Pascal Lainé

NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 :

On donne θ_0 un réel tel que : $\cos(\theta_0)=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta_0)=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes suivants (en fonction de θ_0) :

$a=3i(2+i)(4+2i)(1+i)$ et $b=\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}$

Allez à : Correction exercice 1 :

Exercice 2 :

Mettre sous la forme $a+ib, a,b\in\mathbb{R}$ (forme algébrique) les nombres complexes

$$z_1=\frac{3+6i}{3-4i};\quad z_2=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2;\ z_3=\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}$$

$$z_4=\frac{5+2i}{1-2i};\qquad z_5=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3;\quad z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

$$z_7=-\frac{2}{1-i\sqrt{3}};\ z_8=\frac{1}{(1+2i)(3-i)};\ z_9=\frac{1+2i}{1-2i}$$

Allez à : Correction exercice 2 :

Exercice 3 :

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants

$$z_1=2e^{\frac{2i\pi}{3}};z_2=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}};z_3=3e^{-\frac{7i\pi}{8}};z_4=\left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right);$$

$$z_5=\frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}};z_6=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right);z_7=\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}}$$

z_8, le nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$.

z_9 le nombre de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$.

Allez à : Correction exercice 3 :

Exercice 4 :

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants, ainsi que leur conjugués :

$$z_1=3+3i;\ \ z_2=-1-i\sqrt{3};\ \ z_3=-\frac{4}{3}i;\ \ z_4=-2;\ \ z_5=e^{i\theta}+e^{2i\theta},\qquad \theta\in]-\pi,\pi[$$

Pour z_5, factoriser par $e^{\frac{3i\theta}{2}}$

$$z_6=1+i;\ \ z_7=1+i\sqrt{3};\ \ z_8=\sqrt{3}+i;\ \ z_9=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i};\ \ z_{10}=1+e^{i\theta},\qquad \theta\in]-\pi,\pi[$$

Pour z_{10}, factoriser par $e^{\frac{i\theta}{2}}$

2. Calculer le module et un argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leur conjugués.

$$z_1=1+i\left(1+\sqrt{2}\right);\ \ z_2=\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i\left(1-\sqrt{5}\right);\ \ z_3=\frac{\tan(\varphi)-i}{\tan(\varphi)+i};\ \ z_4=\frac{1}{1+i\tan(\theta)}$$

Indication :

Ecrire z_1 sous la forme $\alpha\left(e^{i\theta}+e^{2i\theta}\right)$

Calculer z_2^5

3. Calculer

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}$$

Allez à : Correction exercice 4 :

Exercice 5 :

Effectuer les calculs suivants :

1. $(3+2i)(1-3i)$
2. Produit du nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.
3. Quotient du nombre complexe de modulo 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ par le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{5\pi}{6}$.

Allez à : Correction exercice 5 :

Exercice 6 :

Etablir les égalités suivantes :

1.
$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$$

2.
$$(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)\left(\sqrt{3}-i\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right)-i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$$

3.
$$\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i}=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

Allez à : Correction exercice 6 :

Exercice 7 :

Soit

$$u=1+i \quad \text{et} \quad v=-1+i\sqrt{3}$$

1. Déterminer les modules de u et v.
2. Déterminer un argument de u et un argument de v.
3. En déduire le module et un argument pour chacune des racines cubiques de u.
4. Déterminer le module et un argument de $\frac{u}{v}$.
5. En déduire les valeurs de

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)$$

Allez à : Correction exercice 7 :

Exercice 8 :

Calculer le module et un argument de

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad v=1-i$$

En déduire le module et un argument de $\frac{u}{v}$.

Allez à : Correction exercice 8 :

Exercice 9 :

Effectuer les calculs suivants en utilisant la forme exponentielle.

$$z_1=\frac{1+i}{1-i};z_2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3;z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)^4;z_4=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5;$$

$$z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i};z_6=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}$$

Allez à : Correction exercice 9 :

Exercice 10 :

Calculer les racines carrées des nombres suivants.

$$z_1=-1;z_2=i;z_3=1+i;z_4=-1-i;z_5=1+i\sqrt{3};$$
$$z_6=3+4i;z_7=7+24i;z_8=3-4i;z_9=24-10i$$

Allez à : Correction exercice 10 :

Exercice 11 :

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
2. Calculer les racines carrées de $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Allez à : Correction exercice 11 :

Exercice 12 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+z+1=0$.
2. $z^2-(5i+14)z+2(5i+12)=0$.
3. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$.
4. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$.
5. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$.
6. $4z^2-2z+1=0$.
7. $z^4+10z^2+169=0$.
8. $z^4+2z^2+4=0$.
9. $x^4-30x^2+289=0$.
10. $x^4+4x^3+6x^2+4x-15=0$.
11. $z^3+3z-2i=0$.
12. $z^2-(1+a)(1+i)z+(1+a^2)i=0$.
13. $iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$.
14. $(1+i)z^2-(3+i)z-6+4i=0$.
15. $(1+2i)z^2-(9+3i)z-5i+10=0$.
16. $(1+3i)z^2-(6i+2)z+11i-23=0$.

Allez à : Correction exercice 12 :

Exercice 13 :

Résoudre l'équation :

$$Z^4+(3-6i)Z^2-8-6i=0$$

Allez à : Correction exercice 13 :

Exercice 14 :

$$(1-i)X^3-(5+i)X^2+(4+6i)X-4i=0$$

1. Montrer que cette équation admet une racine réelle.
2. Résoudre cette équation.

Allez à : Correction exercice 14 :

Exercice 15 :

1. Montrer que

$$X^3+(1-2i)X^2-3(1+i)X-2+2i=0 \quad (E)$$

Admet une ou plusieurs racines réelles.

2. Résoudre (E)

Allez à : Correction exercice 15 :

Exercice 16 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^6-iz^3-1-i=0$$

Indication : Poser $Z=z^3$ et résoudre d'abord $Z^2-iZ-1-i=0$.

Allez à : Correction exercice 16 :

Exercice 17 :

Soit (E) l'équation

$$X^4-3X^3+(2-i)X^2+3X-3+i=0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Allez à : Correction exercice 17 :

Exercice 18 :

1. Résoudre $X^3=-2+2i$
2. Résoudre $Z^3=-8i$
3. Résoudre

$$\frac{1}{2}Z^6+(1+3i)Z^3+8+8i=0$$

On rappelle que $\sqrt{676}=26$.

Allez à : Correction exercice 18 :

Exercice 19 :

Soit l'équation $z^3-iz+1-i=0 \qquad (E)$

1. Montrer que (E) admet une racine réelle.
2. Déterminer les solutions de (E).

Allez à : Correction exercice 19 :

Exercice 20 :

Soit (E) l'équation

$$X^4-\left(3+\sqrt{3}\right)X^3+\left(2+3\sqrt{3}-i\right)X^2+\left(-2\sqrt{3}+3i\right)X-2i=0$$

1. Montrer que (E) admet des racines réelles.
2. Résoudre (E).

Allez à : Correction exercice 20 :

Exercice 21 :

Soit $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$

1. Calculer z^2, puis déterminer le module et un argument de z^2, puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.

3. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Allez à : Correction exercice 21 :

Exercice 22 :

1. Donner les solutions de :

$$u^4 = -4$$

Sous forme algébrique et trigonométrique.

2. Donner les solutions de :

$$(z+1)^4 + 4(z-1)^4 = 0$$

Sous forme algébrique.

Allez à : Correction exercice 22 :

Exercice 23 :

1. Résoudre

$$X^3 = -2\sqrt{2}$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

2. Trouver les solutions de

$$(z+i)^3 + 2\sqrt{2}(z-i)^3 = 0$$

On donnera les solutions (et sous forme algébrique en bonus).

Allez à : Correction exercice 23 :

Exercice 24 :

1. Donner les solutions complexes de $X^4 = 1$.
2. Résoudre $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre $X^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Allez à : Correction exercice 24 :

Exercice 25 :

Ecrire sous forme algébrique et trigonométrique le nombre complexe

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2$$

Allez à : Correction exercice 25 :

Exercice 26 :

1. Déterminer le module et un argument de $\frac{1+i}{1-i}$, calculer $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010}$
2. Déterminer le module et un argument de $1+i\sqrt{3}$, calculer $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2010}$
3. Calculer les puissances n-ième des nombres complexes.

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}; \quad z_2 = 1+j; \quad z_3 = \frac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)}; \quad z_4 = 1+\cos(\phi)+i\sin(\phi)$$

Allez à : Correction exercice 26 :

Exercice 27 :

Comment choisir l'entier naturel n pour que $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ soit réel ? Imaginaire ?

Allez à : Correction exercice 27 :

Exercice 28 :

Soit z un nombre complexe de module ρ et d'argument θ, et soit $\overline{z}$ son conjugué. Calculer

$$(z+\overline{z})(z^2+\overline{z}^2)\dots(z^n+\overline{z}^n)$$

En fonction de ρ et θ. Et de $\cos(\theta)\cos(2\theta)\dots\cos(n\theta)$

Allez à : Correction exercice 28 :

Exercice 29 :

1. Pour quelles valeurs de $z\in\mathbb{C}$ a-t-on $|1+iz|=|1-iz|$
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia},\quad a\in\mathbb{R}$$

Montrer, sans les calculer, que les solutions sont réelles. Trouver alors les solutions.

3. Calculer les racines cubiques de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$

Allez à : Correction exercice 29 :

Exercice 30 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$$

Allez à : Correction exercice 30 :

Exercice 31 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4=\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4$$

Allez à : Correction exercice 31 :

Exercice 32 :

1. Déterminer les deux solutions complexes de $u^2=-2+2i\sqrt{3}$.
2. Résoudre

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2=-2+2i\sqrt{3}$$

On explicitera les solutions sous forme algébrique.

Allez à : Correction exercice 32 :

Exercice 33 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$

$$\left(\frac{z-1}{z-i}\right)^3=-8$$

On donnera les solutions sous forme algébrique.

Allez à : Correction exercice 33 :

Exercice 34 :

On appelle $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^3=1$ (donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique)
2. Montrer que $\overline{j}=j^2$

3. Montrer que $j^{-1} = j^2$
4. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$
5. Calculer $\frac{1}{1+j}$.
6. Calculer j^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Allez à : Correction exercice 34 :

Exercice 35 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 = \frac{1}{4}(-1 + i)$$

Et montrer qu'une seule de ces solutions a une puissance quatrième réelle.

Allez à : Correction exercice 35 :

Exercice 36 :

1. Donner les solutions complexes de $X^4 = 1$.
2. Résoudre $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. Résoudre $X^8 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)X^4 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$

Allez à : Correction exercice 36 :

Exercice 37 :

Trouver les racines cubiques de $11 + 2i$.

Allez à : Correction exercice 37 :

Exercice 38 :

Calculer

$$\frac{\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1 + i)}{2}}$$

Algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Allez à : Correction exercice 38 :

Exercice 39 :

Trouver les racines quatrième de 81 et de -81.

Allez à : Correction exercice 39 :

Exercice 40 :

Soit $n \geq 2$, un entier.

1.
   a. Déterminer les complexes qui vérifient $z^{2n} = 1$.
   b. Déterminer les complexes qui vérifient $z^n = -1$.
2. Calculer la somme des complexes qui vérifient $z^n = -1$.

Allez à : Correction exercice 40 :

Exercice 41 :

Soit z une racine n-ième de -1, donc $z^n = -1$. Avec $n > 2$ et $z \neq -1$

Calculer

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} z^{2k}=1+z^2+z^4+\cdots+z^{2(n-1)}$$

Allez à : Correction exercice 41 :

Exercice 42 :

1. Soient z_1, z_2, z_3 trois nombres complexes ayant le même cube.
Exprimer z_2 et z_3 en fonction de z_1.
2. Donner, sous forme polaire (forme trigonométrique) les solutions dans $\mathbb{C}$ de :
$$z^6+(7-i)z^3-8-8i=0$$

Indication : poser $Z=z^3$ et calculer $(9+i)^2$.

Allez à : Correction exercice 42 :

Exercice 43 :

Déterminer les racines quatrième de $-7-24i$.

Allez à : Correction exercice 43 :

Exercice 44 :

Résoudre les équations suivantes :
$$z^6=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}};\quad z^4=\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}};\quad z^6+27=0;\ 27(z-1)^6+(z+1)^6=0$$

Allez à : Correction exercice 44 :

Exercice 45 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^5=1$
2. $z^5=1-i$
3. $z^3=2-2i$
4. $z^5=\bar{z}$

Allez à : Correction exercice 45 :

Exercice 46 :

1. Calculer les racines n-ième de $-i$ et de $1+i$.
2. Résoudre $z^2-z+1-i=0$.
3. En déduire les racines de $z^{2n}-z^n+1-i=0$.

Allez à : Correction exercice 46 :

Exercice 47 :

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout nombre $z\in\mathbb{C}$, on a :
$$(z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})=z^n-1$$
Et en déduire que si $z\neq 1$, on a :
$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{z^n-1}{z-1}$$
2. Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $e^{ix}-1=2ie^{\frac{ix}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $x\in\mathbb{R}$ la somme :
$$Z_n=1+e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{(n-1)ix}$$
Et en déduire les valeurs de

$$X_n = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cdots + \cos\big((n-1)x\big)$$
$$Y_n = \sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin\big((n-1)x\big)$$

Allez à : Correction exercice 47 :

Exercice 48 :

Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ une racine cinquième de 1, donc $\alpha^5 = 1$.

1. Quelles sont les 4 complexes qui vérifient ces conditions ?
2. Montrer que $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$
3. Calculer $1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3 + 5\alpha^4$

   Indication : On calculera de deux façon différente la dérivée de la fonction f définie par
   $$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$$
   On donnera le résultat sous forme algébrique.

Allez à : Correction exercice 48 :

Exercice 49 :

Soit ϵ une racine n-ième de l'unité, $\epsilon \neq 1$; calculer
$$S = 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 + \cdots + n\epsilon^{n-1}$$

Allez à : Correction exercice 49 :

Exercice 50 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Allez à : Correction exercice 50 :

Exercice 51 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^n = \bar{z}$ où $n \geq 1$.

Allez à : Correction exercice 51 :

Exercice 52 :

Soit $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^7 = 1$ et $\beta \neq 1$. Montrer que
$$\frac{\beta}{1+\beta^2} + \frac{\beta^2}{1+\beta^4} + \frac{\beta^3}{1+\beta^6} = -2$$

Allez à : Correction exercice 52 :

Exercice 53 :

Linéariser :
$$A(x) = \cos^3(x)\,;\ B(x) = \sin^3(x)\,; C(x) = \cos^4(x)\,; D(x) = \sin^4(x)\,; E(x) = \cos^2(x)\sin^2(x)\,;$$
$$F(x) = \cos(x)\sin^3(x)\,; G(x) = \cos^3(x)\sin(x)\,; H(x) = \cos^3(x)\sin^2(x)\,;$$
$$I(x) = \cos^2(x)\sin^3(x)\,; J(x) = \cos(x)\sin^4(x)$$

Allez à : Correction exercice 53 :

Exercice 54 :

1. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des complexes z tels que $\frac{1-z}{1-iz}$ soit imaginaire pur.

Allez à : Correction exercice 54 :

Exercice 55 :

Soit $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, avec $\rho e^{i\theta} \neq 1$

Soit

$$z=\frac{1+\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{i\theta}}$$

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z.

Allez à : Correction exercice 55 :

Exercice 56 :

1. Montrer que $(1+i)^6=-8i$
2. En déduire une solution de l'équation (E) $z^2=-8i$.
3. Ecrire les deux solutions de (E) sous forme algébrique, et sous forme exponentielle.
4. Déduire de la première question une solution de l'équation (E_0) $z^3=-8i$.

Allez à : Correction exercice 56 :

Exercice 57 :

Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $f(z)=z(1-z)$

1. Déterminer les points fixes de f c'est-à-dire résoudre $f(z)=z$.
2. Montrer que si $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$ alors $\left|f(z)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$

   Indication : $z(1-z)=\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-z\right)+\frac{1}{4}$

Allez à : Exercice 57 :

Exercice 58 :

Posons $E=\mathbb{C}\setminus\{-i\}$. Soit $f:E\to\mathbb{C}\setminus\{1\}$ l'application définie pour tout $z\in E$ par :

$$f(z)=\frac{z-i}{z+i}$$

1. Montrer que l'application est injective.
2. Montrer que pour tout $z\in E$ on a $f(z)\neq 1$.
3. Démontrer l'égalité
$$f(E)=\mathbb{C}\setminus\{1\}$$
   Que peut-on en déduire sur f.
4. Soit $z\in E$. Montrer que
$$1-|f(z)|^2=4\frac{\mathcal{Im}(z)}{|z+i|^2}$$
5. Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des complexes de module 1. Montrer que l'on a
$$f(\mathbb{R})=\mathcal{U}\setminus\{1\}$$

Allez à : Correction exercice 58 :

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

$$\begin{aligned}|a|&=|3i(2+i)(4+2i)(1+i)|=|3i|\times|2+i|\times|4+2i|\times|1+i|\\&=3\times\sqrt{2^2+1^2}\times 2\times|2+i|\times\sqrt{1^2+1^2}=6\left(\sqrt{2^2+1^2}\right)^2\times\sqrt{2}=6\times 5\sqrt{2}\\&=30\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\arg(a)=\arg\big(3i(2+i)(4+2i)(1+i)\big)=\arg(3i)+\arg(2+i)+\arg(4+2i)+\arg(1+i)+2k\pi$$
$$=\frac{\pi}{2}+\arg(2+i)+\arg\big(2(2+i)\big)+\frac{\pi}{4}+2k\pi$$
$$=\frac{3\pi}{4}+\arg(2+i)+arg2+\arg(2+i)+2k\pi=\frac{3\pi}{4}+2\arg(2+i)+2k\pi$$

Soit θ un argument de $2+i$, $\cos(\theta)=\frac{2}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$ et $\sin(\theta)=\frac{1}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$ donc $\cos(\theta)=\cos(\theta_0)$ et $\sin(\theta)=\sin(\theta_0)$, on en déduit que $\theta=\theta_0+2k\pi$

Par suite

$$\arg(a)=\frac{3\pi}{4}+2\theta_0+2k\pi$$

$$|b|=\left|\frac{(4+2i)(-1+i)}{(2-i)3i}\right|=\frac{|4+2i|\times|-1+i|}{|2-i|\times|3i|}=\frac{2\times|2+i|\times\sqrt{(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\times 3}=\frac{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}{\sqrt{5}\times 3}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\arg(b)=\arg(4+2i)+\arg(-1+i)-\arg(2-i)-\arg(3i)+2k\pi=\theta_0+\frac{3\pi}{4}-(-\theta_0)-\frac{\pi}{2}+2k\pi$$
$$=\frac{\pi}{4}+2\theta_0+2k\pi$$

Allez à : Exercice 1 :

