfrac{1+zi}{1-zi}\right)^3 = 1$. La formule $z = \dfrac{\Im(Z)}{1+\Re(Z)}$ donne les solutions :

$$z_1 = 0\ ;\ z_2 = \frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{1+\cos\frac{2\pi}{3}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}}{1+2\cos^2\frac{\pi}{3}-1} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\ ;\ z_3 = -\,z_2 = -\,\sqrt{3}$$

Les solutions z_3 et z_2 sont opposées car les solutions $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ sont conjuguées, et elles donc la même partie réelle et des parties imaginaires opposées.

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } \left(\frac{1+zi}{1-zi}\right)^3 = 1 \text{ sont } \{\ 0\ ,\ \sqrt{3}\ ,\ -\,\sqrt{3}\ \}}$$

EXERCICE 14.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^3 - 6\,(1 + i\,)\,z^2 + 24\,i\,z - 11 - 16\,i = 0$.
Soit H l'homothétie de rapport $\frac{1}{3}$, dont le centre est I d'affixe $(-1 - i\,)$.
Pour tout point m, d'affixe z, $H\,(m) = M$, d'affixe Z.

1° Calculer Z en fonction de z, puis z en fonction de Z.
2° Démontrer que z est solution de l'équation proposée si, et seulement si, Z est solution de : $Z^3 = 1$.
3° Résoudre la seconde équation. En déduire les solutions de la première.

SOLUTION.

1° Etude de l'homothétie *H*.

L'homothétie H est définie par la relation : $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{Im}$. Sur les composantes, cette égalité vectorielle se traduit par les relations :

$$X - (-1) = \frac{1}{3}\,(x - (-1)) \text{ et } Y - (-1) = \frac{1}{3}\,(y - (-1))$$

$$X = -1 + \frac{1}{3}\,(x + 1) \text{ et } Y = -1 + \frac{1}{3}\,(y + 1)$$

$$X + i\,Y = -1 - i + -1 + \frac{1}{3}\,(x + i\,y + 1 + i)$$

soit, en posant $h = -1 - i$, affixe du centre d'homothétie I :

$$\boxed{Z - h = \frac{1}{3}\,(z - h)}$$

Un vecteur est représenté par la différence entre l'affixe de l'extrémité, moins l'affixe de l'origine.

$$Z = \frac{z}{3} + \frac{2h}{3} = \frac{z}{3} - \frac{2}{3}\,(1 + i)$$

$$\boxed{Z = \frac{z}{3} - \frac{2}{3}\,(1 + i)}$$

La relation réciproque donne z en fonction de Z :

$$\boxed{z = 3\,Z + 2\,(1 + i)}$$

2° Transformation de l'équation proposée.

Pour aboutir à $Z^3 = 1$, calculons le cube de $3\,Z = z - 2\,(1 + i)$
$(3\,Z)^2 = (z - 2\,(1 + i))^2$
On a $(1 + i)^2 = 2\,i$.
$(3\,Z)^2 = z^2 - 4\,(1 + i)\,z + 4\,(1 + i)^2$
$(3\,Z)^2 = z^2 - 4\,(1 + i)\,z + 8\,i$
$(3\,Z)^3 = (z^2 - 4\,(1 + i)\,z + 8\,i)(z - 2\,(1 + i))$
$(3\,Z)^3 = z^3 - 4\,(1 + i)\,z^2 + 8\,i\,z - 2\,(1 + i)\,z^2 + 8\,(1 + i)^2\,z - 16\,i\,(1 + i)$
$(3\,Z)^3 = z^3 - 6\,(1 + i)\,z^2 + 24\,i\,z + 16 - 16\,i$
$(3\,Z)^3 = (z^3 - 6\,(1 + i\,)\,z^2 + 24\,i\,z - 11 - 16\,i\,) + 27$

$$\boxed{z^3 - 6\,(1 + i)\,z^2 + 24\,i\,z - 11 - 16\,i = 27\,(Z^3 - 1)}$$

L'équation : $z^3 - 6\,(1 + i)\,z^2 + 24\,i\,z - 11 - 16\,i = 0$ est donc équivalente à l'équation : $Z^3 = 1$.

3° Résolution de l'équation proposée.

Les solutions de l'équation $Z^3 = 1$ sont les $e^{i\frac{2\,k\,\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$.

