Feuille 5 : Nombres complexes

Exercice 5-1 Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{0, -3\} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = \dfrac{z^2-1}{z(z+3)}$.
Calculer $f(1-i)$ et $f(1+i)$.

Solution

$$f(1-i) = \frac{-1-2i}{3-5i} = \frac{(-1-2i)(3+5i)}{(3-5i)(3+5i)} = \frac{7-11i}{34} = \overline{f(1+i)}.$$

Exercice 5-2 Calculer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe

$$z = \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

Solution

$$\begin{aligned} z &= \frac{1+im}{2m+i(m^2-1)} = \frac{(1+im)(2m-i(m^2-1))}{(2m)^2+(m^2-1)^2} = \frac{2m-im^2+i+2im^2+m^3-m}{4m^2+m^4+1-2m^2} \\ &= \frac{m^3+im^2+m+i}{(m^2+1)^2} = \frac{m^2(m+i)+(m+i)}{(m^2+1)^2} = \frac{(m^2+1)(m+i)}{(m^2+1)^2} = \frac{m+i}{m^2+1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{m}{m^2+1}$ et $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{m^2+1}$.

Exercice 5-3 Calculer le module et un argument de $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

Solution

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3})^2+1^2} = \frac{\sqrt{3}-i+3i+\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}+2i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

Exercice 5-4 Calculer le module et un argument de $u = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1-i$.
En déduire le module et un argument de $\dfrac{u}{v}$.

Solution

$$|u| = \frac{|\sqrt{6}-i\sqrt{2}|}{2} = \frac{\sqrt{6+2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \frac{\sqrt{4\times 2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$u = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2\times 3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}-i\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

Donc $|u| = \sqrt{2}$ et un argument de u est $-\frac{\pi}{6}$.

$$|v| = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$v = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Donc $|v| = \sqrt{2}$ et un argument de v est $-\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\frac{\pi}{12}}$$

Donc $\left|\frac{u}{v}\right| = 1$ et un argument de $\frac{u}{v}$ est $\frac{\pi}{12}$.

Exercice 5-5 Déterminer et représenter dans le plan $\mathbb{R}^2$ les ensembles de nombres complexes suivants :

1. $\{z \in \mathbb{C} \mid |1-z| \leq \frac{1}{2}\}$
2. $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(1-z) \leq \frac{1}{2}\}$
3. $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(iz) \leq \frac{1}{2}\}$
4. $\{z \in \mathbb{C} \mid \left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2\}$
5. $\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2\}$

Solution

1. L'ensemble des points d'affixe $z \in \mathbb{C}$, tels que $|1-z| \leq \frac{1}{2}$ est le cercle de centre Ω d'affixe 1 et de rayon $\frac{1}{2}$.
2. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels
$$1 - z = 1 - x - iy$$
$$\mathcal{Re}(1-z) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$$
L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe à droite de la droite verticale $x = \frac{1}{2}$.
3. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels
$$iz = i(x+iy) = -y + ix$$
$$\mathcal{Re}(iz) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow -y \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow y \geq -\frac{1}{2}$$
L'ensemble des solutions est le demi-plan complexe au-dessus de la droite horizontale $y = -\frac{1}{2}$
4. On pose $z = x + iy$ avec x et y réels
$$\left|1 - \frac{1}{z}\right|^2 = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-1}{z}\right|^2 = 2 \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2|z|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 2(x^2+y^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow 1 = x^2 + 2x + y^2 \Leftrightarrow 1 = (x+1)^2 - 1 + y^2$$
$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + y^2 = 2$$
L'ensemble des solutions est le cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
5.
$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{z-3}{z+3}\right|^2 = 4 \Leftrightarrow |z-3|^2 = 4|z+3|^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4((x+3)^2 + y^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 4(x^2 + 6x + 9 + y^2) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2$$
$$= 4x^2 + 24x + 36 + 4y^2 \Leftrightarrow 0 = 3x^2 + 30x + 27 + 3y^2 \Leftrightarrow 0 = x^2 + 10x + 9 + y^2$$
$$\Leftrightarrow 0 = (x+5)^2 - 25 + 9 + y^2 \Leftrightarrow 16 = (x+5)^2 + y^2$$
L'ensemble des solutions est le cercle de centre $(-5,0)$ et de rayon 4.

Exercice 5-6 Montrer que tout nombre complexe $z \neq 1$ de module 1 s'écrit sous la forme $\frac{x+i}{x-i}$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Solution

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ de module 1. On a que $a^2 + b^2 = 1$. On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $a + ib = \frac{x+i}{x-i}$. Comme $x \neq i$ en multipliant la dernière égalité par $x - i$ on obtient $ax + ixb - ia + b = x + i$, d'où le système

$$\begin{cases} ax + b - x = 0 \\ xb - a - 1 = 0 \end{cases}.$$

dont une solution est $x = \frac{b}{1-a}$. On remarque que $1 - a \neq 0$ car $z = 1$ est le seul nombre complexe de module

1 avec $a = 1$. Donc tout nombre complexe $z = a + ib \neq 1$ de module 1, s'écrit sous la forme $z = \frac{\frac{b}{1-a} + i}{\frac{b}{1-a} - i}$.
Par exemple, on vérifie facilement que $-1 = \frac{i}{-i}$, $(-1 = -1 + i0)$.

<u>**Exercice 5-7**</u> Résoudre de deux façons différentes l'équation

$$z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{8}$ et de $\sin\frac{\pi}{8}$.
<u>*Solution*</u>

1. On cherche les complexes Z tels que

$$Z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On pose $Z = a + ib$,

$$Z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = (a+ib)^2 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

On rajoute l'équation

$$|Z^2| \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \ L_3$$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 + b^2 = 1 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations L_1 et L_3, on trouve

$$2a^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow a^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

En faisant la différence de L_3 et de L_1

$$2b^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow b^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

Les valeurs possibles de a sont $\pm\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et les valeurs possibles de b sont $\pm\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, d'après l'équation $2ab = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow ab = \frac{\sqrt{2}}{4}$, on en déduit que $ab > 0$ et que donc a et b sont de même signe.

Si $a = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_1 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
Et si $a = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ alors $b = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et $Z_2 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
D'autre part

$$Z^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Admet deux solutions $Z_3 = e^{i\frac{\pi}{8}} = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $z_4 = -e^{i\frac{\pi}{8}} = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

Comme $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$ et que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \end{cases}$$

Exercice 5-8

1. En utilisant la formule de Moivre, déterminer la forme trigonométrique de $(1+i)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une expression simple de $(1+i)^n + (1-i)^n$.

