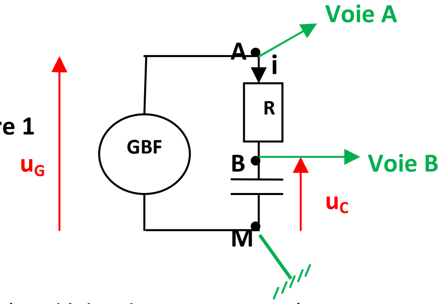
DM 12 : Etude d'un dipôle RC Correction

Un dipôle RC soumis à une tension créneau délivrée par un générateur basse fréquence est branché à un oscilloscope de façon à visualiser :

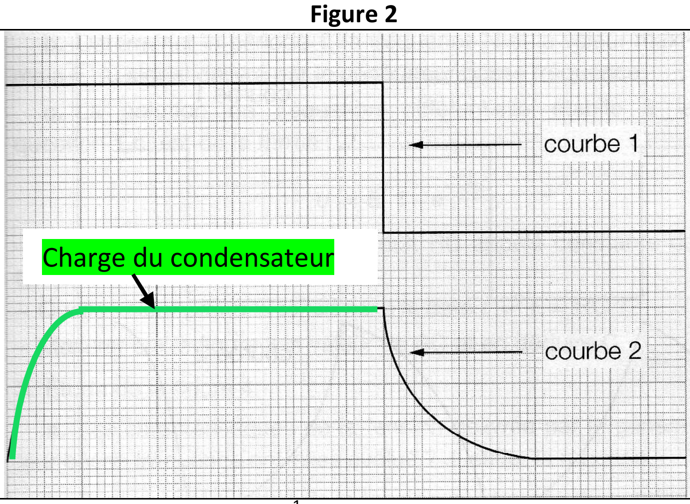
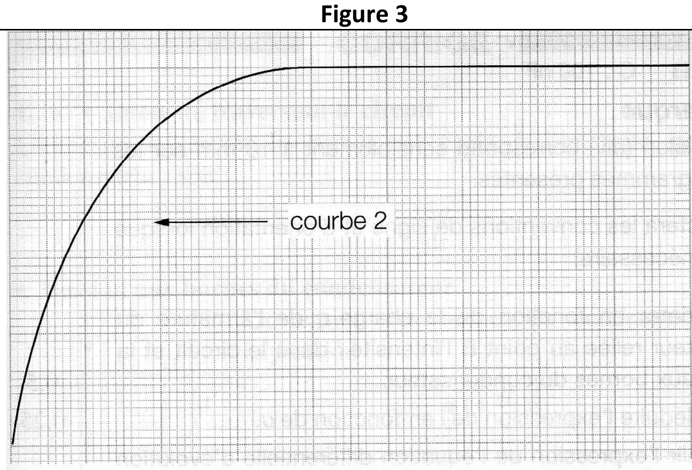
- La tension u_G aux bornes du GBF sur la voie A,
- La tension u_C aux bornes du condensateur sur la voie B.

Figure 1



1) Flécher les tensions u_G (convention générateur) et u_c (convention récepteur) sur la figure 1.
   Voir figure 1
2) Compléter le schéma de la figure 1 avec les branchements de l'oscilloscope (voie A, voie B, masse).
   Voir figure 1

Les oscillogrammes obtenus sont reproduits sur les figures 2,3 et 4.

Figure 2	Figure 3
	
Base de temps : 0,2 ms.div^{-1} Sensibilité voie A : 5 V.div^{-1} Sensibilité voie B : 5 V.div^{-1} R = 10kΩ ; C : valeur inconnue	Base de temps : 0,1 ms.div^{-1} Sensibilité voie B : 2 V.div^{-1} R = 10kΩ C : valeur inconnue

Remarque : sur les oscillogrammes, une division (div) correspond sensiblement à 10 mm.

