

*Veillez rendre ce sujet avec votre copie.*

*Le formulaire et la calculatrice sont autorisés. Vous êtes invités à répondre directement sur l'énoncé mais si vous avez besoin de place supplémentaire, vous pouvez détailler certaines questions sur la copie que vous rendrez avec l'énoncé. Le soin de la rédaction entrera en compte dans la notation mais dans les questions où les détails ne sont pas explicitement demandés, un résultat correct, donné sans détails de calcul sera accepté.*

**Question 1.** On considère un groupe de 8 étudiants. Combien existe-t-il de sous-groupes contenant un nombre impair d'étudiants ?

*On demande de justifier la réponse.*

$$\binom{8}{1} + \binom{8}{3} + \binom{8}{5} + \binom{8}{7} = 8 + 56 + 56 + 8 = 128$$

**Exercice 2. Choix d'un jury à la cour d'assise.** Pour nommer 40 jurés et 12 jurés suppléants à la cour d'assise de Dijon, un tirage au sort est effectué parmi les 150 000 électeurs de la Côte d'Or. Le département compte 80 000 femmes sur les listes électorales.

1. Expliquer pourquoi le choix des 52 jurés suit un modèle de tirage sans remise. Justifier que l'on puisse se ramener aux calculs d'un modèle de tirage avec remise.

Le même électeur ne peut être choisi deux fois comme juré dans la même cours lors d'une même session de nominations.

Le nombre d'électeurs est plus de 10 fois supérieur au nombre de jurés, on peut donc approcher le modèle de tirage sans remise par un modèle de tirage avec remise.

2. On note  $S$  le nombre de femmes parmi les 52 jurés. Quelle est la loi de probabilité du nombre de femmes et quel est le nombre moyen de femmes dans un tel groupe ?

Loi hypergéométrique remplacée par une binomiale:

$$S \sim \mathcal{B}(52; \frac{8}{15}) \approx \mathcal{B}(52; 0, 5333)$$

$$m(S) = 52 \times \frac{8}{15} = 27, 73$$

3. Justifier que l'on peut approcher  $S$  par la loi normale  $X \sim \mathcal{N}(27, 73; 3, 6)$ .

la taille de l'éch.  $n$  satisfait :  $n \geq 30$ ,  $np = 27, 73 > 5$  et  $n(1 - p) = 24, 27 > 5$   
On peut approcher  $\mathcal{B}(n; p)$  par  $\mathcal{N}(np; \sqrt{np(1 - p)})$   
avec  $np = 27, 73$  et  $\sqrt{np(1 - p)} = 3, 6$ .

4. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 30 femmes parmi les 52 jurés ?

*On demande d'effectuer une correction de continuité et de justifier brièvement la réponse.*

$$\mathbb{P}[S \geq 30] \approx \mathbb{P}[X \geq 29,5] = 1 - \mathbb{P}[Z < \frac{30-27,73}{3,6}] = 1 - F(0,49) = 1 - 0,6879 = 0,3121$$

5. Parmi les 52 jurés, 32 habitent Dijon Métropole. Donnez une estimation de la proportion d'électeurs de Côte d'Or habitant Dijon Métropole (on choisira une confiance de 96%).

*Répondre en calculant un intervalle de confiance.*

*Justifier soigneusement les calculs.*

On calcule la proportion de l'expérience :  $p_e = 0,6154$ .

On remarque que  $n \geq 30$ ,  $np_e > 5$  et  $n(1 - p_e) > 5$ . On utilise la loi normale pour déterminer l'intervalle de confiance .

$$a_{0,04} = z_{0,04} \sqrt{\frac{p_e(1-p_e)}{n}} = 2,054 \times \sqrt{\frac{0,6154 \times 0,3846}{52}} = 0,1386$$

$$I = [0,4768; 0,7540].$$

**Exercice 3. Temps de réaction à un stimulus.** Un psychologue a fait passer à un groupe de dix participants choisis au hasard deux épreuves au cours desquelles ceux-ci devaient déterminer le plus rapidement possible si deux stimuli successifs étaient identiques ou non. La première portait sur des stimuli visuels la seconde sur des stimuli auditifs. Dans les deux cas, le psychologue mesure les temps de réaction en millisecondes.

Nunéro du Participant	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
Stimulus Visuel (ms)	26	27	28	29	28	25	27	27	27	26		
Stimulus Auditif (ms)	30	31	32	33	34	32	33	32	32	31		

Pour la suite, on note  $X$  le temps de réaction associé aux stimuli visuels et  $Y$  le temps de réaction associé aux stimuli auditifs.

1. Déterminer la moyenne et l'écart-type des temps de réaction  $X$  et  $Y$ .

$$m(X) = 27$$

$$s(X) = 1,095$$

$$m(Y) = 32$$

$$s(Y) = 1,095$$

2. Le psychologue pense que les individus rapides dans une épreuve devraient aussi l'être dans l'autre. Calculer le coefficient de corrélation linéaire et conclure.

Calcul du coefficient de corrélation linéaire :  $m(XY) = 864,7$ ,  $m(X)m(Y) = 864$ ,  
 $\text{cov}(X, Y) = 0,7$ ,  $r(X, Y) = 0,584$ .

