Exercices Corrigés
Corps des nombres complexes

Exercice 1 –
1) Qu'est ce que le conjugué d'un nombre complexe ?
2) Déterminer les nombres complexes z vérifiant : $(1+i)z-1+i=0$.
3) Préciser le complexe :
$$z=\frac{1-i}{2+i}+\frac{1-2i}{1+i} \quad .$$

Exercice 2 –
1) Déterminer les nombres complexes δ tels que : $\delta^2=2+2\sqrt{2}i$.
2) Puis, déterminer les nombres complexes z tels que : $z^2+\sqrt{2}z-\frac{\sqrt{2}}{2}i=0$.

Exercice 3 –
1) Déterminer les nombres complexes δ tels que : $\delta^2=2-4i$.
2) Puis, déterminer les nombres complexes z tels que : $z^2+\sqrt{2}z+i=0$.

Exercice 4 – Caractériser la similitude directe :
$$\mathbf{C}\longrightarrow\mathbf{C} \quad , \quad z\longmapsto f(z)=(-1-\sqrt{3}i)z+2-\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})i \quad .$$

Exercice 5 – Caractériser la similitude directe : $\mathbf{C}\to\mathbf{C} \quad , \quad z\mapsto f(z)=(3-3i)z+2$.

Exercice 6 – (Extrait de l'examen d'octobre 2010)
1) Déterminer les nombres complexes δ tels que : $\delta^2=-2i+6$.
2) Puis, déterminer les nombres complexes z tels que : $z^2+(1-i)z-\frac{3}{2}=0$.
3) En déduire une factorisation de $z^2+(1-i)z-\frac{3}{2}$.

Exercice 7 – (Extrait de l'examen d'octobre 2010)
On considère la similitude :
$$f:\mathbf{C}\to\mathbf{C} \ : \ z\mapsto f(z)=-(\sqrt{3}-i)z+i \quad .$$
1) Déterminer les points fixes de f.
2) Caractériser la similitude f (c.a.d. préciser sa décomposition en composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre).

Correction de l'exercice 1 :
1) Si a et b sont des réels, le conjugué du complexe $a+ib$ est $a-ib$. On prendra garde que si

a et b sont des complexes le conjugué de $a+ib$ est $\overline{a}-i\overline{b}$.
2) L'équation équivaut à : $(1+i)z = 1-i$. Il en résulte :

$$z = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{2} = \frac{1-2i-1}{2} = \frac{-2i}{2} = -i$$

3) On trouve :

$$z = \frac{(1-i)(2-i)}{5} + \frac{(1-2i)(1-i)}{2} = \frac{1-3i}{5} + \frac{-1-3i}{2} = \frac{2-6i-5-15i}{10} = \frac{-3-21i}{10} \quad .$$

Correction de l'exercice 2 :
1) Comme $2+2\sqrt{2}i \neq 0$, nous savons que l'équation $\delta^2 = 2+2\sqrt{2}i$ admet deux solutions. Cherchons δ sous la forme $\delta = x+iy$ avec x, y réels. Comme $\delta^2 = (x^2-y^2)+2xyi$, l'èquation $\delta^2 = 2+2\sqrt{2}i$ équivaut à :

$$x^2-y^2 = 2 \quad \text{et} \quad 2xy = 2\sqrt{2} \; .$$

D'autre part, on obtient l'égalité entre modules $|\delta|^2 = |2+2\sqrt{2}i|$. Il en résulte :

$$x^2+y^2 = \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \; .$$

Ainsi, (x, y) est solution de :

$$x^2-y^2 = 2 \quad , \quad x^2+y^2 = 2\sqrt{3} \quad \text{et} \quad xy > 0 \; .$$

D'où

$$x^2 = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3} \quad , \quad y^2 = \frac{2\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3}-1+ \quad , \quad xy > 0 \; .$$

D'où

$$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{3}} \quad , \quad y = \pm\sqrt{\sqrt{3}-1} \quad , \quad xy > 0 \; .$$

D'où, puisque x et y sont de même signe :

$$\delta = \sqrt{1+\sqrt{3}} + i\sqrt{\sqrt{3}-1} \quad \text{ou} \quad \delta = -\sqrt{1+\sqrt{3}} - i\sqrt{\sqrt{3}-1} \; .$$

Comme $2+2\sqrt{2}i \neq 0$, nous savons que l'équation $\delta^2 = 2+2\sqrt{2}i$ admet deux solutions. Les deux valeurs ci-dessus sont donc les deux solutions cherchées.