Solution

1. $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$, on en déduit que

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n$$

D'après la formule de Moivre $\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^n = e^{\frac{ni\pi}{4}}$, par conséquent

$$(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{ni\pi}{4}}$$

2

2. $(1-i)^n = \left(\overline{1+i}\right)^n = \left(\overline{1+i}\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{ni\pi}{4}}$, donc

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n}{2}}e^{\frac{ni\pi}{4}} + 2^{\frac{n}{2}}e^{-\frac{ni\pi}{4}} = 2^{\frac{n}{2}}\left(e^{\frac{ni\pi}{4}} + e^{-\frac{ni\pi}{4}}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \times 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n+2}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Exercice 5-9

1. Calculer les racines carrées des nombres complexes :

$$a)\ z_1 = 7 + 24i, \qquad b)\ z_2 = 9 + 40i, \qquad c)\ z_3 = 1 + i.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$a)\ z^2 = -2\sqrt{3} + 2i, \qquad b)\ z^2 = 3 - 4i.$$

Solution

a. Soient a et b deux réels tels que :

$$(a+i)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 7 + 24i$$

En identifiant les parties réels et imaginaires

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2ab = 24 \end{cases}$$

En prenant le module de $(a+i)^2 = 7 + 24i$, on trouve

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = \sqrt{7^2 + 24^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25 \ \ L_3$$

En calculant $L_1 + L_3$, on obtient $2a^2 = 32$, par conséquent $a^2 = 16$ et $a = \pm 4$

9

En calculant $L_3 - L_1$, on obtient $2b^2 = 18$, par conséquent $b^2 = 9$ et $b = \pm 3$

La ligne L_2 montre que a et b sont de même signe, les racines de $7 + 24i$ sont

$$4 + 3i \quad \text{et} \quad -4 - 3i = -(4 + 3i)$$

b. Soient a et b deux réels tels que :

$$(a+i)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 9 + 40i$$

En identifiant les parties réels et imaginaires

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = 9 \\ 2ab = 40 \end{cases}$$

En prenant le module de $(a+i)^2 = 9 + 40i$, on trouve

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = \sqrt{9^2 + 40^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{81 + 1600} = \sqrt{1681} = 41 \ \ L_3$$

En calculant $L_1 + L_3$, on obtient $2a^2 = 50$, par conséquent $a^2 = 25$ et $a = \pm 5$

En calculant $L_3 - L_1$, on obtient $2b^2 = 32$, par conséquent $b^2 = 16$ et $b = \pm 4$

La ligne L_2 montre que a et b sont de même signe, les racines de $9 + 40i$ sont

$$5 + 4i \quad \text{et} \quad -5 - 4i = -(5 + 4i)$$

c. Soient a et b deux réels tels que :

$$(a+i)^2 = a^2 - b^2 + 2iab = 1 + i$$

En identifiant les parties réels et imaginaires

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

En prenant le module de $(a+i)^2 = 1 + i$, on trouve

$$\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = \sqrt{1^2 + 1^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{2} \ \ L_3$$

En calculant $L_1 + L_3$, on obtient $2a^2 = 1 + \sqrt{2}$, par conséquent $a^2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ et $a = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

En calculant $L_3 - L_1$, on obtient $2b^2 = \sqrt{2} - 1$, par conséquent $b^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$ et $b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$

La ligne L_2 montre que a et b sont de même signe, les racines de $1 + i$ sont

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = -\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\right)$$

a. On utiliser la même méthode que précédemment mais dans cet exemple il y a mieux

$$z^2 = -2\sqrt{3} + 2i = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 4\,e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Donc $z = \pm 2e^{\frac{i\pi}{3}}$

b. Utilisons une « petite ruse »

$$z^2 = 3 - 4i = 4 - 2 \times 2i - 1 = 2^2 - 2 \times 2i + i^2 = (2-i)^2$$

Donc $z = \pm(2-i)$

Exercice 5-10 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z + iz^2 + 6i - 5iz - 2 = 0$.
2. $2z^2 + (5+i)z + 2 + 2i = 0$.
3. $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.
4. $z^3 + 3z - 2i = 0$.
5. $(1+2i)z^2 - (9+3i)z - 5i + 10 = 0$.

Solution

$$\Delta = (1-5i)^2 - 4i(6i-2) = 1 - 10i - 25 + 24 + 8i = -2i = 1 - 2i - 1 = (1-i)^2$$

Les racines de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-(1-5i)-(1-i)}{2i} = \frac{-2+6i}{2i} = -\frac{1}{i} + 3 = i + 3 = 3 + i$$

Car $\frac{1}{i} = -i$

Et

$$z_2 = \frac{-(1-5i)+(1-i)}{2i} = \frac{4i}{2i} = 2$$

2.

$$\Delta = (5+i)^2 - 4 \times 2(2+2i) = 25 + 10i - 1 - 16 - 16i = 8 - 6i = 9 - 2 \times 3i - 1$$
$$= 3^2 - 2 \times 3i + i^2 = (3-i)^2$$

Les racines de l'équation sont

$$z_1 = \frac{-(5+i)-(3-i)}{4} = -\frac{8}{4} = -2$$

Et

$$z_2 = \frac{-(5+i)+(3-i)}{4} = \frac{-2-2i}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

4. On pose $Z = z^2$, $Z^2 + 10Z + 169 = 0$ a pour discriminant

$$\Delta = 10^2 - 4 \times 169 = 10^2 - (2 \times 13)^2 = (10-26)(10+26) = -16 \times 36 = -4^2 \times 6^2 = (24i)^2$$

$$Z_1 = \frac{-10+24i}{2} = -5 + 12i$$
$$Z_2 = \frac{-10-24i}{2} = -5 - 12i$$

On cherche $z = a + ib$ tel que

$$z^2 = Z_1 \Leftrightarrow (a+ib)^2 = -5 + 12i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -5 + 12i$$
$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}\begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = 12 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13 \end{cases}$$

En faisant la somme de L_1 et de L_3, on trouve que $2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$,
En faisant la différence de L_3 et de L_1, on trouve que $2b^2 = 18 \Leftrightarrow b^2 = 9 \Leftrightarrow b = \pm 3$,
D'après L_2, a et b sont de même signe donc $z^2 = Z_1$ a deux solutions

$$z_1 = 2 + 3i \quad et \quad z_2 = -2 - 3i$$

On peut résoudre de la même façon $Z_2 = z^2$ ou dire que $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ est une équation à coefficients réels et que donc si une racine complexe est solution alors son conjugué est aussi solution, par conséquent $\overline{z_1} = 2 - 3i$ et $\overline{z_2} = -2 + 3i$ sont aussi solution, ce qui donne 4 solutions pour une équation de degré 4, il n'y en a pas plus, on les a toutes.

7. On voit que i est une solution évidente (car $i^3 + 3i - 2i = 0$) donc on peut mettre $z - i$ en facteur.

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow z^3 + 3z - 2i = az^3 + (-ia + b)z^2 + (-ib + c)z - ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -ia + b = 0 \\ -ib + c = 3 \\ -ic = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = ia = i \\ c = 3 + ib = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$z^3 + 3z - 2i = (z - i)(z^2 + iz + 2)$$

Le discriminant de $z^2 + iz + 2$ est $\Delta = i^2 - 4 \times 2 = -9 = (3i)^2$

Il y a deux solutions

$$z = \frac{-i - 3i}{2} = -2i \quad \text{et} \quad z = \frac{-i + 3i}{2} = i$$

Il y a donc deux solutions, $z_1 = i$ et $z_2 = -2i$.