Les solutions z correspondantes de l'équation : $z^3 - 6\,(1 + i)\,z^2 + 24\,i\,z - 11 - 16\,i = 0$, sont donc données par :

$$z = 3\,Z + 2\,(1 + i) = 3\,e^{i\frac{2\,k\,\pi}{3}} + 2\,(1 + i) = 3\,cos\frac{2\,k\,\pi}{3} + 2 + i\,(3\,sin\frac{2\,k\,\pi}{3} + 2)\text{, avec } k = 0, 1, 2.$$

Pour $k = 0$: $z_0 = 5 + 2\,i$.

Pour $k = 1$: $z_1 = \frac{1}{2} + i\,(2 + 3\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Pour $k = 2$: $z_2 = \frac{1}{2} + i\,(2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2})$.

L'équation $z^3 - 6\,(1 + i)\,z^2 + 24\,i\,z - 11 - 16\,i = 0$ admet trois solutions :

$5 + 2\,i$, $\quad \frac{1}{2} + i\,(2 + 3\frac{\sqrt{3}}{2})$, $\quad \frac{1}{2} + i\,(2 - 3\frac{\sqrt{3}}{2})$.

EXERCICE 15.

1°/ Quel est l'ensemble (C) des points z du plan complexe vérifiant : $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = k$, k constante réelle positive.

2°/ Application : $k = 2$. Définir (C) .

3°/ On pose $Z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z} \right)$. Calculer $\left| \dfrac{Z-1}{Z+1} \right|$ en fonction de z.

4°/ Quel est l'ensemble (C') décrit par les points Z du plan complexe lorsque z décrit le cercle (C) ?

5°/ Application : $k = 2$. Définir (C').

SOLUTION.

1°/ *Ensemble (C).*

La relation $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = k$, k constante réelle positive, définit l'ensemble (C) comme l'ensemble des points dont la distance aux points fixes 1 et -1 du plan complexe est une constante. Cet ensemble (C) est donc un cercle du faisceau de cercles à points limites -1 et 1.
On peut le définir de façon plus précise en établissant son équation :

$$| z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \ ; | z + 1| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \ ;$$

$$\frac{|z-1|}{|z+1|} = k \quad \Leftrightarrow \quad (x - 1)^2 + y^2 = k^2 [(x + 1)^2 + y^2]$$

$$\Leftrightarrow \quad (k^2 - 1) x^2 + 2 (k^2 + 1) x + (k^2 - 1) y^2 = 1- k^2.$$

Lorsque k^2 est différent de 1, cette relation équivaut à :

$$\left(x+\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 - \frac{1}{k^2-1} = \frac{4k^2}{\left(k^2-1\right)^2}$$

C'est l'équation d'un cercle (C) de centre $\left(x = \dfrac{1+k^2}{1-k^2} \ ; \ y = 0 \right)$ et de rayon $r = \dfrac{2\ |k|}{\left|k^2-1\right|}$.

Lorsque $k^2 = 1$, c'est-à-dire lorsque $k = 1$ puisque k est une constante positive, l'équation :

$$(k^2 - 1) x^2 + 2 (k^2 + 1) x + (k^2 - 1) y^2 = 1- k^2$$

se réduit à :

$$x = 0$$

C'est l'équation d'une doite qui est la médiatrice du segment joignant les points -1 et $+1$, c'est l'axe imaginaire pur.

2°/ *Cas particulier*.

Dans le cas où $k = 2$, l'équation du cercle (C) est :

$$\left(x + \frac{5}{3} \right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\left(x = -\dfrac{5}{3} \ ; \ y = 0 \right)$ et de rayon $r = \dfrac{4}{3}$.

3°/ Calcul de $\left| \dfrac{Z-1}{Z+1} \right|$ *.*

$$\left| \frac{Z-1}{Z+1} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-1}{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+1} \right| = \left| \frac{z^2-2z+1}{z^2+2z+1} \right| = \left| \frac{(z-1)^2}{(z+1)^2} \right| = \left| \frac{z-1}{z+1} \right|^2$$

4°/ Ensemble (C').

Lorsque z décrit le cercle *(C)*, on a : $\left|\dfrac{z-1}{z+1}\right| = k$, d'où $\left| \dfrac{Z-1}{Z+1} \right| = k^2$. D'après la première question, ceci montre que les points Z sont, lorsque k est différent de 1, sur le cercle *(C')* de centre $\left(X = \dfrac{1+k^4}{1-k^4} \ ; \ Y = 0 \right)$ et de rayon $R = \dfrac{2k^2}{\left| k^4 - 1 \right|}$.

