Formes algébriques et trigonométriques, module et argument

Exercice 1 - - *L1/Math Sup* - ⋆

On multiplie le dénominateur par sa quantité conjuguée, et on obtient :

$$Z = \frac{-4(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{-4(1-i\sqrt{3})}{1+3} = -1+i\sqrt{3}.$$

Pour mettre sous forme trigonométrique, on met le module en facteur :

$$|Z| = \sqrt{1+3} = 2, \text{ d'où } Z = 2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i2\pi/3}.$$

Pour calculer Z^3, on utilise cette dernière forme et il vient

$$Z^3 = 2^3 e^{3i2\pi/3} = 8.$$

Exercice 2 - - *L1/Math Sup* - ⋆

On a, en factorisant par l'angle moitié et en utilisant les formules d'Euler,

$$1+e^{i\theta} = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}.$$

On en déduit que $|1+z| = 2\cos(\theta/2) > 0$ car $\theta/2 \in]0,\pi/2[$, puis qu'un argument de $1+z$ est $\theta/2$.
Pour l'autre complexe, on commence par transformer son écriture en remarquant qu'il s'agit du début d'une somme géométrique. Puisque $e^{i\theta} \neq 1$, on a

$$1+z+z^2 = \frac{1-z^3}{1-z} = \frac{1-e^{3i\theta}}{1-e^{i\theta}}.$$

En raisonnant comme précédemment, on trouve

$$1+z+z^2 = \frac{e^{3i\theta/2}2i\sin(3\theta/2)}{e^{i\theta/2}2i\sin(\theta/2)} = \frac{\sin(3\theta/2)}{\sin(\theta/2)}e^{i\theta}.$$

Il faut maintenant faire attention aux signes !

- Si $\theta \in]0,2\pi/3[$, alors $\sin(3\theta/2)/\sin(\theta/2) > 0$, et donc le module de $1+z+z^2$ est bien $\frac{\sin(3\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$, son argument est θ.
- Si $\theta = 2\pi/3$, $1+z+z^2 = 0$, de module nul et d'argument non défini.
- Si $\theta \in]2\pi/3,\pi[$, alors $\sin(3\theta/2)/\sin(\theta/2) < 0$, et donc on doit écrire

$$1+z+z^2 = -\frac{\sin(3\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \times (-1) \times e^{i\theta} = -\frac{\sin(3\theta/2)}{\sin(\theta/2)}e^{i(\theta+\pi)}.$$

Le module dans ce cas est donc $-\frac{\sin(3\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$, et l'argument, modulo 2π, est $\theta+\pi$.

Exercice 3 - - *L1/Math Sup* - $\star$

On commence par passer par la forme trigonométrique :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}=\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\sqrt{2}\frac{e^{i\pi/3}}{e^{-i\pi/4}}=\sqrt{2}e^{i7\pi/12}.$$

On en déduit que

$$\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}=(\sqrt{2})^{20}e^{i\frac{140\pi}{12}}=2^{10}e^{i\frac{70\pi}{6}}=2^{10}e^{i\frac{5\pi}{3}}=2^9(1-i\sqrt{3}).$$

Exercice 4 - - *L1/Math Sup* - $\star$

On commence par écrire $1+i\sqrt{3}$ sous forme trigonométrique :

$$1+i\sqrt{3}=2e^{i\pi/3}.$$

En prenant la puissance n-ième, on trouve

$$(1+i\sqrt{3})^n=2^ne^{in\pi/3}.$$

Ceci est un réel positif si et seulement si $\sin(n\pi/3)=0$ et $\cos(n\pi/3)\geq 0$. Or, $\sin(n\pi/3)=0$ si et seulement si $n=3k$, $k\in\mathbb{Z}$. Mais, pour ces valeurs de n, on a $\cos(n\pi/3)=\cos(k\pi)$, et ceci est positif si et seulement si k est pair. Ainsi, les entiers qui conviennent sont les multiples de 6.

Exercice 5 - - *L1/Math Sup* - $\star$

On écrit $z=e^{i\theta}$, $z'=e^{i\theta'}$ et on utilise les formules d'Euler en mettant en facteur $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ en facteur au numérateur et au dénominateur. Il vient

$$\begin{aligned}\frac{z+z'}{1+zz'}&=\frac{e^{i\theta}+e^{i\theta'}}{1+e^{i(\theta+\theta')}}\\&=\frac{e^{i\frac{\theta-\theta'}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\theta'}{2}}}{e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}+e^{-i\frac{\theta+\theta'}{2}}}\\&=\frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}.\end{aligned}$$

On obtient bien un nombre réel, de module $\left|\frac{\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}\right|$.

Exercice 6 - - *L1/Math Sup* - $\star$

On peut faire un raisonnement algébrique, en posant $z=x+iy$ et en calculant effectivement les deux modules. Voici un raisonnement plus géométrique. Soit A le point d'affixe i, B le point d'affixe $-i$, et M le point d'affixe z. Alors $|z-i|$ est la longueur AM, $|z+i|$ est la longueur BM, et la condition recherchée est $AM=BM$, c'est-à-dire M est sur la médiatrice de $[AB]$, soit encore M sur l'axe réel, soit z réel.