3) Etablir l'équation différentielle qui régit l'évolution de la tension u_C au cours du temps lorsque le dipôle RC est soumis à une tension constante u_{AM} =E.
   Appliquons la loi d'additivité des tensions dans le circuit :
   $u_{AM} = u_{AB}+u_{BM}$ soit $u_G = u_C+ u_R$ ou encore $E = u_C +u_R$
   D'après la loi d'ohm : $u_R = R.i$ donc $E = u_C +R . i$
   D'après la relation charge-intensité : $i = \frac{dq}{dt}$ donc $E = u_C +R . \frac{dq}{dt}$
   D'après la relation charge-tension : $q = C. u_C$ donc $E = u_C +R . \frac{d(C.u_C)}{dt}$
   Or C est une constante donc $\boxed{E = u_C +R\, C. \frac{d.u_C}{dt} \quad (1)}$

4) Comment appelle-t-on le phénomène subi par le condensateur lors de cette phase ? Surligner en couleur la partie de la courbe représentant u_C correspondant à cette phase.
   Pendant cette phase, la tension aux bornes du condensateur passe de la valeur 0 à la valeur E : **il se charge.**

5) Etude de la figure 2 : le minimum de la courbe 1 vaut 0 V. La courbe 2 a été décalée pour faciliter la lecture.
a) Que représentent les courbes 1 et 2 ?
   La courbe 1 représente la tension u_G aux bornes du GBF (tension en créneau 0-E V) : voie A de l'oscillo

La courbe 2 représente la tension u_C aux bornes du condensateur : voie B de l'oscillo.

b) Déterminer la période T, la fréquence f et la valeur maximale E du signal délivré par le générateur basse fréquence.

Sur la courbe 1 de la figure 2, on peut voir qu'une demi-période de la tension créneaux correspond à 5 divisions : la période T correspond donc à 10 divisions.

T = nombre de divisions horizontales x vitesse de balayage

T = 10 x 0,2 = 2,0 ms

On en déduit la fréquence du signal :

$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{2{,}0.10^{-3}} = 5{,}0.10^2$ Hz

$u_{G(max)}$ = E = nombre de divisions verticales x sensibilité voie A

E = 2,0 x 5 = 10 V

6) Vérifier que la solution de l'équation différentielle établie à la question 3) est de la forme $u_c = U_0.(1- e^{-t/\tau})$, pour laquelle vous préciserez les expressions de U_0 et τ.

Dérivons u_C par rapport au temps :

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{d\left(U_0\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)}{dt}$$

$$\frac{du_C}{dt} = U_0 \cdot \frac{d(1-e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt}$$ car U_0 est constant

$$\frac{du_C}{dt} = U_0 \cdot \left(\frac{d(1)}{dt} - \frac{de^{-\frac{t}{\tau}}}{dt}\right)$$

$$\frac{du_C}{dt} = -U_0 \cdot \frac{de^{-\frac{t}{\tau}}}{dt}$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On remplace u_C et $\frac{du_C}{dt}$ par leurs expressions respectives dans l'équation différentielle (1).

$E = u_C + R\,C.\frac{d.u_C}{dt}$

E $= U_0.(1- e^{-\frac{t}{\tau}}) + R.C.\left(\frac{U_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

E $= U_0.\,e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{R.C}{\tau} - 1\right) + U_0$

Pour que cette équation soit vérifiée quel que soit t, il faut que :

$U_0.\,e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\frac{R.C}{\tau} - 1\right) = 0$ et $E = U_0$

$\frac{R.C}{\tau} - 1 = 0$

$\tau = R.C$

La solution de l'équation (1) est donc : $u_C = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

7) Comment appelle-t-on la grandeur τ ?

τ est appelé constante de temps du circuit RC : elle donne un ordre de grandeur du temps de charge du condensateur.

8) A l'aide d'une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité de τ dans le système international.

$[\tau] = [R.C]$

$[\tau] = [R].[C]$

Or $R = \frac{U}{I}$ donc $[R] = \frac{U}{I}$

Et $q = C.u_C$ soit $[C] = \frac{[q]}{U}$

Or $q = I.t$ donc $[C] = \frac{I.T}{U}$

Ainsi, $[\tau] = \frac{U}{I} \cdot \frac{I.T}{U} = T$

La constante τ est donc homogène à un temps : son unité est la seconde.

9) Exprimer la tension u_C à la date t = τ.

$u_C = E\left(1 - e^{-\frac{\tau}{RC}}\right)$

$u_C = E(1 - e^{-1})$ puisque τ = R.C

$u_C = 0,63E$, ce qui signifie qu'à la date t = τ, on a atteint 63% de la charge maximale du condensateur.