Réciproquement, si Z est un point de ce cercle, la relation $Z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z} \right)$ montre que Z est l'image d'un point z vérifiant $z^2 - 2\,z\,Z + 1 = 0$. Dans $\mathcal{C}$, cette équation a deux racines z_1 et z_2 vérifiant toutes deux la relation :

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \sqrt{\left| \frac{Z-1}{Z+1} \right|} = k$$

et l'application $z \to Z$ est une surjection de *(C)* sur *(C')*. Ceci montre que lorsque z décrit le cercle *(C)*, Z décrit le cercle *(C')* tout entier.

Dans le cas particulier où $k = 1$, on a aussi $\left| \dfrac{Z-1}{Z+1} \right| = 1$ et *(C')* est aussi la médiatrice du segment joignant les points -1 et $+1$, c'est-à-dire l'axe des y. On peut dire que la transformation $Z = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z} \right)$ laisse invariant dans son ensemble l'axe des y.

5°/ Application : k = 2.

Le cercle *(C')* est le cercle de centre $\left(X = -\dfrac{9}{7} \ ; \ Y = 0 \right)$ et de rayon $R = \dfrac{8}{7}$.

6°/ Remarque.

Les points d'intersection du cercle *(C')* avec l'axe des x sont définis par la relation $Y = 0$ sur le cercle *(C')*. Ils vérifient donc :

$$(k^4 - 1)\,X^2 + 2\,(k^4 + 1)\,X = 1 - k^4 \ \text{ soit, pour } k \text{ différent de 1, } X^2 + 2\,\frac{k^4+1}{k^4-1}\,X + 1 = 0$$

Ce sont les points :

$$\left(X = -\frac{k^4+1}{k^4-1} \pm \sqrt{\left(\frac{k^4+1}{k^4-1} \right)^2 - 1} \ ; Y = 0 \right) \ \text{ soit : } \left(X = -\frac{k^4+1}{k^4-1} \pm \frac{2k^2}{\left| k^4-1 \right|} \ ; \ Y = 0 \right)$$

ou $\left(X = -\dfrac{\left(k^2 \pm 1\right)^2}{\left(k^2-1\right)\left(k^2+1\right)} \ ; \ Y = 0 \right)$ ou encore $\left(X = -\dfrac{k^2+1}{k^2-1} \ ; \ Y = 0 \right)$ et $\left(X = -\dfrac{k^2-1}{k^2+1} \ ; \ Y = 0 \right)$

On voit donc que le cercle *(C')* ***passe par le centre*** du cercle *(C)* défini par $\left(x = \dfrac{1+k^2}{1-k^2} \ ; \ y = 0 \right)$.

EXERCICE 16.

1°/ Déterminez les nombres complexes solutions de l'équation : $z^4 = 1$.
2°/ Déterminez sous forme trigonométrique les solutions de l'équation : $z^4 = 8\,(\,1 - i\,\sqrt{3}\,)$.
3°/ Soit $a = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$. Vérifiez : $a^4 = 8\,(\,1 - i\,\sqrt{3}\,)$. En déduire sous forme algébrique les résultats du 2°/.
4°/ Des questions 2°/ et 3°/, déduire les valeurs exactes de $\cos \dfrac{11\,\pi}{12}$ et $\sin \dfrac{11\,\pi}{12}$.

SOLUTION.

1°/ Solutions de l'équation $z^4 = 1$.

L'équation $z^4 = 1$ s'écrit aussi $z^4 - 1 = 0$, soit $(\,z^2 - 1\,)\,(\,z^2 + 1\,) = 0$, ou $(\,z - 1\,)\,(\,z + 1\,)\,(\,z - i\,)\,(\,z + i\,) = 0$.
Ses solutions sont :

$$\boxed{z = 1 \qquad z = -1 \qquad z = i \qquad z = -i}$$

2°/ Résolution de l'équation $z^4 = 8\,(\,1 - i\,\sqrt{3}\,)$ sous forme trigonométrique.