Exercice 7 - - *L1/Math Sup* - $\star$

De $|z| = \left|\frac{1}{z}\right|$, on tire que $|z|^2 = 1$, donc que $|z| = 1$, c'est-à-dire que $z = e^{i\theta}$, où $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculons maintenant le module de $1 - z$. On écrit

$$1 - z = 1 - e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2}\right) = -2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2}.$$

Le module de $1 - z$ vaut donc 1 si et seulement si $|\sin(\theta/2)| = 1/2$. L'équation $\sin(\theta/2) = 1/2$, avec $\theta \in [0, 2\pi[$ donne $\theta = \pi/3$ ou $\theta = -5\pi/3$. L'équation $\sin(\theta/2) = -1/2$ avec $\theta \in [0, 2\pi[$ n'a pas de solutions. L'ensemble des solutions est donc $\{e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}$.

Exercice 8 - Automorphisme du disque - *L1/Math Sup* - $\star\star$

1. Il suffit de développer les modules au carré. Précisément, on a :

$$\begin{aligned} 1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 &= \frac{|1-\bar{a}z|^2 - |z-a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{1 - \bar{a}z - a\bar{z} - |a|^2|z|^2 - |z|^2 - |a|^2 + \bar{a}z + a\bar{z}}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{1 - |a|^2|z|^2 - |z|^2 - |a|^2}{|1-\bar{a}z|^2} \\ &= \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}. \end{aligned}$$

2. On commence par remarquer que :

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1 \iff \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 \leq 1.$$

   Ensuite, on a d'après la question précédente

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2}.$$

   Ainsi, on a l'équivalence :

$$\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1 \iff \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\bar{a}z|^2} \geq 0.$$

   Or, $1 - |a|^2 \geq 0$ et $|1 - \bar{a}z|^2 \geq 0$. On a donc la propriété voulue si et seulement si

$$1 - |z|^2 \geq 0 \iff |z| \leq 1.$$

Exercice 9 - Homographie - *L1/Math Sup* - $\star\star$

Supposons d'abord que $|z| = 1$. Alors z s'écrit $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$. On peut alors écrire :

$$\frac{1+z}{1-z} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = \frac{2\cos(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)} = -i\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$$

qui est bien un élément de $i\mathbb{R}$. Remarquons que l'on a le droit d'effectuer ce calcul car $\sin(\theta/2)$ ne s'annule pas.

Réciproquement, supposons que $\frac{1+z}{1-z}=ia$, avec a un réel. On va exprimer z en fonction de a, puis calculer son module. Il vient :

$$\frac{1+z}{1-z}=ia \iff 1+z=ia(1-z) \iff z(1+ia)=-1+ia \iff z=\frac{-1+ia}{1+ia}.$$

On en déduit que

$$\left|\frac{-1+ia}{1+ia}\right|=\frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a^2}}=1,$$

ce qui prouve la réciproque.

Exercice 10 - Somme et différence - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

L'idée est de passer au carré, et de développer.

$$|z+z'|=|z-z'| \iff |z+z'|^2=|z-z'|^2 \iff |z|^2+|z'|^2+2\Re e(z\overline{z'})=|z|^2+|z'|^2-2\Re e(z\overline{z'}).$$

En simplifiant par les termes égaux, ceci est donc équivalent à

$$\Re e(z\overline{z'})=0.$$

Or, $z\overline{z'}=\rho\rho' e^{i(\theta-\theta')}$. Ceci a une partie réelle nulle si et seulement si $\cos(\theta-\theta')=0$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta'=\theta+\frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Exercice 11 - Égalité dans l'inégalité triangulaire - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

On va prouver que la propriété est vraie si et seulement s'il existe des réels positifs λ_i tels que $z_i=\lambda_i z_1$. Un sens est facile. En effet, si $z_i=\lambda_i z_1$, alors

$$|z_1+\cdots+z_n|=|z_1|\times|1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n|=|z_1|+\lambda_2|z_1|+\cdots+\lambda_n|z_1|=|z_1|+\cdots+|z_n|.$$

Réciproquement, on va prouver par récurrence sur n que si

$$|z_1+\cdots+z_n|=|z_1|+\cdots+|z_n|,$$

alors il existe des réels positifs λ_i, $1\leq i\leq n$ tels que $z_i=\lambda_i z_1$. On commence par traiter le cas $n=2$, et on suppose que $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$. Notons $u=z_1/z_2$. Alors on a $|1+u|=1+|u|$, et en écrivant $u=x+iy$, on obtient

$$|1+u|^2=(1+x)^2+y^2=1+|u|^2+2x \text{ et } (1+|u|)^2=1+2|u|+|u|^2.$$

On a donc $x=|u|$, ce qui entraine que $y=0$ et que u est un réel positif. Le cas $n=2$ est donc prouvé.