9.

$$\begin{aligned} \Delta = \left(-(9 + 3i)\right)^2 - 4(1 + 2i)(-5i + 10) &= (3(3 + i)^2) - 4(-5i + 10 + 10 + 20i) \\ &= 9(9 - 1 + 6i) - 4(-25) = 9(8 + 6i) - 4(20 + 15i) = 72 + 54i - 80 - 60i \\ &= -8 - 6i \end{aligned}$$

On pose $\delta = a + ib$,

$\Delta = \delta^2 \Leftrightarrow -8 - 6i = (a + ib)^2 \Leftrightarrow -8 - 6i = a^2 - b^2 + 2iab \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases}$

On rajoute l'équation $|\Delta| = |\delta^2| \Leftrightarrow |-8 - 6i| = a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{64 + 36} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = \sqrt{100} = 10$

Avec le système $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$, en faisant la somme des deux équations, on trouve $2a^2 = 2 \Leftrightarrow a^2 = 1$, d'où l'on tire $b^2 = 9$. Les valeurs possibles de a sont ± 1 et les valeurs possibles de b sont ± 3, d'après l'équation $2ab = -6 \Leftrightarrow ab = -3$, on en déduit que $ab < 0$ et que donc a et b sont de signe opposé.

Si $a = 1$ alors $b = -3$ et $\delta = 1 - 3i$ et si $a = -1$ alors $b = 3$ et $\delta = -1 + 3i$

Exercice 5-11

1. Représenter dans le plan complexe $\mathbb{C}$ les 6 racines 6-èmes de 1, et les racines 4-èmes de -1.
2. Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les $n-1$ solutions complexes de $1 + z + \cdots + z^{n-1} = 0$.

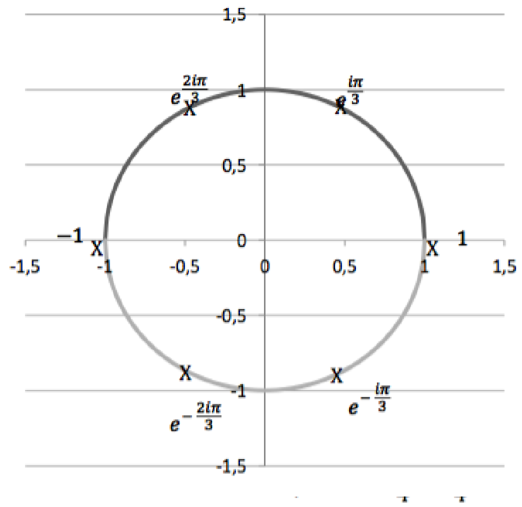
Solution

1. $z^6 = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,2,3,4,5\}, z = e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}}$

   Il y a donc six racines :

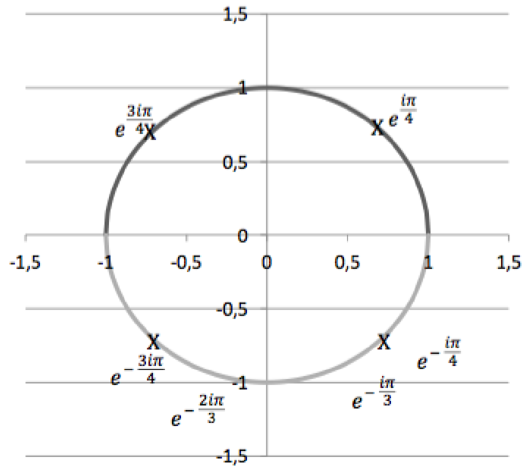
   $$z_0 = 1; z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}; z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}}; z_3 = e^{\frac{3i\pi}{3}} = e^{i\pi} = -1; z_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = e^{-\frac{2i\pi}{3}} = \overline{z_2} \text{ et } z_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = \overline{z_1}$$

3



Il y a donc 4 solutions

$$z_0 = e^{\frac{i\pi}{4}}; z_1 = e^{\frac{3i\pi}{4}}; z_2 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}} = \overline{z_2} \text{ et } z_3 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}} = \overline{z_1}$$



2. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

   $$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

   Les racines du polynôme complexe $1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ sont les racines n-ièmes de l'unité privées de 1, c'est-à-dire

4

$$\left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \{1,2,\ldots,n\} \right\}$$

Exercice 5-12

1. Déterminer les racines cubiques de 1.
2. On note $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Exprimer toutes les racines cubiques de 1 en fonction de j.

Solution

Les racines 3èmes de 1 sont $\{e^{\frac{2ki\pi}{3}} \mid k = 0,1,2\}$. On remarque que $j = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, $j^2 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$, et $j^3 = 1$.

De plus $1 + j + j^2 = 1 + \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} + \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \dfrac{2-1+i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}}{2} = 0$.

Exercice 5-13

1. Donner les solutions complexes de $z^4 = 1$.
2. Résoudre $z^4 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Résoudre $z^8 + \left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) z^4 - \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

Solution

1. Les racines quatrième de l'unité sont $\{1, i, -1, -i\}$.
2. $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$ donc

$$z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow X^4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^4| = \left|e^{\frac{4i\pi}{3}}\right| \\ \arg(X^4) = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^4 = 1 \\ 4\arg(X) = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{k\pi}{2}, \quad k \in \{0,1,2,3\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}\right)}, k \in \{0,1,2,3\}$$

Il y a quatre solutions :

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{\frac{5i\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)} = e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)} = e^{\frac{11i\pi}{6}} = e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Autre solution

$-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} = j^2$. Donc $z^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = j^2 \Leftrightarrow z^4 - j^2 = 0$. Or

$$z^4 - j^2 = (z^2 - j)(z^2 + j) = (z^2 - j^4)(z^2 - i^2 j^4) = (z - j^2)(z + j^2)(z - ij^2)(z + ij^2)$$

D'où les solutions :

$z = j^2 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$, $z = i\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ et $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$

Exercice 5-14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^5 - z = 0$.
2. $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.
3. $\bar{z}^7 = \dfrac{1}{z^2}$.
4. $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$.

Solution

1. $z^5 - z = 0 \Leftrightarrow z(z^4-1) = 0 \Leftrightarrow z(z^2-1)(z^2+1) = 0 \Leftrightarrow z(z-1)(z+1)(z-i)(z+i) = 0 \Leftrightarrow$ $z \in \{0,1,-1,i,-i\}$
2.

$$27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^6 = -27(z-1)^6 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27$$

16

On pose $X = \frac{z+1}{z-1}$ et on va résoudre $X^6 = -27$

$$X^6 = -27 \Leftrightarrow \begin{cases} |X^6| = |-27| \\ \arg(X^6) = \arg(-27) + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^6 = 27 = 3^3 \\ 6\arg(X) = \pi + 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = (3^3)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ \arg(X) = \dfrac{\pi + 2k\pi}{6} = \dfrac{(2k+1)\pi}{6}, & k \in \{0,1,2,3,4,5\} \end{cases}$$

Il y a donc 6 solutions

$$X_k = \sqrt{3}e^{\frac{(2k+1)\pi}{6}}, k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