Posons $z = \rho\, e^{i\,\theta}$. L'équation $z^4 = 8\,(\,1 - i\,\sqrt{3}\,)$ s'écrit $\rho^4\, e^{4\,i\,\theta} = 16\,(\,\dfrac{1}{2} - i\,\sqrt{3}\,) = 16\,(\,\cos \dfrac{\pi}{3} - i \sin \dfrac{\pi}{3}\,)$, soit $\rho^4 = 16\ e^{-i\,\frac{\pi}{3}}$. Elle équivaut donc à :

$$\rho^4 = 16 \quad \text{et} \quad e^{4\,i\,\theta} = e^{-i\,\frac{\pi}{3}}.$$

Ses solutions sont données par :

$$\rho = 2 \quad \text{et} \quad \theta = -\frac{\pi}{12} + k\,\frac{\pi}{2}$$

Ces solutions correspondent à quatre nombres complexes. Pour avoir les solutions avec un argument compris entre 0 et 2 π, il faut prendre $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$. D'où les solutions :

$$\boxed{\begin{aligned}
z_1 &= 2\,(\,\cos \frac{5\,\pi}{12} + i \sin \frac{5\,\pi}{12}\,)\\
z_2 &= 2\,(\,\cos (\,\frac{5\,\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\,) + i \sin (\,\frac{5\,\pi}{12} + \frac{\pi}{2}\,)\,) = i\,z_1\\
z_3 &= 2\,(\,\cos (\,\frac{5\,\pi}{12} + \pi\,) + i \sin (\,\frac{5\,\pi}{12} + \pi\,)\,) = -z_1\\
z_4 &= 2\,(\,\cos (\,\frac{5\,\pi}{12} + 3\,\frac{\pi}{2}\,) + i \sin (\,\frac{5\,\pi}{12} + 3\,\frac{\pi}{2}\,)\,) = -\,i\,z_1
\end{aligned}}$$

3°/ Calcul du nombre complexe a^4.

$$\begin{aligned}
a^2 &= \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)\\
&= \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2\,i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right) + i^2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)^2\\
&= \frac{6-2\sqrt{12}+2}{4} + 2\,i\,\frac{6-2}{4} - \frac{6+2\sqrt{12}+2}{4}
\end{aligned}$$

$= -\sqrt{12} + 2\,i$
$= -2\,(\sqrt{3} - i)$

$a^4 \quad = 4\,(\sqrt{3} - i)^2$
$= 4\,(3 - 2\,i\sqrt{3} + i^2)$
$= 4\,(2 - 2\,i\sqrt{3})$
$= 8\,(1 - i\sqrt{3})$

$$\boxed{a^4 = 8\,(1 - i\sqrt{3})}$$

Cette relation montre que le nombre complexe a est solution de l'équation $z^4 = 8\,(1 - i\sqrt{3})$. C'est donc l'une des quatre solutions trouvées plus haut. Comme le nombre complexe a possède une partie réelle positive et une partie imaginaire positive, il est situé dans le premier quadrant, c'est donc la solution z_1 . Les solutions de l'équation $z^4 = 8\,(1 - i\sqrt{3})$ peuvent alors être écrites sous forme algébrique :

$$z_1 = 2\,(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}) = a = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$
$$z_2 = 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{2})) = i\,a = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$
$$z_3 = 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + \pi) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + \pi)) = -a = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$
$$z_4 = 2\,(\cos(\frac{5\pi}{12} + 3\,\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{5\pi}{12} + 3\,\frac{\pi}{2})) = -i\,a = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

4°/ Valeurs exactes de certains cosinus ou sinus.

La valeur de z_1 permet d'écrire :

$$\boxed{\cos\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

La valeur de z_2 permet d'écrire :

$$\boxed{\cos\frac{11\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \qquad \text{et} \qquad \sin\frac{11\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

EXERCICE 17.

λ, α, β étant trois constantes données réelles ou complexes, montrez que les solutions de l'équation :

$$\lambda^n (z-\alpha)^n - (z-\beta)^n = 0$$

sont toutes sur une même circonférence. Calculez la position du centre et le rayon de cette circonférence. Exprimer l'affixe z_c du centre et le rayon t de cette circonférence en fonction de α, β et λ.

SOLUTION.

Remarques préliminaires.

Pour $n < 0$, on peut poser $m = -n$ et l'équation devient :
$\lambda^{-m} (z-\alpha)^{-m} - (z-\beta)^{-m} = 0$
$\lambda^{-m} (z-\alpha)^{-m} = (z-\beta)^{-m}$
$\lambda^{m} (z-\alpha)^{m} = (z-\beta)^{m}$
$\lambda^{m} (z-\alpha)^{m} - (z-\beta)^{m} = 0$
On peut donc supposer $n \geq 0$, sinon on remplacera n par $-n$.