Supposons maintenant la propriété prouvée au rang $n-1$ et prouvons-la au rang n. On commence par remarquer que

$$|z_1+\cdots+z_{n-1}|=|z_1|+\cdots+|z_{n-1}|.$$

En effet, si on avait $|z_1+\cdots+z_{n-1}|<|z_1|+\cdots+|z_{n-1}|$, on aurait aussi

$$|z_1+\cdots+z_n|\leq|z_1+\cdots+z_{n-1}|+|z_n|<|z_1|+\cdots+|z_{n-1}|+|z_n|,$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale. Par hypothèse de récurrence, on sait que pour $i\in\{1,\dots,n-1\}$, il existe $\lambda_i>0$ tel que $z_i=\lambda_i z_1$. Mais alors il vient

$$|z_1+\cdots+z_n|=|(1+\cdots+\lambda_{n-1})z_1+z_n|=(1+\cdots+\lambda_{n-1})|z_1|+|z_n|.$$

On applique alors le cas $n=2$, et on trouve que $z_n=\mu_n(1+\cdots+\lambda_{n-1})z_1$ avec $\mu_n>0$. On a le résultat voulu, quitte à poser $\lambda_n=\mu_n(1+\cdots+\lambda_{n-1})$.

Equations et racines n-ièmes

Exercice 12 - Exponentielle - *L1/Math Sup* - ⋆

Posons $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $e^z = e^a e^{ib}$. Ceci nous incite à mettre $3\sqrt{3} - 3i$ sous forme trigonométrique. On obtient

$$|3\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{27 + 9} = 6.$$

Il vient

$$3\sqrt{3} - 3i = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) = 6e^{-i\pi/6}.$$

On obtient alors $\exp a = 6$ et $b = -i\pi/6 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. Les solutions de l'équation sont donc les nombres complexes $\ln(6) + i\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 13 - Racine carrée d'un nombre complexe - *L1/Math Sup* - ⋆

La méthode est toujours la même. On pose $z = a + ib$, de sorte que $z^2 = (a^2 - b^2) + 2iab$. L'équation $z^2 = 3 + 4i$ est donc équivalente à

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & 3 \\ 2ab = 4 \end{array}\right.$$

On peut ajouter une troisième équation en remarquant que

$$|z|^2 = |3 + 4i| \iff a^2 + b^2 = \sqrt{3 + 16} = 5.$$

On trouve alors $2a^2 = 8$, soit $a = \pm 2$ et $2b^2 = 2$, soit $b = \pm 1$. L'équation $2ab = 4$ oblige a et b à avoir même signe, et donc les deux solutions sont $2 + i$ et $-2 - i$.
Pour l'équation $z^2 = 8 - 6i$, on peut suivre une méthode exactement identique, et les solutions sont cette fois $3 - i$ et $-3 + i$.

Exercice 14 - Racine carré de deux façons - *L1/Math Sup* - ⋆

Soit $w = a + ib$ tel que $w^2 = Z$. On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 & = & \sqrt{3} \\ 2ab & = & 1 \\ a^2 + b^2 & = & |3 + i[= 2. \end{array}\right.$$

Il vient $a^2 = \frac{\sqrt{3}+2}{2}$ et $b^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$. Puisque a et b ont le même signe, les solutions sont donc

$$w = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} + i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \text{ et } w = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} - i\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}.$$

Pour la résolution sous forme trigonométrique, on remarque que

$$Z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 2e^{i\pi/6}.$$

Les racines carrées de Z sont donc

$$w = \sqrt{2}e^{i\pi/12} \text{ et } w = -\sqrt{2}e^{i\pi/12}.$$

Comme les deux calculs donnent le même résultat, en identifiant les parties réelles, on trouve :

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}},$$

d'où on tire :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 15 - Équations du second degré - *L1/Math Sup* - $\star$

1. Le discriminant de cette équation du second degré vaut :

$$\Delta=(-2i)^2-4(-1+2i)=-8i.$$

   Une racine carré de Δ est donnée par $\delta=i\times 2\sqrt{2}\times e^{i\pi/4}=-2+2i$. En appliquant les formules du cours, on trouve que les racines sont :

$$\frac{2i-2+2i}{2}=-1+2i \text{ et } \frac{2i+2-2i}{2}=1.$$

2. Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta=(4i-3)^2-4i(i-5)=-4i-3.$$

   On en cherche une racine carrée sous la forme $\delta=a+ib$. Calculant δ^2, et utilisant aussi la relation

$$|\delta^2|=|-4i-3|=5,$$

   on trouve le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a^2-b^2 &=& -3\\ 2ab &=& -4\\ a^2+b^2 &=& 5 \end{array}\right.$$

   On en déduit que $\delta=1-2i$ est solution de $\delta^2=\Delta$ (l'autre solution est $-1+2i$). Utilisant les formules du cours, les racines de l'équation initiale sont donc :

$$\frac{-4i+3+1-2i}{2i}=-3-2i \text{ et } \frac{-4i+3-1+2i}{2i}=-1-i.$$

3. Le discriminant de cette équation vaut $(7+i)^2-4(12+3i)=2i$. Une racine carré de ce discriminant est $1+i$. Les racines de l'équation sont donc :

$$\frac{7+i-1-i}{2}=3 \text{ et } \frac{7+i+1+i}{2}=4+i.$$

Exercice 16 - Racines n-ièmes - *L1/Math Sup* - $\star$

C'est du cours !