Correction exercice 2 :

$$z_1=\frac{3+6i}{3-4i}=z_1=\frac{(3+6i)(3+4i)}{3^2+(-4)^2}=\frac{9+12i+18i-24}{25}=\frac{-15+30i}{25}=-\frac{3}{5}+\frac{6}{5}i$$

$$z_2=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2=\left(\frac{(1+i)(2+i)}{2^2+(-1)^2}\right)^2=\left(\frac{2+i+2i-1}{2^2+(-1)^2}\right)^2=\left(\frac{1+3i}{5}\right)^2=\frac{1+6i-9}{25}=-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$$

Autre méthode

$$z_2=\left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2=\frac{(1+i)^2}{(2-i)^2}=\frac{1+2i-1}{4-4i-1}=\frac{2i}{3-4i}=\frac{2i(3+4i)}{3^2+(-4)^2}=\frac{6i-8}{25}=-\frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$$

$$z_3=\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}=\frac{(2+5i)(1+i)+(2-5i)(1-i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2+2i+5i-5+2-2i-5i-5}{1^2-i^2}$$
$$=-\frac{6}{2}=-3$$

Autre méthode

$$z_3=\frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}=\frac{2+5i}{1-i}+\overline{\frac{2+5i}{1-i}}=2\mathcal{Re}\left(\frac{2+5i}{1-i}\right)$$

Or

$$\frac{2+5i}{1-i}=\frac{(2+5i)(1+i)}{1^2+(-1)^2}=\frac{2+2i+5i-5}{2}=\frac{-3+7i}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$$

Donc

$$z_3=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-3$$

$$z_4=\frac{5+2i}{1-2i}=\frac{(5+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2}=\frac{5+10i+2i-4}{5}=\frac{-1+12i}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{12}{5}i$$

$$z_5=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$$
$$=-\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{4}\times i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\times\left(-\frac{3}{4}\right)-i\frac{3\sqrt{3}}{8}=-\frac{1}{8}+i\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{9}{8}-i\frac{3\sqrt{3}}{8}=1$$

Autre méthode

$$z_5=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3=e^{2i\pi}=1$$

Ou encore

$$z_5=j^3=1$$

$$z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$$

On peut toujours s'amuser à développer $(1+i)^9$ et $(1-i)^7$ mais franchement ce n'est pas une bonne idée.

$$z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}=(1+i)^2\frac{(1+i)^7}{(1-i)^7}=(1+i)^2\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^7=(1+2i-1)\left(\frac{(1+i)(1+i)}{1^2+(-1)^2}\right)^7$$

$$=2i\left(\frac{1+2i-1}{2}\right)^7=\frac{2i(2i)^7}{2^7}=\frac{2^8i^8}{2^7}=2i^8=2$$

Autre méthode

$$z_6=\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}=\frac{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^7}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^9\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^9}{\left(\sqrt{2}\right)^7\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^7}=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2e^{i\frac{9\pi}{4}}}{e^{-i\frac{7\pi}{4}}}=2e^{i\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{7\pi}{4}\right)}=2e^{\frac{16i\pi}{4}}=2e^{4i\pi}$$
$$=2$$

$$z_7=-\frac{2}{1-i\sqrt{3}}=-\frac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=-\frac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{4}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Autre méthode

$$z_7=-\frac{2}{1-i\sqrt{3}}=\frac{1}{-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{j}=\frac{j^2}{j^3}=j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_8=\frac{1}{(1+2i)(3-i)}=\frac{1}{3-i+6i+2}=\frac{1}{5+5i}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{1+i}=\frac{1}{5}\times\frac{1-i}{1^2+1^2}=\frac{1}{10}-\frac{1}{10}i$$

$$z_9=\frac{1+2i}{1-2i}=\frac{(1+2i)(1+2i)}{1^2+(-2)^2}=\frac{(1+2i)^2}{5}=\frac{1+4i-4}{5}=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

Allez à : Exercice 2 :

Correction exercice 3 :

$$z_1=2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+i\sqrt{3}$$

$$z_2=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_3=3e^{-\frac{7i\pi}{8}}=3\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)\right)=3\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)-3i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$
$$=3\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)-3i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)=-3\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)-3i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$$
$$=-3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+3i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_4=\left(2e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{-i\frac{\pi}{2}}=-2i$$

$$z_5=\frac{2e^{\frac{i\pi}{4}}}{e^{-\frac{3i\pi}{4}}}=2e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}\right)}=2e^{i\pi}=-2$$

$$z_6=\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)\left(3e^{\frac{5i\pi}{6}}\right)=6e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=6e^{\frac{7i\pi}{6}}=6\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=6\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$=-3\sqrt{3}-3i$$
$$z_7=\frac{2e^{\frac{i\pi}{3}}}{3e^{-\frac{5i\pi}{6}}}=\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=\frac{2}{3}e^{\frac{8i\pi}{6}}=\frac{2}{3}e^{\frac{4i\pi}{3}}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{1}{3}-i\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$z_8=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3}$$
$$z_9=3e^{-i\frac{\pi}{8}}=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)=3\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-3i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

A moins de connaitre $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ on ne peut pas faire mieux.

Allez à : Exercice 3 :

Correction exercice 4 :

1. $z_1=3(1+i)$ donc $|z_1|=3|1+i|=3\times\sqrt{1^2+1^2}=3\sqrt{2}$
   Si on ne met pas 3 en facteur
$$|z_1|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times 2}=3\sqrt{2}$$
   C'est moins simple.
   On appelle θ_1 un argument de z_1
$$\cos(\theta_1)=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{et}\quad\sin(\theta_1)=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
   Donc $\theta_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$ et $z_1=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, et $\overline{z_1}=3\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur
$$z_1=3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$|z_2|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$, soit θ_2 un argument de z_2
$$\cos(\theta_2)=-\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad\sin(\theta_2)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$
Donc $\theta_2=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$ et $z_2=2e^{\frac{4i\pi}{3}}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur
$$z_2=2\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)=2e^{\frac{4i\pi}{3}}=2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$
Et $\overline{z_2}=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Pour z_3 la détermination du cosinus et du sinus n'est pas une bonne méthode.
$$z_3=-\frac{4}{3}i=-\frac{4}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$$
Cette forme n'est pas la forme trigonométrique car $-\frac{4}{3}$ est négatif, ce n'est donc pas le module, mais $-1=e^{i\pi}$, donc $z_3=\frac{4}{3}e^{i\pi}e^{i\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right)}=\frac{4}{3}e^{\frac{3i\pi}{2}}=\frac{4}{3}e^{-\frac{i\pi}{2}}$.

On aurait pu directement écrire que $-i=e^{\frac{3i\pi}{2}}=e^{-\frac{i\pi}{2}}$.

Et $\overline{z_3}=\frac{4}{3}e^{\frac{i\pi}{2}}$

Pour z_4 la détermination du cosinus et du sinus n'est pas une bonne méthode.
$$z_4=-2=2e^{i\pi}$$

Et $\overline{z_4}=e^{-i\pi}=e^{i\pi}$

C'est plus dur

$$z_5=e^{i\theta}+e^{2i\theta}=e^{\frac{3i\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{\frac{3i\theta}{2}}\times 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{3i\theta}{2}}$$

Comme $-\pi<\theta<\pi$, $-\frac{\pi}{2}<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$ par conséquent $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$, ce qui signifie que $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bien le module.

Et $\overline{z_5}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{3i\theta}{2}}$

$|z_6|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, soit θ_6 un argument de z_6

$$\cos(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \text{et} \qquad \sin(\theta_2)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc $\theta_6=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$ et $z_6=2e^{i\frac{\pi}{4}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_6=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Et $\overline{z_6}=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$

$|z_7|=\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$, soit θ_7 un argument de z_7

$$\cos(\theta_7)=\frac{1}{2}\qquad \text{et} \qquad \sin(\theta_7)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Donc $\theta_7=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$ et $z_7=2e^{\frac{i\pi}{3}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_7=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)=2e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Et $\overline{z_7}=2e^{-\frac{i\pi}{3}}$

$|z_8|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$, soit θ_8 un argument de z_8

$$\cos(\theta_8)=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \text{et} \qquad \sin(\theta_8)=\frac{1}{2}$$

Donc $\theta_8=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}$ et $z_8=2e^{\frac{i\pi}{6}}$

Autre méthode (meilleure), on met le module en facteur

$$z_8=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2e^{\frac{i\pi}{6}}$$

Première méthode

$$z_9=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}=\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-i}{2}}=\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-\frac{i\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{6}}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Deuxième méthode

$$z_9=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}=\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i)}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}+i+3i-\sqrt{3}}{4}=\frac{4i}{4}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

C'est plus dur

$$z_{10}=1+e^{i\theta}=e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)=e^{\frac{i\theta}{2}}\times 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{\frac{i\theta}{2}}$$

Comme $-\pi < \theta < \pi$, $-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ par conséquent $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$, ce qui signifie que $2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bien le module.

Et $\overline{z_{10}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-\frac{i\theta}{2}}$

2. Faisons comme d'habitude

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 1 + 2\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Soit θ_1 un argument de z_1

$$\cos(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_1) = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

L'ennui c'est que l'on ne connait pas d'angle dont le cosinus et le sinus valent ces valeurs.
Il faut être malin.

$$z_1 = 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right) = 1 + i + \sqrt{2}i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}i = \sqrt{2}\left(e^{\frac{i\pi}{4}} + e^{\frac{i\pi}{2}}\right)$$
$$= \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}}\left(e^{-\frac{i\pi}{8}} + e^{\frac{i\pi}{8}}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{8}} \times 2\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)e^{\frac{3i\pi}{8}}$$

$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ donc $\theta_1 = \frac{3\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $|z_1| = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Remarque :

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$$

Le module de $\overline{z_1}$ est aussi $2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$ et un argument est $-\frac{3\pi}{8}$.

Faisons comme d'habitude

$$z_2 = \sqrt{10+2\sqrt{5}} + i\left(1-\sqrt{5}\right)$$

$$|z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2 + \left(1-\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{10 + 2\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$$

Soit θ_2 un argument de z_2

$$\cos(\theta_2) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \quad \text{et} \quad \sin(\theta_2) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

L'ennui c'est que l'on ne connait pas d'angle dont le cosinus et le sinus valent ces valeurs.
Calculons z_2^5

$$z_2^5=\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^5$$

$$=\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^5+5\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^4 i\left(1-\sqrt{5}\right)+10\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^3\left(i\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^2$$
$$+10\left(\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)^2\left(i\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^3+5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(i\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^4+\left(i\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^5$$
$$=\left(10+2\sqrt{5}\right)^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}+5i\left(10+2\sqrt{5}\right)^2\left(1-\sqrt{5}\right)$$
$$-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^2\sqrt{10+2\sqrt{5}}-10i\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^3$$
$$+5\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right)^4+i\left(1-\sqrt{5}\right)^5$$
$$=\sqrt{10+2\sqrt{5}}\left(\left(10+2\sqrt{5}\right)^2-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^2+5\left(1-\sqrt{5}\right)^4\right)$$
$$+i\left(1-\sqrt{5}\right)\left(5\left(10+2\sqrt{5}\right)^2-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^2+\left(1-\sqrt{5}\right)^4\right)$$

$$\left(10+2\sqrt{5}\right)^2-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^2+5\left(1-\sqrt{5}\right)^4$$
$$=100+40\sqrt{5}+20-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-2\sqrt{5}+5\right)$$
$$+5\left(1-4\sqrt{5}+6\times\left(\sqrt{5}\right)^2-4\left(\sqrt{5}\right)^3+\left(\sqrt{5}\right)^4\right)$$
$$=120+40\sqrt{5}-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(6-2\sqrt{5}\right)+5\left(56-24\sqrt{5}\right)$$
$$=120+40\sqrt{5}-10\left(60-20\sqrt{5}+12\sqrt{5}-20\right)+280-120\sqrt{5}=0$$
$$5\left(10+2\sqrt{5}\right)^2-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)^2+\left(1-\sqrt{5}\right)^4$$
$$=5\left(100+40\sqrt{5}+20\right)-10\left(10+2\sqrt{5}\right)\left(1-2\sqrt{5}+5\right)$$
$$+\left(1-4\sqrt{5}+6\times\left(\sqrt{5}\right)^2-4\left(\sqrt{5}\right)^3+\left(\sqrt{5}\right)^4\right)$$
$$=600+200\sqrt{5}-10\left(40-8\sqrt{5}\right)+56-24\sqrt{5}=2566+256\sqrt{5}$$
$$=256(1+\sqrt{5})$$
$$z_2^5=256i\left(1-\sqrt{5}\right)\left(1+\sqrt{5}\right)=256i\times(-4)=-2^{10}i$$

Ensuite il faut trouver les solutions de $Z^5=-2^{10}i=2^{10}e^{-\frac{i\pi}{2}}$

$$Z^5=-2^{10}i=2^{10}e^{-\frac{i\pi}{2}}\Leftrightarrow\begin{cases}|Z^5|=2^{10}\\ \arg(Z^5)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|Z|=2^2\\ 5\arg(Z)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|Z|=4\\ \arg(Z)=-\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5},k\in\{0,1,2,3,4\}\end{cases}$$

$$Z_0=4e^{-i\frac{\pi}{10}};\quad Z_1=4e^{\frac{3i\pi}{10}};\ Z_2=4e^{\frac{7i\pi}{10}};\ Z_3=4e^{\frac{11i\pi}{10}};Z_4=\ 4e^{\frac{15i\pi}{10}}=-4i$$

Parmi ces cinq complexes, le seul qui a une partie réelle positive et une partie imaginaire négative est $4e^{-i\frac{\pi}{10}}$ d'où $z_2=4e^{-i\frac{\pi}{10}}$ donc un argument de z_2 est $-\frac{\pi}{10}$.

Le module de $\overline{z_2}$ est 4 et un argument est $\frac{\pi}{10}$.

$$z_3=\frac{\tan(\varphi)-i}{\tan(\varphi)+i}=\frac{(\tan(\varphi)-i)(\tan(\varphi)-i)}{\tan^2(\varphi)+1^2}=\frac{\tan^2(\varphi)-2i\tan(\varphi)-1}{\frac{1}{\cos^2(\varphi)}}$$
$$=\cos^2(\varphi)\left(\tan^2(\varphi)-1\right)-2i\cos^2(\varphi)\tan(\varphi)$$
$$=\cos^2(\varphi)\left(\frac{\sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)}-1\right)-2i\cos^2(\varphi)\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$$
$$=-\left(\cos^2(\varphi)-\sin^2(\varphi)\right)-2i\sin(\varphi)\cos(\varphi)=-\cos(2\varphi)-i\sin(2\varphi)$$
$$=-\left(\cos(2\varphi)+i\sin(2\varphi)\right)=e^{i\pi}e^{-2i\varphi}=e^{i(\pi-2\varphi)}$$

Le module de z_3 est 1 et un argument est $\pi-2\varphi$

Autre méthode

$$z_3=\frac{\tan(\varphi)-i}{\tan(\varphi)+i}=\frac{i(\tan(\varphi)-i)}{i(\tan(\varphi)+i)}=\frac{i\tan(\varphi)+1}{i\tan(\varphi)-1}=\frac{i\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}+1}{i\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}-1}=\frac{i\sin(\varphi)+\cos(\varphi)}{i\sin(\varphi)-\cos(\varphi)}$$
$$=\frac{\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)}{-(\cos(\varphi)-i\sin(\varphi))}=-\frac{e^{i\varphi}}{e^{-i\varphi}}=-e^{2i\varphi}=e^{i\pi}e^{2i\varphi}=e^{i(\pi+2\varphi)}$$

Un argument de $\overline{z_3}$ est $-\pi-2\varphi$

$$z_4=\frac{1}{1+i\tan(\theta)}=\frac{1}{1+i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}=\frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}=\frac{\cos(\theta)}{e^{i\theta}}=\cos(\theta)\,e^{-i\theta}$$

Si θest tel que $\cos(\theta)>0$ alors $|z_4|=\cos(\theta)$ et un argument de z_4 est $-\theta$

Si θest tel que $\cos(\theta)<0$ alors $|z_4|=-\cos(\theta)$ et un argument de z_4 est $-\theta+\pi$

3. On sait que $j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-j^2$

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{2010}=(-j^2)^{2010}=(j^2)^{2010}=j^{4020}=j^{3\times1340}=(j^3)^{1340}=1^{1340}=1$$

Allez à : Exercice 4 :

Correction exercice 5 :

1. $(3+2i)(1-3i)=3-9i+2i-6i^2=3-7i+6=9-7i$
2.

$$2e^{i\frac{\pi}{3}}\times3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}=6e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)}=6\,e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=-6i$$

3.

$$\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{3e^{i\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}}=\frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{\frac{5i\pi}{6}}=\frac{2}{3}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}\right)}=\frac{2}{3}e^{\frac{7i\pi}{6}}$$

Allez à : Exercice 5 :

Correction exercice 6 :

1.

$$\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)(1+i)=e^{i\frac{\pi}{7}}e^{-i\frac{\pi}{3}}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{7}}e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{7}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{12\pi}{84}-\frac{28\pi}{84}+\frac{21\pi}{84}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{84}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{84}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{84}\right)\right)$$

2.

$$(1-i)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)(\sqrt{3}-i)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$$
$$=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{5}}e^{-i\frac{\pi}{6}}=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{15\pi}{60}+\frac{12\pi}{60}-\frac{10\pi}{60}\right)}=2\sqrt{2}e^{-\frac{13i\pi}{60}}$$
$$=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{60}\right)-i\sin\left(\frac{13\pi}{60}\right)\right)$$
$$\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)}{1+i}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}=\frac{e^{\frac{i\pi}{12}}}{e^{\frac{i\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{-\frac{2i\pi}{12}}=e^{-\frac{i\pi}{6}}$$
$$=\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$

Allez à : Exercice 6 :

Correction exercice 7 :

1. $|u|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ et $|v|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2$
2.
$$u=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$
Donc un argument de u est $\frac{\pi}{4}$.
$$v=2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{\frac{2i\pi}{3}}$$
Donc un argument de v est $\frac{2\pi}{3}$.
3. On cherche les solutions complexes de $z^3=u$
$$z^3=u\Leftrightarrow\begin{cases}|z^3|=\sqrt{2}\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=2^{\frac{1}{2}}\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2^{\frac{1}{6}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$
u admet trois racines cubiques
$$z_0=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\quad z_1=2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{9\pi}{12}}=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}}\quad et\quad z_2=2^{\frac{1}{6}}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}$$
4.
$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{\frac{2i\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5i\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$
Et
$$\frac{u}{v}=\frac{1+i}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{(1+i)(-1-i\sqrt{3})}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}+i(-1-\sqrt{3})}{4}$$
Par conséquent
$$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\ \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\end{cases}$$

Allez à : Exercice 7 :

Correction exercice 8 :

$$|u|=\frac{|\sqrt{6}-i\sqrt{2}|}{2}=\frac{\sqrt{6+2}}{2}=\frac{\sqrt{8}}{2}=\frac{\sqrt{4\times 2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$u=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2\times 3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Donc $|u|=\sqrt{2}$ et un argument de u est $-\frac{\pi}{6}$.

$$|v|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$v=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Donc $|v|=\sqrt{2}$ et un argument de v est $-\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{u}{v}=\frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Donc $\left|\frac{u}{v}\right|=1$ et un argument de $\frac{u}{v}$ est $\frac{\pi}{12}$.