10) Déterminer par 2 méthodes que vous expliquerez avec précision, la valeur de τ à partir de la figure 3.

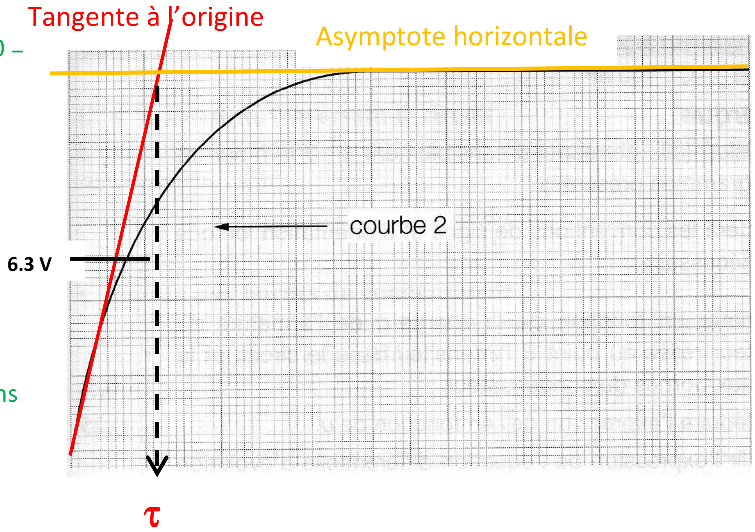
1ère méthode : méthode des 63 % de charge

On calcule la tension $u_c(\tau)$: $u_c(\tau) = 0,63E$ = 0,63 x10 – 6,3 V

On cherche alors sur la courbe de charge (figure 3) le temps au bout duquel u_c = 6,3 V

2ème méthode : on trace la tangente à l'origine à la courbe uc(t) et l'asymptote horizontale à cette courbe. Le point d'intersection de ces 2 droites a pour abscisse τ.

Par l'une ou l'autre des méthodes, on trouve τ = 0,11 ms



11) En déduire la valeur de la capacité du condensateur.

τ = R.C soit $C = \frac{\tau}{R}$

$C = \frac{0.11.10^{-3}}{10.10^{3}}$

C = $1,1.10^{-8}$ F = 11 nF

12) Calculer la valeur maximale de la charge de l'armature B du condensateur. Quelle sera alors la valeur de la charge de l'armature M ?

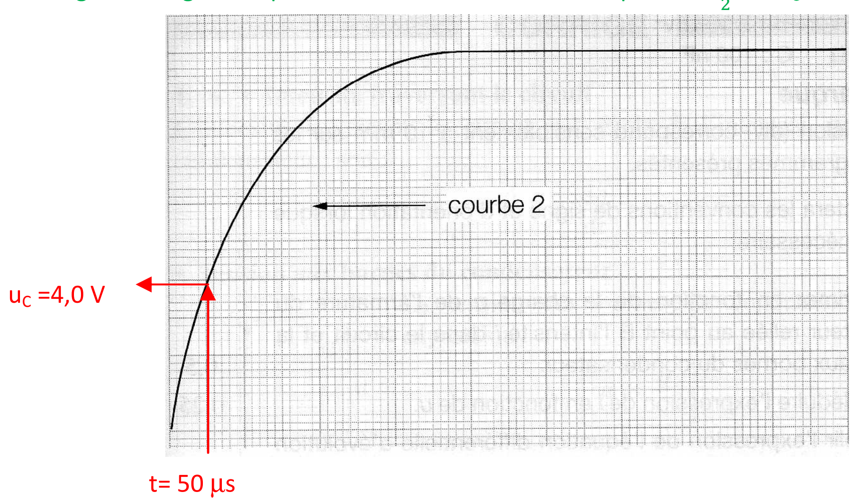
$q_{max} = C.u_{Cmax}$

$q_{max} = 1,1.10^{-8} \times 10$

$q_{max} = 1,1.10^{-7}$ C

13) En utilisant la figure 3, déterminer l'énergie emmagasinée par le condensateur :
- après 50 µs de charge,
- lorsqu'il est totalement chargé.