Il reste à trouver les solutions de $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$, soit z_k une solution

$$X_k = \frac{z_k+1}{z_k-1} \Leftrightarrow X_k(z_k-1) = z_k+1 \Leftrightarrow X_k z_k - X_k = z_k + 1 \Leftrightarrow X_k z_k - z_k = X_k + 1 \Leftrightarrow (X_k-1)z_k$$
$$= X_k + 1 \Leftrightarrow z_k = \frac{X_k+1}{X_k-1}$$

Avec $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

L'énoncé ne précise pas sous quelle forme doivent être mise les solutions, si on les veut sous forme algébrique, il faut aller plus loin

$$z_k = \frac{X_k+1}{X_k-1} = \frac{(X_k+1)(\overline{X_k}-1)}{(X_k-1)(\overline{X_k}-1)} = \frac{|X_k|^2 - X_k + \overline{X_k} - 1}{|X_k|^2 - X_k - \overline{X_k} + 1} = \frac{3 - (X_k - \overline{X_k}) - 1}{3 - (X_k + \overline{X_k}) + 1} = \frac{2 - 2iIm(X_k)}{4 - 2Re(X_k)}$$
$$= \frac{1 - iIm(X_k)}{2 - Re(X_k)} = \frac{1 - i\sqrt{3}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)}{2 - \sqrt{3}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)}$$

Puis remplacer k par 0, puis par 1, etc…

3.

$$\bar{z}^7=\frac{1}{z^2}\Leftrightarrow\begin{cases}|\bar{z}^7|=\left|\frac{1}{z^2}\right|\\ \arg(\bar{z}^7)=\arg\left(\frac{1}{z^2}\right)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|\bar{z}|^7=\left|\frac{1}{z}\right|^2\\ 7\arg(\bar{z})=-2\arg(z)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^7=\frac{1}{|z|^2}\\ -7\arg(z)=-2\arg(z)+2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^9=1\\ -5\arg(z)=2k\pi,\ \ k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=1\\ \arg(z)=-\frac{2k\pi}{5},\ \ k\in\{0,1,2,3,4\}\end{cases}$$

Il y a 5 solutions

$$\left\{e^{-\frac{2ki\pi}{5}},\qquad k\in\{0,1,2,3,4\}\right\}$$

4. $z^6-(3+2i)z^3+2+2i=0$, on pose $X=z^3$ et on résous

$$X^2-(3+2i)X+2+2i=0$$

$$\Delta=(3+2i)^2-4(2+2i)=9+12i-4-8-8i=-3+4i=-4+2\times 2i+1=(2i+1)^2$$

Il y a deux solutions

$$X_1=\frac{3+2i-(2i+1)}{2}=1\quad\text{et}\quad X_2=\frac{3+2i+2i+1}{2}=2+2i$$

Il reste à résoudre $z^3=1$ et $z^3=2+2i$

$$z^3=1\Leftrightarrow\exists k\in\{0,1,2\},z=e^{\frac{2ik\pi}{3}}$$

Car ce sont les racines troisième de l'unité, cela donne trois solutions

$$\left\{1,e^{\frac{2i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$z^3=2+2i\Leftrightarrow\begin{cases}|z^3|=|2+2i|\\ \arg(z^3)=\arg(2+2i)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$|2+2i|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=(2^3)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$$

$$2+2i=2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}+i\frac{2}{2^{\frac{3}{2}}}\right)=2^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{i\pi}{4}}$$

$$z^3=2+2i\Leftrightarrow\begin{cases}|z|^3=2^{\frac{3}{2}}\\ 3\arg(z)=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|z|=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\\ \arg(z)=\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3},k\in\{0,1,2\}\end{cases}$$

Cela donne trois solutions de plus

$$\left\{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}},\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{12}}=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}=-1+i,\sqrt{2}e^{i\frac{17\pi}{12}}\right\}$$

<u>Exercice 5-15</u> Sachant qu'elle admet une racine réelle, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^3 + (1-3i)z^2 - (6-i)z + 10i = 0.$$

<u>Solution</u>

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$a^3 + (1-2i)a^2 - 3(1+i)a - 2 + 2i = 0 \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 3a - 2 + i(-2a^2 - 3a + 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^3 + a^2 - 3a - 2 = 0 \\ -2a^2 - 3a + 2 = 0 \end{cases}$$

Les solutions de l'équation $-2a^2 - 3a + 2 = 0$ sont $a_1 = -2$ et $a_2 = \frac{1}{2}$

$$(-2)^3 + (-2)^2 - 3(-2) - 2 = -8 + 4 + 6 - 2 = 0$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 = \frac{1 + 2 - 12 - 16}{8} = -\frac{25}{8} \neq 0$$

Donc seul -2 est solution de (E)

2. On peut diviser $X^3 + (1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i$ par $X + 2$

$$\begin{array}{r|l}
X^3 + (1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i & X + 2 \\ \hline
X^3 + 2X^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & X^2 + (-1-2i)X - 1 + i \\ \hline
(-1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i & \\
(-1-2i)X^2 + 2(-1-2i)X \qquad\quad & \\ \hline
(-1+i)X - 2 + 2i & \\
(-1+i)X - 2 + 2i & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Par conséquent

$$X^3 + (1-2i)X^2 - 3(1+i)X - 2 + 2i = (X+2)(X^2 + (-1-2i)X - 1 + i)$$
$$= (X+2)(X^2 - (1+2i)X - 1 + i)$$

Les solutions de (E) sont donc

$$X^2 - (1+2i)X + i - 1 = 0$$
$$\Delta = (1+2i)^2 - 4(i-1) = 1 + 4i - 4 - 4i + 4 = 1$$
$$X_1 = \frac{1 + 2i - 1}{2} = i$$

$$X_2 = \frac{1 + 2i + 1}{2} = 1 + i$$

Exercice 5-16 Montrer que pour tout $z, w \in \mathbb{C}$:

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;
2. $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$.

Solution

$$|z+z'|^2 = (z+z')\left(\overline{z+z'}\right) = (z+z')\left(\overline{z}+\overline{z'}\right) = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} = |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2$$
$$= |z|^2 + 2\mathcal{R}e\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2\left|z\overline{z'}\right| + |z'|^2 = |z|^2 + 2|z|\left|\overline{z'}\right| + |z'|^2$$
$$= |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$$

Comme $|z+z'| \geq 0$ et $|z| + |z'| \geq 0$

On a $|z+z'| \leq |z| + |z'|$

Dans $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ on pose $Z = z + z'$ et $Z' = z'$ donc $z = Z - Z'$, cela donne

$$|Z| \leq |Z - Z'| + |Z'| \Leftrightarrow |Z| - |Z'| \leq |Z - Z'| \quad (1)$$

Puis on intervertit Z et Z' dans (1) on obtient $|Z'| - |Z| \leq |Z' - Z| = |-(Z - Z')| = |Z - Z'| \quad (2)$

Comme $\big||Z| - |Z'|\big| = |Z| - |Z'|$ si $|Z| \geq |Z'|$ et $\big||Z| - |Z'|\big| = -(|Z| - |Z'|) = |Z'| - |Z|$ si $|Z'| \geq |Z|$

(1) ou (2) donne le résultat.