Allez à : Exercice 8 :

Correction exercice 9 :

$$z_1=\frac{(1+i)(1+i)}{1^2+1^2}=\frac{1+2i-1}{2}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z_2=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^3=e^{\frac{3i\pi}{2}}$$

$$z_3=\left(1+i\sqrt{3}\right)^4=\left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^4=2^4\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^4=16e^{\frac{4i\pi}{3}}$$

$$z_4=\left(1+i\sqrt{3}\right)^5+\left(1-i\sqrt{3}\right)^5=\left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^5+\left(2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^5=2^5\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5+2^5\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^5$$

$$=32\left(e^{\frac{5i\pi}{3}}+e^{-\frac{5i\pi}{3}}\right)=32\times 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=64\left(-\frac{1}{2}\right)=-32$$

$$z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{3}+2i}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Autre méthode

$$z_5=\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_6=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}=\frac{\left(\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right)(2+2i)}{2^2+(-2)^2}=\frac{2\sqrt{6}+2i\sqrt{6}-2i\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{8}=\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}+2i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{8}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$$

Remarque : il aurait mieux valu mettre $\frac{\sqrt{2}}{2}$ en facteur d'entrée.

Là on est mal parti, il va falloir trouver le module, puis le mettre en facteur,

$$z_6=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1+i\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$$

$$|z_6|=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2+\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{3+2\sqrt{3}+1+3-2\sqrt{3}+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times 2\sqrt{2}=1$$

$$z_6=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$$

Mais on ne connait pas d'angle vérifiant cela. Il faut faire autrement

$$\left|\sqrt{6}-i\sqrt{2}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$|2-2i|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$z_6=\frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2-2i}=\frac{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{e^{-i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Allez à : Exercice 9 :

Correction exercice 10 :

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=-1$

$$Z_1=-i\quad\text{et}\quad Z_2=i$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=i=e^{\frac{i\pi}{2}}$

$$z_1=-e^{i\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{et}\quad z_2=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}$

$$Z_1=-2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi}{8}}\quad\text{et}\quad Z_2=2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connait pas les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Autre méthode, on cherche $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2=1+i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=1+i\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=1\\2ab=1\end{cases}$$

On rajoute l'équation L_3

$$|(a+ib)^2|=|1+i|\Leftrightarrow|a+ib|^2=\sqrt{1^2+1^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow b^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{-2+2\sqrt{2}}{4}}=\pm\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après L_2 a et b sont de même signe donc les deux solutions de $z^2=1+i$ sont

$$Z_1=\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}\quad\text{et}\quad Z_2=-\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=-1-i=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}e^{\frac{5i\pi}{4}}$

$$Z_1=-2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{5i\pi}{8}}\quad\text{et}\quad Z_2=2^{\frac{1}{4}}e^{\frac{5i\pi}{8}}$$

C'est un peu insuffisant parce que l'on ne connait pas les valeurs de $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right)$ et de $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)$

Autre méthode, on cherche $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2=-1-i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-1-i\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=-1\\2ab=-1\end{cases}$$

On rajoute l'équation L_3

$$|(a+ib)^2|=|-1-i|\Leftrightarrow|a+ib|^2=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}\Leftrightarrow\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{2}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3

$$2a^2=-1+\sqrt{2}\Leftrightarrow a^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{-2+2\sqrt{2}}{4}}\pm\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=1+\sqrt{2}\Leftrightarrow b^2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow b=\pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2+2\sqrt{2}}{4}}\pm\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

D'après L_2 a et b sont de signes opposés donc les deux solutions de $z^2=-1-i$ sont

$$Z_1=\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}\quad \text{et}\quad Z_2=-\frac{\sqrt{-2+2\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $z^2=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$Z_1=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\quad \text{et}\quad Z_2=-\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=3+4i$

On pose $Z=a+ib$, $Z^2\Leftrightarrow 3+4i=(a+ib)^2\Leftrightarrow 3+4i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=4\end{cases}$

On rajoute l'équation $|Z^2|\Leftrightarrow|3+4i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{25}=5\ \ L_3$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=3\\a^2+b^2=5\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve $2a^2=8\Leftrightarrow a^2=4$, d'où l'on tire $b^2=1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab=4\Leftrightarrow ab=2$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a=2$ alors $b=1$ et $Z_1=2+i$ et si $a=-2$ alors $b=-1$ et $Z_2=-2-i$

Deuxième méthode

$3+4i=4+4i-1=(2+i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\left(\frac{2}{a}\right)^2=3\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\frac{4}{a^2}=3\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4-4=3a^2\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4-3a^2-4=0\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}A^2-3A-4=0\\ b=\frac{2}{a}\end{cases}$$

Les solutions de $A^2-3A-4=0$ sont $A_1=-1<0$ et $A_2=4$, donc $a^2=4$,

Si $a=-2$ alors $b=\frac{2}{a}=-1$ et alors $Z_2=-2-i$, si $a=2$ alors $b=\frac{2}{a}=1$ et alors $Z_1=2+i$.

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=-7-24i$

On pose $Z=a+ib$, $Z^2\Leftrightarrow -7-24i=(a+ib)^2\Leftrightarrow -7-24i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow$
$\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=-7\\2ab=-24\end{cases}$

On rajoute l'équation

$$|Z^2|\Leftrightarrow|3+4i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{(-7)^2+(-24)^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}$$
$$=25\ \ L_3$$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=-7\\a^2+b^2=25\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve $2a^2=18\Leftrightarrow a^2=9$, d'où l'on tire $b^2=16$. Les valeurs possibles de a sont ± 3 et les valeurs possibles de b sont ± 4, d'après l'équation $2ab=-24\Leftrightarrow ab=-12$, on en déduit que $ab<0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a=3$ alors $b=-4$ et $Z_1=3-4i$ et si $a=-3$ alors $b=4$ et $Z_2=-3+4i$

Deuxième méthode

$-7-24i=9-24i-16=(3-4i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases} a^2-b^2=-7 \\ 2ab=-24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\left(\frac{-12}{a}\right)^2=-7 \\ b=-\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\frac{144}{a^2}=-7 \\ b=-\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-144=-7a^2 \\ b=-\frac{12}{a} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4+7a^2-144=0 \\ b=-\frac{12}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2+7A-144=0 \\ b=-\frac{12}{a} \end{cases}$$

Les solutions de $A^2+7A-144=0$ sont $A_1=-16<0$ et $A_2=9$, donc $a^2=9$,

Si $a=3$ alors $b=-\frac{12}{a}=-4$ et alors $Z_2=3-4i$, si $a=3$ alors $b=-\frac{12}{a}=-4$ et alors $Z_1=-3+4i$.

On cherche les nombres complexes tels que $Z^2=3-4i=z_8$, on peut refaire comme précédemment mais on va prendre la méthode la plus simple

$$Z^2=3-4i=4-4i-1=(2-i)^2$$

Il y a deux solutions

$$Z_1=2-i \quad \text{et} \quad Z_2=-2+i$$

On cherche les complexes Z tels que $Z^2=z_9=24-10i$

Là encore, on va aller au plus simple

$$24-10i=25-10i-1=(5-i)^2$$

Donc il y a deux solutions

$$Z_1=5-i \quad \text{et} \quad Z_2=-5+i$$

Allez à : Exercice 10 :

Correction exercice 11 :

1. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On pose $Z=a+ib$,

$$Z^2=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=(a+ib)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2-b^2+2iab \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} a^2-b^2=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2| \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right|=a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1 \ \ L_3$$

Avec le système $\begin{cases} a^2-b^2=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2+b^2=1 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve

$$2a^2=1+\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a^2=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=1-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b^2=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, d'après l'équation $2ab=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ab=\frac{\sqrt{2}}{4}$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_1=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
Et si $a=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
D'autre part

$$Z^2=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Admet deux solutions $Z_3=e^{i\frac{\pi}{8}}=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $z_4=-e^{i\frac{\pi}{8}}=-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)>0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\end{cases}$$

2. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2=\frac{\sqrt{3}+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$

On pose $Z=a+ib$,

$$Z^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=(a+ib)^2\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 2ab=\frac{1}{2}\end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2|\Leftrightarrow\left|\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1\ \ L_3$$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ a^2+b^2=1\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve

$$2a^2=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow a^2=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow b^2=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, d'après l'équation $2ab=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow ab=\frac{\sqrt{3}}{4}$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.
Si $a=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_1=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
Et si $a=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ alors $b=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ et $Z_2=-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}-i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$
D'autre part

$$Z^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Admet deux solutions $Z_3=e^{i\frac{\pi}{12}}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $Z_4=-e^{i\frac{\pi}{12}}=-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{cases}$$

Allez à : Exercice 11 :

Correction exercice 12 :

1. $z^2+z+1=0$

$$\Delta=1^2-4=-3=\left(i\sqrt{3}\right)^2$$

$$z_1=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=\bar{j}=j^2$$

$$z_2=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=j$$

Allez à : Exercice 12 :

2. $z^2-(5i+14)z+2(5i+12)=0$

$$\Delta=\left(-(5i+14)\right)^2-4\times 2(5i+12)=(-25+140i+196)-40i-96=75+100i=25(3+4i)$$
$$=5^2(3+4i)$$

On cherche $a,b\in\mathbb{R}$ tels que

$$(a+ib)^2=5-4i\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=4\\a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}=5\end{cases}$$

En faisant L_1+L_3 on trouve que $2a^2=8\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2$

En faisant L_3-L_2 on trouve que $2b^2=2\Leftrightarrow b^2=1\Leftrightarrow b=\pm 1$

D'après L_2 a et b sont de même signe donc $a+ib=2+i$ ou $a+ib=-2-i$

Autre méthode $3+4i=4+4i-1=(2+i)^2$

et alors

$$\Delta=5^2(2+i)^2=(10+5i)^2$$

Les solutions de l'équation sont

$$z_1=\frac{5i+14-(10+5i)}{2}=\frac{4}{2}=2$$

$$z_1=\frac{5i+14+(10+5i)}{2}=\frac{24+10i}{2}=12+5i$$

Allez à : Exercice 12 :

3. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$

$$\Delta=3+4i=(2+i)^2$$

$$z_1=\frac{\sqrt{3}+2+i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{1}{2}i=1-i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-ij$$

$$z_2=\frac{\sqrt{3}-2-i}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{1}{2}i=-1+i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1+ij^2$$

Allez à : Exercice 12 :

4. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$

$$\Delta=(1+2i)^2-4(i-1)=1+4i-4-4i+4=1$$

$$z_1=\frac{1+2i-1}{2}=i$$

$$z_2=\frac{1+2i+1}{2}=1+i$$

Allez à : Exercice 12 :

5. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$

Le discriminant vaut

$$\Delta=\left(-(3+4i)\right)^2-4(-1+5i)=9+24i-16+4-20i=-3-4i=(1-2i)^2$$

Il y a deux solutions

$$z_1=\frac{3+4i-(1-2i)}{2}=2+3i$$
$$z_2=\frac{3+4i+1-2i}{2}=2+i$$

Allez à : Exercice 12 :

6. $4z^2-2z+1=0$

Soit on résout « normalement », soit on ruse, rusons

$$4z^2-2z+1=0\Leftrightarrow Z^2+Z+1=0$$

Avec $Z=-2z$. Les solutions de $Z^2+Z+1=0$ sont connues (et puis on vient de les revoir dans 1°))

$$Z_1=j\quad \text{et}\quad Z_2=j^2$$

Par conséquent

$$z_1=-\frac{1}{2}j\quad \text{et}\quad z_2=-\frac{1}{2}j^2$$

Allez à : Exercice 12 :

7. $z^4+10z^2+169=0$

On pose $Z=z^2$, $Z^2+10Z+169=0$ a pour discriminant

$$\Delta=10^2-4\times 169=10^2-(2\times 13)^2=(10-26)(10+26)=-16\times 36=-4^2\times 6^2=(24i)^2$$

$$Z_1=\frac{-10+24i}{2}=-5+12i$$
$$Z_2=\frac{-10-24i}{2}=-5-12i$$

On cherche $z=a+ib$ tel que

$$z^2=Z_1\Leftrightarrow (a+ib)^2=-5+12i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-5+12i$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{matrix}\left\{\begin{array}{c}a^2-b^2=-5\\ 2ab=12\\ a^2+b^2=\sqrt{(-5)^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13\end{array}\right.$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3, on trouve que $2a^2=8\Leftrightarrow a^2=4\Leftrightarrow a=\pm 2$,
En faisant la différence de L_3 et de L_1, on trouve que $2b^2=18\Leftrightarrow b^2=9\Leftrightarrow b=\pm 3$,
D'après L_2, a et b sont de même signe donc $z^2=Z_1$ a deux solutions

$$z_1=2+3i\quad et\quad z_2=-2-3i$$

On peut résoudre de la même façon $Z_2=z^2$ ou dire que $z^4+10z^2+169=0$ est une équation à coefficients réels et que donc si une racine complexe est solution alors son conjugué est aussi solution, par conséquent $\overline{z_1}=2-3i$ et $\overline{z_2}=-2+3i$ sont aussi solution, ce qui donne 4 solutions pour une équation de degré 4, il n'y en a pas plus, on les a toutes.

Allez à : Exercice 12 :

8. $z^4+2z^2+4=0$

On peut faire comme dans le 7°), mais rusons :

$$z^4+2z^2+4=0\Leftrightarrow \frac{z^4}{4}+\frac{z^2}{2}+1=0\Leftrightarrow \left(\frac{z^2}{2}\right)^2+\left(\frac{z^2}{2}\right)+1=0\Leftrightarrow \left[\left(\frac{z^2}{2}\right)-j\right]\left[\left(\frac{z^2}{2}\right)-j^2\right]=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2-j^4\right]\left[\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2-j^2\right]=0\Leftrightarrow \left(\frac{z}{\sqrt{2}}-j^2\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+j^2\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}}-j\right)\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+j\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(z-\sqrt{2}j^2\right)\left(z+\sqrt{2}j^2\right)\left(z-\sqrt{2}j\right)\left(z+\sqrt{2}j\right)=0$$

Les solutions sont

$$\left\{\sqrt{2}j^2,-\sqrt{2}j^2,\sqrt{2}j,-\sqrt{2}j\right\}$$

Allez à : Exercice 12 :

9. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$

On pose $X = x^2$

$$X^2 - 30X + 289 = 0$$
$$\Delta = 30^2 - 4 \times 289 = 900 - 1156 = -256 = -16^2 = (16i)^2$$
$$X_1 = \frac{30 - 16i}{2} = 15 - 8i$$
$$X_2 = 15 + 8i$$

On cherche x tel que $x^2 = 15 - 8i = 16 - 8i - 1 = (4 - i)^2$

Il y a donc deux solutions $x_1 = 4 - i$ et $x_2 = -(4 - i) = -4 + i$.

De même on cherche x tel que $x^2 = 15 + 8i = 16 + 8i - 1 = (4 + i)^2$

Il y a donc deux solutions $x_3 = 4 + i$ et $x_4 = -(4 + i) = -4 - i$.

Les solutions sont

$$\{4 - i, -4 + i, 4 + i, -4 - i\}$$

Allez à : Exercice 12 :

10. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0$

Il faudrait trouver des solutions (réelles ou complexes).

$x = 1$ est solution évidente, mais ensuite cela ne vient pas, mais en regardant mieux on s'aperçoit que 4 premiers termes ressemblent fort au développement de $(x + 1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$ donc

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^4 - 1 - 15 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^4 = 16$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |(x + 1)^4| = 16 \\ \arg((x + 1)^4) = \arg(16) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x + 1|^4 = 2^4 \\ 4\arg(x + 1) = 0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x + 1| = 2 \\ \arg(x + 1) = \dfrac{2k\pi}{4}, \quad k \in \{0,1,2,3\} \end{cases} \Leftrightarrow x_k + 1 = 2e^{\frac{ik\pi}{2}},$$
$$k \in \{0,1,2,3\} \Leftrightarrow x_k = -1 + 2e^{\frac{ik\pi}{2}}, \qquad k \in \{0,1,2,3\}$$
$$x_0 = -1 + 2 = 1; \quad x_1 = -1 + 2e^{i\frac{\pi}{2}} = -1 + 2i;$$
$$x_2 = -1 + 2e^{i\pi} = -1 - 2 = -3; \quad x_3 = -1 + 2e^{\frac{3i\pi}{2}} = -1 - 2i$$

Sont les solutions.

Allez à : Exercice 12 :

11. $z^3 + 3z - 2i = 0$

On voit que i est une solution évidente (car $i^3 + 3i - 2i = 0$) donc on peut mettre $z - i$ en facteur.

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow z^3 + 3z - 2i = az^3 + (-ia + b)z^2 + (-ib + c)z - ic$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -ia + b = 0 \\ -ib + c = 3 \\ -ic = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = ia = i \\ c = 3 + ib = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$
$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(z^2 + iz + 2)$$

Le discriminant de $z^2 + iz + 2$ est $\Delta = i^2 - 4 \times 2 = -9 = (3i)^2$

Il y a deux solutions

$$z = \frac{-i - 3i}{2} = -2i \quad \text{et} \quad z = \frac{-i + 3i}{2} = i$$

Il y a donc deux solutions, $z_1 = i$ et $z_2 = -2i$.

Allez à : Exercice 12 :

12.

$$\begin{aligned}\Delta = (1 + a)^2(1 + i)^2 - 4(1 + a^2)i &= (1 + 2a + a^2)(1 + 2i - 1) - 4i - 4ia^2 \\ &= 2i + 4ia + 2ia^2 - 4i - 4ia^2 = -2i + 4ia - 2ia^2 = -2i(1 - 2a + a^2) \\ &= (1 - i)^2(1 - a)^2 = \big((1 - i)(1 - a)\big)^2\end{aligned}$$

$$z_1=\frac{(1+a)(1+i)-(1-i)(1-a)}{2}=\frac{1+i+a+ia-(1-a-i+ia)}{2}=a+i$$
$$z_1=\frac{(1+a)(1+i)+(1-i)(1-a)}{2}=\frac{1+i+a+ia+1-a-i+ia}{2}=1+ia$$

Allez à : Exercice 12 :

13. $\Delta=(1-5i)^2-4i(6i-2)=1-25-10i+24+8i=-2i$

Il faut trouver δ tel que $\Delta=\delta^2$

Première méthode :

$-2i=1-2i-1=(1-i)^2$ c'est une identité remarquable. Donc $\delta_1=1-i$ ou $\delta_2=-1+i$

Deuxième méthode

On pose $\delta=a+ib$, $\Delta=\delta^2\Leftrightarrow -2i=(a+ib)^2\Leftrightarrow -2i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=0\\2ab=-2\end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta|=|\delta^2|\Leftrightarrow|-2i|=a^2+b^2\Leftrightarrow 2=a^2+b^2$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=0\\a^2+b^2=2\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2=2\Leftrightarrow a^2=1$, d'où l'on tire $b^2=1$. Les valeurs possibles de a sont ±1 et les valeurs possibles de b sont ±1, d'après l'équation $2ab=-2\Leftrightarrow ab=-1$, on en déduit que $ab<0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a=1$ alors $b=-1$ et $\delta=1-i$ et si $a=-1$ alors $b=1$ et $\delta=-1+i$. Ce sont bien les mêmes solutions qu'avec la première méthode.