L'énergie emmagasinée par le condensateur est donnée par : $E = \frac{1}{2}.C.u_C^2$



- A t= 50 µs de charge, on peut lire sur la courbe de la figure 3 : u_C = 2,0 x2 = 4,0 V

$E = \frac{1}{2}.11.10^{-9}.4,0^2 = 8,8.10^{-8}$ J

Lorsqu'il est totalement chargé, la tension aux bornes du condensateur est $u_{C(max)}$ = E

$E_{(max)} = \frac{1}{2} . C . u_C^2$

$E_{(max)} = \frac{1}{2} . 11.10^{-9} . 10^2 = 5{,}5.10^{-7}$ J

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement du condensateur lorsque la tension aux bornes du GBF est nulle.

14) Etablir l'équation différentielle d'évolution de la tension u_C au cours du temps lorsque le dipôle RC est soumis à une tension nulle peut s'écrire $\boldsymbol{\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}.u_C = 0}$

Appliquons la loi d'additivité des tensions dans le circuit :

$u_{AM} = u_{AB} + u_{BM}$ soit $u_G = u_C + u_R$ ou encore $0 = u_C + u_R$

D'après la loi d'ohm : $u_R = R.i$ donc $0 = u_C + R . i$

D'après la relation charge-intensité : $i = \frac{dq}{dt}$ donc $0 = u_C + R . \frac{dq}{dt}$

D'après la relation charge-tension : $q = C. u_C$ donc $0 = u_C + R . \frac{d(C.u_C)}{dt}$

Or C est une constante donc $0 = u_C + R\, C. \frac{d.u_C}{dt}$

Soit en divisant les 2 termes par R.C : $\boxed{\boldsymbol{0 = \frac{1}{RC} . u_C + \frac{d.u_C}{dt} \quad (2)}}$

15) Vérifier que la solution de cette équation différentielle de la forme $u_c = A\, e^{-t/RC} + B$.
Déterminer les constantes A et B, sachant que le condensateur est initialement chargé sous une tension E.

Dérivons u_C par rapport au temps :

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{d(A.e^{-\frac{t}{\tau}} + B)}{dt}$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{d(A.e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} + \frac{dB}{dt}$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{d(A.e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} \text{ car B est une constante}$$

$$\frac{du_C}{dt} = \frac{A.d(e^{-\frac{t}{\tau}})}{dt} \text{ car B est une constante}$$

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{A}{\tau} . e^{-\frac{t}{\tau}}$$

On remplace u_C et $\frac{du_C}{dt}$ par leurs expressions respectives dans l'équation différentielle (1).

$$0 = \frac{1}{RC} . u_C + \frac{d.u_C}{dt}$$

$$0 = \frac{1}{RC}.(A . e^{-t/RC} + B) - \frac{A}{\tau} . e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\mathbf{0 = A} .e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{R.C} - \frac{1}{\tau} \right) + \frac{B}{R.C}$$

Pour que cette équation soit vérifiée quel que soit t, il faut que :

$A. e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{R.C} - \frac{1}{\tau} \right) = 0$ et $\frac{B}{R.C} = 0$

$\frac{1}{R.C} - \frac{1}{\tau} = 0$ et $B = 0$

$\tau = R.C$

Appliquons les conditions à l'origine pour déterminer la valeur de A :

A $t = 0$, $u_c(0) = A\, e^{-0/RC} + 0$ soit $u_c(0) = A$

Or $u_c(0) = E$

On en déduit donc $A = E$

La solution de l'équation (2) est donc : $u_C = E.e^{-\frac{t}{RC}}$

16) Réponse en courant du dipôle RC :

a) En utilisant la loi d'additivité des tensions, établir l'expression de l'intensité du courant i(t) lorsque le dipôle RC est soumis à une tension nulle.

D'après la loi d'additivité des tensions: $0 = u_C + u_R$

D'après la loi d'ohm : $u_R = R.i$ donc $0 = u_C + R.i$ soit $i = -\frac{u_C}{R}$

D'après la question précédente, on en déduit : $\mathbf{i = -\frac{E}{R}.\ e^{-\frac{t}{RC}}}$

b) Exprimer puis calculer l'intensité du courant aux dates t= 0, τ, 2τ, 3τ, 4τ, 5τ, 6τ.