1. On a $i = e^{-i\pi/2}$, et donc
$$z^5 = -i = e^{-i\pi/2} \iff z = e^{\frac{2ik\pi}{5} - \frac{i\pi}{10}},\ k \in \mathbb{Z};$$
on obtient 5 racines distinctes pour $k = 0, \dots, 4$.
2. On a
$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}.$$
On en déduit que
$$\frac{-4}{1+i\sqrt{3}} = -2e^{-i\pi/3} = 2e^{2i\pi/3}.$$
Finalement,
$$z^6 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}} \iff z = 2^{1/6}e^{\frac{ik\pi}{3} + \frac{2\pi}{9}},\ k \in \mathbb{Z}.$$
3. On a
$$\frac{(1+i\sqrt{3})^4}{(1+i)^2} = \frac{2^4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = 2^3\frac{e^{i\frac{\pi}{3}\times 4}}{e^{i\frac{\pi}{4}\times 2}}.$$
L'équation qu'on doit résoudre est donc :
$$z^5 = 2^3 e^{i\frac{5\pi}{6}} \iff \left(\frac{z}{2^{3/5}e^{i\pi/6}}\right)^5 = 1.$$
On en déduit que les solutions sont les complexes de la forme
$$z = 2^{3/5}e^{i\frac{\pi}{6} + \frac{2ik\pi}{5}},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 17 - Qui se ramènent aux puissances... - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. 1 n'est pas solution, et l'équation est donc équivalente à
$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^5 = 1.$$
Posons $w = \frac{z+1}{z-1}$, c'est-à-dire $z = \frac{w+1}{w-1}$. On a $w^5 = 1$ si et seulement s'il existe $k \in \{0, \dots, 4\}$ tel que $w = e^{2ik\pi/5}$. On a donc
$$z = \frac{e^{2ik\pi/5} + 1}{e^{2ik\pi/5} - 1}.$$
On peut encore simplifier en utilisant les formules d'Euler :
$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{2ik\pi}{5}\right) + 1 &= \exp\left(\frac{2ik\pi}{5}\right) + \exp(0) \\ &= \exp\left(\frac{ik\pi}{5}\right)\left(\exp\left(\frac{ik\pi}{5}\right) + \exp\left(\frac{-ik\pi}{5}\right)\right) \\ &= 2\exp\left(\frac{ik\pi}{5}\right)\cos(k\pi/5). \end{aligned}$$
De même, on trouve
$$\exp\left(\frac{2k\pi}{5}\right) - 1 = 2i\exp\left(\frac{ik\pi}{5}\right)\sin(k\pi/5).$$
L'ensemble des solutions est donc $\{-i\text{cotan}(k\pi/5);\ k = 0, \dots, 4\}$.

2. Puisque $|z| = |\overline{z}|$, on a $|z|^{n-1} = 1$ et donc $|z| = 1$. On peut donc poser $z = e^{i\theta}$ et l'équation devient
$$e^{in\theta} = e^{-i\theta} \iff e^{i(n+1)\theta} = 1 \iff \theta = 2ik\pi/(n+1),\ k \in \{0, \dots, n-1\}.$$
3. Posons $w = \frac{z+1}{z-1}$. L'équation devient $w^3 + \frac{1}{w^3} = 0$, soit $w^6 = -1 = e^{i\pi}$. Ses racines sont
$$e^{i\pi/6 + k\pi/3},\ k = 0, \dots, 5.$$
On retrouve alors z car $z = \frac{w+1}{w-1}$. Pour $k = 1$ ou $k = 4$, on trouve $z = \pm i$. Pour les autres valeurs de k, on trouve $z = \pm i(2 \pm \sqrt{3})$.
4. Remarquons que $z = -1$ n'est pas racine de l'équation. On reconnait alors le début de la somme géométrique de raison $-z$. L'équation est donc équivalente à
$$\frac{1 - (-z)^5}{1 + z} = 0 \iff z^5 = -1 = e^{i\pi}.$$
Les solutions sont donc les complexes de la forme $e^{i\frac{(1+2k)\pi}{5}}$, $k = 0, \dots, 5$.
5. On commence par écrire :
$$1 + 2z + \dots + 2z^{n-1} + z^n = (1 + z + \dots + z^{n-1}) + (z + \dots + z^n).$$
On reconnait deux sommes géométriques de raison z. Comme $z = 1$ n'est pas solution de l'équation, celle-ci est équivalente à
$$\frac{1 - z^n}{1 - z} + \frac{z - z^{n+1}}{1 - z} = 0 \iff 1 - z^n + z - z^{n+1} = 0 \iff (1 + z)(1 - z^n) = 0.$$
Les solutions sont donc $z = -1$ et les racines n-ièmes de l'unité, excepté 1. Autrement dit, 1 et $e^{2ik\pi/n}$, $k = 1, \dots, n-1$.
6. Remarquons d'abord que $z = i$ n'est pas solution de l'équation. Ainsi, l'équation est équivalente à
$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$
Ceci est équivalent à dire qu'il existe $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que
$$\frac{z+i}{z-i} = \omega_k,$$
en notant $\omega_k = e^{2ik\pi/n}$. Pour $k = 0$, $\omega_k = 1$ et l'équation $\frac{z+i}{z-i} = 1$ n'a pas de solutions. Sinon, pour $k = 1, \dots, n-1$, on obtient les solutions
$$z_k = i\frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1}.$$