Pour $n = 0$, avec $\lambda \neq 0$, l'équation s'écrit $1 - 1 = 0$ lorsque z est différent de α et de β. La solution est donc donnée par $z \neq \alpha$ et $z \neq \beta$. Le cas $n = 0$ et $\lambda = 0$ est indéterminé : on l'élimine d'office. On supposera désormais $n > 0$.

Si $\lambda = 0$, l'équation se réduit à $(z-\beta)^n = 0$. Sa seule solution est $z = \beta$.
Nous supposerons désormais $\lambda \neq 0$.

Si $\alpha = \beta$, l'équation se réduit à $(z-\alpha)^n (\lambda^n - 1) = 0$. Si λ est racine n-ième de l'unité, donc de la forme $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, l'équation est toujours vérifiée, quel que soit z : tout nombre complexe z est solution. Si λ n'est pas racine n-ième de l'unité, la seule solution est $z = \alpha = \beta$.
Dans la suite, nous supposerons donc n entier > 0, $\lambda \neq 0$, $\alpha \neq \beta$.

1° Résolution de l'équation.

L'équation $\lambda^n (z-\alpha)^n - (z-\beta)^n = 0$ s'écrit $\left(\frac{z-\beta}{\lambda(z-\alpha)}\right)^n = 1$. Sa solution est donnée par l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité : $\frac{z-\beta}{\lambda(z-\alpha)} = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. On en déduit :

$$z - \beta = \lambda (z-\alpha) e^{ik\frac{2\pi}{n}}$$
$$z\left(1 - \lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}\right) = \beta - \alpha\lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}$$

Deux cas sont alors à envisager :

- ou bien λ est l'une des racines n-ièmes de l'unité, et dans ce cas, $\lambda^n = 1$. L'équation de départ est :
$$(z-\alpha)^n = (z-\beta)^n$$
Ses solutions sont données par $\frac{z-\beta}{z-\alpha} = e^{ik\frac{2\pi}{n}}$:
$$z = \frac{\beta - \alpha e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1 - e^{ik\frac{2\pi}{n}}},$$
avec $k = 1, 2, \dots, n-1$. La solution qui correspondrait à $k = 0$ est exclue par la condition $\alpha \neq \beta$.

- ou bien λ n'est pas racine n-ième de l'unité, et, dans ce cas, $1 - \lambda\, e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ est toujours différent de 0. Les solutions sont données par :

$$z = \frac{\beta - \alpha\lambda\, e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1 - \lambda\, e^{ik\frac{2\pi}{n}}}\ ,\ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Sous cette forme, on n'est guère renseigné sur la position des solutions de l'équation dans le plan complexe. Nous verrons que, dans certains cas, ces solutions sont alignées, dans d'autres cas, elles sont sur un même cercle.

2° Les solutions sont sur un même cercle ou sur une même droite.

Soient $M, A, B,$ les points d'affixes respectives z, α, β.

La relation $\left(\frac{z-\beta}{\lambda(z-\alpha)}\right)^n = 1$ entraîne $\left|\frac{z-\beta}{\lambda(z-\alpha)}\right| = 1$, soit $|z-\beta| = |\lambda|\,|z-\alpha|$.

1^er^ cas : $|\lambda| = 1$.

La relation s'écrit : $|z-\beta| = |z-\alpha|$ ou encore $BM = AM$.

Les solutions sont sur la médiatrice du segment AB.

2^e^ cas : $|\lambda| \neq 1$.

Comme les modules sont nombres réels positifs, cette relation est équivalente à $|z-\beta|^2 = |\lambda|^2\,|z-\alpha|^2$. Sous forme géométrique, cette relation s'exprime par :

$$BM^2 = |\lambda|^2\, AM^2$$

$$\Leftrightarrow \quad BM^2 - |\lambda|^2\, AM^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{BM} + |\lambda|\,\overrightarrow{AM}).(\overrightarrow{BM} - |\lambda|\,\overrightarrow{AM}) = 0$$

Introduisons le **barycentre *I* des points *B* et *A* affectés respectivement des coefficients 1 et $|\lambda|$.** Il est défini par :

$$(1 + |\lambda|)\,\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OB} + |\lambda|\,\overrightarrow{OA}$$

Son affixe z_I vérifie donc :

$$(1 + |\lambda|)\, z_I = \beta + |\lambda|\,\alpha$$

$$z_I = \frac{\beta + |\lambda|\,\alpha}{1 + |\lambda|}$$

et point tout point M du plan, la propriété suivante est vraie :

$$(1 + |\lambda|)\,\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{BM} + |\lambda|\,\overrightarrow{AM}$$