Troisième méthode

$\Delta=-2i=2e^{\frac{3i\pi}{2}}$, donc les racines deuxièmes de Δ sont $\delta=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+isin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i$ et $\delta=-\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}=1-i$.

Pour résoudre $iz^2+(1-5i)z+6i-2=0$, on n'a besoin que d'une racine deuxième, on prend, par exemple $\delta=1-i$.

Les deux solutions sont :

$$z_1=\frac{-(1-5i)-(1-i)}{2i}=\frac{-2+6i}{2i}=\frac{-1+3i}{i}=\frac{(-1+3i)(-i)}{i(-i)}=3+i$$
$$z_2=\frac{-(1-5i)+(1-i)}{2i}=\frac{4i}{2i}=2$$

Allez à : Exercice 12 :

14.

$$\Delta=\left(-(3+i)\right)^2-4(1+i)(-6+4i)=(3+i)^2-4(-6+4i-6i-4)$$
$$=9-1+6i-4(-10-2i)=8+6i+40+8i=48+14i$$

On pose $\delta=a+ib$, $\Delta=\delta^2\Leftrightarrow 48+14i=(a+ib)^2\Leftrightarrow 48+14i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=48\\2ab=14\end{cases}$

On rajoute l'équation

$$|\Delta|=|\delta^2|\Leftrightarrow|48+14i|=a^2+b^2\Leftrightarrow 2|24+7i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=2\sqrt{24^2+7^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=2\sqrt{576+49}\Leftrightarrow a^2+b^2=2\sqrt{625}=2\times25=50$$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=48\\a^2+b^2=50\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2=98\Leftrightarrow a^2=49$, d'où l'on tire $b^2=1$. Les valeurs possibles de a sont ±7 et les valeurs possibles de b sont ±1, d'après l'équation $2ab=14\Leftrightarrow ab=7$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a=7$ alors $b=1$ et $\delta=7+i$ et si $a=-7$ alors $b=-1$ et $\delta=-7-i$

Deuxième méthode

$\Delta=48+14i=49+2\times7i-1=(7+i)^2$ donc $\delta=7+i$ ou $\delta=-7-i$.

Troisième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2-b^2=48 \\ 2ab=14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\left(\frac{7}{a}\right)^2=48 \\ b=\frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\frac{49}{a^2}=48 \\ b=\frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4-49=48a^2 \\ b=\frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a^4-48a^2-49=0 \\ b=\frac{7}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2-48A-49=0 \\ b=\frac{7}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2-48A-49=0$ est $\Delta'=48^2+4\times 49=2500=50^2$ donc ses solutions sont $A_1=\frac{48-50}{2}=-1$ et $A_2=\frac{48+50}{2}=49$, $A_1<0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2=-1$, par contre $a^2=49$ admet deux solutions $a=-7$ et $a=7$.

Si $a=-7$ alors $b=\frac{7}{a}=-1$ et si $a=7$ alors $b=\frac{7}{a}=1$, on retrouve les mêmes solutions.

Les solutions de $(1+i)z^2-(3+i)z-6+4i=0$ sont :

$$z_1=\frac{(3+i)-(7+i)}{2(1+i)}=-\frac{4}{2(1+i)}=-\frac{2}{1+i}=-\frac{2(1-i)}{1^2+1^2}=-1+i$$

$$z_2=\frac{(3+i)+(7+i)}{2(1+i)}=\frac{10+2i}{2(1+i)}=\frac{5+i}{1+i}=\frac{(5+i)(1-i)}{1^2+1^2}=\frac{5-5i+i+1}{1^2+1^2}=\frac{6-4i}{2}=3-2i$$

Allez à : Exercice 12 :

15.

$$\Delta=\big(-(9+3i)\big)^2-4(1+2i)(-5i+10)=(3(3+i)^2)-4(-5i+10+10+20i)$$
$$=9(9-1+6i)-4(-25)=9(8+6i)-4(20+15i)=72+54i-80-60i$$
$$=-8-6i$$

On pose $\delta=a+ib$, $\Delta=\delta^2\Leftrightarrow -8-6i=(a+ib)^2\Leftrightarrow -8-6i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow$ $\begin{cases} a^2-b^2=-8 \\ 2ab=-6 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta|=|\delta^2|\Leftrightarrow |-8-6i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{64+36}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{100}=10$

Avec le système $\begin{cases} a^2-b^2=-8 \\ a^2+b^2=10 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2=2\Leftrightarrow a^2=1$, d'où l'on tire $b^2=9$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 3, d'après l'équation $2ab=-6\Leftrightarrow ab=-3$, on en déduit que $ab<0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a=1$ alors $b=-3$ et $\delta=1-3i$ et si $a=-1$ alors $b=3$ et $\delta=-1+3i$

Deuxième méthode

On reprend le système $\begin{cases} a^2-b^2=-8 \\ 2ab=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\left(\frac{-3}{a}\right)^2=-8 \\ b=\frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-\frac{9}{a^2}=-8 \\ b=\frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a^4-9=-8a^2 \\ b=\frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^4+8a^2-9=0 \\ b=\frac{-3}{a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2+8A-9=0 \\ b=\frac{-3}{a} \end{cases}$, le discriminant de $A^2+8A-9=0$ est $\Delta'=8^2+4\times 9=100=10^2$ donc ses solutions sont $A_1=\frac{-8-10}{2}=-9$ et $A_2=\frac{-8+10}{2}=1$, $A_2<0$ donc il n'y a pas de solution de $a^2=-9$, par contre $a^2=1$ admet deux solutions $a=-1$ et $a=1$.

Si $a=-1$ alors $b=\frac{-3}{a}=3$ et si $a=1$ alors $b=\frac{-3}{a}=-1$, on retrouve les mêmes solutions.

Troisième méthode

$\Delta=-8-6i=1-6i-9=(1-3i)^2$ donc $\delta=1-3i$ et $\delta=-1+3i$

Les solutions de $(1+2i)z^2-(9+3i)z-5i+10=0$ sont :

$$z_1=\frac{(9+3i)-(1-3i)}{2(1+2i)}=\frac{8+6i}{2(1+2i)}=\frac{4+3i}{1+2i}=\frac{(4+3i)(1-2i)}{1^2+2^2}=\frac{4-8i+3i+6}{10}=2-i$$

$$z_2=\frac{(9+3i)+(1-3i)}{2(1+2i)}=\frac{10}{2(1+2i)}=\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{1^2+2^2}=1-2i$$

Allez à : Exercice 12 :

16. $\Delta=(-(6i+2)^2)-4(1+3i)(11i-23)=(6i+2)^2-4(11i-23-33-69i)=-36+24i+4-4(-56-58i)=-32+24i+224+232i=192+256i=64(3+4i)$

Si j'ai mis 64 en facteur, c'est que maintenant il suffit de trouver une racine deuxième de $3+4i$, ce qui est beaucoup plus facile que de trouver une racine deuxième de $192+256i$.

On pose $\delta=a+ib$, $\Delta=\delta^2\Leftrightarrow 3+4i=(a+ib)^2\Leftrightarrow 3+4i=a^2-b^2+2iab\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=4\end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta|=|\delta^2|\Leftrightarrow|3+4i|=a^2+b^2\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{3^2+4^2}\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt{25}=5$

Avec le système $\begin{cases}a^2-b^2=3\\a^2+b^2=5\end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2=8\Leftrightarrow a^2=4$, d'où l'on tire $b^2=1$. Les valeurs possibles de a sont ± 2 et les valeurs possibles de b sont ± 1, d'après l'équation $2ab=4\Leftrightarrow ab=2$, on en déduit que $ab>0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a=2$ alors $b=1$ et $\delta=2+i$ et si $a=-2$ alors $b=-1$ et $\delta=-2-i$

Donc $(2+i)^2=3+4i$ entraine que $\Delta=64(3+4i)=8^2(2+i)^2=\left(8(2+i)\right)^2=(16+8i)^2$

Deuxième méthode

$3+4i=4+4i-1=(2+i)^2$ et on retrouve le même résultat.

Troisième méthode

On reprend le système

$$\begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\left(\frac{2}{a}\right)^2=3\\b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-\frac{4}{a^2}=3\\b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4-4=3a^2\\b=\frac{2}{a}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^4-3a^2-4=0\\b=\frac{2}{a}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A^2-3A-4=0\\b=\frac{2}{a}\end{cases}$$

Les solutions de $A^2-3A-4=0$ sont $A_1=-1<0$ et $A_2=4$, donc $a^2=4$,

Si $a=-2$ alors $b=\frac{2}{a}=-1$ et alors $\delta=-2-i$, si $a=2$ alors $b=\frac{2}{a}=1$ et alors $\delta=2+i$.

Les solutions de $(1+3i)z^2-(6i+2)z+11i-23=0$ sont

$$z_1=\frac{6i+2-(16+8i)}{2(1+3i)}=\frac{-14-2i}{2(1+3i)}=\frac{-7-i}{1+3i}=\frac{(-7-i)(1-3i)}{1^2+3^2}=\frac{-7+21i-i-3}{10}=-1+2i$$

$$z_2=\frac{6i+2+(16+8i)}{2(1+3i)}=\frac{18+14i}{2(1+3i)}=\frac{9+7i}{1+3i}=\frac{(9+7i)(1-3i)}{1^2+3^2}=\frac{9-27i+7i+21}{10}=3-2i$$

Allez à : Exercice 12 :

Correction exercice 13 :

On pose $X=Z^2$,

$$Z^4+(3-6i)Z^2-8-6i=0\Leftrightarrow X^2+(3-6i)X-8-6i=0$$

Le discriminant est

$$\Delta=(3-6i)^2-4(-8-6i)=9-36i-36+32+24i=5-12i$$

Les racines carrés de $5-12i$:

$$(a+ib)^2=5-12i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=5-12i\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=5\\2ab=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=5\\ab=6\end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2+b^2=\sqrt{5^2+12^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13\quad L_3$$

En additionnant L_1 et L_3, on trouve $2a^2=18$ donc $a^2=9$, c'est-à-dire $a=\pm 3$.

En soustrayant L_1 à L_3, on trouve $2b^2=8$ donc $b^2=4$, c'est-à-dire $b=\pm 2$.

D'après L_2, a et b ont le même signe donc les deux racines carrés de $5-12i$ sont : $3+2i$ et $-3-2i$.

Les solutions de $X^2+(3-6i)X-8-6i=0$ sont :

$$X_1=\frac{-(3-6i)-(3+2i)}{2}=-3+4i$$

Et

$$X_2=\frac{-(3-6i)+(3+2i)}{2}=2i$$

Or $X_1=-3+4i=4+4i-1=(2+i)^2$ donc $Z^2=-3+4i$ a deux solutions :

$$Z_1=2+i$$

Et

$$Z_2=-2-i$$

De plus $X_2=2i=(1+i)^2$ donc $Z^2=2i$ a deux solutions :

$$Z_3=1+i$$

Et

$$Z_4=-1-i$$

Allez à : Exercice 13 :

Correction exercice 14 :

1. On pose $X=a\in\mathbb{R}$

$$(1-i)a^3-(5+i)a^2+(4+6i)a-4i=0\Leftrightarrow a^3-5a^2+4a+i(-a^3-a^2+6a-4)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^3-5a^2+4a=0\\-a^3-a^2+6a-4=0\end{cases}$$

$$a^3-5a^2+4a=0\Leftrightarrow a(a^2-5a^2+4)=0$$

Donc cette équation admet 0, 1 et 4 comme racine. Seul 1 est solution de $-a^3-a^2+6a-4=0$ donc il existe une unique solution réelle $a=1$.

2. On factorise $(1-i)X^3-(5+i)X^2+(4+6i)X-4i$ par $X-1$. Il existe alors α, β et γ telle que :

$$(1-i)X^3-(5+i)X^2+(4+6i)X-4i=(X-1)(\alpha X^2+\beta X+\gamma)$$

Or $(X-1)(\alpha X^2+\beta X+\gamma)=\alpha X^3+(\beta-\alpha)X^2+(\gamma-\beta)X-\gamma$

On en déduit que : $\begin{cases}\alpha=1-i\\\beta-\alpha=-(5+i)\\\gamma-\beta=4+6i\\-\gamma=-4i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1-i\\\beta=-(5+i)+1-i=-4-2i\\\gamma=4+6i-4-2i=4i\\\gamma=4i\end{cases}$

D'où

$$(1-i)X^3-(5+i)X^2+(4+6i)X-4i=0\Leftrightarrow(X-1)\big((1-i)X^2-(4+2i)X+4i\big)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}X=1\\(1-i)X^2-(4+2i)X+4i=0\end{cases}$$

Le discriminant de l'équation du second degré est :

$$\Delta=(4+2i)^2-4(1-i)\times 4i=16+16i-4-16i-16=-4=(2i)^2$$

Les deux racines sont alors

$$X_1=\frac{4+2i-2i}{2(1-i)}=\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{1^2+1^2}=1+i$$

$$X_2=\frac{4+2i+2i}{2(1-i)}=\frac{2+2i}{1-i}=\frac{2(1+i)^2}{1^2+1^2}=2i$$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{1,1+i,2i\}$.

Allez à : Exercice 14 :

Correction exercice 15 :

1. Soit $a\in\mathbb{R}$ tel que :

$$a^3+(1-2i)a^2-3(1+i)a-2+2i=0\Leftrightarrow a^3+a^2-3a-2+i(-2a^2-3a+2)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+a^2-3a-2=0\\-2a^2-3a+2=0\end{cases}$$

Les solutions de l'équation $-2a^2 - 3a + 2 = 0$ sont $a_1 = -2$ et $a_2 = \frac{1}{2}$

$$(-2)^3 + (-2)^2 - 3(-2) - 2 = -8 + 4 + 6 - 2 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 = \frac{1 + 2 - 12 - 16}{8} = -\frac{25}{8} \neq 0$$

Donc seul -2 est solution de (E)

2. On peut diviser $X^3 + (1 - 2i)X^2 - 3(1 + i)X - 2 + 2i$ par $X + 2$

$$\begin{array}{r|l}
X^3 + (1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i & X + 2 \\
\hline
X^3 + 2X^2 & X^2 + (-1-2i)X - 1 + i \\
\hline
(-1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i & \\
(-1-2i)X^2 + 2(-1-2i)X & \\
\hline
(-1+i)X - 2 + 2i & \\
(-1+i)X - 2 + 2i & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
X^3 + (1 - 2i)X^2 - 3(1 + i)X - 2 + 2i &= (X + 2)(X^2 + (-1 - 2i)X - 1 + i) \\
&= (X + 2)(X^2 - (1 + 2i)X - 1 + i)
\end{aligned}$$

Les solutions de (E) sont donc

$$X^2 - (1 + 2i)X + i - 1 = 0$$

$$\Delta = (1 + 2i)^2 - 4(i - 1) = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1$$

$$X_1 = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i$$

$$X_2 = \frac{1 + 2i + 1}{2} = 1 + i$$

Allez à : Exercice 15 :

Correction exercice 16 :

$$\Delta = (-i)^2 + 4(1 + i) = 4 + 4i - 1 = (2 + i)^2$$

Les solutions de $Z^2 - iZ - 1 - i = 0$ sont

$$Z_1 = \frac{i + 2 + i}{2} = 1 + i$$

$$Z_2 = \frac{i - (2 + i)}{2} = -1$$

Les solutions de $z^6 - iz^3 - 1 - i = 0$ vérifient

$$z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |z^3| = \sqrt{2} \\ \arg(z^3) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |z|^3 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 3\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |z| = 2^{\frac{1}{6}} \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{array}\right. \Leftrightarrow z \in \left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}} ;\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}} ;\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}\right\}$$

Ou

$$z^3 = -1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |z^3| = 1 \\ \arg(z^3) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |z|^3 = 1 \\ 3\arg(z) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{array}\right.$$

Il y a donc trois solutions

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{3}};\quad z_1 = e^{\frac{3i\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1;\ z_2 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$$

Finalement il y a six solutions

$$\left\{2^{\frac{1}{6}}e^{i\frac{\pi}{12}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{3i\pi}{4}};\ 2^{\frac{1}{6}}e^{\frac{17i\pi}{12}}; e^{\frac{i\pi}{3}}; -1; e^{-\frac{i\pi}{3}}\right\}$$

Allez à : Exercice 16 :

Correction exercice 17 :

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ une solution de (E)

$$a^4 - 3a^3 + (2-i)a^2 - 3 + i = 0 \Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 + i(-a^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0 \\ -a^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

$a_1 = -1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 - 3 = 0$ et $a_2 = 1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0$, donc (E) admet deux solutions réelles, on peut mettre $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ en facteur.

2. Il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$X^4 - 3X^3 + (2-i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(aX^2 + bX + c)$$

On développe

$$(X^2 - 1)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + bX^3 + (c-a)X^2 - bX - c$$

Par conséquent

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c - a = 2 - i \\ -b = 3 \\ -c = -3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 - i \end{cases}$$

$$X^4 - 3X^3 + (2-i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2 - 1)(X^2 - 3X + 3 - i) = 0$$

Il reste à trouver les solutions de $X^2 - 3X + 3 - i = 0$

$$\Delta = 9 - 4(3-i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1+2i)^2$$

Les racines carrées du discriminant sont $\delta = \pm(1-2i)$

Il y a deux solutions

$$X_1 = \frac{3 - (1+2i)}{2} = 1 - i$$

$$X_2 = \frac{3 + 1 + 2i}{2} = 2 + i$$

L'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{-1, 1, 1-i, 2+i\}$$

Allez à : Exercice 17 :

Correction exercice 18 :

1. $X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}}$

Donc

$$X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^{\frac{3}{2}} \\ \arg(X^3) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\arg(X) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(X) = \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3},\ \ k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k$$

$$= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)},\qquad k \in k \in \{0,1,2\}$$

$$X_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$$

$$X_1=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}$$

$$X_2=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

2.

$$X^3=-8i=2^3e^{\frac{3i\pi}{2}}\Leftrightarrow\begin{cases}|X^3|=2^3\\ \arg(X^3)=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|X|^3=2^3\\ 3\arg(X)=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|X|=2\\ \arg(X)=\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}\Leftrightarrow X_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\qquad k\in k\in\{0,1,2\}$$

$$X_0=2e^{\frac{i\pi}{2}}=2i$$

$$X_1=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}=2e^{\frac{7i\pi}{6}}=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i$$

$$X_2=2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)}=2e^{\frac{11i\pi}{6}}=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\sqrt{3}-i$$

3. On pose $X=Z^3$

$$\frac{1}{2}Z^6+(1+3i)Z^3+8+8i=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}X^2+(1+3i)X+8+8i=0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta=(1+3i)^2-4\times\frac{1}{2}(8+8i)=1+6i-9-16-16i=-24-10i$$

Les racines carrés de $-24-10i$:

$$(a+ib)^2=-24-10i\Leftrightarrow a^2-b^2+2iab=-24-10i\Leftrightarrow\begin{cases}a^2-b^2=-24\\ 2ab=-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\ L_2\end{matrix}\begin{cases}a^2-b^2=-24\\ ab=-5\end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2+b^2=\sqrt{24^2+10^2}=\sqrt{576+100}=\sqrt{676}=26\quad L_3$$

En additionnant L_1 et L_3, on trouve $2a^2=2$ donc $a^2=1$, c'est-à-dire $a=\pm 1$.
En soustrayant L_1 à L_3, on trouve $2b^2=50$ donc $b^2=25$, c'est-à-dire $b=\pm 5$.
D'après L_2, a et b sont de signes différents donc les deux racines carrés de $-24-10i$ sont : $1-5i$ et $-1+5i$.
L'équation du second degré a pour racine :

$$X_1=\frac{-(1+3i)-(1-5i)}{2\times\frac{1}{2}}=-2-2i$$

Et

$$X_2=\frac{-(1+3i)+(1-5i)}{2\times\frac{1}{2}}=-2i$$

Les six racines de

$$\frac{1}{2}Z^6+(1+3i)Z^3+8+8i=0$$

Sont les six complexes trouvés en 1°) et 2°).