Exercice 18 - Degré plus grand ! - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. On commence par poser $u = z^4$, et l'équation devient $iu^2+iu+1+i = 0$. Son discriminant est
$$\Delta = -1 - 4i(1+i) = 3 - 4i.$$
On cherche une racine carrée δ de Δ en posant $\delta = a + ib$, en utilisant $\delta^2 = \Delta$ et $|\delta|^2 = |\Delta| = 5$, et on trouve qu'une des deux racines est $\delta = 2 - i$. Les racines de l'équation $iu^2 + iu + 1 = 0$ sont donc les complexes
$$u_1 = \frac{-i-2+i}{2i} = i \text{ et } u_2 = \frac{-i+2-i}{2i} = -1-i.$$
Reste à résoudre les équations $z^4 = u_1$ et $z^4 = u_2$. Pour cela, on pose $z = re^{i\theta}$ et on remarque que $u_1 = e^{i\pi/2}$ et que $u_2 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$. On en déduit
$$z^4 = e^{i\pi/2} \iff z = e^{i\pi/8+k\pi/2},\ k = 0, \dots, 3;$$
$$z^4 = \sqrt{2}e^{i5\pi/4} \iff z = 2^{1/8}e^{i5\pi/16+k\pi/2},\ k = 0, \dots, 3.$$
2. Soit x une racine réelle, ie $4ix^3+2(1+3i)x^2-(5+4i)x+3(1-7i) = 0$. Partie réelle et partie imaginaire du membre de gauche doivent être nulles, on obtient donc après identification :
$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x^2-5x+3 & = & 0 \\ 4x^3+6x^2-4x-21 & = & 0. \end{array}\right.$$
Il est facile de résoudre la première équation et de vérifier si on obtient une racine de l'autre équation. On trouve que $3/2$ est racine. On factorise alors le polynôme par $z-3/2$, et on trouve (par exemple en procédant par identification) :
$$4iz^3+2(1+3i)z^2-(5+4i)z+3(1-7i) = (z-3/2)\big(4iz^2+2(1+6i)z+2(-1+7i)\big).$$
Reste à résoudre ensuite l'équation :
$$4iz^2+2(1+6i)z+2(-1+7i) = 0$$
dont les solutions sont $-2+\frac{3}{2}i$ et $-1-i$.

Exercice 19 - Somme et puissances de racines n-iemes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

1. Les racines n-ièmes de l'unité sont les complexes ω^k, avec $k = 0, \dots, n-1$. Leur produit vaut donc :
$$\prod_{k=0}^{n-1}\omega^k = \omega^{\sum_{k=0}^{n-1}k} = \omega^{n(n-1)/2} = e^{i\pi(n-1)} = (-1)^{n-1}$$
(résultat qu'on vérifie facilement pour $n = 1, 2, 3, 4$).
2. On a ici une somme géométrique de raison ω^p. Si p est un multiple de n, la raison est donc égale à 1, et la somme fait n. Sinon, on a
$$\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp} = \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega} = 0$$
puisque $\omega^n = 1$.

3. On développe la puissance à l'intérieur de la somme en utilisant la formule du binôme de Newton, et on trouve :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}(1+\omega^k)^n &= \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\omega^{kj}\\ &= \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}.\end{aligned}$$

On utilise le résultat de la question précédente, qui nous dit que la somme $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{kp}$ sera non-nulle si et seulement si $p=0$ ou n, auquel la cas la somme fait n. Puisque $n+n=2n$, on obtient le résultat attendu.

Application au calcul de sommes et à la trigonométrie

Exercice 20 - Linéariser - *L1/Math Sup* - ⋆

On écrit :

$$\begin{aligned}\cos^5 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5\\ &= \frac{1}{32}\left(e^{5ix}+5e^{i3x}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5e^{-i3x}+e^{-i5x}\right)\\ &= \frac{1}{16}\big(\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos x\big).\end{aligned}$$

Le même raisonnement donne

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}\big(\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)\big).$$

Pour la dernière expression, on procède ainsi :

$$\begin{aligned}\cos^2 x\sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3\\ &= \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4}\times\frac{e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}}{-8i}\\ &= \frac{e^{5ix}-e^{3ix}-2e^{ix}+2e^{-ix}+e^{-3ix}-e^{-5ix}}{-32i}\\ &= \frac{2i\sin(5x)-2i\sin(3x)-4i\sin(x)}{-32i}\\ &= \frac{-1}{16}\sin(5x)+\frac{1}{16}\sin(3x)+\frac{1}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

Exercice 21 - Sommes trigonométriques - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(x+ky) &= \Re\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ix}e^{iky}\right)\\
&= \Re\left(e^{ix}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{iy}\right)^k 1^{n-k}\right)\\
&= \Re\left(e^{ix}(1+e^{iy})^n\right)\\
&= \Re\left(e^{ix}e^{iny/2}(e^{-iy/2}+e^{iy/2})^n\right)\\
&= \Re\left(e^{i(x+ny/2)}(2\cos(y/2))^n\right)\\
&= 2^n\cos(x+ny/2)\cos^n(y/2).
\end{aligned}$$

2. On utilise $S+iT$ qui se calcule comme une somme géométrique :

$$S+iT=\sum_{k=0}^{n}\frac{e^{ikx}}{(\cos x)^k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^k.$$