2) Considérons l'équation du deuxième degré à coefficients complexes :

$$z^2 + \sqrt{2}z - \frac{\sqrt{2}}{2}i = 0 \; .$$

Les racines de cette équation sont :

$$u_1 = \frac{-\sqrt{2}+\delta}{2} \quad , \quad u_2 = \frac{-\sqrt{2}-\delta}{2} \; ,$$

où δ est une solution de $\delta^2 = (\sqrt{2})^2 - 4(-\frac{\sqrt{2}}{2}i) = 2 + 2\sqrt{2}i$. D'aprés la question précédente, on obtient :

$$u_1 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{1+\sqrt{3}} + i\sqrt{\sqrt{3}-1}}{2} \quad , \quad u_2 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{1+\sqrt{3}} - i\sqrt{\sqrt{3}-1}}{2} \ .$$

Remarque sur la rédaction : Le principe de la rédaction du 1) est d'affirmer qu'il y a deux solutions en s'appuyant sur le cours. On montre ensuite que les solutions cherchées sont solutions de trois équations, que les solutions de ces trois équations sont $\pm(\sqrt{1+\sqrt{3}} + i\sqrt{\sqrt{3}-1})$. Ainsi, $\pm(\sqrt{1+\sqrt{5}} - i\sqrt{-1+\sqrt{5}})$ sont les complexes δ de carré $2+4i$.
Pour la rédaction du 2), il faut utiliser le cours en choisissant un complexe dont le carré est $2+2\sqrt{2}i$. On prendra $\sqrt{1+\sqrt{3}} + i\sqrt{\sqrt{3}-1}$ et on déroule la formule.

Correction de l'exercice 3 :

1) Comme $2+4i \neq 0$, nous savons que l'équation $\delta^2 = 2-4i$ admet deux solutions. Cherchons δ sous la forme $\delta = x+iy$ avec x, y réels. Comme $\delta^2 = (x^2-y^2) + 2xyi$, l'èquation $\delta^2 = 2-4i$ équivaut à :

$$x^2 - y^2 = 2 \quad \text{et} \quad 2xy = -4 \ .$$

D'autre part, on obtient l'égalité entre modules $|\delta|^2 = |2-4i|$. Il en résulte :

$$x^2 + y^2 = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \ .$$

Ainsi, (x, y) est solution de :

$$x^2 - y^2 = 2 \quad , \quad x^2 + y^2 = \sqrt{20} \quad \text{et} \quad xy < 0 \ .$$

D'où

$$x^2 = \frac{2+\sqrt{20}}{2} = 1+\sqrt{5} \quad , \quad y^2 = \frac{-2+\sqrt{20}}{2} = -1+\sqrt{5} \quad , \quad xy < 0 \ .$$

D'où

$$x = \pm\sqrt{1+\sqrt{5}} \quad , \quad y = \pm\sqrt{-1+\sqrt{5}} \quad , \quad xy < 0 \ .$$

D'où, puisque x et y sont de signe contraire :

$$\delta = \sqrt{1+\sqrt{5}} - i\sqrt{-1+\sqrt{5}} \quad \text{ou} \quad \delta = -\sqrt{1+\sqrt{5}} + i\sqrt{-1+\sqrt{5}} \ .$$

Comme $2-4i \neq 0$, nous savons que l'équation $\delta^2 = 2+4i$ admet deux solutions. Les deux valeurs ci-dessus sont donc les deux solutions cherchées.

2) Considérons l'équation du deuxième degré à coefficients complexes :

$$z^2 + \sqrt{2}z + i = 0 \ .$$

Les racines de cette équation sont :

$$u_1 = \frac{-\sqrt{2}+\delta}{2} \quad , \quad u_2 = \frac{-\sqrt{2}-\delta}{2} \ ,$$

où δ est une solution de $\delta^2 = (\sqrt{2})^2 - 4(i) = 2 - 4i$. D'aprés la question précédente, on obtient :

$$u_1 = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{1+\sqrt{5}} - i\sqrt{-1+\sqrt{5}}}{2} \quad , \quad u_2 = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{1+\sqrt{5}} + i\sqrt{-1+\sqrt{5}}}{2} .$$

Correction de l'exercice 4 :