Allez à : Exercice 18 :

Correction exercice 19 :

1. Posons $z=a\in\mathbb{R}$, $(E)\Leftrightarrow a^3+1-i(a+1)=0\Leftrightarrow\begin{cases}a^3+1=0\\ a+1=0\end{cases}\Leftrightarrow a=-1$

2. On peut diviser $z^3 - iz + 1 - i = 0$ par $z + 1$

$$\begin{array}{c|l} z^3 - iz + 1 - i & z+1 \\ \cline{2-2} z^3 + z^2 & z^2 - z + 1 - i \\ \hline -z^2 - iz + 1 - i & \\ -z^2 - z & \\ \hline (1-i)z + 1 - i & \\ (1-i)z + 1 - i & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$z^2 - z + 1 - i$ a pour discriminant $\Delta = 1 - 4(1-i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1+2i)^2$

Les racines de ce polynôme sont :

$z_1 = \frac{1-(1+2i)}{2} = -i$ et $z_2 = \frac{1+(1+2i)}{2} = 1 + i$

Les solutions de (E) sont -1, $1+i$ et $-i$.

Allez à : Exercice 19 :

Correction exercice 20 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ une racine de (E)

$$x^4 - (3+\sqrt{3})x^3 + (2 + 3\sqrt{3} - i)x^2 + (-2\sqrt{3} + 3i)x - 2i = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - (3+\sqrt{3})x^3 + (2+3\sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x + i(-x^2 + 3x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - (3+\sqrt{3})x^3 + (2+3\sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x = 0 \quad (*) \\ -x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

Les racines de $-x^2 + 3x - 2 = 0$ sont après un petit calcul $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$

$$1^4 - (3+\sqrt{3})1^3 + (2+3\sqrt{3})1^2 - 2\sqrt{3} \times 1 = 1 - 3 - \sqrt{3} + 2 + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

Donc 1 est racine de $(*)$

$$2^4 - (3+\sqrt{3})2^3 + (2+3\sqrt{3})2^2 - 2\sqrt{3} \times 2 = 16 - 3 \times 8 - 8\sqrt{3} + 8 + 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = 0$$

Donc 2 est racine de $(*)$

2. On peut diviser le polynôme par $(X-1)(X-2) = X^2 - 3X + 2$

$$\begin{array}{llll|l} X^4 & -(3+\sqrt{3})X^3 & +(2+3\sqrt{3}-i)X^2 & +(-2\sqrt{3}+3i)X - 2i & X^2 - 3X + 2 \\ \cline{5-5} X^4 & -3X^3 & +2X^2 & & X^2 - \sqrt{3}X - i \\ \hline & -\sqrt{3}X^3 & +(3\sqrt{3}-i)X^2 & +(-2\sqrt{3}+3i)X - 2i & \\ & -\sqrt{3}X^3 & +3\sqrt{3}X^2 & -2\sqrt{3}X & \\ \hline & & -iX^2 & +3iX - 2i & \\ & & -iX^2 & +3iX - 2i & \\ \hline & & & 0 & \end{array}$$

Il reste à déterminer les racines de $X^2 - \sqrt{3}X - i = 0$

$$\Delta = 3 + 4i = (2+i)^2$$

$$z_1 = \frac{\sqrt{3} + 2 + i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}i = 1 - i\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{i}{2}$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{3} - 2 - i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}i = -1 + i\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{i}{2}$$

$$S = \left\{1, 2, \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{i}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{i}{2}\right\}$$

Allez à : Exercice 20 :

Correction exercice 21 :

1.

$$z^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})+2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$=2\sqrt{3}+2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2\sqrt{3}+2i\sqrt{2^2-3}=2\sqrt{3}+2i$$
$$|z^2|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{4\times 3+4}=\sqrt{16}=4$$

Si on pose $\theta=\arg(z^2)$, $\cos(\theta)=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ donc $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

Autre méthode :

$z^2=2\sqrt{3}+2i=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$.

2.

On déduit de la première question que $|z^2|=4$ donc $|z|^2=4$ et que $|z|=2$. Et que les arguments possible de z sont $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)=\frac{\pi}{12}+k\pi,\ \ k\in\{0,1\}$, donc $z=2e^{\frac{i\pi}{12}}$ ou $z=-2e^{\frac{i\pi}{12}}$. Mais $z=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ entraine que le cosinus et le sinus de ses arguments sont positifs, donc $z=2e^{\frac{i\pi}{12}}$.

3. D'après la question précédente

$$2e^{\frac{i\pi}{12}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}\Leftrightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)=\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\end{cases}$$

Allez à : Exercice 21 :

Correction exercice 22 :

1.

$$u^4=-4\Leftrightarrow\begin{cases}|u^4|=|-4|\\ \arg(u^4)=\arg(-4)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|u|^4=4\\ 4\arg(u)=\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|u|=4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\\ \arg(u)=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ \ k\in\{0,1,2,3\}\end{cases}$$

Il y a quatre solutions

$$u_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=1+i$$
$$u_1=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=-1+i$$
$$u_2=\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=-1-i=\overline{u_1}$$
$$u_3=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}}=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{i\sqrt{2}}{2}\right)=1-i=\overline{u_0}$$

2.

$$(z+1)^4+4(z-1)^4=0\Leftrightarrow(z+1)^4=-4(z-1)^4\Leftrightarrow\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4=-4$$

On pose $u=\frac{z+1}{z-1}$, il y a donc 4 solutions que l'on trouve en exprimant z en fonction de u.

$$u=\frac{z+1}{z-1}\Leftrightarrow u(z-1)=z+1\Leftrightarrow zu-u=z+1\Leftrightarrow zu-z=u+1\Leftrightarrow z(u-1)=u+1\Leftrightarrow z=\frac{u+1}{u-1}$$

$$z_0=\frac{u_0+1}{u_0-1}=\frac{1+i+1}{1+i-1}=\frac{2+i}{i}=1-2i$$

$$z_1=\frac{u_1+1}{u_1-1}=\frac{-1+i+1}{-1+i-1}=\frac{i}{-2+i}=\frac{i(-2-i)}{(-2)^2+1^2}=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

$$z_2=\frac{u_2+1}{u_2-1}=\frac{\overline{u_1}+1}{\overline{u_1}-1}=\overline{z_1}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$$

$$z_3=\frac{u_3+1}{u_3-1}=\frac{\overline{u_0}+1}{\overline{u_0}-1}=\overline{z_0}=1+2i$$

Allez à : Exercice 22 :

Correction exercice 23 :

1.

$$X^3=-2\sqrt{2}\Leftrightarrow\begin{cases}|X^3|=2\sqrt{2}\\ \arg(X^3)=\arg(-2\sqrt{2})+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|X|^3=\left(\sqrt{2}\right)^2\\ 3\arg(X)=\pi+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|X|=\sqrt{2}\\ \arg(X)=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Les trois solutions sont

$$X_k=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}},\ \ k\in\{0,1,2\}$$

Soit

$$X_0=\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{3}}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$X_1=\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{3}}=-\sqrt{2}$$

$$X_2=\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{3}}=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

2.

$$(z+i)^3+2\sqrt{2}(z-i)^3=0\Leftrightarrow(z+i)^3=-2\sqrt{2}(z-i)^3\Leftrightarrow\frac{(z+i)^3}{(z-i)^3}=-2\sqrt{2}\Leftrightarrow\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3=-2\sqrt{2}$$

On pose

$$X=\frac{z+i}{z-i}$$

Il faut trouver z en fonction de X

$$X=\frac{z+i}{z-i}\Leftrightarrow X(z-i)=z+i\Leftrightarrow Xz-iX=z+i\Leftrightarrow Xz-z=iX+i\Leftrightarrow z(X-1)=i(X+1)\Leftrightarrow z=i\frac{X+1}{X-1}$$

Il y a donc trois solutions

$$z_0=i\frac{X_0+1}{X_0-1}=i\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}+1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2}-1}=i\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1+i\frac{\sqrt{6}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}-1+i\frac{\sqrt{6}}{2}}=i\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1+i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1-i\frac{\sqrt{6}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$$

$$=i\frac{\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(1+\frac{i\sqrt{6}}{2}\right)^2\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=i\frac{\left(\frac{1}{2}-\left(1-\frac{6}{4}+i\sqrt{6}\right)\right)}{\frac{1}{2}-\sqrt{2}+1+\frac{6}{4}}=i\frac{1-i\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}+i\frac{1}{3-\sqrt{2}}$$

$$z_1=i\frac{X_1+1}{X_1-1}=i\frac{-\sqrt{2}+1}{-\sqrt{2}-1}=i\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=i\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=i\left(\sqrt{2}-1\right)^2=i\left(2-2\sqrt{2}+1\right)$$

$$=i\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

$$z_2=i\frac{X_2+1}{X_2-1}=i\frac{\overline{X_0}+1}{\overline{X_0}-1}=i\,\overline{\left(\frac{X_0+1}{X_0-1}\right)}=-\overline{\left(i\left(\frac{X_0+1}{X_0-1}\right)\right)}=-\overline{z_0}=-\frac{\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}-i\frac{1}{3-\sqrt{2}}$$

Allez à : Exercice 23 :

Correction exercice 24 :

1. Les racines quatrième de l'unité sont $\{1,i,-1,-i\}$.
2. $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

$$X^4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow X^4=e^{\frac{4i\pi}{3}}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|X^4|=\left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right|\\ \arg(X^4)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|X|^4=1\\ 4\arg(X)=\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|X|=1\\ \arg(X)=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\{0,1,2,3\}\end{array}\right.\Leftrightarrow X_k=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}\right)},k\in\{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$X_0=e^{i\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_1=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)}=e^{\frac{5i\pi}{6}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$$

$$X_2=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)}=e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_3=e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)}=e^{\frac{11i\pi}{6}}=e^{-\frac{i\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=j^2$. Donc $X^4=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=j^2\Leftrightarrow X^4-j^2=0$. Or

$$X^4-j^2=(X^2-j)(X^2+j)=(X^2-j^4)(X^2-i^2j^4)=(X-j^2)(X+j^2)(X-ij^2)(X+ij^2)$$

D'où les solutions :

$X=j^2=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $X=\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $X=i\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}$ et $X=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$

3. On pose $Y=X^4$, l'équation est alors du second degré.

$$Y^2+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

Le discriminant est

$$\Delta=\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}+2+2i\sqrt{3}=\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}=3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Donc les solutions de $\delta^2=\Delta$ sont

$$\delta=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{ et }\ \delta=-\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=-(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Y_1=\frac{-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Y_2=\frac{-\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1,\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},i,-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},-i,\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Y^2+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0\Leftrightarrow Y^2+jY+j^2=0\Leftrightarrow\left(\frac{Y}{j}\right)^2+\frac{Y}{j}+1=0$$

Les solutions de $T^2+T+1=0$ sont $T_1=j$ et $T_2=j^2$

Donc $\frac{Y_1}{j}=j\Leftrightarrow Y_1=j^2$ et $\frac{Y_2}{j}=j^2\Leftrightarrow Y_2=j^3=1$

Et on termine de la même façon.

Allez à : Exercice 24 :

Correction exercice 25 :

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2=\left(\frac{1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})}{1+i}\right)^2=\frac{\left(1-\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})\right)^2}{(1+i)^2}$$
$$=\frac{(1-\sqrt{3})^2-(1+\sqrt{3})^2+2i(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{1-1+2i}$$
$$=\frac{1-2\sqrt{3}+3-(1+2\sqrt{3}+3)+2i(1-3)}{2i}=\frac{-4\sqrt{3}-4i}{2i}=-\frac{4(\sqrt{3}+i)}{2i}$$
$$=2i(\sqrt{3}+i)=-2+2i\sqrt{3}$$

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2=-2+2i\sqrt{3}=4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Autre méthode

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2=\left(1-\sqrt{3}\frac{1-i}{1+i}\right)^2=\left(1-\sqrt{3}\frac{(1-i)^2}{1^2+1^2}\right)^2=\left(1-\sqrt{3}\frac{1-2i-1}{2}\right)^2$$
$$=(1+i\sqrt{3})^2=\left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2=(-2j^2)^2=4j^4=4j=4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=-2+2i\sqrt{3}$$

Allez à : Exercice 25 :

Correction exercice 26 :

1.

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{1^2+(-1)^2}=\frac{1+2i-1}{2}=\frac{2i}{2}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Donc le module de $\frac{1+i}{1-i}$ est 1 et un argument est $\frac{\pi}{2}$.

$$2010=4\times 502+2$$

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2010}=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{4\times 502+2}=\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{4\times 502+2}=\left(\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^4\right)^{502}\times\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2=\left(e^{2i\pi}\right)^{502}\times e^{i\pi}$$
$$=1^{502}\times(-1)=-1$$

2.

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2010}=\left(2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^{2010}=\left(2(-j^2)\right)^{2010}=2^{2010}\times j^{4020}=2^{2010}j^{3\times 1340}$$
$$=2^{2010}(j^3)^{1340}=2^{2010}\times 1^{1340}=2^{2010}$$

3.

$$z_1=\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{2}\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

$$z_1^n=\left(2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^n=2^{\frac{n}{2}}e^{i\frac{n\pi}{12}}$$

$$z_2=1+j=-j^2$$
$$z_2^n=(-j^2)^n=(-1)^n j^{2n}$$

Si $n\equiv 0\ \ [6], n=6k,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k}=j^{12k}=(-1)^0(j^3)^{4k}=1^{4k}=1$

Si $n\equiv 1\ \ [6], n=6k+1,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k+1}=(-1)j^{12k+2}=(-1)(j^3)^{4k}j^2=-1^{4k}j^2=-j^2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $n\equiv 2\ \ [6], n=6k+2,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k+2}=(-1)^2j^{12k+4}=(-1)^2(j^3)^{4k}j^2=1^{4k}j^4=j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $n\equiv 3\ \ [6], n=6k+3,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k+3}=(-1)^3j^{12k+6}=(-1)^3(j^3)^{4k}j^6=-1^{4k}j^6=-1$

Si $n\equiv 4\ \ [6], n=6k+4,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k+4}=(-1)^4j^{12k+8}=(j^3)^{4k}j^8=1^{4k}j^2=j^2=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $n\equiv 5\ \ [6], n=6k+5,\ \ k\in\mathbb{Z}, z_2^{6k+5}=(-1)^5j^{12k+10}=-(j^3)^{4k}j^{10}=-1^{4k}j=-j=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$z_3=\frac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)}=\frac{1+i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}=\frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}$$
$$z_3^n=e^{2in\theta}$$

$$z_4=1+\cos(\phi)+i\sin(\phi)=2\cos^2(\phi)+2i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)$$
$$=\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i\frac{\phi}{2}}$$

$$z_4^n=\left(\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)\right)^n e^{\frac{ni\phi}{2}}$$

Remarque :

$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ n'est pas forcément le module de z_4 car $\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)$ n'est positif que pour certaine valeur de ϕ.

Allez à : Exercice 26 :

Correction exercice 27 :

$$(\sqrt{3}+i)^n=\left(2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\right)^n=2^n\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^n=2^n e^{\frac{ni\pi}{6}}$$

$$(\sqrt{3}+i)^n\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(\sqrt{3}+i)^n-\overline{(\sqrt{3}+i)^n}=0\Leftrightarrow e^{\frac{ni\pi}{6}}-e^{-\frac{ni\pi}{6}}=0\Leftrightarrow\sin\left(\frac{n\pi}{6}\right)=0\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\frac{n\pi}{6}$$
$$=k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\frac{n}{6}=k\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},n=6k$$

$$(\sqrt{3}+i)^n\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow(\sqrt{3}+i)^n+\overline{(\sqrt{3}+i)^n}=0\Leftrightarrow e^{\frac{ni\pi}{6}}+e^{-\frac{ni\pi}{6}}=0\Leftrightarrow\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\frac{n\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},\frac{n}{6}=\frac{1}{2}+k\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},n=3+6k$$

Allez à : Exercice 27 :

Correction exercice 28 :

$$z=\rho e^{i\theta}$$
$$z^k+\overline{z}^k=\rho^k e^{ki\theta}+\rho^k e^{-ki\theta}=\rho^k\left(e^{ki\theta}+e^{-ki\theta}\right)=2\rho^k\cos(k\theta)$$
$$(z+\overline{z})\left(z^2+\overline{z}^2\right)\dots\left(z^n+\overline{z}^n\right)=2\rho\cos(\theta)\,2\rho^2\cos(2\theta)\dots2\rho^n\cos(n\theta)$$
$$=2^n\rho^{1+2+\dots+n}\cos(\theta)\cos(2\theta)\dots\cos(n\theta)=2^n\rho^{\frac{n(n+1)}{2}}\cos(\theta)\cos(2\theta)\dots\cos(n\theta)$$

Allez à : Exercice 28 :

Correction exercice 29 :

1.

$$|1+iz|=|1-iz|\Leftrightarrow|1+iz|^2=|1-iz|^2\Leftrightarrow(1+iz)\left(\overline{1+iz}\right)=(1-iz)\left(\overline{1-iz}\right)$$
$$\Leftrightarrow(1+iz)(1-i\overline{z})=(1-iz)(1+i\overline{z})\Leftrightarrow1-i\overline{z}+iz+z\overline{z}=1+i\overline{z}-iz+z\overline{z}$$
$$\Leftrightarrow-i\overline{z}+iz=i\overline{z}-iz\Leftrightarrow z=\overline{z}\Leftrightarrow z\in\mathbb{R}$$

2.