Exercice 5-17 Soient $z, w \in \mathbb{C}$. Etablir la relation

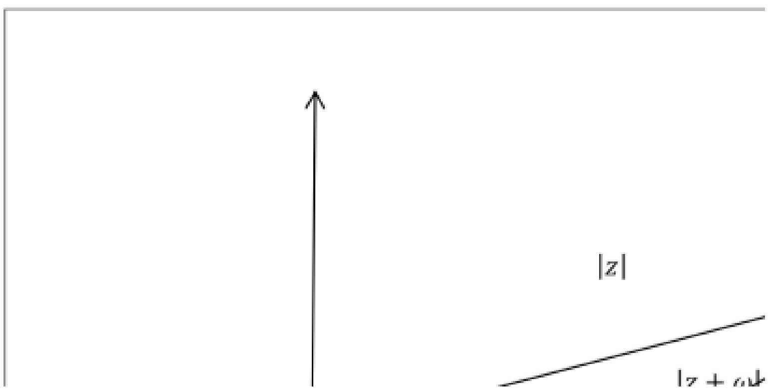
$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

et en donner une interprétation géométrique.

Solution

Correction exercice 22.

$$|z+\omega|^2 + |z-\omega|^2 = (z+\omega)(\overline{z}+\overline{\omega}) + (z-\omega)(\overline{z}-\overline{\omega})$$
$$= |z|^2 + z\overline{\omega} + \omega\overline{z} + |\omega|^2 + |z|^2 - z\overline{\omega} - \omega\overline{z} + |\omega|^2 = 2(|z|^2 + |\omega|^2)$$



C'est l'égalité du parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales

Exercice 5-18 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos(3x)$ (*resp.* $\sin(3x)$) en fonction de $\cos(x)$ (*resp.* $\sin(x)$).
2. Linéariser $\sin^4(x)$ puis $\cos(x)\sin^4(x)$.

Solution

1.

$$\cos(3x) + i\sin(3x) = e^{3ix} = \left(e^{ix}\right)^3$$

Avec la formule de Moivre

$$\begin{aligned}\cos(3x) + i\sin(3x) = \left(e^{ix}\right)^3 = (\cos(x) + i\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3\cos^2(x)\,(i\sin(x)) + 3\cos(x)\,(i\sin(x))^2 + (i\sin(x))^3 \\ &= \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) + i(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x))\end{aligned}$$

En égalisant les parties réelles et imaginaires

$$\begin{cases}\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\,(1-\cos^2(x)) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \\ \sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3(1-\sin^2(x))\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)\end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned}\sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{e^{4ix} - 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} - 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix}}{16} \\ &= \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4\left(e^{2ix} + 4e^{-2ix}\right) + 6}{16} = \frac{2\cos(4x) - 4\times 2\cos(2x) + 6}{16} \\ &= \frac{1}{8}\cos(4x) - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x)\sin^4(x) &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{4ix} + e^{-4ix} - 4e^{2ix} - 4e^{-2ix} + 6}{16} \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + e^{-3ix} - 4e^{3ix} - 4e^{-ix} + 6e^{ix} + e^{3ix} + e^{-5ix} - 4e^{ix} - 4e^{-3ix} + 6e^{-ix}\right) \\ &= \frac{1}{32}\left(e^{5ix} + e^{-5ix} - 3\left(e^{3ix} + e^{-3ix}\right) + 2\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right) \\ &= \frac{1}{32}(2\cos(5x) - 3\times\cos(3x) + 2\times 2\cos(x)) \\ &= \frac{1}{16}\cos(5x) - \frac{3}{32}\cos(3x) + \frac{1}{8}\cos(x)\end{aligned}$$

Exercice 5-19 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta), \qquad \text{et} \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Solution

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k\theta) + i \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k\theta) = \sum_{k=0}^{k=n} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) = \sum_{k=0}^{k=n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{k=n} \left(e^{i\theta}\right)^k$$

Grâce à la formule de Moivre

Par conséquent si $\theta \neq 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$

$$U_n + iV_n = \sum_{k=0}^{k=n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{i\theta}\right)^n}{1 - e^{i\theta}} = \frac{1 - e^{ni\theta}}{1 - e^{i\theta}}$$

Toujours grâce à la formule de Moivre.

Pour trouver U_n et V_n il faut trouver la partie réelle et la partie imaginaire de cette expression.

Première et pas terrible solution, mais correcte.

$$U_n + V_n = \frac{1 - e^{ni\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{(1 - e^{ni\theta})(1 - e^{-i\theta})}{(1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})}$$

Car le conjugué de $1 - e^{i\theta}$ est $1 - e^{-i\theta}$ et non pas, comme le pense de nombreux étudiants $1 + e^{i\theta}$

$$U_n + V_n = \frac{(1 - e^{ni\theta})(1 - e^{-i\theta})}{(1 - e^{i\theta})(1 - e^{-i\theta})} = \frac{1 - e^{-i\theta} - e^{ni\theta} + e^{(n-1)i\theta}}{1 - e^{i\theta} - e^{-i\theta} + e^{i\theta}e^{-i\theta}}$$

$$= \frac{1 - (\cos(\theta) - i\sin(\theta)) - (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + \left(\cos((n-1)\theta) + i\sin((n-1)\theta)\right)}{1 - \left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) + 1}$$

$$= \frac{1 - \cos(\theta) - \cos(n\theta) + \cos((n-1)\theta) + i\left(\sin(\theta) - \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)\right)}{1 - 2\cos(\theta) + 1}$$

$$= \frac{1 - \cos(\theta) - \cos(n\theta) + \cos((n-1)\theta)}{1 - 2\cos(\theta) + 1} + i\frac{\sin(\theta) - \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)}{1 - 2\cos(\theta) + 1}$$

Ce qui montre que

$$U_n = \frac{1 - \cos(\theta) - \cos(n\theta) + \cos((n-1)\theta)}{1 - 2\cos(\theta) + 1} \quad \text{et} \quad V_n = \frac{\sin(\theta) - \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)}{1 - 2\cos(\theta) + 1}$$

Deuxième solution, « la bonne » mais astucieuse pour des L1

$$U_n + V_n = \frac{1 - e^{ni\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\left(e^{-i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{i\frac{n+1}{2}\theta}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}} - e^{\frac{i\theta}{2}}\right)} = \frac{e^{i\frac{n+1}{2}\theta}}{e^{\frac{i\theta}{2}}} \times \frac{-\left(e^{i\frac{n+1}{2}\theta} - e^{-i\frac{n+1}{2}\theta}\right)}{-\left(e^{\frac{i\theta}{2}} - e^{-\frac{i\theta}{2}}\right)}$$

$$= e^{i\frac{n+1}{2}\theta}e^{-\frac{i\theta}{2}} \times \frac{-2\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = e^{i\frac{n\theta}{2}}\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \left(\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} + i\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Ce qui montre que

$$U_n = \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad V_n = \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

C'est mieux.