$i(0) = -\frac{E}{R}.\ e^{-\frac{0}{RC}} = -\frac{E}{R}.\ e^{0} = -\frac{E}{R}$

$i(\tau) = -\frac{E}{R}.\ e^{-\frac{\tau}{RC}} = -\frac{E}{R}.\ e^{-1} = -0{,}37.\frac{E}{R}$

$i(2\tau) = -\frac{E}{R}.\ e^{-\frac{2\tau}{RC}} = -\frac{E}{R}.\ e^{-2} = -0{,}14.\frac{E}{R}$

$i(3\tau) = -\frac{E}{R}.\ e^{-\frac{3\tau}{RC}} = -\frac{E}{R}.\ e^{-3} = -0{,}050.\frac{E}{R}$

$i(4\tau) = -\frac{E}{R}.\ e^{-\frac{4\tau}{RC}} = -\frac{E}{R}.\ e^{-4} = -0{,}018.\frac{E}{R}$

$i(5\tau) = -\frac{E}{R}.\ e^{-\frac{5\tau}{RC}} = -\frac{E}{R}.\ e^{-5} = -6{,}7.10^{-3}.\frac{E}{R}$

$i(6\tau) = -\frac{E}{R}.\ e^{-\frac{5\tau}{RC}} = -\frac{E}{R}.\ e^{-5} = -2{,}5.10^{-3}.\frac{E}{R}$

$i(0) = -\frac{10}{10.10^3} = -1{,}0.10^{-3}$ A = -1,0 mA

$i(\tau) = -0{,}37.\frac{10}{10.10^3} = -3{,}7.10^{-4}$ A = -0,37 mA

$i(2\tau) = -0{,}14.\frac{10}{10.10^3} = -1{,}4.10^{-4}$ A = -0,14 mA

$i(3\tau) = -0{,}050.\frac{10}{10.10^3} = -5{,}0.10^{-5}$ A = -0,050 mA

$i(4\tau) = -0{,}018.\frac{10}{10.10^3} = -1{,}8.10^{-5}$ A = -0,018 mA

$i(5\tau) = --6{,}7.10^{-3}.\frac{10}{10.10^3} = -6{,}7.10^{-6}$ A = -0,0067 µA

$i(6\tau) = --2{,}5.10^{-3}.\frac{10}{10.10^3} = -2{,}5.10^{-6}$ A = -0,0025 µA

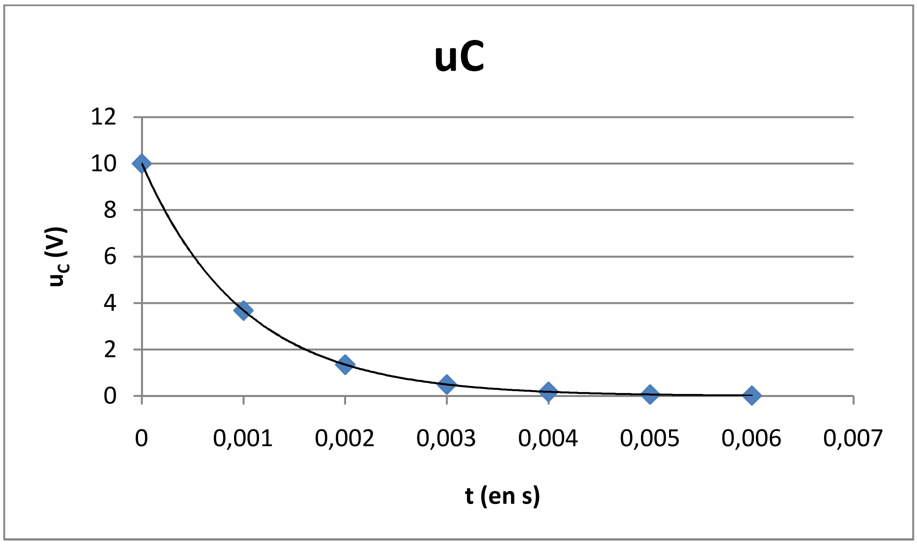
c) Quel est le signe de i ? Qu'est-ce que cela signifie ?