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia}\Rightarrow\left|\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n\right|=\left|\frac{1+ia}{1-ia}\right|\Rightarrow\left|\frac{1+iz}{1-iz}\right|^n=1\Rightarrow|1+iz|=|1-iz|\Rightarrow z\in\mathbb{R}$$

On pose $z=\tan(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ (ce qui est toujours possible puisque pour $z\in\mathbb{R}$ il existe un unique $\theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $z=\tan(\theta)$) ainsi

$$\frac{1+iz}{1-iz}=\frac{1+i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{1-i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}=\frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}=\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}}=e^{2i\theta}$$

Et $a=\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ ainsi

$$\frac{1+ia}{1-ia}=e^{2i\alpha}$$

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n=\frac{1+ia}{1-ia}\Leftrightarrow e^{2in\theta}=e^{2i\alpha}\Leftrightarrow2n\theta=2\alpha+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\theta=\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n},k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

Donc les solutions sont

$$z_k=\tan\left(\frac{\alpha}{n}+\frac{k\pi}{n}\right),k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

Avec $a=\tan(\alpha)$

3.

$$\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\frac{\sqrt{3}+i}{2}}{\frac{\sqrt{3}-i}{2}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{e^{-i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$$

On peut aussi exprimer ce quotient sous forme algébrique et constater qu'il vaut $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

On cherche les complexes tels que

$$z^3=e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^3|=\left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right|\\ \arg(z^3)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=1\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},\ \ k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Il y a trois racines cubique de $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$, $z_k=e^{i\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}}, k\in\{0,1,2\}$

$$z_0=e^{i\frac{\pi}{9}};z_1=e^{i\frac{7\pi}{9}};z_2=e^{i\frac{13\pi}{9}}$$

Allez à : Exercice 29 :

Correction exercice 30 :

On pose $Z=\frac{2z+1}{z-1}$, les solutions de $Z^4=1$ sont $1, i, -1$ et $-i$ (ce sont les racines quatrième de l'unité)

$$Z=\frac{2z+1}{z-1}\Leftrightarrow(z-1)Z=2z+1\Leftrightarrow zZ-Z=2z+1\Leftrightarrow zZ-2z=Z+1\Leftrightarrow z(Z-2)=Z+1$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{Z+1}{Z-2}$$

Il y a 4 solutions

$$z_0=\frac{1+1}{1-2}=-2$$

$$z_1=\frac{i+1}{i-2}=\frac{(i+1)(-i-2)}{1^2+(-2)^2}=\frac{1-2i-i-2}{5}=-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$$

$$z_2=\frac{-1+1}{-1-2}=0$$

$$z_3=\frac{-i+1}{-i-2}=\frac{(-i+1)(i-2)}{(-2)^2+(-1)^2}=\frac{1+2i+i-2}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$$

Allez à : Exercice 30 :

Correction exercice 31 :

Il faut d'abord écrire $\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}$ sous forme trigonométrique

$$\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\,\sqrt{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{2}\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Première méthode

$$z^4=\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4\Leftrightarrow z^4=\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^4=4e^{i\frac{\pi}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^4|=\left|4e^{i\frac{\pi}{3}}\right|\\ \arg(z^4)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^4=4\\ 4\arg(z)=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=\sqrt{2}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in\{0,1,2,3\}\end{cases}$$

Il y a quatre solutions

$$z_0=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}};z_1=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}};z_2=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\pi\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{13i\pi}{12}};z_3=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{12}+\frac{3\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

Deuxième méthode

On pose $a=\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{(1-i)(1+i\sqrt{3})}{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1+i\sqrt{3}-i+\sqrt{3}}{4}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

$$z^4=\left(\frac{1-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^4\Leftrightarrow z^4=a^4\Leftrightarrow\left(\frac{z}{a}\right)^4=1\Leftrightarrow\frac{z}{a}\in\{1,i,-1,-i\}\Leftrightarrow z\in\{a,ia,-a,-ia\}$$

$$ia=i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}+i\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$-a=-\frac{1+\sqrt{3}}{4}-i\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

$$-ia=\frac{\sqrt{3}-1}{4}-i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

Remarque :

En réunissant ces deux méthodes on pourrait en déduire les valeurs de $e^{i\left(\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right)}, k\in\{0,1,2,3\}$.

Allez à : Exercice 31 :

Correction exercice 32 :

1.

$$u^2=4\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4e^{\frac{2i\pi}{3}}\Leftrightarrow u=\pm 2e^{\frac{i\pi}{3}}=\pm 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pm\left(1+i\sqrt{3}\right)$$

2. On pose $u=\frac{z+i}{z-i}$

$$u=\frac{z+i}{z-i}\Leftrightarrow u(z-i)=z+i\Leftrightarrow uz-iu=z+i\Leftrightarrow uz-z=iu+i\Leftrightarrow z(u-1)=i(u+1)\Leftrightarrow z=i\frac{u+1}{u-1}$$

Il y a deux solutions

$$z_1=i\frac{1+i\sqrt{3}+1}{1+i\sqrt{3}-1}=i\frac{2+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}+i$$

$$z_2=i\frac{-1-i\sqrt{3}+1}{-1-i\sqrt{3}-1}=i\frac{-i\sqrt{3}}{-2-i\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{2+i\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}\left(2-i\sqrt{3}\right)}{2^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{3}}{7}+\frac{3}{7}i$$

Allez à : Correction exercice 32 :

Correction exercice 33 :

On pose $u=\frac{z-1}{z-i}$ et on cherche les solutions de $u^3=-8$

$$u^3=-8\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|u^3|=|-8|\\ \arg(u^3)=\arg(-8)+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|u|^3=8\\ 3\arg(u)=\pi+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|u|=2\\ \arg(u)=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\quad k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.$$

Il y a 3 solutions

$$u_0=2e^{i\frac{\pi}{3}}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1+i\sqrt{3};\quad u_1=2e^{i\pi}=-2\quad\text{et}\quad u_2=2e^{i\frac{5\pi}{3}}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}$$

$$u=\frac{z-1}{z-i}\Leftrightarrow u(z-i)=z-1\Leftrightarrow uz-iu=z-1\Leftrightarrow uz-z=-1+iu\Leftrightarrow z(u-1)=-1+iu\Leftrightarrow z=\frac{-1+iu}{u-1}$$

$$z_0=\frac{-1+iu_0}{u_0-1}=\frac{-1+i\left(1+i\sqrt{3}\right)}{1+i\sqrt{3}-1}=\frac{-1-\sqrt{3}+i}{i\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+i\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$z_1=\frac{-1+iu_1}{u_1-1}=\frac{-1-2i}{-3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}i$$

$$z_2=\frac{1+iu_2}{u_2-1}=\frac{-1+i\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1-i\sqrt{3}-1}=\frac{-1+\sqrt{3}+i}{-i\sqrt{3}}=-\frac{1}{\sqrt{3}}+i\frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Allez à : Exercice 33 :

Correction exercice 34 :

1. $X_k=e^{\frac{2ik\pi}{3}}$, avec $k\in\{0,1,2\}$.
$$X_0=1, X_1=e^{\frac{2i\pi}{3}}=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}=j, X_2=e^{\frac{4i\pi}{3}}=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}=\bar{j}$$
2. $\bar{j}=X_2=e^{\frac{4i\pi}{3}}=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2=j^2$
3. $j^3=1$, puisque j est solution de $X^3=1$, donc $j\times j^2=1\Rightarrow j=\frac{1}{j^2}$.
4. $1+j+j^2=\frac{1-j^3}{1-j}=\frac{0}{1-j}=0$ car $j\neq 1$ et $j^3=1$.

Autre solution $1+j+j^2=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=0$

C'est moins bien car un résultat du cours est que la somme des racines n-ième de l'unité est nul, et, ici 1, j et j^2 sont les trois racines troisième de l'unité.

5. $\frac{1}{1+j}=\frac{1}{-j^2}=-j$, car $1+j=-j^2$ et $\frac{1}{j^2}=j$.
6. La division euclidienne de n par trois dit qu'il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{N}\times\{0,1,2\}$ tel que $n=3q+r$, donc $j^n=j^{3q+r}=(j^3)^q j^r=1^q j^r=j^r$, autrement dit si $n\equiv 0\quad[3]$, $j^n=1$ si $n\equiv 1\quad[3]$, $j^n=j$ et si $j\equiv 2\quad[3]$ alors $j^n=j^2$.

Allez à : Exercice 34 :

Correction exercice 35 :

$$z^3=\frac{1}{4}(-1+i)\Leftrightarrow z^3=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Leftrightarrow z^3=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|z^3|=\left|\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}e^{\frac{3i\pi}{4}}\right|\\ \arg(z^3)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|z|^3=\frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}\\ 3\arg(z)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3},k\in\{0,1,2\}\end{array}\right.$$

Il y a trois solutions $z_k=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\ k\in\{0,1,2\}$

$$z_0=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}};\ z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{11i\pi}{12}};\ z_2=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{4\pi}{3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

$$(z_k)^4=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}\right)^4=\frac{1}{4}e^{i\left(\pi+\frac{8k\pi}{3}\right)}=\frac{1}{4}e^{i\frac{(8k+3)\pi}{3}}$$

$$(z_0)^4=\frac{1}{4}e^{i\pi}=-\frac{1}{4}\in\mathbb{R};\ (z_1)^4=\frac{1}{4}e^{i\frac{11\pi}{3}}=\frac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{3}}\notin\mathbb{R};\ (z_2)^4=\frac{1}{4}e^{i\frac{19\pi}{3}}=\frac{1}{4}e^{i\frac{\pi}{3}}=\notin\mathbb{R}$$

Il n'y a que z_0 dont la puissance quatrième est dans $\mathbb{R}$.

Allez à : Exercice 35 :

Correction exercice 36 :

1. Les racines quatrième de l'unité sont $\{1, i, -1, -i\}$.
2. $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

3.

$$X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X^4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^4| = \left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right| \\ \arg(X^4) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^4 = 1 \\ 4\arg(X) = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0,1,2,3\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$X_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$X_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$X_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)} = e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = j^2$. Donc $X^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 \Leftrightarrow X^4 - j^2 = 0$. Or

$$X^4 - j^2 = (X^2 - j)(X^2 + j) = (X^2 - j^4)(X^2 - i^2 j^4) = (X - j^2)(X + j^2)(X - ij^2)(X + ij^2)$$

D'où les solutions :

$$X = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}, X = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}, X = i\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2} \text{ et } X = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

On pose $Y = X^4$, l'équation est alors du second degré.

$$Y^2 + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 + 2i\sqrt{3} = \frac{3}{2} + \frac{3i\sqrt{3}}{2} = 3\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3e^{\frac{i\pi}{3}}$$

Donc les solutions de $\delta^2 = \Delta$ sont $\delta = \sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\delta = -\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}} = -(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

L'équation du second degré a alors deux solutions :

$$Y_1 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et

$$Y_2 = \frac{-\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 1$$

L'équation du huitième degré a pour solution :

$$\left\{1, \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, i, -\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, -i, \frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right\}$$

Autre solution

$$Y^2+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Y-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=0 \Leftrightarrow Y^2+jY+j^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{Y}{j}\right)^2+\frac{Y}{j}+1=0$$

Les solutions de $T^2+T+1=0$ sont $T_1=j$ et $T_2=j^2$

Donc $\frac{Y_1}{j}=j \Leftrightarrow Y_1=j^2$ et $\frac{Y_2}{j}=j^2 \Leftrightarrow Y_2=j^3=1$

Et on termine de la même façon.

Allez à : Exercice 36 :

Correction exercice 37 :

Là on a un problème parce qu'il n'est pas simple de mettre $11+2i$ sous forme trigonométrique, essayons tout de même :

$$|11+2i|=\sqrt{11^2+2^2}=\sqrt{121+4}=\sqrt{125}=\sqrt{5^3}=5\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}\right)^3$$

Si on appelle θ un argument de $11+2i$, on a

$$\cos(\theta)=\frac{11}{5\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta)=\frac{2}{5\sqrt{5}}$$

Il ne s'agit pas d'un angle connu. Donc il va falloir être malin, on cherche $z=a+ib$ tel que

$$(a+ib)^3=11+2i \Leftrightarrow a^3+3a^2(ib)+3a(ib)^2+(ib)^3=11+2i$$

$$\Leftrightarrow a^3-3ab^2+i(3a^2b-b^3)=11+2i \Leftrightarrow \begin{cases} a^3-3ab^2=11 \\ 3a^2b-b^3=2 \end{cases}$$

On sait aussi que

$$|(a+ib)^3|=|11+2i| \Leftrightarrow |a+ib|^3=\left(\sqrt{5}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3=\left(\sqrt{5}\right)^3 \Leftrightarrow a^2+b^2=5$$

On remplace $a^2=5-b^2$ dans $3a^2b-b^3=2$

$$3(5-b^2)b-b^3=2 \Leftrightarrow -4b^3+15b=2 \Leftrightarrow 4b^3-15b+2=0$$

Il y a une racine presque évidente $b=-2$, si on ne la voit pas on peut aussi remplacer $b^2=5-a^2$ dans $a^3-3ab^2=11$

$$a^3-3a(5-a^2)=11 \Leftrightarrow 4a^3-15a-11=0$$

Là c'est plus clair, $a_0=-1$ est solution donc on peut factoriser par $a+1$

$$4a^3-15a-11=(a+1)(4a^2-4a-11)$$

(C'est facile à factoriser)

Les racines de $4a^2-4a-11$ sont $a_1=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$ et $a_2=\frac{1}{2}+\sqrt{3}$

Pour trouver les valeurs de b correspondantes on réutilise l'équation

$$3a^2b-b^3=2 \Leftrightarrow b(3a^2-b^2)=2 \Leftrightarrow b\left(3a^2-(5-a^2)\right)=2 \Leftrightarrow b=\frac{2}{4a^2-5}$$

$$a=-1 \Rightarrow b=\frac{2}{4(-1)^2-5}=-2$$

$$a=\frac{1}{2}-\sqrt{3} \Rightarrow b=\frac{2}{4\left(\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)^2-5}=\frac{2}{4\left(\frac{1}{4}-\sqrt{3}+4\right)-5}=\frac{2}{12-4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3-\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{3+\sqrt{3}}{9-3}$$

$$=\frac{3+\sqrt{3}}{12}$$

$$a=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\Rightarrow b=\frac{2}{4\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)^2-5}=\frac{2}{4\left(\frac{1}{4}+\sqrt{3}+4\right)-5}=\frac{2}{12+4\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\times\frac{3-\sqrt{3}}{9-3}$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{12}$$

Pour bien faire, il faudrait faire la réciproque (parce que les équivalences ne sont pas claires), admis.

$11+2i$ admet trois racines cubiques

$$-1-2i;\ \frac{1}{2}-\sqrt{3}+i\frac{3+\sqrt{3}}{12};\ \frac{1}{2}+\sqrt{3}+i\frac{3-\sqrt{3}}{12}$$

Allez à : Exercice 37 :

Correction exercice 38 :

$$\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}=\frac{2\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\sqrt{2}(1+i)}=\sqrt{2}\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(1-i)}{1^2+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-i+i\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)+i\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)$$

On déduit de ces deux égalités que

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

Puis que

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-1+\sqrt{3}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)}=\frac{-1+2\sqrt{3}-3}{1-3}=2-\sqrt{3}$$

Et enfin que

$$\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)}=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{2+\sqrt{3}}{4-3}=2+\sqrt{3}$$

Allez à : Exercice 38 :

Correction exercice 39 :

On cherche les complexes z tels que $z^4=81$

$$z^4=81\Leftrightarrow z^4-9^2=0\Leftrightarrow (z^2-9)(z^2+9)=0\Leftrightarrow (z^2-3^2)(z^2-(3i)^2)=0$$
$$\Leftrightarrow (z-3)(z+3)(z-3i)(z+3i)=0$$

Il y a 4 racines quatrième de 81 : $3,-3,3i$ et -3i

La même méthode ne marche pas pour les racines quatrième de -81.

$$z^4=-81\Leftrightarrow\begin{cases}|z^4|=|-81|\\ \arg(z^4)=\arg(-81)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^4=81=3^4\\ 4\arg(z)=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=3\\ \arg(z)=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\{0,1,2,3\}\end{cases}$$

Il y a 4 racines quatrième de -81 : $z_k=3e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)},\ k\in\{0,1,2,3\}$

$$z_0=3e^{i\frac{\pi}{4}}=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}(1+i)$$
$$z_1=3e^{i\frac{3\pi}{4}}=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}(-1+i)$$
$$z_2=3e^{i\frac{5\pi}{4}}=3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-3\sqrt{2}(1+i)$$
$$z_3=3e^{i\frac{7\pi}{4}}=3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=3\sqrt{2}(1-i)$$

Allez à : Exercice 39 :

Correction exercice 40 :

1.
   a. $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{2n}}=e^{\frac{ik\pi}{n}}$, $k\in\{0,1,\dots,2n-1\}$.
   b.
$$z^n=-1\Leftrightarrow\begin{cases}|z^n|=1\\ \arg(z^n)=\arg(-1)+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^n=1\\ n\arg(z)=\pi+2k\pi\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n},k\in\{0,1,\dots,n-1\}\end{cases}$$
   Il y a n solutions $z_k=e^{\frac{i(\pi+2k\pi)}{n}}$, $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

   Soit encore $z_k=e^{\frac{i\pi}{n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

2. Première solution $z^{2n}=1\Leftrightarrow\begin{cases}z^n=1\\ z^n=-1\end{cases}$

   La somme des racines $2n$-ième de l'unité (qui est nulle) est la somme des racines n-ième de l'unité (qui est nulle) plus la somme des complexes qui vérifient $z^n=-1$, donc la somme des complexes qui vérifient $z^n=-1$ est nulle.

Deuxième solution
$$\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{i\pi}{n}}e^{\frac{2ik\pi}{n}}=e^{\frac{i\pi}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}e^{\frac{2ik\pi}{n}}=e^{\frac{i\pi}{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^k=e^{\frac{i\pi}{n}}\frac{1-\left(e^{\frac{2i\pi}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}=e^{\frac{i\pi}{n}}\frac{1-e^{\frac{2in\pi}{n}}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}$$
$$=e^{\frac{i\pi}{n}}\frac{1-e^{2i\pi}}{1-e^{\frac{2i\pi}{n}}}=0$$

Car $e^{\frac{2i\pi}{n}}\neq 1$ pour $n\geq 2$.