Et puis si $\theta = 2l\pi$ avec $l \in \mathbb{Z}$

$$U_n = \sum_{k=0}^{k=n} \cos(k2l\pi) = \sum_{k=0}^{k=n} 1 = n + 1, \quad V_n = \sum_{k=0}^{k=n} \sin(k2l\pi) = \sum_{k=0}^{k=n} 0 = 0$$

Exercice 5-20 Soit $c \in \mathbb{C}$ avec $|c| < 1$.

1. Montrer que $|z + c| \leq |1 + \bar{c}z|$ si et seulement si $|z| \leq 1$.
2. Soient $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ le disque unité et $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le circle unité.
   Montrer que l'application $f : D \longrightarrow D$

$$z \mapsto \frac{z+c}{1+\bar{c}z},$$

   est une bijection pour laquelle $f(C) = C$.

Solution

1.

$$|z+c| \leq |1+\bar{c}z| \Leftrightarrow |z+c|^2 \leq |1+\bar{c}z|^2 \Leftrightarrow (z+c)(\bar{z}+\bar{c}) \leq (1+\bar{c}z)(1+c\bar{z})$$
$$\Leftrightarrow |z|^2 + z\bar{c} + c\bar{z} + |c|^2 \leq 1 + c\bar{z} + \bar{c}z + |c|^2|z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 + |c|^2 \leq 1 + |c|^2|z|^2 \Leftrightarrow 0$$
$$\leq 1 - |c|^2 + |c|^2|z|^2 - |z|^2 \Leftrightarrow 1 - |c|^2 + (|c|^2 - 1)|z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - |c|^2)(1 - |z|^2)$$
$$\geq 0 \Leftrightarrow 1 - |z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq |z|^2 \Leftrightarrow 1 \geq |z|$$

2. Il faut montrer que pour tout $z' \in D$ il existe un unique $z \in D$ tel que

$$z' = \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$$

Mais il faut d'abord montrer que $f(D) \subset D$, comme $|z| \leq 1$ d'après 1., $|z+c| \leq |1+\bar{c}z|$, ce qui équivaut à

$$\frac{|z+c|}{|1+\bar{c}z|} = \left|\frac{z+c}{1+\bar{c}z}\right| = |f(z)| \leq 1$$

D'où $z \in D \Rightarrow f(z) \in D$

$$z' = \frac{z+c}{1+\bar{c}z} \Leftrightarrow z'(1+\bar{c}z) = z + c \Leftrightarrow z' + z'\bar{c}z = z + c \Leftrightarrow z' - c = z - z'\bar{c}z \Leftrightarrow z' - c = z(1 - z'\bar{c})$$
$$\Leftrightarrow \frac{z'-c}{1-z'\bar{c}} = z$$

Car $|z'\bar{c}| < 1$ et donc le dénominateur n'est pas nul

On a montré que pour tout $z' \in D$, il existe un unique z tel que $z' = f(z)$, il reste à montrer que $z \in D$. On pose $c' = -\bar{c}$, $|c'| < 1$

$$z = \frac{z'+c'}{1+z'\overline{c'}} \Rightarrow |z| = \left|\frac{z'+c'}{1+z'\overline{c'}}\right| \leq 1$$

D'après le 1.

Montrons que $f(C) = C$.

Soit $z \in C$, donc $|z| = 1$

$$|f(z)| = \left|\frac{z+c}{1+\bar{c}z}\right| = \left|\frac{z\left(1+\frac{c}{z}\right)}{1+\bar{c}z}\right| = \left|\frac{z\left(1+\frac{c\bar{z}}{|z|^2}\right)}{1+\bar{c}z}\right| = |z|\left|\frac{1+c\bar{z}}{1+\bar{c}z}\right| = \left|\frac{1+c\bar{z}}{1+\bar{c}z}\right| = \frac{|1+c\bar{z}|}{|1+\bar{c}z|} = \frac{\left|\overline{1+c\bar{z}}\right|}{|1+\bar{c}z|}$$
$$= \frac{|1+\bar{c}z|}{|1+\bar{c}z|} = 1$$

Cela montre que $f(C) \subset C$, il faut montrer que $C \subset f(C)$

Soit $z' \in C$, z' admet un unique antécédent z, on a $z' = f(z)$

$$z = \frac{z'-c}{1-z'\bar{c}} = \frac{z'+c'}{1+z'\overline{c'}}$$

Si on pose $c' = -\bar{c}$ et comme précédemment $|z| = 1$, ce qui montre que pour tout $z' \in C$, il existe $z \in C$ tel que $z' = f(z) \in f(C)$

Exercice 5-21 Donner les applications de $\mathbb{C}$ qui représentent des transformations du plan suivantes :

1. La translation du vecteur d'affixe $-2+i$.
2. La symétrie centrale du centre i.
3. La rotation d'angle $\pi/6$ et de centre 1 ;
4. L'homothétie de rapport 3 et de centre d'affixe $1+2i$.
5. La similitude de rapport 2 et d'angle $\pi/3$ et de centre $1+i$.

Solution

Solution :

1. $z \to z-2+i$
2. On peut voir la symétrie de centre O comme l'homothétie de centre i et de rapport -1. Une telle transformation est représentée par $f : z \to -z+b$ où $b \in \mathbb{C}$. Pour trouver b, on utilise que $f(i) = i$ et on trouve que $b = 2i$.
3. La transformation est représentée par une application de la forme : $f : z \to e^{i\pi/6}z+b$ où $b \in \mathbb{C}$. Pour trouver b, on utilise que $f(1) = 1$ et on trouve $b = -\sqrt(3)/2+1-i/2$.
4. La transformation est représentée par une application de la forme : $f : z \to 3z+b$ où $b \in \mathbb{C}$. Pour trouver b, on utilise que $f(1+2i) = 1$ et on trouve $b = -2-4i$.
5. La transformation est représentée par une application de la forme : $f : z \to 2e^{i\pi/3}z+b$ où $b \in \mathbb{C}$. En utilisant la même démarche que précédemment, on trouve que $b = \sqrt{3}(1-i)$.

Exercice 5-100 Soit $z = \dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$. Calculer z^4.

Solution

$$\begin{aligned} z^4 &= \left(\frac{3}{\sqrt{3}+i}\right)^4 = \frac{3^4}{3^2 + \binom{4}{1}\sqrt{3}^3 i + \binom{4}{2}\sqrt{3}^2 i^2 + \binom{4}{3}\sqrt{3}i^3 + i^4} = \frac{3^4}{9+12\sqrt{3}i-18-4\sqrt{3}i+1} = \frac{3^4}{-8+8\sqrt{3}i} \\ &= \frac{3^4}{8}\frac{1}{(-1+\sqrt{3}i)}\frac{(-1-\sqrt{3}i)}{(-1-\sqrt{3}i)} = \frac{3^4}{32}(-1-\sqrt{3}i). \end{aligned}$$

Exercice 5-101

1. Montrer que l'équation
$$z^4 - 3z^3 + (2-i)z^2 + 3z - 3 + i = 0$$
admet des racines réelles.
2. Trouver toutes les racines de l'équation.