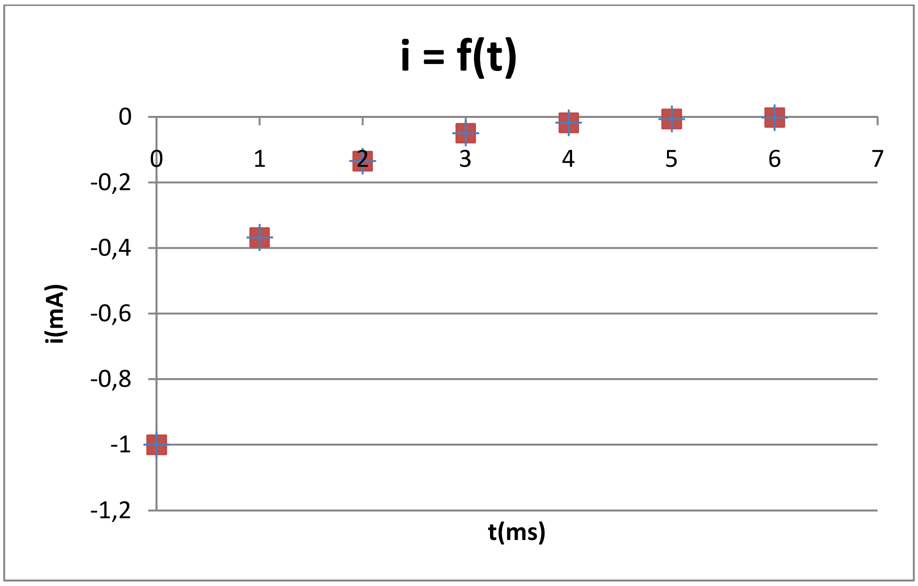
i <0, ce qui signifie que lors de la décharge du condensateur, le courant circule dans le sens opposé à celui noté sur la figure 1, soit de B vers A.

d) Tracer les graphes u_C = f(t) et i= f(t) sur papier millimétré.

Echelles : 1 cm pour 0,1 ms en abscisse

1 cm pour 2 V pour u_C ; 1 cm pour 0,2 mA pour i en ordonnée

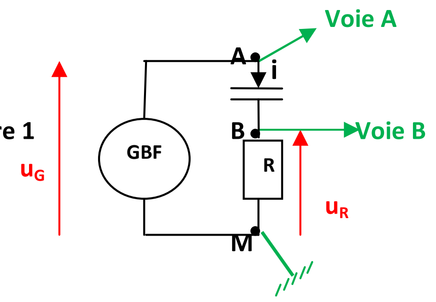




e) Expliquer quelles modifications il faudrait apporter au montage (Figure 1) pour pouvoir visualiser l'allure de l'intensité du courant dans le circuit.

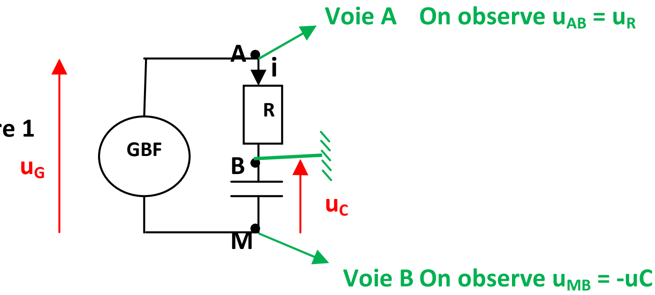
L'oscilloscope ne permet pas de visualiser directement l'allure de l'intensité (il ne permet d'observer que des tensions).
On cherchera donc à visualiser la tension aux bornes de la résistance puisque qu'elle est proportionnelle à l'intensité (d'après la loi d'ohm, $u_R = R.i$)
Pour ceci, on peut donc inverser dans le circuit la résistance et le condensateur, ce qui permettra de visualiser simultanément u_G (voie A)et u_R (voie B).

Figure 1



Si le GBF possède une masse flottante, on peut conserver le montage initial et simplement modifier les branchements de l'oscillo comme ci-dessous :