Considérons maintenant le **barycentre *J* des points *B* et *A* affectés respectivement des coefficients 1 et $-|\lambda|$.** Il est défini par :

$$(1 - |\lambda|)\,\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OB} - |\lambda|\,\overrightarrow{OA}$$

Son affixe z_I vérifie donc :

$$(1 - |\lambda|)\, z_J = \beta - |\lambda|\,\alpha$$

Pour $|\lambda| \neq 1$, il vient :

$$z_J = \frac{\beta - |\lambda|\,\alpha}{1 - |\lambda|}$$

et, pour tout point M du plan :

$$(1 - |\lambda|)\,\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{BM} - |\lambda|\,\overrightarrow{AM}$$

La propriété : $(\overrightarrow{BM} + |\lambda|\ \overrightarrow{AM}).(\overrightarrow{BM} - |\lambda|\ \overrightarrow{AM}) = 0$ s'écrit alors :

$$(1 - |\lambda|^2)\ \overrightarrow{IM}\ .\ \overrightarrow{JM} = 0$$

Pour $|\lambda|^2 \neq 1$, cette relation est équivalente à $\overrightarrow{IM}\ .\ \overrightarrow{JM} = 0$. Cette dernière relation montre que les vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{JM}$ sont perpendiculaires, donc :

Les solutions de l'équation sont, pour $|\lambda| \neq 1$, sur le cercle de diamètre IJ .

Le centre C du cercle est le milieu du segment IJ. Le rayon r du cercle est la moitié du diamètre IJ.
L'affixe de C est donnée par :

$$z_C = \frac{1}{2}(z_I + z_J) = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta + |\lambda|\ \alpha}{1 + |\lambda|} + \frac{\beta - |\lambda|\ \alpha}{1 - |\lambda|}\right)$$

$$\boxed{z_C = \frac{\beta - |\lambda|^2\ \alpha}{1 - |\lambda|^2}}$$

Le rayon r est donné par :

$$r = \frac{1}{2}\,|z_I - z_J| = \frac{1}{2}\left|\frac{\beta + |\lambda|\ \alpha}{1 + |\lambda|} - \frac{\beta - |\lambda|\ \alpha}{1 - |\lambda|}\right|$$

$$\boxed{r = \frac{|\alpha - \beta|\,|\lambda|}{\left|1 - |\lambda|^2\right|}}$$

Remarques finales.

Maintenant que l'affixe du centre est connue, nous pouvons envisager de modifier la forme des solutions :

$$z = \frac{\beta - \alpha\lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1 - \lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}}\ ,\ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$z - z_C = \frac{\beta - \alpha\lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1 - \lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}} - \frac{\beta - |\lambda|^2\ \alpha}{1 - |\lambda|^2} = \frac{\beta - \alpha + \alpha - \alpha\lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}}{1 - \lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}} - \frac{\beta - \alpha + \alpha - |\lambda|^2\ \alpha}{1 - |\lambda|^2}$$

$$z - z_C = (\beta - \alpha)\left(\frac{1}{1 - \lambda e^{ik\frac{2\pi}{n}}} - \frac{1}{1 - |\lambda|^2}\right)$$

$$z - z_C = (\beta - \alpha)\frac{1 - |\lambda|^2 - 1 + \lambda e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{\left(1 - |\lambda|^2\right)\left(1 - \lambda e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)} = \frac{(\alpha - \beta)\lambda}{1 - |\lambda|^2} \times \frac{1 - \bar{\lambda} e^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - \lambda e^{i\frac{2k\pi}{n}}} \times e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

Comme le rapport $\dfrac{1 - \bar{\lambda} e^{-i\frac{2k\pi}{n}}}{1 - \lambda e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$ est le rapport de deux nombres complexes conjugués, son module est 1. Le module de $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ est 1 aussi. Donc le module de $z - z_C$ est $\dfrac{|\alpha - \beta||\lambda|}{\left|1 - |\lambda|^2\right|}$, il ne dépend pas de k, c'est le même pour toutes les solutions de l'équation. Cette propriété montre bien que les solutions sont sur un même cercle de centre z_C et de rayon $\dfrac{|\alpha - \beta||\lambda|}{\left|1 - |\lambda|^2\right|}$.