Solution

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ une solution de (E)
$$a^4 - 3a^3 + (2-i)a^2 - 3 + i = 0 \Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 + i(-a^2+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0 \\ -a^2 + 1 = 0 \end{cases}$$
$a_1 = -1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 - 3 = 0$ et $a_2 = 1$ est solution de $a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0$, donc (E) admet deux solutions réelles, on peut mettre $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ en facteur.
2. Il existe $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que
$$X^4 - 3X^3 + (2-i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2-1)(aX^2 + bX + c)$$
On développe
$$(X^2-1)(aX^2+bX+c) = aX^4 + bX^3 + (c-a)X^2 - bX - c$$
Par conséquent
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c - a = 2 - i \\ -b = 3 \\ -c = -3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 3 - i \end{cases}$$
$$X^4 - 3X^3 + (2-i)X^2 + 3X - 3 + i = (X^2-1)(X^2 - 3X + 3 - i) = 0$$
Il reste à trouver les solutions de $X^2 - 3X + 3 - i = 0$
$$\Delta = 9 - 4(3-i) = -3 + 4i = 1 + 4i - 4 = (1+2i)^2$$
Les racines carrées du discriminant sont $\delta = \pm(1-2i)$
Il y a deux solutions
$$X_1 = \frac{3-(1+2i)}{2} = 1 - i$$
$$X_2 = \frac{3+1+2i}{2} = 2 + i$$
L'ensemble des solutions de (E) est
$$S = \{-1, 1, 1-i, 2+i\}$$

Exercice 5-102

1. Déterminer les quatre nombres complexes a, b, c, d différents de 1, qui sont solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$.
2. Montrer, pour tout nombre complexe z, l'égalité :
$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = (z-a)(z-b)(z-c)(z-d).$$

Solution

Les racines 5-ème de 1 sont données dans le corrigé de l'Exercice 5-11. Les valeurs des a, b, c, d sont les racines 5-ème de 1 différentes de 1.

Exercice 5-103 Soit $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1. Calculer z^2, puis déterminer le module et un argument de z^2, puis écrire z^2 sous forme trigonométrique.
2. En déduire le module et un argument de z.
3. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Solution

1.

$$z^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2+\sqrt{3} - (2-\sqrt{3}) + 2i\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$= 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 2\sqrt{3} + 2i\sqrt{2^2-3} = 2\sqrt{3}+2i$$
$$|z^2| = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{4\times 3+4} = \sqrt{16} = 4$$

Si on pose $\theta = \arg(z^2)$, $\cos(\theta) = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ donc $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

Autre méthode :

$z^2 = 2\sqrt{3} + 2i = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$, donc $\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

2.

On déduit de la première question que $|z^2| = 4$ donc $|z|^2 = 4$ et que $|z| = 2$. Et que les arguments possible de z sont $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \frac{\pi}{12} + k\pi$, $k \in \{0,1\}$, donc $z = 2e^{\frac{i\pi}{12}}$ ou $z = -2e^{\frac{i\pi}{12}}$. Mais $z = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$ entraine que le cosinus et le sinus de ses arguments sont positifs, donc $z = 2e^{\frac{i\pi}{12}}$.

3. D'après la question précédente

$$2e^{\frac{i\pi}{12}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \end{cases}$$

Exercice 5-104 Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z(1-z)$.

1. Déterminer les points fixes de f, c'est à dire résoudre $f(z) = z$.
2. En utilisant l'égalité $z(1-z) = (z - \frac{1}{2})(\frac{1}{2} - z) + \frac{1}{4}$, montrer que

$$\text{si } \left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \text{ alors } \left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}.$$

Solution

1.

$$f(z) = z \Leftrightarrow z(1-z) = z \Leftrightarrow z(1-z) - z = 0 \Leftrightarrow z - z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

2.

$$\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| = \left|z(1-z) - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-z\right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \left|-\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right| \leq \left|\left(z-\frac{1}{2}\right)^2\right| + \frac{1}{4}$$
$$\leq \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Exercice 5-105

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -2 + 2i$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -8i$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\frac{1}{2}z^6 + (1+3i)z^3 + 8 + 8i = 0$.

Solution

1. $X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}}$

   Donc

$$X^3 = 2\sqrt{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3i\pi}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^{\frac{3}{2}} \\ \arg(X^3) = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^{\frac{3}{2}} \\ 3\arg(X) = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2^{\frac{1}{2}} \\ \arg(X) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k$$

$$= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k \in k \in \{0,1,2\}$$

$$X_0 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 + i$$

$$X_1 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{\frac{11i\pi}{12}}$$

$$X_2 = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right)} = \sqrt{2}e^{\frac{19i\pi}{12}}$$

2.

$$X^3 = -8i = 2^3 e^{\frac{3i\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} |X^3| = 2^3 \\ \arg(X^3) = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X|^3 = 2^3 \\ 3\arg(X) = \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 2 \\ \arg(X) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k \in \{0,1,2\} \end{cases} \Leftrightarrow X_k = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}\right)}, \qquad k \in k \in \{0,1,2\}$$

$$X_0 = 2e^{\frac{i\pi}{2}} = 2i$$

$$X_1 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{\frac{7i\pi}{6}} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$X_2 = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right)} = 2e^{\frac{11i\pi}{6}} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} - i$$

3. On pose $X = Z^3$

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1+3i)Z^3 + 8 + 8i = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}X^2 + (1+3i)X + 8 + 8i = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$\Delta = (1+3i)^2 - 4 \times \frac{1}{2}(8+8i) = 1 + 6i - 9 - 16 - 16i = -24 - 10i$$

Les racines carrés de $-24 - 10i$:

$$(a+ib)^2 = -24 - 10i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = -24 - 10i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ 2ab = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} a^2 - b^2 = -24 \\ ab = -5 \end{cases}$$

On rajoute l'égalité des modules

$$a^2 + b^2 = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{576 + 100} = \sqrt{676} = 26 \quad L_3$$

En additionnant L_1 et L_3, on trouve $2a^2 = 2$ donc $a^2 = 1$, c'est-à-dire $a = \pm 1$.

En soustrayant L_1 à L_3, on trouve $2b^2 = 50$ donc $b^2 = 25$, c'est-à-dire $b = \pm 5$.

D'après L_2, a et b sont de signes différents donc les deux racines carrés de $-24 - 10i$ sont : $1 - 5i$ et $-1 + 5i$.

L'équation du second degré a pour racine :

$$X_1 = \frac{-(1+3i) - (1-5i)}{2 \times \frac{1}{2}} = -2 - 2i$$

Et

$$X_2 = \frac{-(1+3i) + (1-5i)}{2 \times \frac{1}{2}} = -2i$$

Les six racines de

20

$$\frac{1}{2}Z^6 + (1+3i)Z^3 + 8 + 8i = 0$$

Sont les six complexes trouvés en 1. et 2.

Exercice 5-106 Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\cos^2(x)\sin^3(x)$ en fonction de $\sin(x)$.
2. Linéariser $\cos^5(x)$.