Les points fixes de f sont les complexes z solutions de l'équation $f(z) = z$, soit :

$$z = (-1-\sqrt{3}i)z + 2 - \sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i \quad , \quad \text{soit :}$$

$$z + z + \sqrt{3}iz = 2 - \sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i \quad , \quad \text{soit :}$$

$$z(2+\sqrt{3}i) = 2 - \sqrt{3} + (2+\sqrt{3})i \quad , \quad \text{soit :}$$

$$z = \frac{2-\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})i}{2+\sqrt{3}i} = \frac{[2-\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})i](2-\sqrt{3}i)}{(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)} \quad , \quad \text{soit :}$$

$$z = \frac{7+7i}{7} = 1+i \quad .$$

La similitude f a un donc un unique point fixe :

$$z_0 = 1+i \quad .$$

2) Le module de $a = (-1-\sqrt{3}i)$ est $\sqrt{1+3} = 2$. Ainsi le complexe

$$\frac{a}{\mid a \mid} = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

est de module 1. On remarque que $-\frac{2\pi}{3}$ a pour cosinus $\frac{-1}{2}$ et pour sinus $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (visualiser avec un cercle trigonométrique). Il en résulte que l'argument de a est $-\frac{2\pi}{3}$. En résumé, a est le complexe de module 2 et d'argument $-\frac{2\pi}{3}$. Il résulte du cours que si M est l'affixe du complexe z et M' du complexe $f(z)$, le point M' se déduit de M par la composée de la rotation de centre z_0 d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et de l'homothétie de centre z_0 et de rapport 2.

Correction de l'exercice 5 :

Les points fixes de f sont les complexes z solutions de l'équation $f(z) = z$, soit :

$$z = (3-3i)z + 2 \quad , \quad \text{soit :}$$

$$z - 3z + 3iz = 2 \quad , \quad \text{soit :}$$

$$z(-2+3i) = 2 \quad , \quad \text{soit :}$$

$$z = \frac{2}{-2+3i} = \frac{2(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)} \quad , \quad \text{soit :}$$

$$z = \frac{-4-6i}{13} \quad .$$

La similitude f a un donc un unique point fixe :

$$z_0 = \frac{-4-6i}{13} \quad .$$

2) Le module de $a = 3 - 3i$ est $\mid 3 - 3i \mid = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$. Ainsi le complexe

$$\frac{a}{\mid a \mid} = \frac{3-3i}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

est de module 1. On remarque que $-\frac{\pi}{4}$ a pour cosinus $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et pour sinus $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Il en résulte que l'argument de a est $-\frac{\pi}{4}$. En résumé, a est le complexe de module $3\sqrt{2}$ et d'argument $-\frac{\pi}{4}$. Il résulte du cours que si M est l'affixe du complexe z et M' du complexe $f(z)$, le point M' se déduit de M par la composée de la rotation de centre z_0 d'angle $-\frac{\pi}{4}$ et de l'homothétie de centre z_0 et de rapport $3\sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 6 :

Nous savons que l'équation $\delta \in \mathbf{C}$ et $\delta^2 = -2i + 6$ a deux racines. Cherchons ses racines sous la forme $\delta = x + iy$ avec x et y réels. Nous remarquons que :

$$x^2 + y^2 = \mid \delta \mid^2 = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \quad .$$

Ainsi, les réels x et s sont solutions du système :

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & - & y^2 & = & 6 \\ x^2 & + & y^2 & = & 2\sqrt{10} \\ & & 2xy & = & -2 \quad . \end{array}$$

Nous trouvons :

$$\delta_1 = \sqrt{3+\sqrt{10}} - i\sqrt{\sqrt{10}-3} \quad \text{et} \quad \delta_1 = -\sqrt{3+\sqrt{10}} + i\sqrt{\sqrt{10}-3} \quad .$$

2) Le discriminant de l'équation est $\Delta = (1-i)^2 - 4(-\frac{3}{2}) = -2i + 6$. D'aprés la question précédente le carré de $\delta_1 = \sqrt{3+\sqrt{10}} - i\sqrt{\sqrt{10}-3}$ est égal à Δ. Les complexes z tels que : $z^2 + (1-i)z - \frac{3}{2} = 0$ sont donc :

$$z_1 = \frac{i - 1 + \delta_1}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{i - 1 - \delta_1}{2} \quad .$$

ou encore :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{10}} - 1 + i(1 - \sqrt{\sqrt{10}-3})}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-\sqrt{3+\sqrt{10}} - 1 + i(1 + \sqrt{\sqrt{10}-3})}{2} \quad .$$

3) Pour tout z complexe : $z^2 + (1-i)z - \frac{3}{2} = (z - z_1)(z - z_2)$.

Correction de l'exercice 7 :
L'application f a un unique point fixe :

$$z_0 = \frac{-1 + i(1+\sqrt{3})}{5 + 2\sqrt{3}} \quad .$$

Soit $a = -(\sqrt{3} - i)$ le module de a est 2, son argument est $\frac{5\pi}{6}$. Autrement dit :

$$a = -(\sqrt{3} - i) = 2e^{\frac{5i\pi}{6}} \quad .$$

Il s'en suit que f correspond à la transformation géométrique du plan obtenue en composant la rotation de centre z_0 et d'angle $\frac{5\pi}{6}$ avec l'homothétie de centre z_0 et de rapport 2.