On distingue deux cas :
– Si $x=0\ [\pi]$, alors $\frac{e^{ix}}{\cos x}=1$, et $S+iT=n+1$. On en déduit $S=n+1$ et $T=0$.
– Si $x\neq 0\ [\pi]$, alors

$$\begin{aligned}
S+iT &= \frac{1-\left(\frac{e^{ix}}{\cos x}\right)^{n+1}}{1-\frac{e^{ix}}{\cos x}}\\
&= \frac{1}{(\cos x)^n}\times\frac{(\cos x)^{n+1}-e^{ix(n+1)}}{\cos x-e^{ix}}\\
&= \frac{1}{(\cos x)^n}\times\frac{\cos^{n+1}(x)-\cos\left((n+1)x\right)-i\sin\left((n+1)x\right)}{-i\sin(x)}\\
&= \frac{\sin\left((n+1)x\right)}{\cos^n(x)\sin(x)}+i\frac{\cos^{n+1}(x)-\cos\left((n+1)x\right)}{\cos^n x\sin x}.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$S=\frac{\sin\left((n+1)x\right)}{\cos^n(x)\sin(x)}\text{ et }T=\frac{\cos^{n+1}(x)-\cos\left((n+1)x\right)}{\cos^n x\sin x}.$$

3. D_n est une somme géométrique, de premier terme e^{-inx} et de raison $e^{ix}\neq 1$. On obtient donc

$$D_n=\frac{e^{-inx}+e^{i(n+1)x/2}}{1-e^{ix}}=\frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2}}\times\frac{e^{-i(n+1/2)x}-e^{i(n+1/2)x}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}}.$$

On en déduit que

$$D_n=\frac{sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin(x/2)}.$$

Pour calculer K_n, une méthode (légèrement différente de celle de la question précédente) est d'écrire que $\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)=\Im m\left(e^{i(n+1/2)x}\right)$, puis d'utiliser une somme géométrique.

On a en effet :

$$\begin{aligned}
K_n &= \frac{1}{\sin(x/2)}\Im m\left(\sum_{k=0}^{n} e^{i(k+1/2)x}\right)\\
&= \frac{1}{\sin(x/2)}\Im m\left(e^{ix/2}\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right)\\
&= \frac{1}{\sin(x/2)}\Im m\left(e^{ix/2}\frac{1-e^{i(n+1)x/2}}{1-e^{ix}}\right)\\
&= \frac{1}{\sin(x/2)}\Im m\left(e^{ix/2}\frac{e^{i(n+1)x/2}\sin((n+1)x/2)}{e^{ix/2}\sin(x/2)}\right)\\
&= \frac{\sin^2\left((n+1)x/2\right)}{\sin^2(x/2)}.
\end{aligned}$$

Exercice 22 - Somme de modules - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit $k\in\{0,n-1\}$ et soit $\omega_k=e^{2ik\pi/n}$. Alors

$$|\omega_k-1|=|e^{i2k\pi/n}-e^{i0}|=2|\sin(k\pi/n)|$$

en factorisant par l'angle moitié. De plus, pour $k\in\{0,\dots,n-1\}$, $k\pi/n\in[0,\pi]$ et le sinus est positif. On en déduit

$$\begin{aligned}
\sum_{z\in\mathbb{U}_n}|z-1| &= 2\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k\pi/n)\\
&= 2\Im m\left(\sum_{k=0}^{n-1}e^{ik\pi/n}\right)\\
&= 4\Im m\left(\frac{1}{1-e^{i\pi/n}}\right)\\
&= 4\Im m\left(\frac{1}{-2i\sin(\pi/n)e^{i\pi/n}}\right)\\
&= 2\Im m\left(\frac{ie^{i\pi/n}}{\sin(\pi/n)}\right)\\
&= 2\frac{\cos(\pi/n)}{\sin(\pi/n)}.
\end{aligned}$$

Exercice 23 - Calcul d'un cosinus - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

La somme des racines 5−ièmes de l'unité est nulle. On a donc

$$1+e^{2i\pi/5}+e^{i4\pi/5}+e^{i6\pi/5}+e^{i8\pi/5}=0.$$

Or,

$$e^{i8\pi/5}=e^{-2i\pi/5}\text{ et }e^{4i\pi/5}=e^{6i\pi/5}.$$

Utilisant les formules d'Euler, on en déduit que

$$1+2\cos(2\pi/5)+2\cos(4\pi/5)=0.$$

Or,

$$\cos(4\pi/5) = 2\cos^2(2\pi/5) - 1,$$

ce qui donne

$$4\cos^2(2\pi/5) + 2\cos(2\pi/5) - 1 = 0.$$

$\cos(2\pi/5)$ est donc une racine de l'équation $4X^2 + 2X - 1 = 0$. Le discriminant de ce polynôme du second degré est $\Delta = 20$, et ses racines sont

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \text{ et } x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Puisque $\cos(2\pi/5) > 0$, on en déduit que

$$\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Exercice 24 - Un calcul d'intégrale - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On linéarise les fonctions trigonométriques à l'aide des nombres complexes :

$$\begin{aligned}\cos^4 t \sin^2 t &= \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^4 \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^2\\ &= \frac{-1}{2^6}\left(e^{i4t}+4e^{i2t}+6+4e^{-i2t}+e^{-i4t}\right)\left(e^{2it}-2+e^{-2it}\right)\\ &= \frac{-1}{2^6}\left(e^{i6t}+2e^{i4t}+e^{i2t}-4+e^{i2t}+2e^{i4t}+e^{i6t}\right)\\ &= \frac{-1}{2^5}\left(\cos(6t)+2\cos(4t)+\cos(2t)-2\right).\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\cos^4 t\sin^2 t &= \frac{-1}{2^5}\int_0^{2\pi}\cos 6t + 2\cos 4t + \cos 2t - 2dt\\ &= \frac{\pi}{32}.\end{aligned}$$