Allez à : Exercice 40 :

Correction exercice 41 :

Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique de raison z^2, $z^2\neq 1$ car $z\neq -1$ d'après l'énoncé et $z\neq 1$ car 1 n'est pas une racine n-ième de -1.
$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(z^2)^k=\frac{1-(z^2)^n}{1-z^2}=\frac{1-z^{2n}}{1-z^2}$$
Or $z^n=-1$ donc $(z^n)^2=z^{2n}=1$, par conséquent $S_n=0$

Allez à : Exercice 41 :

Correction exercice 42 :

1. On pose $z_1^3=z_2^3=z_3^3$

$$z_2^3 = z_1^3 \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2^3| = |z_1^3| \\ \arg(z_2^3) = \arg(z_1^3) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_2|^3 = |z_1|^3 \\ 3\arg(z_2) = 3\arg(z_1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z_2| = |z_1| \\ \arg(z_2) = \arg(z_1) + \frac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Donc

$$z_2 = |z_1| e^{i\left(\arg(z_1) + \frac{2k\pi}{3}\right)} = |z_1| e^{i\arg(z_1)} e^{\frac{2ik\pi}{3}} = z_1 \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^k = z_1 j^k$$

Les solutions sont $z_2 = z_1$, $z_2 = jz_1$ et $z_2 = j^2 z_1$

De même les solutions de $z_3^3 = z_1^3$ sont $z_3 = z_1$, $z_3 = jz_1$ et $z_3 = j^2 z_1$

2. $z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0$

On pose $Z = z^3$

$$z^6 + (7 - i)z^3 - 8 - 8i = 0 \Leftrightarrow Z^2 + (7 - i) - 8 - 8i = 0$$

Le discriminant est

$$\Delta = (7 - i)^2 - 4(-8 - 8i) = 49 - 14i - 1 + 32 + 32i = 80 + 18i = 81 + 2 \times 9i - 1$$
$$= (9 + i)^2$$
$$Z_1 = \frac{-(7 - i) - (9 + i)}{2} = \frac{-16}{2} = -8$$
$$Z_2 = \frac{-(7 - i) + (9 + i)}{2} = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i$$

On cherche alors les z tels que $z^3 = -8 = (2i)^3$ et les z tels que

$$z^3 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}\right)^3$$

D'après la première question

$$z^3 = (-2)^3 \Leftrightarrow z \in \{-2, -2j, -2j^2\}$$
$$z^3 = \left(2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}\right)^3 \Leftrightarrow z \in \left\{2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}, j 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}, j^2 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}\right\}$$

On peut arranger ces deux dernières solutions

$$j 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{2i\pi}{3}} e^{\frac{i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{9i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i 2^{\frac{1}{6}}$$
$$j^2 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{4i\pi}{3}} e^{\frac{i\pi}{12}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{17i\pi}{12}}$$

Bref l'ensemble des solutions est

$$\left\{-2, -2j, -2j^2, 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{i\pi}{12}}, -i 2^{\frac{1}{6}}, 2^{\frac{1}{6}} e^{\frac{17i\pi}{12}}\right\}$$

Allez à : Exercice 42 :

Correction exercice 43 :

On ne peut pas trouver la forme trigonométrique de $-7 - 24i$.

$$-7 - 24i = 9 - 2 \times 12i - 16 = (3 - 4i)^2 = (4 - 4i - 1)^2 = ((2 - i)^2)^2 = (2 - i)^4$$

On cherche les z qui vérifient $z^4 = (2 - i)^4$

$$z^4 = (2 - i)^4 \Leftrightarrow z^4 - (2 - i)^4 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - (2 - i)^2)(z^2 + (2 - i)^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (z^2 - (2 - i)^2)(z^2 + i^2(2 - i)^2) = 0 \Leftrightarrow (z^2 - (2 - i)^2)(z^2 - (2i + 1)^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \big(z - (2 - i)\big)\big(z + (2 - i)\big)\big(z - (2i + 1)\big)\big(z + (2i + 1)\big) = 0$$

L'ensemble des solutions est

$$\{2 - i, -2 + i, 1 + 2i, -1 - 2i\}$$

Allez à : Exercice 43 :

Correction exercice 44 :

Il faut mettre $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$ sous sa forme trigonométrique.

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}}=e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Autre méthode

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

$$z^6=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\Leftrightarrow z^6=e^{\frac{2i\pi}{3}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^6|=1\\ \arg(z^6)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^6=1\\ 6\arg(z)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3},k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}\end{cases}$$

Les solutions sont

$$z_k=e^{i\left(\frac{\pi}{9}+\frac{2k\pi}{3}\right)},k\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$z^4=\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}}=2^{-\frac{1}{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)}=2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{7i\pi}{12}}$$

$$z^4=2^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{7i\pi}{12}}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^4|=2^{-\frac{1}{2}}\\ \arg(z^4)=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^4=2^{-\frac{1}{2}}\\ 4\arg(z)=-\frac{7\pi}{12}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{4}}=2^{-\frac{1}{8}}\\ \arg(z)=-\frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{2},k\in\{0,1,2,3\}\end{cases}$$

Il y a 4 solutions

$$z_k=2^{-\frac{1}{8}}e^{i\left(-\frac{7\pi}{48}+\frac{k\pi}{2}\right)},k\in\{0,1,2,3\}$$

$$z^6+27=0\Leftrightarrow z^6=-27\Leftrightarrow\begin{cases}|z^6|=|-27|\\ \arg(z^6)=\arg(-27)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^6=27=3^3\\ 6\arg(z)=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=(3^3)^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},k\in\{0,1,2,3,4,5\}\end{cases}$$

Il y a 6 solutions

$$z_k=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)},k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

$$z_0=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}}=i\sqrt{3}$$

$$z_2=\sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3=\sqrt{3}e^{\frac{7i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_4=\sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{2}}=-i\sqrt{3}$$

$$z_5=\sqrt{3}e^{\frac{11i\pi}{6}}=\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$27(z-1)^6+(z+1)^6=0\Leftrightarrow (z+1)^6=-27(z-1)^6\Leftrightarrow \frac{(z+1)^6}{(z-1)^6}=-27\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6=-27$$

On pose $Z=\frac{z+1}{z-1}$

$$Z^6=-27\Leftrightarrow\begin{cases}|Z^6|=|-27|\\ \arg(Z^6)=\arg(-27)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|Z|^6=27=3^3\\ 6\arg(Z)=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|Z|=(3^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt{3}\\ \arg(Z)=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},k\in\{0,1,2,3,4,5\}\end{cases}$$

Il y a 6 solutions

$$Z_k=\sqrt{3}e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)},k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

Il faut alors trouver z en fonction de Z,

$$Z=\frac{z+1}{z-1}\Leftrightarrow Z(z-1)=z+1\Leftrightarrow Zz-Z=z+1\Leftrightarrow Zz-z=Z+1\Leftrightarrow z(Z-1)=Z+1\Leftrightarrow z=\frac{Z+1}{Z-1}$$

Il y a 6 solutions

$$z_k=\frac{Z_k+1}{Z_k-1}=\frac{(Z_k+1)(\overline{Z_k}-1)}{(Z_k-1)(\overline{Z_k}-1)}=\frac{Z_k\overline{Z_k}-Z_k+\overline{Z_k}-1}{Z_k\overline{Z_k}-Z_k-\overline{Z_k}+1}=\frac{|Z_k|^2-(Z_k-\overline{Z_k})-1}{|Z_k|^2-(Z_k+\overline{Z_k})+1}$$

$$=\frac{|Z_k|^2-2i\mathcal{Im}(Z_k)-1}{|Z_k|^2-2\mathcal{Re}(Z_k)+1}=\frac{3-2i\mathcal{Im}(Z_k)-1}{3-2\mathcal{Re}(Z_k)+1}=\frac{2-2i\mathcal{Im}(Z_k)}{4-2\mathcal{Re}(Z_k)}=\frac{1-i\mathcal{Im}(Z_k)}{2-\mathcal{Re}(Z_k)}$$

$$Z_0=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{6}}=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_0=\frac{1-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{3}{2}}=2-i\sqrt{3}$$

$$Z_1=\sqrt{3}e^{\frac{i\pi}{2}}=i\sqrt{3}\Rightarrow z_1=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_2=\sqrt{3}e^{\frac{5i\pi}{6}}=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_2=\frac{1-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\frac{3}{2}}=\frac{2}{7}-i\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$Z_3=\sqrt{3}e^{\frac{7i\pi}{6}}=-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_3=\frac{1+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2+\frac{3}{2}}=\frac{2}{7}+i\frac{\sqrt{3}}{7}$$

$$Z_4=\sqrt{3}e^{\frac{3i\pi}{2}}=-i\sqrt{3}\Rightarrow z_4=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Z_5=\sqrt{3}e^{\frac{11i\pi}{6}}=\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow z_0=\frac{1+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{2-\frac{3}{2}}=2+i\sqrt{3}$$

Allez à : Exercice 44 :

Correction exercice 45 :

1. Ce sont les racines cinquièmes de l'unité, il vaut mieux connaitre la formule $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}},\ k \in \{0,1,2,3,4\}$

Sinon il faut absolument retrouver la formule très rapidement

$$z^5 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = |1| \\ \arg(z^5) = \arg(1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = 1 \\ 5\arg(z) = 0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases}$$

D'où $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{5}},\ k \in \{0,1,2,3,4\}$, c'est-à-dire

$$z_0 = 1; z_1 = e^{\frac{2i\pi}{5}}; z_2 = e^{\frac{4i\pi}{5}}; z_3 = e^{\frac{6i\pi}{5}} = e^{-\frac{4i\pi}{5}} = \overline{z_3};\ z_4 = e^{\frac{8i\pi}{5}} = e^{-\frac{2i\pi}{5}} = \overline{z_1}$$

2.

$$z^5 = 1 - i \Leftrightarrow z^5 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow z^5 = 2^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(z^5) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = 2^{\frac{1}{2}} \\ 5\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{10}} \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{20} + \dfrac{2k\pi}{5}, k \in \{0,1,2,3,4\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z_k = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\left(\frac{\pi}{20}+\frac{2k\pi}{5}\right)}, \qquad k \in \{0,1,2,3,4\}$$

Il y a cinq solutions

$$z_0 = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{\pi}{20}}; z_1 = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{9\pi}{20}};\ z_2 = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{17\pi}{20}};\ z_3 = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{25\pi}{20}} = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{5\pi}{4}} = -2^{\frac{1}{10}} \times \sqrt{2}(1+i)$$
$$= -2^{\frac{1}{10}+\frac{1}{2}}(1+i) = -2^{\frac{3}{5}}(1+i);\ z_4 = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{32\pi}{20}} = 2^{\frac{1}{10}}e^{i\frac{8\pi}{5}}$$

3.

$$z^3 = 2 - 2i \Leftrightarrow z^3 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Leftrightarrow z^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 e^{-i\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^3| = \left(\sqrt{2}\right)^3 \\ \arg(z^3) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z|^3 = \left(\sqrt{2}\right)^3 \\ 3\arg(z) = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2} \\ \arg(z) = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2k\pi}{3}, k \in \{0,1,2\} \end{cases}$$

Il y a trois solutions $z_k = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3}\right)}, k \in \{0,1,2\}$

$$z_0 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}; z_1 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{12}}; z_2 = \sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{\frac{15i\pi}{12}} = \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{4}} = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

4.

$$z^5 = \overline{z} \Leftrightarrow \begin{cases} |z^5| = |\overline{z}| \\ \arg(z^5) = \arg(\overline{z}) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^5 = |z| \\ 5\arg(z) = -\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (|z|^4 - 1)|z| = 0 \\ 6\arg(z) = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^4 - 1 = 0 \text{ ou } |z| = 0 \\ \arg(z) = \dfrac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \{z = 0 \text{ ou} \begin{cases} |z| = 1 \\ \arg(z) = \dfrac{k\pi}{3}, k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}$$

Il y a 6 solutions : $z = 0$ et $z_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}, k \in \{0,1,2,3,4,5\}$

$$z = 0;\ z_0 = 1;\ z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_3 = e^{i\pi} = -1;\ z_4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};\ z_5 = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Allez à : Exercice 45 :

Correction exercice 46 :

1. On cherche les complexes tels que

$$z^n=-i\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z^n|=|-i|\\ \arg(z^n)=\arg(-i)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|^n=1\\ n\arg(z)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|=1\\ \arg(z)=-\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{2k\pi}{n},k\in\{0,1,\dots,n-1\}\end{array}\right.$$

Les solutions sont les

$$z_k=e^{i\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

On cherche les complexes tels que

$$z^n=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z^n|=\sqrt{2}\\ \arg(z^n)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|^n=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}\\ n\arg(z)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|z|=2^{\frac{1}{2n}}\\ \arg(z)=\dfrac{\pi}{4n}+\dfrac{2k\pi}{n},k\in\{0,1,\dots,n-1\}\end{array}\right.$$

Les solutions sont les

$$z_k=2^{\frac{1}{2n}}e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},k\in\{0,1,\dots,n-1\}$$

2. $z^2-z+1-i=0$

Le discriminant vaut

$$\Delta=(-1)^2-4(1-i)=-3-4i=1+4i-4=(1+2i)^2$$

Il y a deux solutions

$$z_1=\frac{1-(1+2i)}{2}=-i$$
$$z_2=\frac{1+1+2i}{2}=1+i$$

3. $z^{2n}-z^n+1-i=0$, on pose $Z=z^n$

$$z^{2n}-z^n+1-i=0\Leftrightarrow Z^2-Z+1-i=0\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}Z=-i\\ \text{ou}\\ Z=1+i\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}z^n=-i\\ \text{ou}\\ z^n=1+i\end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est

$$\left\{e^{i\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)},k\in\{0,1,\dots,n-1\},2^{\frac{1}{2n}}e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k'\pi}{n}\right)},k'\in\{0,1,\dots,n-1\}\right\}$$

Allez à : Exercice 46 :

Correction exercice 47 :

1.

$$(z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})=z+z^2+\cdots+z^{n-1}+z^n-(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})$$
$$=z^n-1$$

Donc

$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=\frac{z^n-1}{z-1}$$

Il s'agit de la formule connue donnant la somme des termes d'une suite géométrique.

2.

$$e^{ix}-1=e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right)=e^{\frac{ix}{2}}\times 2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)=2ie^{\frac{ix}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

3.

$$Z_n=1+e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{(n-1)ix}=1+e^{ix}+\left(e^{ix}\right)^2+\cdots+\left(e^{ix}\right)^n=\frac{\left(e^{ix}\right)^n-1}{e^{ix}-1}=\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1}$$

$$=\frac{e^{\frac{inx}{2}}\left(e^{\frac{inx}{2}}-e^{-\frac{inx}{2}}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right)}=e^{\frac{inx}{2}-\frac{ix}{2}}\frac{2i\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)}=e^{\frac{(n-1)ix}{2}}\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\left(\cos\left((n-1)x\right)+i\sin\left((n-1)x\right)\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$=\cos\left((n-1)x\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}+i\sin\left((n-1)x\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Comme

$$X_n+iY_n=1+e^{ix}+e^{2ix}+\cdots+e^{(n-1)ix}$$

On a

$$1+\cos(x)+\cos(2x)+\cdots+\cos\left((n-1)x\right)=\cos\left((n-1)x\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Et

$$\sin(x)+\sin(2x)+\cdots+\sin\left((n-1)x\right)=\sin\left((n-1)x\right)\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Allez à : Exercice 47 :

Correction exercice 48 :

1. D’après le cours, il existe $k\in\{1,2,3,4\}$ tel que $\alpha=e^{\frac{2ik\pi}{5}}$.
2. Comme $\alpha\neq 1$

$$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=\frac{1-\alpha^5}{1-\alpha}=\frac{1-1}{1-\alpha}=0$$

3. $f'(x)=1+2x+3x^2+4x^3+5x^4$ d’une part et pour tout $x\neq 1$

$$f(x)=\frac{1-x^6}{1-x}$$

On a

$$f'(x)=\frac{-6x^5(1-x)-(1-x^6)(-1)}{(1-x)^2}=\frac{-6x^5+6x^6+1-x^6}{(1-x)^2}=\frac{-6x^5+5x^6+1}{(1-x)^2}$$

On obtient donc l’égalité

$$1+2x+3x^2+4x^3+5x^4=\frac{-6x^5+5x^6+1}{(1-x)^2}$$

On prend $x=\alpha$

$$1+2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3+5\alpha^4=\frac{-6\alpha^5+5\alpha^6+1}{(1-\alpha)^2}=\frac{-6+5\alpha+1}{(1-\alpha)^2}$$

Car $\alpha^5=1$ et $\alpha^6=\alpha^5\times\alpha=\alpha$, par conséquent

$$1+2\alpha+3\alpha^2+4\alpha^3+5\alpha^4=\frac{-5+5\alpha}{(1-\alpha)^2}=-5\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2}=-\frac{5}{1-\alpha}=-5\frac{1-e^{-\frac{2ik\pi}{5}}}{\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right)\left(1-e^{-\frac{2ik\pi}{5}}\right)}$$

$$=-5\frac{1-\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}-e^{-\frac{2ik\pi}{5}}+1}=-5\frac{1-\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{2-2\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}$$

$$=-\frac{5}{2}-i\frac{5\sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right)}{2\left(1-\cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right)\right)}=-\frac{5}{2}-i\frac{10\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{4\cos^2\left(\frac{k\pi}{5}\right)}==-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}i\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$$

Allez à : Exercice 48 :

Correction exercice 49 :

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=1+x+x^2+\cdots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

$$f'(x)=1+2x+\cdots+nx^{n-1}=\frac{(-(n+1)x^n)(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+1-x^{n+1}}{(1-x)^2}=\frac{-(n+1)x^n+nx^{n+1}+1}{(1-x)^2}$$

On prend cette fonction en ϵ, et on rappelle que $\epsilon^n=1$ (et que donc $\epsilon^{n+1}=\epsilon$)

$$1+2\epsilon+3\epsilon^2+\cdots+n\epsilon^{n-1}=\frac{-(n+1)\epsilon^n+n\epsilon^{n+1}+1}{(1-\epsilon)^2}=\frac{-(n+1)+n\epsilon+1}{(1-\epsilon)^2}=\frac{-n+n\epsilon}{(1-\epsilon)^2}$$

$$=-n\frac{1-\epsilon}{(1-\epsilon)^2}=-\frac{n}{1-\epsilon}$$

Ce résultat est relativement satisfaisant mais on va tout de même l'écrire sous forme algébrique.

Comme $|\epsilon|=1$

$$|\epsilon|=1\Leftrightarrow|\epsilon|^2=1\Leftrightarrow\epsilon\overline{\epsilon}=1\Leftrightarrow\overline{\epsilon}=\frac{1}{\epsilon}=\frac{\epsilon^{n-1}}{\epsilon\epsilon^{n-1}}=\frac{\epsilon^{n-1}}{\epsilon^n}=\epsilon^{n-1}$$

Donc

$$\frac{1}{1-\epsilon}=\frac{1-\overline{\epsilon}}{(1-\epsilon)(1-\overline{\epsilon})}=\frac{1-\epsilon^{n-1}}{1-(\epsilon+\overline{\epsilon})+|\epsilon|^2}=\frac{1-\epsilon^{n-1}}{2-2\mathcal{R}e(\epsilon)}$$

$$1+2\epsilon+3\epsilon^2+\cdots+n\epsilon^{n-1}=-n\times\frac{1-\epsilon^{n-1}}{2-2\mathcal{R}e(\epsilon)}$$

Allez à : Exercice 49 :

Correction exercice 50 :

Pour $z\neq1$

$$(z+1)^n=(z-1)^n\Leftrightarrow\frac{(z+1)^n}{(z-1)^n}=1\Leftrightarrow\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1$$

On pose $Z=\frac{z+1}{z-1}$,

Par conséquent Z est une racine n-ième de l'unité et donc $Z=e^{\frac{2ik\pi}{n}},k\in\{0,1,\dots,n-1\}$

$$\frac{z+1}{z-1}=Z\Leftrightarrow z+1=Z(z-1)\Leftrightarrow z+1=Zz-Z\Leftrightarrow z(1-Z)=-(1+Z)\Leftrightarrow z=\frac{Z+1}{Z-1}$$

Ces équivalences sont vraies si $z\neq1$ et $Z\neq1$. Il faut faire un cas particulier si $k=0$ car alors $Z=1$.

$$\frac{z+1}{z-1}=e^{\frac{2ik\pi}{n}},k\in\{1,\dots,n-1\}$$

$$z=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}=\frac{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}+e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)}{e^{\frac{ik\pi}{n}}\left(e^{\frac{ik\pi}{n}}-e^{-\frac{ik\pi}{n}}\right)}=\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}=-i\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Si $k=0$, $\frac{z+1}{z-1}=1$ n'a pas de solution.