<u>*Solution*</u>

$$\begin{aligned}
cos^2(x)sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= -\frac{1}{2^5 i}(e^{2ix}-e^{-2ix})^2(e^{ix}-e^{-ix}) \\
&= -\frac{1}{2^5 i}(e^{5ix}-e^{3ix}-2e^{ix}+2e^{-ix}+e^{-3ix}-e^{-5ix}) \\
&= -\frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i}-\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}-2\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) \\
&= = -\frac{1}{16}(sin(5x)-sin(3x)-2sin(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cos^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 \\
&= \frac{1}{2^5}\left(\binom{5}{0}e^{5ix}+\binom{5}{1}e^{4ix}e^{-ix}+\binom{5}{2}e^{3ix}e^{-2ix}+\binom{5}{3}e^{2ix}e^{-3ix}+\binom{5}{4}e^{ix}e^{-4ix}+\binom{5}{5}e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{1}{2^5}\left(e^{5ix}+5e^{3ix}+10e^{ix}+10e^{-ix}+5^{-3ix}+e^{-5ix}\right) \\
&= \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5ix}+e^{-5ix}}{2}+5\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+10\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{16}(cos(5x)+5cos(3x)+10cos(x)).
\end{aligned}$$

Exercice 5-107 Cochez les 2 affirmations que vous pensez vraies.

- ☐ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une homothétie.
- ☐ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une rotation dont le centre a pour affixe 1.
- ☐ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1-i)z$ est une rotation d'angle $-\pi/2$.
- ■ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une rotation d'angle $-\pi/2$.
- ■ L'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$ est une rotation dont le centre est l'origine du plan complexe.

Exercice 5-108

1. Déterminer les racines carrées de $-i$ dans $\mathbb{C}$, sous forme exponentielle $\rho e^{i\theta}$ et sous forme algébrique $a+ib$. (On rappelle que les racines carrées de $-i$ sont les nombres complexes z tels que $z^2=-i$).
2. Soit Δ le nombre complexe $\Delta=-50i$. Déterminer les racines carrées de Δ dans $\mathbb{C}$, sous forme algébrique.
3. Déterminer, sous forme algébrique, les deux solutions complexes de l'équation :
$$z^2+3(1-i)z+8i=0.$$
4. Soit A le point du plan complexe d'affixe $2+2i$. Soient B et C les points du plan complexe ayant pour affixes les solutions calculées à la question précédente. Représenter les trois points A, B, C dans le plan complexe. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
5. Soit M le milieu du segment $[B, C]$, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre M et de rayon $5\sqrt{2}/2$. Montrer que les trois points A, B, C appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.
6. Soit O l'origine du plan complexe. Calculer les affixes des images de A, B, C par la rotation de centre O et d'angle $\pi/4$.
7. Calculer les affixes des images de A, B, C par l'homothétie de centre M et de rapport -1.

Solution

1. Sous forme exponentielle, $-\mathrm{i}$ s'écrit $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/2+2\mathrm{i}k\pi}$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$. Les deux nombres dont le carré vaut $-\mathrm{i}$ sont $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}$ et $\mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/4}$. Sous forme algébrique :
$$\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\pi/4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\quad\text{et}\quad \mathrm{e}^{7\mathrm{i}\pi/4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

2. Le nombre Δ s'écrit $\Delta=\left(5\sqrt{2}\right)^2(-\mathrm{i})$. Ses racines carrées sont celles de $-\mathrm{i}$, multipliées par $5\sqrt{2}$, soit :
$$-5+5\mathrm{i}\quad\text{et}\quad 5-5\mathrm{i}\,.$$

3. Le discriminant de cette équation est :
$$\left(3(1-\mathrm{i})\right)^2-4(8\mathrm{i})=-18\mathrm{i}-32\mathrm{i}=-50\mathrm{i}=\Delta\,.$$
Les deux solutions sont :
$$\frac{1}{2}\Big(-3+3\mathrm{i}+(-5+5\mathrm{i})\Big)\quad\text{et}\quad\frac{1}{2}\Big(-3+3\mathrm{i}+(5-5\mathrm{i})\Big)\,,$$
soit :
$$-4+4\mathrm{i}\quad\text{et}\quad 1-\mathrm{i}$$

4. Figure 7. Soient z_A, z_B, z_C les affixes respectives des points A, B, C.
$$z_A=2+2\mathrm{i}\,,\quad z_B=1-\mathrm{i}\,,\quad z_C=-4+4\mathrm{i}\,.$$
Pour démontrer que le triangle ABC est rectangle en A, il suffit de démontrer que le nombre complexe $(z_B-z_A)/(z_C-z_A)$ a pour argument $\pi/2$ modulo π, c'est-à-dire que c'est un imaginaire pur.
$$\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\frac{-1-3\mathrm{i}}{-6+2\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{2}\,.$$

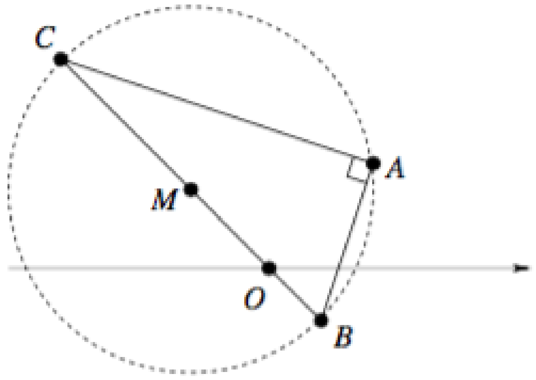


FIG. 7 – Triangle rectangle et cercle circonscrit

5. Le point M a pour affixe :

$$z_M = \frac{z_B + z_C}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\,.$$

Le cercle $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie :

$$|z - z_M| = \frac{5\sqrt{2}}{2}\,.$$

Pour montrer que A, B, C appartiennent au cercle $\mathcal{C}$, il suffit de vérifier que les trois modules $|z_A - z_M|$, $|z_B - z_M|$ et $|z_C - z_M|$ sont égaux à $5\sqrt{2}/2$. Or :

$$z_A - z_M = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i} \implies |z_A - z_M| = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\,,$$

$$z_B - z_M = \frac{5}{2} - \frac{5}{2}\mathrm{i} \implies |z_B - z_M| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\,,$$

$$z_C - z_M = -\frac{5}{2} + \frac{5}{2}\mathrm{i} \implies |z_C - z_M| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\,.$$

6. L'image du point d'affixe z par la rotation de centre O et d'angle $-\pi/4$ est le point d'affixe z' tel que $z' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}z$. Les images respectives de A, B et C sont les points d'affixes :

$$z'_A = 2\sqrt{2}\,,\quad z'_B = -\mathrm{i}\sqrt{2}\,,\quad z'_C = 4\mathrm{i}\sqrt{2}\,.$$

7. L'image du point d'affixe z par l'homothétie de centre M et de rapport -1 est le point d'affixe z' tel que $z' = z_M - (z - z_M)$. Comme M est le milieu du segment $[B, C]$, l'image de B est C et l'image de C est B. L'image de A est le point d'affixe :

$$z'_A = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} - \left(\frac{7}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right) = -5 + \mathrm{i}\,.$$