Nombres complexes et géométrie

Exercice 25 - Similitude - *L1/Math Sup* - ⋆

L'application de la forme $z \mapsto az+b$ est une similitude directe. Cherchons son centre qui est le point invariant, c'est-à-dire le point vérifiant $z = (1+i\sqrt{3})z + \sqrt{3}(1-i)$. On trouve $z = 1+i$, le centre de la similitude est donc le point $A(1,1)$. On a de plus

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\pi/3}.$$

Le rapport de la similitude est donc égal à 2, et l'angle à $\pi/3$.

Exercice 26 - Lieux géométriques - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. Factorisons par $1+i$ dans le module. On trouve :
$$|1+i|\left|z-\frac{2i}{1+i}\right|=2.$$
Puisque $|1+i|=\sqrt{2}$ et $\frac{2i}{1+i}=1+i$, ceci est équivalent à
$$\big|z-(1+i)\big|=\sqrt{2}.$$
Ainsi, l'ensemble des points M correspondants est le cercle de centre le point $A(1,1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
2. On sait que les points I, M et M' sont alignés si et seulement si
$$(I\vec{M},I\vec{M}')=0[\pi] \text{ ou } M=I \text{ ou } M'=I.$$
En termes de nombres complexes, ceci se traduit par
$$\arg\left(\frac{iz-i}{z-i}\right)=0\ [\pi] \text{ ou } z=i \text{ ou } iz=i.$$
Introduisons le point A d'affixe 1. Alors, ceci devient
$$\frac{\pi}{2}+\arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right)=0\ [\pi] \text{ ou } M=I \text{ ou } M=A$$
$$\iff (I\vec{M},A\vec{M})=-\frac{\pi}{2}\ [\pi] \text{ ou } M=I \text{ ou } M=A$$
$$\iff (IM)\perp(AM) \text{ ou } M=I \text{ ou } M=A.$$
Les points M solutions sont donc les points du cercle de diamètre $[AI]$. Puisque M' est image de M par rotation de centre O et d'angle $\pi/2$, les points M' correspondants sont sur l'image de ce cercle par cette rotation.
3. Notons A d'affixe 1 et I d'affixe i. La question s'écrit encore
$$\frac{z-1}{z-i}=ia,\ \text{avec } a\in\mathbb{R},$$
c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont orthogonaux. Autrement dit, la condition est vérifiée si et seulement si M appartient au cercle de diamètre $[AI]$, excepté I (on doit avoir $z\neq i$ pour définir le quotient).
4. On va d'abord supposer que $z\neq 0,1,-1$ pour que les trois points M,P,Q soient distincts et qu'on soit sûr d'avoir affaire à un vrai triangle. On va utiliser la condition suivante : soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$. Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si
$$\exists m\in\mathbb{R},\ \frac{c-a}{b-a}=mi \iff \Re e\left(\frac{c-a}{b-a}\right)=0.$$
On distingue alors trois cas :

(a) le triangle est rectangle en M. Ceci est équivalent à

$$\Re e\left(\frac{z^3-z}{z^2-z}\right)=0 \iff \Re e(z+1)=0 \iff \Re e(z)=-1.$$

Les points M solutions sont alors ceux de la droite d'équation $x=-1$.

(b) le triangle est rectangle en P. Ceci est équivalent à

$$\Re e\left(\frac{z^3-z^2}{z-z^2}\right)=0 \iff \Re e(z)=0.$$

Les points M solutions sont alors ceux de la droite d'équation $x=0$.

(c) le triangle est rectangle en Q. Ceci est équivalent à

$$\Re e\left(\frac{z-z^3}{z^2-z^3}\right)=0 \iff \Re e\left(\frac{z+1}{z}\right)=0.$$

Notons D d'affixe -1 et O d'affixe 0. On obtient que les droites (DM) et (OM) sont orthogonales, c'est-à-dire que M décrit le cercle de diamètre $[OD]$.

Exercice 27 - Points à coordonnées entières - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

On note $a=x+iy$ et $b=x'+iy'$ les affixes respectives de A et B. Par hypothèse, x, x', y et y' sont des entiers. Puisque $ABCD$ est un carré, D est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$. Traduit en termes de nombres complexes, si d est l'affixe de D, ceci signifie que

$$d-a=i(b-a) \implies d=a+i(b-a)=x+iy+i\big((x'-x)+i(y'-y)\big)=x+y-y'+i(y+x'-x).$$

Ainsi, les coordonnées de D sont bien des entiers. Pour prouver que les coordonnées de C sont des entiers, on procède de la même façon, en utilisant cette fois le fait que C est l'image de A dans la rotation de centre D et d'angle $\pi/2$.