On trouve $n-1$ solutions, ce qui n'est pas une contradiction car

$$(z+1)^n=(z-1)^n\Leftrightarrow(z+1)^n-(z-1)^n=0$$

Est une équation polynômiale de degré $n-1$ (puisque les z^n se simplifient), est admet donc au plus $n-1$ solutions.

Allez à : Exercice 50 :

Correction exercice 51 :

$$z^n=\overline{z}\Leftrightarrow\begin{cases}|z^n|=|\overline{z}|\\ \arg(z^n)=\arg(\overline{z})+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^n=|z|\\ n\arg(z)=-\arg(z)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^{n-1}=1\quad\text{ou}\quad|z|=0\\ n\arg(z)=-\arg(z)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow z=0\text{ ou }\begin{cases}|z|=1\\ (n+1)\arg(z)=2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z=0\text{ ou }\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=\frac{2k\pi}{n+1},k\in\{0,1,\dots,n\}\end{cases}$$

Les solutions sont $z=0$ et les $z_k=e^{\frac{2ik\pi}{n+1}},k\in\{0,1,\dots,n\}$.

Allez à : Exercice 51 :

Correction exercice 52 :

On rappelle que

$$1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5+\beta^6=0$$

$$\frac{\beta}{1+\beta^2}+\frac{\beta^2}{1+\beta^4}+\frac{\beta^3}{1+\beta^6}=\frac{\beta(1+\beta^4)(1+\beta^6)+\beta^2(1+\beta^2)(1+\beta^6)+\beta^3(1+\beta^2)(1+\beta^4)}{(1+\beta^2)(1+\beta^4)(1+\beta^6)}$$

$$=\frac{\beta^{11}+\beta^7+\beta^5+\beta+\beta^{10}+\beta^8+\beta^4+\beta^2+\beta^9+\beta^7+\beta^5+\beta^3}{\beta^{12}+\beta^{10}+\beta^8+2\beta^6+\beta^4+\beta^2+1}$$

$$=\frac{\beta^4+1+\beta^5+\beta+\beta^3+\beta+\beta^4+\beta^2+\beta^2+1+\beta^5+\beta^3}{\beta^5+\beta^3+\beta+2\beta^6+\beta^4+\beta^2+1}$$

$$=\frac{2(1+\beta+\beta^2+\beta^3+\beta^4+\beta^5)}{\beta^6}=-\frac{2\beta^6}{\beta^6}=-2$$

Cette solution n'est pas élégante du tout, il doit y avoir plus malin.

Allez à : Exercice 52 :

Correction exercice 53 :

$$A(X)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}}{8}$$

$$=\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)}{8}=\frac{2\cos(3x)+3\times 2\cos(x)}{8}$$

$$=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$$

$$B(x)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3=\frac{e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix}}{-8i}$$
$$=\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}-3\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)}{-8i}=\frac{2i\sin(3x)-3\times 2i\sin(x)}{-8i}$$
$$=-\frac{1}{4}\sin(3x)+\frac{3}{4}\sin(x)$$
$$C(X)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4=\frac{e^{4ix}+4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}$$
$$=\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}+4\left(e^{2ix}+4e^{-2ix}\right)+6}{16}=\frac{2\cos(4x)+4\times 2\cos(2x)+6}{16}$$
$$=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$
$$D(X)=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4=\frac{e^{4ix}-4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}-4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16}$$
$$=\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-4\left(e^{2ix}+4e^{-2ix}\right)+6}{16}=\frac{2\cos(4x)-4\times 2\cos(2x)+6}{16}$$
$$=\frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$$
$$E(x)=\cos^2(x)\sin^2(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2$$
$$=\frac{e^{2ix}+2e^{ix}e^{-ix}+e^{-2ix}}{4}\times\frac{e^{2ix}-2e^{ix}e^{-ix}+e^{-2ix}}{-4}=\frac{\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)\left(e^{2ix}-2+e^{-2ix}\right)}{-16}$$
$$=\frac{e^{2ix}e^{2ix}-2e^{2ix}+e^{2ix}e^{-2ix}+2e^{2ix}-4+2e^{-2ix}+e^{-2ix}e^{2ix}-2e^{-2ix}+e^{-2ix}e^{-2ix}}{-16}$$
$$=\frac{e^{4ix}-2e^{2ix}+1+2e^{2ix}-4+2e^{-2ix}+1-2e^{-2ix}+e^{-4ix}}{-16}=\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-2}{-16}$$
$$=\frac{2\cos(4x)-2}{-16}=-\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{8}$$

Autre méthode en utilisant les formules trigonométriques

$$E(x)=\cos^2(x)\sin^2(x)=(\cos(x)\sin(x))^2=\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2=\frac{1}{4}\sin^2(2x)=\frac{1}{4}\times\frac{1-\cos(4x)}{2}$$
$$=-\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{8}$$

En utilisant les formules

$$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)\,,a=x$$
$$\cos(2a)=1-\sin^2(a)\Leftrightarrow\sin^2(a)=\frac{1-\cos(2a)}{2},a=2x$$
$$F(x)=\cos(x)\sin^3(x)=\cos(x)\,B(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\times\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i}$$
$$=\frac{e^{4ix}-3e^{2ix}+3-e^{-2ix}+e^{2ix}-3+3e^{-2ix}-e^{-4ix}}{-16i}$$
$$=\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}-2\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)}{-16i}=\frac{2i\sin(4x)-2\times 2i\sin(2x)}{-16i}$$
$$=-\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)$$

$$G(x)=\cos^3(x)\sin(x)=A(x)\sin(x)=\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}\times\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$
$$=\frac{e^{4ix}-e^{2ix}+3e^{2ix}-3+3-3e^{-2ix}+e^{-2ix}-e^{-4ix}}{16i}$$
$$=\frac{e^{4ix}-e^{-4ix}+2\left(e^{2ix}-e^{-2ix}\right)}{16i}=\frac{2i\sin(4x)+2\times 2i\sin(2x)}{16i}$$
$$=\frac{1}{8}\sin(4x)+\frac{1}{4}\sin(2x)$$

On peut toujours faire « comme d'habitude » améliorons un peu les choses

$$H(x)=\cos^3(x)\sin^2(x)=\cos(x)\left(\cos(x)\sin(x)\right)^2=\cos(x)\left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)^2=\frac{1}{4}\cos(x)\sin^2(2x)$$
$$=\frac{1}{4}\cos(x)\left(\frac{1-\cos(4x)}{2}\right)=\frac{1}{8}\cos(x)\left(1-\cos(4x)\right)=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\cos(x)\cos(4x)$$

Alors on utilise des formules souvent inconnues des étudiants (et c'est fort dommage) ou on fait comme d'habitude

$$H(x)=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\cos(x)\cos(4x)=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{8}\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-3ix}+e^{3ix}+e^{-5ix}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-5ix}+e^{-3ix}+e^{3ix}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{32}(2\cos(5x)+2\cos(3x)=\frac{1}{8}\cos(x)-\frac{1}{16}\cos(5x)-\frac{1}{16}\cos(3x)$$
$$I(x)=\cos^2(x)\sin^3(x)$$

Allez, encore une autre technique !

On pose $t=\frac{\pi}{2}-x\Leftrightarrow x=t-\frac{\pi}{2}$ ainsi $\cos(x)=\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin(t)$ et $\sin(x)=\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)=\cos(t)$

Donc

$$I(x)=\sin^2(t)\cos^3(t)=\frac{1}{8}\cos(t)-\frac{1}{16}\cos(5t)-\frac{1}{16}\cos(3t)$$
$$=\frac{1}{8}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{16}\cos\left(5\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{1}{16}\cos\left(3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{8}\sin(x)-\frac{1}{16}\cos\left(5x-\frac{5\pi}{2}\right)-\frac{1}{16}\cos\left(3x-\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\sin(x)-\frac{1}{16}\cos\left(5x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{16}\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{8}\sin(x)-\frac{1}{16}\sin(5x)+\frac{1}{16}\sin(3x)$$

$$J(x)=\cos(x)\sin^4(x)=\cos(x)D(x)=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\times\frac{e^{4ix}+e^{-4ix}-4e^{2ix}-4e^{-2ix}+6}{16}$$
$$=\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-3ix}-4e^{3ix}-4e^{-ix}+6e^{ix}+e^{3ix}+e^{-5ix}-4e^{ix}-4e^{-3ix}+6e^{-ix}\right)$$
$$=\frac{1}{32}\left(e^{5ix}+e^{-5ix}-3\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)+2\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{32}(2\cos(5x)-3\times\cos(3x)+2\times 2\cos(x))$$
$$=\frac{1}{16}\cos(5x)-\frac{3}{32}\cos(3x)+\frac{1}{8}\cos(x)$$

Allez à : Exercice 53 :

Correction exercice 54 :

1. $\frac{1-z}{1-iz}$ est réel si et seulement si $\frac{1-z}{1-iz}=\overline{\left(\frac{1-z}{1-iz}\right)}=\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}$

$$\frac{1-z}{1-iz}=\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}\Leftrightarrow (1-z)(1+i\overline{z})=(1-\overline{z})(1-iz)\Leftrightarrow 1+i\overline{z}-z-iz\overline{z}=1-iz-\overline{z}+iz\overline{z}$$
$$\Leftrightarrow i\overline{z}-z-iz\overline{z}=-iz-\overline{z}+iz\overline{z}\Leftrightarrow i(z+\overline{z})-2i|z|^2=z-\overline{z}$$

On pose $z=a+ib$

$$\frac{1-z}{1-iz}=\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}\Leftrightarrow 2ia-2i(a^2+b^2)=2ib\Leftrightarrow a-(a^2+b^2)=b\Leftrightarrow a^2-a+b^2+b=0$$
$$\Leftrightarrow\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0\Leftrightarrow\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

Il s'agit du cercle de centre $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2. $\frac{1-z}{1-iz}$ est imaginaire pur si et seulement si $\frac{1-z}{1-iz}=-\overline{\left(\frac{1-z}{1-iz}\right)}=-\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}$

$$\frac{1-z}{1-iz}=-\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}\Leftrightarrow (1-z)(1+i\overline{z})=-(1-\overline{z})(1-iz)\Leftrightarrow 1+i\overline{z}-z-iz\overline{z}$$
$$=-(1-iz-\overline{z}+iz\overline{z})\Leftrightarrow 1+i\overline{z}-z-iz\overline{z}=-1+iz+\overline{z}-iz\overline{z}\Leftrightarrow 1+i\overline{z}-z$$
$$=-1+iz+\overline{z}$$
$$\Leftrightarrow 2-i(z-\overline{z})=z+\overline{z}$$

On pose $z=a+ib$

$$\frac{1-z}{1-iz}=-\frac{1-\overline{z}}{1+i\overline{z}}\Leftrightarrow 2-i(a+ib-a+ib)=2a\Leftrightarrow 2+2b=2a\Leftrightarrow 1=a-b$$

Il s'agit de la droite d'équation : $b=-1+a$.

Allez à : Exercice 54 :

Correction exercice 55 :

$$z=\frac{1+\rho e^{i\theta}}{1-\rho e^{i\theta}}=\frac{(1+\rho e^{i\theta})(1-\rho e^{-i\theta})}{(1-\rho e^{i\theta})(1-\rho e^{-i\theta})}=\frac{1+\rho e^{i\theta}-\rho e^{-i\theta}-\rho^2}{1-\rho e^{i\theta}-\rho e^{-i\theta}+\rho^2}=\frac{1+\rho\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)-\rho^2}{1-\rho(e^{i\theta}+\rho e^{-i\theta})+\rho^2}$$
$$=\frac{1-\rho^2+2i\rho\sin(\theta)}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}+i\frac{2\rho\sin(\theta)}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}$$

Donc la partie réelle de z est

$$Re(z)=\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}$$

Et sa partie imaginaire est

$$Im(z)=\frac{2\rho\sin(\theta)}{1-2\rho\cos(\theta)+\rho^2}$$

Allez à : Exercice 55 :

Correction exercice 56 :

1. $(1+i)^2=1+2i-1=2i\Rightarrow(1+i)^6=((1+i)^2)^3=(2i)^3=8\times i^3=-8i$
2. $z^2=-8i\Leftrightarrow z^2=(1+i)^6\Leftrightarrow z^2=((1+i)^3)^2\Leftrightarrow z=(1+i)^3\ \text{ ou }\ z=-(1+i)^3$
$\Leftrightarrow z=(1+i)^2(1+i)\ \text{ ou }\ z=-(1+i)^2(1+i)\Leftrightarrow z=2i(1+i)\ \text{ ou }\ z=-2i(1+i)$
$$\Leftrightarrow z=-2+2i\ \text{ ou }\ z=2-2i$$
3.
$$z=-2+2i=2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$$
$$z=2-2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}e^{\frac{7i\pi}{4}}=2\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$$
4.
$$z^3=-8i\Leftrightarrow z^3=((1+i)^2)^3\Leftrightarrow z^3=(2i)^3\Leftrightarrow\left(\frac{z}{2i}\right)^3=1\Leftrightarrow\frac{z}{2i}=1\text{ ou }\frac{z}{2i}=j\ \text{ ou }\ \frac{z}{2i}=j^2$$
$$\Leftrightarrow z=2i\text{ ou }z=2ij\ \text{ ou }z=2ij^2\Leftrightarrow z=2i\text{ ou }z=2i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{ ou }z=2i\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = 2i \text{ ou } z = -\sqrt{3} - i \ \text{ ou } z = \sqrt{3} - i$$

Allez à : Exercice 56 :

Correction exercice 57 :

1.
$$f(z) = z \Leftrightarrow z(1-z) = z \Leftrightarrow z(1-z) - z = 0 \Leftrightarrow z - z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2.
$$\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| = \left|z(1-z) - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right| \le \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right| + \frac{1}{4}$$
$$\le \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4} \le \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Allez à : Correction exercice 57 :

Correction exercice 58 :

1. Pour tout z_1, z_2 différent de $-i$,
$$f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow \frac{z_1 - i}{z_1 + i} = \frac{z_2 - i}{z_2 + i} \Leftrightarrow (z_1 - i)(z_2 + i) = (z_2 - i)(z_1 + i)$$
$$\Leftrightarrow z_1 z_2 + i z_1 - i z_2 + 1 = z_2 z_1 + i z_2 - i z_1 + 1 \Leftrightarrow 2 i z_1 = 2 i z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$$
Donc f est injective.

2.
$$1 - f(z) = 1 - \frac{z - i}{z + i} = \frac{z + i - (z - i)}{z + i} = \frac{2i}{z + i} \neq 0$$
Donc
$$f(z) \neq 1$$

3.
Si $z \in E$ alors $f(z) \neq 1$ ce qui signifie que $f(z) \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, ce al montre que
$$f(E) \subset \mathbb{C} \setminus \{1\}$$
Si $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ alors il faut montrer qu'il existe $z \in E$ tel que $Z = f(z)$.
$$Z = f(z) \Leftrightarrow Z = \frac{z - i}{z + i} \Leftrightarrow Z(z + i) = z - i \Leftrightarrow Zz + iZ = z - i \Leftrightarrow Zz - z = -iZ - i \Leftrightarrow z(Z - 1)$$
$$= -i(Z + 1) \Leftrightarrow z = -i\frac{Z + 1}{Z - 1}$$
Il reste à montrer que $z \neq -i$, si
$$z = -i\frac{Z + 1}{Z - 1} = -i \Leftrightarrow \frac{Z + 1}{Z - 1} = 1 \Leftrightarrow Z + 1 = Z - 1 \Leftrightarrow 1 = -1$$
Donc z ne peut être égal à $-i$. On a montré que si $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ alors $Z \in f(E)$ cela montre que
$$\mathbb{C} \setminus \{1\} \subset f(E)$$
On a bien montré l'égalité demandé.
On en déduit que f est surjective et donc bijective.

4.
$$1 - |f(z)|^2 = 1 - \left|\frac{z - i}{z + i}\right|^2 = 1 - \frac{(z - i)(\overline{z} + i)}{(z + i)(\overline{z} - i)} = \frac{(z + i)(\overline{z} - i) - (z - i)(\overline{z} + i)}{(z + i)(\overline{z} - i)}$$
$$= \frac{|z^2| - iz + i\overline{z} + 1 - (|z^2| + iz - i\overline{z} + 1)}{|z + i|^2} = \frac{-2iz + 2i\overline{z}}{|z + i|^2} = -\frac{2i(z - \overline{z})}{|z + i|^2}$$
$$= -\frac{2i \times 2i\mathcal{Im}(z)}{|z + i|^2} = 4\frac{\mathcal{Im}(z)}{|z + i|^2}$$

5. Si $z \in \mathbb{R}$ alors $\mathcal{Im}(z) = 0$, d'après la question précédente
$$1 - |f(z)|^2 = 0 \Leftrightarrow |f(z)| = 1$$

Ce qui signifie que $f(z) \in \mathcal{U}$
Comme $f(z) \neq 1$, $f(z) \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$
On a montré que

$$f(\mathbb{R}) \subset \mathcal{U} \setminus \{1\}$$

Si $Z \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$ l'image réciproque de Z est $z = -i\frac{Z+1}{Z-1}$, il faut montrer que ce complexe est réel.

$$-i\frac{Z+1}{Z-1} - \left(\overline{-i\frac{Z+1}{Z-1}}\right) = -i\frac{Z+1}{Z-1} - i\frac{\overline{Z}+1}{\overline{Z}-1} = -i\frac{(Z+1)(\overline{Z}-1) + (\overline{Z}+1)(Z-1)}{(Z-1)(\overline{Z}-1)}$$

$$= -i\frac{|Z|^2 - Z + \overline{Z} - 1 + |Z|^2 - \overline{Z} + Z - 1}{|Z-1|^2} = -2i\frac{|Z|^2 - 1}{|Z-1|^2} = 0$$

Cela montre que $-i\frac{Z+1}{Z-1} \in \mathbb{R}$. On a montré que si $Z \in \mathcal{U} \setminus \{1\}$ alors il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $Z = f(z)$.
Autrement dit

$$\mathcal{U} \setminus \{1\} \subset f(\mathbb{R})$$

D'où l'égalité demandée.
Allez à : Exercice 58 :