Interprétation : Le coefficient est entre 0,5 et 0,7, il y a donc un lien entre les deux variables qui n'est cependant pas très fort. Comme le coefficient est positif, plus le temps de réponse à l'une des épreuves est rapide plus il l'est aussi à l'autre épreuve. Le psychologue semble avoir raison.

3. Donner une estimation du temps de réaction moyen à l'épreuve auditive avec une confiance de 95% (par hypothèse, le temps de réaction d'un individu choisi au hasard suit une loi normale). *Répondre en calculant un intervalle de confiance.*

estimation d'une moyenne sur un petit échantillon avec une hypothèse de loi normale sur la variable d'étude : utilisation d'une loi de Student à 9 d.d.l.

$$t_{0,05} = 2,2622, a_{0,05} = 2,2622 \times \frac{1,095}{\sqrt{9}} \approx 0,83$$

$$I_{0,05}(\mu) = [32 - 0,83; 32 + 0,83] = [31,17; 32,83].$$

4. Quelle est le nombre minimal de participants qu'il faut choisir pour obtenir une estimation du temps de réaction moyen à l'épreuve auditive d'une précision inférieure à 0,1 ms ? (avec une confiance de 95%)

$$n > (1,96)^2 \times \frac{1,095^2}{0,1^2} = 460,6$$

Réponse:  $n \geq 461$

**Exercice 4. Mobile ou ordinateur.** Une étude a été menée pour vérifier si les ordinateurs fixes et portables sont abandonnés au profit des supports mobiles. Pour cela on s'intéresse au temps passé par un adulte sur son smartphone ou sa tablette (hors appels vocaux). Il s'avère que le temps journalier passé sur son smartphone ou sa tablette, noté  $X$ , pour un individu choisi au hasard dans la population adulte française suit une loi normale de moyenne  $\mu_X = 114$  minutes et d'écart-type  $\sigma_X = 30$ .

1. Quelle est la probabilité qu'un adulte choisi au hasard passe moins de 2 heures et 20 minutes par jour sur son smartphone ?

*Pour cette question, il est demandé d'utiliser la table de la loi normale du formulaire et éventuellement une interpolation linéaire. Les calculs doivent être détaillés.*

$$\mathbb{P}[X \leq 140] = \mathbb{P}\left[Z \leq \frac{140-114}{30}\right] = F(0,867)$$

$$F(0,867) = F(0,86) + \frac{F(0,87) - F(0,86)}{0,87 - 0,86} (0,867 - 0,86)$$

$$F(0,867) = 0,8051 + \frac{0,8078 - 0,8051}{0,01} (0,867 - 0,86) = 0,8070.$$

2. On choisit un échantillon de 250 adultes dans la population française. Dans ce groupe, quel est l'effectif théorique des adultes qui passent moins d'une heure par jour sur leur smartphone ?

$$\mathbb{P}[X \leq 60] = \mathbb{P}[Z \leq -1,8] = 1 - F(1,8) = 1 - 0,9641 = 0,0359$$

$$n_{th} = 250 \times 0,0359 = 8,975$$

Chaque personne de cet échantillon de taille 250 indique le temps (en minutes) qu'elle passe journalièrement sur internet en utilisant un "non mobile" c'est-à-dire un ordinateur. Les réponses sont détaillées sur le tableau ci-dessous.

Temps (min)	[0; 30[	[30; 60[	[60; 90[	[90; 120[	[120; 150[	[180; 210[	[210; 240[
Effectif	25	69	58	51	32	10	5
centre	15	45	75	105	135	195	225

3. Calculer la moyenne et l'écart-type du temps journalier sur internet en utilisant un "non mobile".  
*Justifier votre réponse en présentant le calcul effectué.*

$$m = 82,32 \quad \text{et} \quad s = 47,17$$

4. Quelle est la proportion d'adultes au sein de l'échantillon qui passe moins de 2 heures par jour sur internet en utilisant un "non mobile" ?

$$\frac{51 + 58 + 69 + 25}{250} = 0,812$$

5. Calculer la médiane du temps journalier passé sur internet en utilisant un "non mobile".

$$60 + (90 - 60) \times \frac{0,5 - 94/250}{152/250 - 94/250} = 76,03$$

6. A partir des valeurs observées sur l'échantillon, donner une estimation du temps journalier moyen passé sur internet en utilisant un "non mobile" et donner la précision (ou marge) de l'estimation.

*On déterminera par un court calcul l'intervalle de confiance à 98%.*

Estimation de moyenne avec un grand échantillon : utilisation de la loi normale.

$$z_{0,02} = 2,326 \text{ et } a_{0,02} = \frac{2,326 \times 47,17}{\sqrt{249}} = 6,95.$$

$$I_{\alpha} = [75,37; 89,27]$$

$$\text{marge} = 6,95$$

7. Peut-on dire qu'un adulte passe en moyenne moins de temps sur internet en utilisant un non-mobile qu'en utilisant un smartphone ? *Justifier votre réponse.*

Le temps moyen de la variable  $X$ , temps moyen passé sur un smartphone, est 114 minutes, il ne se trouve pas dans l'intervalle de confiance à 98% de l'estimation du temps moyen passé sur un "non mobile" et il est supérieur à toute valeur appartenant dans l'intervalle. On peut donc assurer avec une confiance de 98% que le temps moyen passé sur un mobile est supérieur que celui sur un "non mobile".