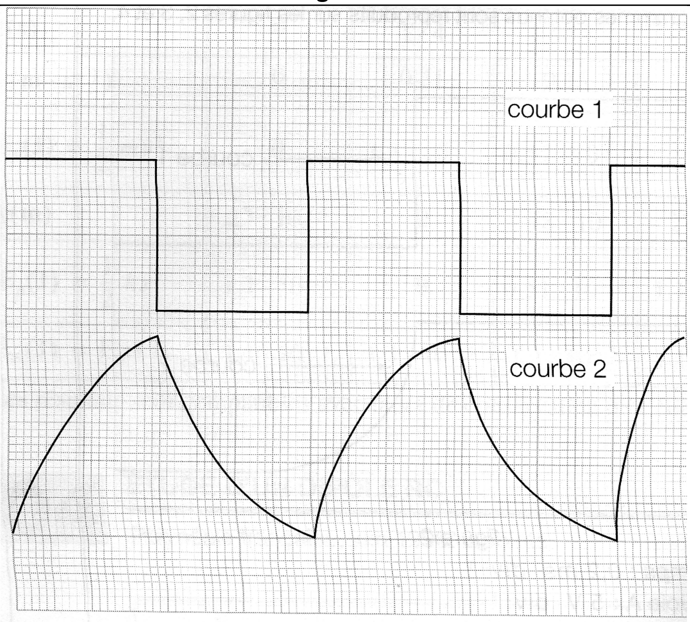
Figure 1



Dans ce cas, on visualisera simultanément u_R sur la voie A et $-u_C$ sur la voie B.Dans ce cas, on ne peut plus observer la tension aux bornes du GBF.
Remarque : il est alors possible d'observer u_C en activant la touche –CH2 de l'oscillo.

1) On refait le montage de la figure 1 mais avec un autre condensateur. Les oscillogrammes obtenus sont représentés sur la figure 4.

Figure 4



Base de temps : 0,5 $ms.div^{-1}$
Sensibilité voie A : 5 $V.div^{-1}$
Sensibilité voie B : 2 $V.div^{-1}$
R = 10kΩ ; C = 100 nF

a) Les caractéristiques de la tension délivrée par le GBF ont-elles évolué ? Justifier la réponse.
Pour la tension délivrée par le GBF(courbe 1), on a :
- une période T = 4,0 x 0,5 = 2,0 ms

- une tension maximale E = 2 x 5 = 10 V

On en déduit donc que les caractéristiques de la tension délivrée par le GBF n'ont pas changé.

b) Expliquer la différence concernant l'évolution de la tension aux bornes du condensateur par rapport à l'expérience précédente. Comment a évolué la constante de temps ?

Les modifications concernant la tension uC sont dues au changement de la valeur de la capacité du condensateur. En effet, la capacité a été multipliée par 10, il en est donc de même pour la constante de temps τ = RC : Le condensateur met donc 10 fois plus de temps pour se charger et se décharger.

Ainsi, il n'a pas fini de se charger que la tension délivrée par le GBF chute à 0. On n'atteindra donc jamais le régime permanent : le condensateur n'a pas le temps de se charger totalement.

On observe sur la courbe 2 que la tension maximale du condensateur est : $u_{C(max)}$ = 2,7 x 2 =5,4 V < E

c) A partir de l'expression de uC(t) au cours de la charge du condensateur donnée en 5) c), exprimer la durée t au bout de laquelle la tension aux bornes du condensateur a atteint 99% de la tension maximale.

On considère alors que le condensateur a sa charge maximale.

$u_C = E.(1 - e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}})$

$\frac{u_C}{E} = 1 - e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}}$

$1 - \frac{u_C}{E} = e^{-\frac{t}{\mathrm{RC}}}$

$\ln(1 - \frac{u_C}{E}) = -\frac{t}{\mathrm{RC}}$

$t = -\mathrm{RC} \times \ln(1 - \frac{u_C}{E})$

On cherche le temps au bout duquel u_C = 0,99 E

Soit $t = -\tau \times \ln(1 - \frac{0,99\,E}{E})$

$t = 4,6\,\tau$

$t = 4,6 \times 10.10^{3} \times 100.10^{-9} = 4,6 .10^{-3}$ s = 4,6 ms

d) Quelle devrait être la période minimale du signal délivré par le GBF pour que le condensateur puisse atteindre sa charge maximale ?

Pour que le condensateur ait sa charge maximale, il faut que la demi-période de la tension créneaux délivrée par le GBF soit supérieur à la durée nécessaire pour que u_C = 0,99 E

Soit $\frac{T}{2} > 4,6\,\tau$

$T > 9,2\,\tau$

$T > 9,2 \times 10.10^{3} \times 100.10^{-9}$

$T > 9,2 .10^{-3}$ s = 9,2 ms