Imaginons maintenant que ABC soit un triangle équilatéral dont les trois sommets sont à coordonnées entières, et gardons les notations précédentes. Alors, C, d'affixe $c=x''+iy''$ est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$. Autrement dit,

$$c-a=e^{i\pi/3}(b-a) \implies c=(x+iy)+\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\big((x'-x)+i(y'-y)\big).$$

On développe, et après calcul, on trouve que

$$c=x+\frac{x-x'}{2}-\frac{\sqrt{3}(y'-y)}{2}+i\left(y+\frac{y'-y}{2}+\frac{\sqrt{3}(x'-x)}{2}\right).$$

Pour que la partie réelle de c soit un entier, il est nécessaire que $y=y'$ et pour que la partie imaginaire de c soit nulle, il est nécessaire que $x=x'$. Finalement, ceci entraine $A=B$, c'est-à-dire que le triangle est réduit à un point !

Exercice 28 - Triangle équilatéral - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

1. C est l'image de B par la rotation de centre A et d'angle $\pi/3$. On a donc
$$\frac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3} = -j^2 \iff c - a + j^2 b - j^2 a = 0.$$
Or, $1 + j^2 = -j$ et en multipliant par j^2, on obtient le résultat voulu.
2. Quitte à échanger les rôles de B et C, on peut toujours supposer que le triangle est direct, c'est-à-dire que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est dans $]0,\pi[$. Notons $AC'B$, $BA'C$ et $CB'A$ les triangles équilatéraux directs obtenus. Soient aussi a', b', c' les affixes respectives de A', B' et C'. Alors, par la question précédente, on a les 3 équations :
$$\left\{\begin{array}{rcl} a + jc' + j^2 b &=& 0\\ b + ja' + j^2 c &=& 0\\ c + jb' + j^2 a &=& 0. \end{array}\right.$$
Soit E, F, G les centres de gravité respectifs de $AC'B$, BAC' et $CB'A$, d'affixe respectives $e = \frac{1}{3}(a + c' + b)$, $f = \frac{1}{3}(b + a' + c)$ et $g = \frac{1}{3}(c + b' + a)$. D'après la question précédente, il suffit de prouver que $e + jf + j^2 g = 0$. Or,
$$3(e + jf + j^2 g) = a + c' + b + jb + ja' + jc + j^2 c + j^2 b' + j^2 a.$$
Or, $c' = -j^2 a - b$, $ja' = -b - j^2 c$ et $j^2 b' = -jc - a$, ce qui prouve bien que $e + jf + j^2 g = 0$. Le triangle EFG est équilatéral direct.

Exercice 29 - Triangle équilatéral - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Le triangle est équilatéral si et seulement si
$$z_3 - z_1 = e^{i\pi/3}(z_2 - z_1) \text{ ou } z_3 - z_1 = e^{-i\pi/3}(z_2 - z_1),$$
c'est-à-dire si et seulement si
$$z_3 - (1 + e^{i\pi/3})z_1 - e^{i\pi/3} = 0 \text{ ou } z_3 - (1 + e^{-i\pi/3})z_1 - e^{-i\pi/3} = 0.$$
Ceci est encore équivalent à dire que le produit de ces deux quantités est nul, c'est-à-dire à
$$(z_3 - (1 + e^{i\pi/3})z_1 - e^{i\pi/3} z_2)(z_3 - (1 + e^{-i\pi/3})z_1 - e^{-i\pi/3} z_2) = 0.$$
En développant ce produit, on trouve exactement la condition demandée.

Exercice 30 - A partir des racines n-ièmes - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Posons $a = e^{i\theta}$. Alors les racines de $z^n = 1$ sont données par $z_k = e^{(2ik\pi+\theta)/n}$, $k = 0, \dots, n-1$. Factorisant par l'angle moitié et utilisant les formules d'Euler, on a
$$1 + z_k = 2\cos\left(\frac{2k\pi + \theta}{2n}\right) e^{i(2k\pi+\theta)/2n}$$
soit
$$(1 + z_k)^n = 2^n \cos^n\left(\frac{2k\pi + \theta}{2n}\right) e^{i(2k\pi+\theta)/2} = 2^n \cos^n\left(\frac{2k\pi + \theta}{2n}\right) e^{i(k\pi+\theta/2)}.$$
Tous les points d'affixe $(1 + z_k)^n$ sont donc situés sur la droite qui fait un angle $\theta/2$ avec l'axe des abscisses.

Exercice 31 - Alignement de puissances - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

On commence par étudier les cas où deux de ces points sont confondus. L'équation $z = z^2$ a pour solution $z = 1$ et $z = 0$. L'équation $z = z^4$ a pour solutions $z = 0$ et $z = 1, j, j^2$. L'équation $z^2 = z^4$ a pour solutions $z = 0, i, -i$. On suppose désormais que z est différent des nombres précédemment trouvés, et on remarque que les points sont alignés si et seulement si

$$\arg\left(\frac{z^4 - z}{z^2 - z}\right) = 0\ [\pi] \iff \frac{z^4 - z}{z^2 - z} \in \mathbb{R}.$$

Or, en notant $z = x + iy$, on a

$$\frac{z^4 - z}{z^2 - z} = \frac{z(z-1)(z^2 + z + 1)}{z(z-1)} = z^2 + z + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + iy(2x + 1).$$

Ainsi, on en déduit que, dans ce cas, les points z, z^2 et z^4 sont alignés si et seulement si $y = 0$ ou $x = -1/2$, c'est-à-dire si et seulement si z est réel ou sa partie réelle vaut $-1/2$.